1η Ο.Σ.Σ. - Θ.Ε. ΠΛΗ 12

Επ. Καθ. Νικόλαος Καραμπετάκης
Τμήμα Μαθηματικών, ΑΠΘ

ΘΕΜΑΤΑ ΣΥΖΗΤΗΣΗΣ

•Αυτοπαρουσίαση

•Χωρισμός σε ομάδες των 2 ατόμων και έπειτα από συζήτηση μεταξύ τους για 10 λεπτά, γίνεται παρουσίαση του ενός από τον άλλο. Διάρκεια 30 λεπτά. Ταυτόχρονα περνάει το φυλλάδιο με τα στοιχεία των φοιτητών από όλους τους φοιτητές.

•Ερωτηματολόγιο – Χωρισμός σε ομάδες των 4-5 ατόμων και συμπλήρωση ερωτηματολογίου. Στη συνέχεια ανάπτυξη των θεμάτων προφορικά ανά ερώτημα/ομάδα. (20+15 λεπτά)

•Λειτουργία των ΟΣ.
•Διαδικασία εκπόνησης & αξιολόγησης της πρώτης εργασίας
•Διαδικασία των τελικών εξετάσεων.

•Παρουσίαση διαφανειών.

ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ

1. Ποια είναι τα βήματα που κάνατε για να ξεπεράσετε τυχόν εμπόδια που προέκυψαν στην διαδικασία μελέτης σας ;

(**Απαντήσεις :** Επιπλέον βιβλιογραφία, περισσότερες ώρες μελέτης, φροντιστήριο, επικοινωνία με το μέλος ΣΕΠ, λιγότερη επαγγελματική απασχόληση)

2. Έχετε κάποιες απορίες σχετικά με το πρόγραμμα σπουδών ;

(**Απαντήσεις :** Θεματικές ενότητες και κατευθύνσεις, αναγνώριση του πτυχίου, δεν έχει αποσταλεί ο νέος οδηγός σπουδών του Τμήματος)

3. Ποιες είναι οι 3 βασικότερες δυσκολίες που αντιμετωπίζετε στην ΘΕ ΠΛΗ12 ;

(**Απάντηση :** Διανύσματα, ορίζουσες, αντίστροφοι, έλλειψη πολλών λυμένων ασκήσεων, δεν υπάρχουν υποδείξεις για τις λύσεις στο τέλος κάθε κεφαλαίου)

4. Διατύπωση αποριών σχετικά με τα 2 πρώτα κεφάλαια.

(**Απάντηση :** Αν θα υπάρχουν οι λύσεις των ασκήσεων κάθε κεφαλαίο, συζητήθηκαν στη διάρκεια της συνάντησης)

6. Έχετε κάποια προβλήματα όσον αφορά την γραπτή / τηλεφωνική / email επικοινωνία μαζί μου ;

(**Απάντηση :** Κανένα πρόβλημα, Υπάρχει περίπτωση να αποκτήσουν οι φοιτητές username και password για πρόσβαση στο Internet από το ΕΑΠ)

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

ΘΕΩΡΙΑ

- Gilbert Strang, 1999, Γραμμική άλγεβρα και εφαρμογές, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.
- Lipschutz-Lipson, 2000, Γραμμική άλγεβρα, Εκδόσεις Τζιόλα.
- Συμεών Μποζαμπαλίδης, Ασκήσεις γραμμικής άλγεβρας, (μέρος α (κεφ.4), μέρος β (για τα υπόλοιπα).

ή σχολικά βοηθήματα όπως για παράδειγμα :

- Π. Κανδύλας, Μαθηματικά Γ΄Λυκείου, Θετικής Κατεύθυνσης, 1ο τεύχος (Πίνακες – Γραμμικά Συστήματα – Μιγαδικοί Αριθμοί), Εκδόσεις Κανδύλας, Θεσσαλονίκη
- Θ. Ξένος, Μαθηματικά Β' Λυκείου Κατεύθυνσης (*Αναλυτική Γεωμετρία*, Θεωρία Αριθμών, Μιγαδικοί Αριθμοί), Εκδόσεις Ζήτη.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

- Chris Rorres and Howard Anton, 1979, Applications of linear algebra, John Willey & Sons.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΠΙΝΑΚΩΝ – ΘΕΩΡΙΑ ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

Σύνδεση πτήσεων μεταξύ πόλεων

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΠΙΝΑΚΩΝ – ΘΕΩΡΙΑ ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

Σύνολο πτήσεων για μετάβαση από μια πόλη σε άλλη μέσω δύο πτήσεων

$$a_{ij}^2 = a_{i1}a_{1j} + a_{i2}a_{2j} + a_{i3}a_{3j} + a_{i4}a_{4j} + a_{i5}a_{5j} + a_{i6}a_{6j} \Rightarrow A^2 = \left[a_{ij}^2\right]$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 6 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 6 & 1 & 1 \\ 5 & 6 & 6 & 2 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

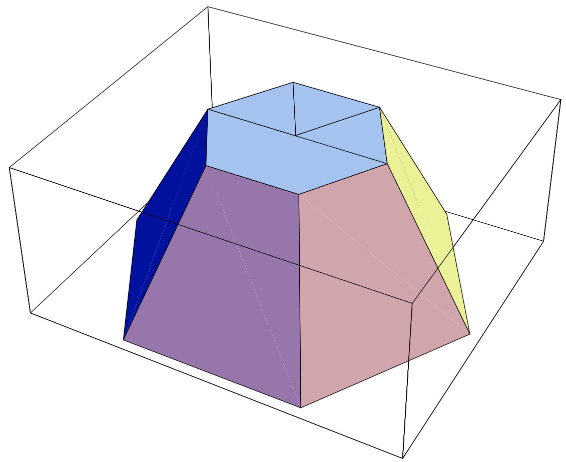
ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΠΙΝΑΚΩΝ – ΘΕΩΡΙΑ ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

Σύνολο πτήσεων για μετάβαση από μια πόλη σε άλλη μέσω 1-2-3 πτήσεων

$$M = A + A^2 + A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 6 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 5 & 8 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 4 & 8 & 2 & 2 \\ 6 & 8 & 8 & 7 & 6 & 6 \\ 1 & 2 & 2 & 6 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 6 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΠΙΝΑΚΩΝ – ΓΡΑΦΙΚΑ Η/Υ

Πίνακας σημείων



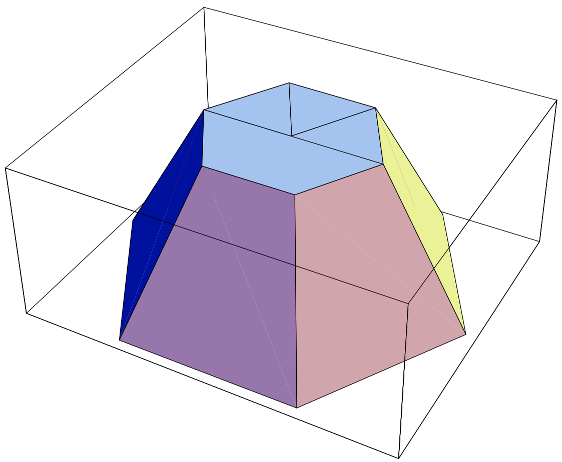
$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & \cdots & 4 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0.086 & \cdots & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \{1., 0., 0.\} & \{0.5, 0., 0.866025\} & \{-0.5, 0., 0.866025\} & \{-1., 0., 0.\} \\ \{0.5, 0.866025, 0.\} & \{0.25, 0.433013, 0.866025\} & \{-0.25, -0.433013, 0.866025\} & \{-0.5, -0.866025, 0.\} \\ \{-0.5, 0.866025, 0.\} & \{-0.25, 0.433013, 0.866025\} & \{0.25, -0.433013, 0.866025\} & \{0.5, -0.866025, 0.\} \\ \{-1., 0., 0.\} & \{-0.5, 0., 0.866025\} & \{0.5, 0., 0.866025\} & \{1., 0., 0.\} \end{pmatrix}$$

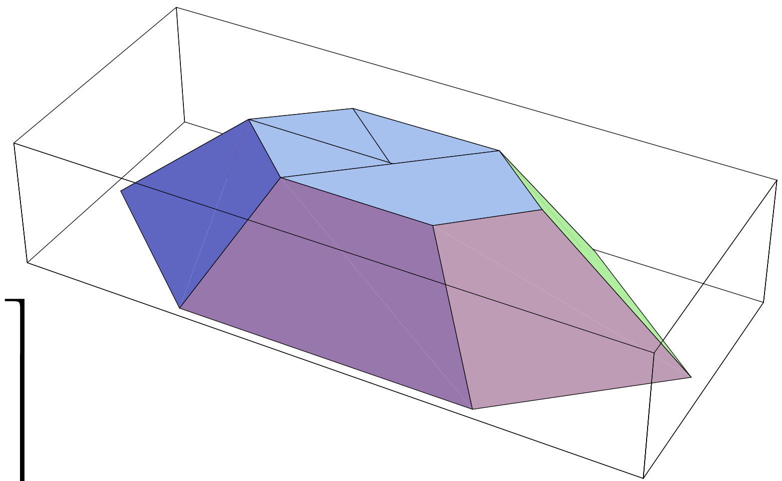
ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΠΙΝΑΚΩΝ – ΓΡΑΦΙΚΑ Η/Υ

Μεγένθυση

$$S \times P = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & \cdots & 4 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0.086 & \cdots & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i^{'} \\ y_i^{'} \\ z_i^{'} \end{bmatrix}$$



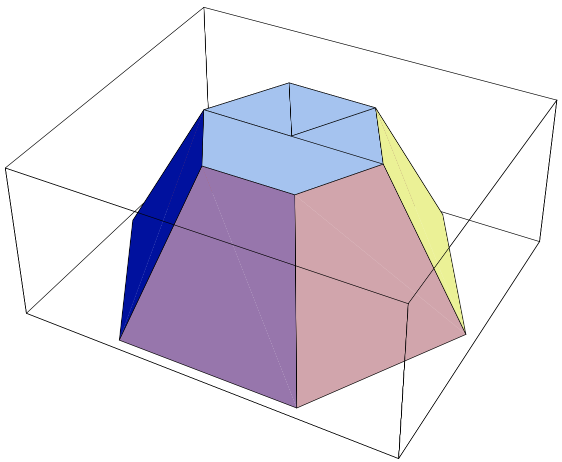
$$S = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



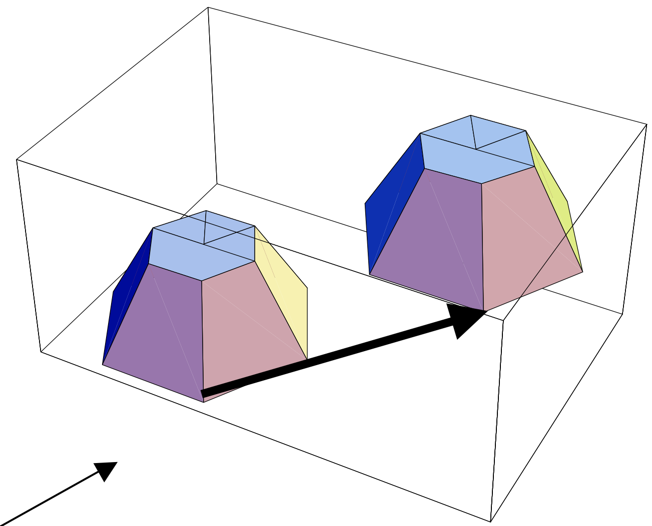
ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΠΙΝΑΚΩΝ – ΓΡΑΦΙΚΑ Η/Υ

Μετακίνηση

$$P+T=\begin{bmatrix}1 & 0.5 & \cdots & 4\\ 0 & 0 & \cdots & 1\\ 0 & 0.086 & \cdots & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}x_0 & x_0 & \cdots & x_0\\ y_0 & y_0 & \cdots & y_0\\ z_0 & z_0 & \cdots & z_0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}x_i\\ y_i\\ z_i\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}x_i'\\ y_i'\\ z_i'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_0\\ y_0\\ z_0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}x_i\\ y_i\\ z_i\end{bmatrix}$$



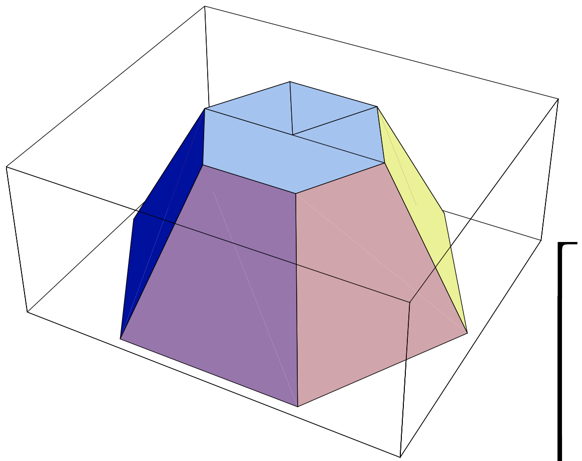
$$\begin{bmatrix}x_i'\\ y_i'\\ z_i'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_i\\ y_i\\ z_i\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\ 1\\ 1\end{bmatrix}$$



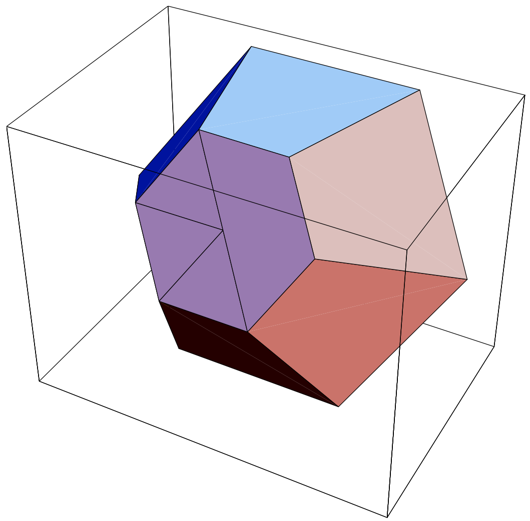
ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΠΙΝΑΚΩΝ – ΓΡΑΦΙΚΑ Η/Υ

Στροφή ως προς άξονα x

$$RP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & \cdots & 4 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0.086 & \cdots & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_i' \\ y_i' \\ z_i' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} x_i' \\ y_i' \\ z_i' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\left[\frac{\pi}{3}\right] & -\sin\left[\frac{\pi}{3}\right] \\ 0 & \sin\left[\frac{\pi}{3}\right] & \cos\left[\frac{\pi}{3}\right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix}$$



ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΠΙΝΑΚΩΝ – ΓΡΑΦΙΚΑ Η/Υ

Στροφή ως προς άξονα y

$$RP = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & \cdots & 4 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0.086 & \cdots & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_i^{'} \\ y_i^{'} \\ z_i^{'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix}$$

Στροφή ως προς άξονα z

$$RP = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & \cdots & 4 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0.086 & \cdots & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_i^{'} \\ y_i^{'} \\ z_i^{'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΠΙΝΑΚΩΝ – ΜΑΡΚΟΒΙΑΝΕΣ ΑΛΥΣΙΔΕΣ

Μια χώρα διαιρείται σε 3 γεωγραφικές περιοχές. Σύμφωνα με στατιστικές κάθε χρόνο το 5% της περιοχής 1 μετακινείται στην περιοχή 2 και 5% στην περιοχή 3. Από τους κατοίκους της περιοχής 2, 15% μετακινείται στην περιοχή 1 και 10% στην περιοχή 3. Τέλος από τους κατοίκους της περιοχής 3, 10% μετακινείται στην περιοχή 1 και 5% στην περιοχή 2. Τι ποσοστό του πληθυσμού κατοικεί στην κάθε περιοχή μετά από μεγάλο χρονικό διάστημα ;

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΠΙΝΑΚΩΝ – ΜΑΡΚΟΒΙΑΝΕΣ ΑΛΥΣΙΔΕΣ

$x_1(i), x_2(i), x_3(i)$ = πιθανότητα ένα άτομο του πληθυσμού να μένει στην περιοχή 1,2, και 3 αντίστοιχα στο τέλος του χρόνου *i*,

p_{ij} = πιθανότητα εάν ένα άτομο του πληθυσμού βρίσκεται στην χώρα *i* να είναι στην χώρα *j* στην επόμενη χρονική παρατήρηση,

---

Εφόσον το 5% της περιοχής 1 μετακινείται στην περιοχή 2 και 5% στην περιοχή 3 (δηλαδή συνολικά 10% μετακινείται), άρα το 90% της περιοχής 1 παραμένει στην περιοχή 1.

Επίσης από τους κατοίκους της περιοχής 2, 15% μετακινείται στην περιοχή 1 και από τους κατοίκους της περιοχής 3, 10% μετακινείται στην περιοχή 1.

$$x_1(i) = \frac{90}{100} x_1(i-1) + \frac{15}{100} x_2(i-1) + \frac{10}{100} x_3(i-1)$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΠΙΝΑΚΩΝ – ΜΑΡΚΟΒΙΑΝΕΣ ΑΛΥΣΙΔΕΣ

Εφόσον το 15% της περιοχής 2 μετακινείται στην περιοχή 1 και 10% στην περιοχή 3 (δηλαδή συνολικά 25% μετακινείται), άρα το 75% της περιοχής 2 παραμένει στην περιοχή 2.

Επίσης από τους κατοίκους της περιοχής 1, 5% μετακινείται στην περιοχή 2 και από τους κατοίκους της περιοχής 3, 5% μετακινείται στην περιοχή 2.

$$x_2(i) = \frac{5}{100}x_1(i-1) + \frac{75}{100}x_2(i-1) + \frac{5}{100}x_3(i-1)$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΠΙΝΑΚΩΝ – ΜΑΡΚΟΒΙΑΝΕΣ ΑΛΥΣΙΔΕΣ

Εφόσον το 10% της περιοχής 3 μετακινείται στην περιοχή 1 και 5% στην περιοχή 2, (δηλαδή συνολικά 15% μετακινείται), άρα το 85% της περιοχής 3 παραμένει στην περιοχή 3.

Επίσης από τους κατοίκους της περιοχής 1, 5% μετακινείται στην περιοχή 3 και από τους κατοίκους της περιοχής 2, 10% μετακινείται στην περιοχή 3.

$$x_3(i) = \frac{5}{100}x_1(i-1) + \frac{10}{100}x_2(i-1) + \frac{85}{100}x_3(i-1)$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΠΙΝΑΚΩΝ – ΜΑΡΚΟΒΙΑΝΕΣ ΑΛΥΣΙΔΕΣ

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1(i) \\ x_2(i) \\ x_3(i) \end{bmatrix}}_{x(i)} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{90}{100} & \frac{15}{100} & \frac{10}{100} \\ \frac{5}{100} & \frac{75}{100} & \frac{5}{100} \\ \frac{5}{100} & \frac{10}{100} & \frac{85}{100} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(i-1) \\ x_2(i-1) \\ x_3(i-1) \end{bmatrix}}_{x(i-1)}$$

$$x(n) = Ax(n-1) = A\big(Ax(n-2)\big) = A^2 x(n-2) = \cdots = A^n x(0)$$

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{24}\left(13+9\left(\frac{4}{5}\right)^n+\left(\frac{7}{5}\right)^n 2^{1-n}\right) & \frac{1}{24}\left(13-3\left(\frac{4}{5}\right)^n-7^n\,10^{1-n}\right) & \frac{1}{24}\left(10^{-n}\left(2\,7^n-15\,8^n\right)+13\right) \\ \frac{1}{6}\left(1-\left(\frac{7}{10}\right)^n\right) & \frac{1}{6}\left(1+\left(\frac{7}{2}\right)^n 5^{1-n}\right) & \frac{1}{6}\left(1-\left(\frac{7}{10}\right)^n\right) \\ \frac{1}{24}\left(7-9\left(\frac{4}{5}\right)^n+\left(\frac{7}{5}\right)^n 2^{1-n}\right) & \frac{1}{3}2^{-n-3}5^{-n}\left(-10\,7^n+3\,8^n+7\,10^n\right) & \frac{1}{24}\left(10^{-n}\left(2\,7^n+15\,8^n\right)+7\right) \end{pmatrix} \xrightarrow{n\to\infty} \begin{bmatrix} 13/24 & 13/24 & 13/24 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 7/24 & 7/24 & 7/24 \end{bmatrix}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΠΙΝΑΚΩΝ – ΜΑΡΚΟΒΙΑΝΕΣ ΑΛΥΣΙΔΕΣ

Επειδή $x_1(i), x_2(i), x_3(i)$ αποτελούν την πιθανότητα ένα άτομο του πληθυσμού να μένει στην περιοχή 1,2, και 3 αντίστοιχα, συνεπώς $x_1(0)+x_2(0)+x_3(0)=1$, όποιες και αν είναι οι πιθανότητες αυτές. Άρα η λύση που ψάχνετε είναι η :

$$x = \begin{bmatrix} 13/24 \\ 4/24 \\ 7/24 \end{bmatrix}$$

Σημείωση. Όλα αυτά ισχύουν κάτω από την προϋπόθεση ότι η διαδικασία είναι μαρκοβιανή, ότι δηλαδή η πιθανότητα οποιασδήποτε μελλοντικής κατάστασης της διαδικασίας, όταν η παρούσα κατάσταση είναι γνωστή δεν αλλοιώνεται από επιπλέον δεδομένα που αφορούν την συμπεριφορά της διαδικασίας στο παρελθόν.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΠΙΝΑΚΩΝ – ΜΑΡΚΟΒΙΑΝΕΣ ΑΛΥΣΙΔΕΣ

Ο πίνακας *Α* λέγεται *πίνακας μετάβασης* της παραπάνω διαδικασίας. Όταν σε ένα σύστημα, όπως αυτό του παραδείγματος, η κατάσταση την χρονική στιγμή *i* π.χ. , εξαρτάται μόνο από την κατάσταση του συστήματος την αμέσως προηγούμενη χρονική στιγμή *i-1* π.χ. , τότε η διαδικασία αυτή καλείται *Μαρκοβιανή διαδικασία*. Οι πίνακες όπως ο *Α* καλούνται επίσης ως *Μαρκοβιανοί πίνακες* ή *πίνακες πιθανοτήτων* ή *στοχαστικοί πίνακες*. Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι τα στοιχεία κάθε στήλης του πίνακα *Α* και γενικά των Μαρκοβιανών πινάκων έχουν άθροισμα 1. Επίσης παρόμοια με το παράδειγμα 6.6., σελ. 112 του Α'Τόμου, μπορούμε να δείξουμε ότι μια από τις ιδιοτιμές του Μαρκοβιανού πίνακα είναι η μονάδα, ενώ μπορεί επίσης να δειχθεί ότι όλες οι υπόλοιπες ιδιοτιμές είναι μικρότερες ή ίσες της μονάδας.

$$\lim_{n\to\infty} A^n = \begin{bmatrix} q_1 & q_1 & q_1 \\ q_2 & q_2 & q_2 \\ q_3 & q_3 & q_3 \end{bmatrix}$$

ΑΛΓΕΒΡΑ ΠΙΝΑΚΩΝ - ΟΡΙΣΜΟΙ

Άνω (κάτω) τριγωνικός

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Διαγώνιος (Μοναδιαίος)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ανάστροφος

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \; ; \; A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$$

ΑΛΓΕΒΡΑ ΠΙΝΑΚΩΝ - ΟΡΙΣΜΟΙ

Συμμετρικός $A=A^T$
(Αντισυμμετρικός $A=-A^T$)

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \;;\; A=\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 \end{bmatrix}$$

Συζυγής ανάστροφος

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad A^*=\begin{bmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{21} & \bar{a}_{31} \\ \bar{a}_{12} & \bar{a}_{22} & \bar{a}_{32} \\ \bar{a}_{13} & \bar{a}_{23} & \bar{a}_{33} \end{bmatrix}$$

Ερμιτιανός $A=A^*$

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \quad A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \bar{a}_{12} & a_{22} & a_{23} \\ \bar{a}_{13} & \bar{a}_{23} & a_{33} \end{bmatrix}, a_{11}, a_{22}, a_{33} \in \mathbb{R}$$

ΑΛΓΕΒΡΑ ΠΙΝΑΚΩΝ – ΠΡΑΞΕΙΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

Άθροισμα πινάκων

(ίδιες διαστάσεις)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \end{bmatrix} \; ; \; B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 1+(-2) & 2+1 & 3+(-3) \\ (-2)+1 & 1+0 & (-3)+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Γινόμενο πινάκων

(nxm) (mxk) -> (nxk)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \; ; \; B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1\times 0 + 2\times 1 + 3\times(-1) & 1\times 1 + 2\times 0 + 3\times(-1) \\ (-1)\times 0 + 2\times 1 + (-1)\times(-1) & (-1)\times 1 + 2\times 0 + (-1)\times(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

ΑΛΓΕΒΡΑ ΠΙΝΑΚΩΝ – Ιδιότητες πινάκων

$$\left(AB\right)^{T} = B^{T}A^{T}$$

$$\left(AB\right)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

$$AB \neq BA \quad \left(A+B\right)^{2} = A^{2} + B^{2} + AB + BA \neq A^{2} + B^{2} + 2AB$$

* Προσοχή στην αντιμεταθετική ιδιότητα πινάκων που δεν ισχύει πάντα.

ΑΛΓΕΒΡΑ ΠΙΝΑΚΩΝ – Τριγωνομετρία (Πρδ.1.6)

ημ(α+β)=ημα συνβ + συνα ημβ συν(α+β)=συνα συνβ – ημα ημβ ημ2α=2ημα συνα συν2α=συν²α – ημ²α= =2συν²α – 1= =1 – 2ημ²α	$\varepsilon\varphi(\alpha+\beta)=\dfrac{\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\beta}{1-\varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta}$ $\varepsilon\varphi 2\alpha=\dfrac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1-\varepsilon\varphi^2\alpha}$	$1+\varepsilon\varphi^2\alpha=\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}$ $\varepsilon\varphi^2\alpha=\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha}$

Πρδ. 1.6
n=2

$$A=\begin{bmatrix}\cos x & -\sin x\\ \sin x & \cos x\end{bmatrix}\Rightarrow A^2=\begin{bmatrix}\cos x & -\sin x\\ \sin x & \cos x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos x & -\sin x\\ \sin x & \cos x\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^2=\begin{bmatrix}\cos^2 x-\sin^2 x & -2\sin x\cos x\\ 2\sin x\cos x & \cos^2 x-\sin^2 x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos 2x & -\sin 2x\\ \sin 2x & \cos 2x\end{bmatrix}$$

Επαγωγή.

1. Δείχνω ότι ισχύει για n=1 (2).
2. Έστω ότι ισχύει για n=k.
3. Αποδεικνύω ότι ισχύει για n=k+1.

ΑΛΓΕΒΡΑ ΠΙΝΑΚΩΝ – Τριγωνομετρία (Πρδ.1.6)

n=k
$$A^k = \begin{bmatrix} \cos kx & -\sin kx \\ \sin kx & \cos kx \end{bmatrix}$$

n=k+1
$$A^{k+1} = \begin{bmatrix} \cos kx & -\sin kx \\ \sin kx & \cos kx \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^2 = \begin{bmatrix} \cos kx \cos x - \sin kx \sin x & -\cos kx \sin x - \sin kx \cos x \\ \sin kx \cos x + \cos kx \sin x & -\sin kx \sin x + \cos kx \cos x \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(k+1)x & -\sin(k+1)x \\ \sin(k+1)x & \cos(k+1)x \end{bmatrix}$$

Επαγωγή.
1. Δείχνω ότι ισχύει για n=1 (2).
2. Έστω ότι ισχύει για n=k.
3. Αποδεικνύω ότι ισχύει για n=k+1.

ΑΛΓΕΒΡΑ ΠΙΝΑΚΩΝ – όμοια με Πρδ. 1.9 και Άσκηση 2-Εργασίας 1

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{I} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{M} \quad (\mathrm{M}^{??} = 0)$$

$$(I + M)^n = I + \binom{n}{1} M + \binom{n}{2} M^2 + \cdots + \binom{n}{n} M^n$$

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ – Εσωτερικό γινόμενο (Ασκ.3)

Εσωτερικό γινόμενο $$OA=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}, OB=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix} \Rightarrow OA\bullet OB=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

Μέτρο $$\|OA\|=\sqrt{OA\bullet OA}=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$$

Ιδιότητες
$$OA\bullet OB=OB\bullet OA$$
$$OA\bullet(OB+OC)=OA\bullet OB+OA\bullet OC$$
$$(\lambda OA)\bullet OB=OA\bullet(\lambda OB)=\lambda(OA\bullet OB)$$
$$OA\bullet OA\geq 0$$
$$OA\bullet OA=0\Leftrightarrow OA=0\Leftrightarrow O\equiv A$$

Βασική ιδιότητα για Ασκ.3 $$OA\bullet OB=\|OA\|\|OB\|\cos\theta$$

OA,OB κάθετα $$\|\mathrm{OA}\|\|\mathrm{OB}\|\cos\frac{\pi}{2}=0\Rightarrow OA\bullet OB=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$$

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ – Εσωτερικό γινόμενο (Άσκ.3)

$$\|\mathrm{OA}\| = 1, \|\mathrm{OB}\| = 2, \theta = \frac{\pi}{3} \Rightarrow OA \bullet OB = \|\mathrm{OA}\| \|\mathrm{OB}\| \cos\frac{\pi}{6} = 1 \times 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

$$OC = OA - OB, OD = OA + OB \qquad \underbrace{OC \bullet OD}_{??} = \underbrace{\|OC\|}_{??}\underbrace{\|OD\|}_{??}\cos\phi$$

$$OC \bullet OD = (OA - OB) \bullet (OA + OB) =$$
$$= OA \bullet OA + OA \bullet OB - OB \bullet OA - OB \bullet OB =$$
$$= \|OA\|^2 - \|OB\|^2 = 1^2 - 2^2 = -3$$

$$OD \bullet OD = (OA + OB) \bullet (OA + OB) =$$
$$= OA \bullet OA + OA \bullet OB + OB \bullet OA + OB \bullet OB =$$
$$= \|OA\|^2 + \|OB\|^2 + 2OA \bullet OB = 1^2 + 2^2 + 2 \times 1 = 7$$

$$OC \bullet OC = (OA - OB) \bullet (OA - OB) =$$
$$= OA \bullet OA - OA \bullet OB - OB \bullet OA + OB \bullet OB =$$
$$= \|OA\|^2 + \|OB\|^2 - 2OA \bullet OB = 1^2 + 2^2 - 2 \times 1 = 3$$

$$OC \bullet OD = \|OC\| \|OD\| \cos\phi \Rightarrow$$
$$-3 = \sqrt{3}\sqrt{7}\cos\phi \Rightarrow \cos\phi = -\frac{3}{\sqrt{21}}$$

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ – Εξωτερικό γινόμενο (Ασκ.3)

Εξωτερικό γινόμενο

1. Μέτρο $[OA,OB]=\|OA\|\|OB\|\sin\theta$
2. Κάθετο στο επίπεδο των OA,OB.
3. {OA,OB,OC} δεξιόστροφη φορά.

Ιδιότητες

$$[OA,OB]=-[OB,OA]$$

$$[\lambda OA,OB]=[OA,\lambda OB]=\lambda[OA,OB]$$

$$[OA,OB+OC]=[OA,OB]+[OA,OC]$$

$$\left[OA,[OB,OC]\right]=(OA\bullet OC)OB-(OA\bullet OB)OC$$

$$\|[OA,OB]\|=\|OA\|^2\|OB\|^2\sin^2\theta=\|OA\|^2\|OB\|^2\left(1-\cos^2\theta\right)=$$

$$=\|OA\|^2\|OB\|^2-\|OA\|^2\|OB\|^2\cos^2\theta=\|OA\|^2\|OB\|^2-\|OA\bullet OB\|^2$$

OA,OB συγγραμικά $[OA,OB]=\|\mathrm{OA}\|\|\mathrm{OB}\|\sin 0=0\Rightarrow[OA,OB]=\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}=0$

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ – Μικτό γινόμενο (Ασκ.3)

Μικτό γινόμενο

$$\left(OA, OB, OC\right) = \left[OA, OB\right] \bullet OC = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Ιδιότητες (αλλαγή ανά δύο τα διανύσματα αλλάζουμε πρόσημο, ανά 3 όμως όχι)

ΟΑ,ΟΒ συνεπίπεδα

$$\left(OA, OB, OC\right) = \left[OA, OB\right] \bullet OC = 0$$

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ – Άσκηση

Να εξετάσετε αν τα OA,OB,OC είναι κάθετα, συγγραμικά, συνεπίπεδα.

$$OA=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix},OB=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},OC=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

Σύνθετοι πίνακες

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{array}\right] = ?$$

Σύνθετοι πίνακες (άσκ. 2β)

$$\begin{bmatrix} A & M \\ 0 & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}MB^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]^{-1} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} & -\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \\ 0 & \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & -\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ 0 & \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \\ 0 & \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\det\begin{bmatrix} A & M \\ 0 & B \end{bmatrix} = (\det A)(\det B)$$

Πολυωνυμικοί πίνακες (Άσκ.14.1)

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}, p(\lambda) = \alpha\lambda^2 + \beta\lambda + \gamma$$

$$p(A) = \alpha \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}^2 + \beta \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} + \gamma I =$$

$$= \alpha \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} aA_{11}^2 + \beta A_{11} + \gamma I & 0 \\ 0 & aA_{22}^2 + \beta A_{22} + \gamma I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p(A_{11}) & 0 \\ 0 & p(A_{22}) \end{bmatrix}$$

Ορίζουσες

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\det A_{11} - a_{12}\det A_{12} + a_{13}\det A_{13}$$

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - & + \\ - & + & - & + & - \\ + & - & + & - & + \\ - & + & - & + & - \\ + & - & + & - & + \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1\det A_{11} - 2\det A_{12} + 3\det A_{13} =$$

$$= 1\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1(3\times2 - 1\times1) - 2(2\times2 - 3\times1) + 3(2\times1 - 3\times3) =$$

$$= 1\times5 - 2\times1 + 3\times(-7) = 5 - 2 - 21 = -18$$

$$\det A = \det A^T, \det A^{-1} = (\det A)^{-1}$$

Ορίζουσες – Ασκ. 2.2

Ιδιότητες

1. Εναλλαγή 2 γραμμών (στηλών) -> -det(A)
2. Πολ/σμος γραμμής (στήλης) με k -> kdet(A)
3. Γραμμή I = Γραμμή I + k Γραμμή j -> det(A)
4. $\det(\lambda A)=\lambda^n\det(A)$

$$\begin{vmatrix} -4 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} \overset{1col+2col2}{=} \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 2 \\ 7 & 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \\ 7 & 3 & 3 \end{vmatrix} = (-1)(-2)\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 2\times 1 = 2$$

Σημείωση. Α) Παρόμοια η άσκηση 5α.

Β) Για να δείξω ότι Α=Β (5β)

β1) Κάνω πράξεις στο Α και προσπαθώ να δείξω το Β.

β2) Κάνω πράξεις στο Β και προσπαθώ να δείξω το Α.

β3) Κάνω ταυτόχρονα πράξεις στο Α και Β και προσπαθώ να φτάσω σε αληθή σχέση.

Ορίζουσες

det(AB)=det(A)det(B)
det(A^k)=det(A) ^{k}
det(A+B)≠det(A)+det(B)

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{bmatrix}\Rightarrow \det\left(sI_2-A\right)=\begin{vmatrix}s-1 & +1\\ -2 & s-1\end{vmatrix}=\left(s-1\right)^2-\left(-2\right)=s^2-2s+3$$

Άσκ. 4β

Αντίστροφος πίνακα (άσκ. 2β)

Αντίστροφος του Α $\qquad A\in R^{n\times n}, \exists B: AB = I_n \left(BA = I_n\right)$

- Η μια συνθήκη είναι ικανή από σελ. 36
- Προσοχή στην άσκηση 1β.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{21} & M_{31} \\ M_{12} & M_{22} & M_{32} \\ M_{13} & M_{23} & M_{33} \end{bmatrix}$$

$$M_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; M_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; M_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

....

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & -4 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = ?$$

Ασκ. 14.2

Αντίστροφος πίνακα (άσκ. 7α,8β)

$$AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$$

$$YA = B \Rightarrow Y = BA^{-1}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix}}_{A} X = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ a \\ a^2 \end{bmatrix}}_{B}$$

Ασκ. 7α

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}}_{A} X = \underbrace{\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}}_{B}$$

Ασκ. 8β

Γραμμικά συστήματα – Στοιχειώδεις μετασχηματισμοί (Άσκ. 2β)

$$\begin{bmatrix} I_m & A \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} P & T \end{bmatrix}$$ Στοιχειώδεις μετασχηματισμοί γραμμών

$$\begin{bmatrix} I_n \\ T \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} Q \\ K \end{bmatrix}$$ Στοιχειώδεις μετασχηματισμοί στηλών

Υπάρχουν P,Q τέτοιοι ώστε : $PAQ = K$

Υπολογισμός αντιστρόφου του A (Άσκ. 2β) :

$$\begin{bmatrix} I_m & A \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} P & T \end{bmatrix}$$ Στοιχειώδεις μετασχηματισμοί γραμμών ώστε ο A να γίνει άνω τριγωνικός

$$\begin{bmatrix} P & T \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} P_1 & T_1 \end{bmatrix}$$ Στοιχειώδεις μετασχηματισμοί γραμμών ώστε ο T να γίνει διαγώνιος

$$\begin{bmatrix} P_1 & T_1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} R & I \end{bmatrix}$$ Στοιχειώδεις μετασχηματισμοί γραμμών ώστε ο T_1 να γίνει μοναδιαίος $R=A^{-1}$

Γραμμικά συστήματα – LU παραγοντοποίηση (Άσκ. 8α)

$[I_m \quad A] \rightarrow [P \quad U]$ Στοιχειώδεις μετασχηματισμοί γραμμών ώστε ο A να γίνει άνω τριγωνικός

$PA = U \Rightarrow A = P^{-1}U = LU$ L κάτω τριγωνικός και U άνω τριγωνικός

$A = LDU_1$ Αν στον πίνακα D τοποθετήσω τα διαγώνια στοιχεία του U και στη διαγώνιο του U τοποθετήσω μονάδες.

$A = LDL^T$ Αν A συμμετρικός (παραγοντοποίηση Cholesky)

Εφαρμογή (άσκ. 8α)

$$Ax = B \overset{A=LU}{\Rightarrow} LUx = B \Rightarrow L\underbrace{(Ux)}_{y} = B \Rightarrow \begin{Bmatrix} Ly = B \\ Ux = y \end{Bmatrix}$$

Γραμμικά συστήματα – LU παραγοντοποίηση

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}}_{A} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{(2)-2\times(1)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

A

$$\xrightarrow{(3)-3\times(1)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & -1 & -5 \\ -3 & 0 & 1 & 0 & -5 & -7 \end{array}\right] \xrightarrow{(3)-5\times(2)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & -1 & -5 \\ 7 & -5 & 1 & 0 & 0 & 18 \end{array}\right]$$

P U

$$\rightarrow L = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 7 & -5 & 1 \end{bmatrix}}_{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 18 \end{bmatrix}, LU = A$$

$$\rightarrow L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{bmatrix}, U_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = L^T, LDL^T = A$$

Επίλυση γραμμικού συστήματος με LU-παραγοντοποίηση

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}}_{L}\underbrace{\left\{\left[\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 18 \end{bmatrix}}_{U}\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{X}\right]\right\}}_{Y} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}}_{L}\underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} y_1 = 1 \\ 2y_1 + y_2 = 1 \\ 3y_1 + 5y_2 + y_3 = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{matrix} y_1 = 1 \\ y_2 = 1 - 2y_1 = 1 - 2\times 1 = -1 \\ y_3 = 1 - 3y_1 - 5y_2 = 1 - 3\times 1 - 5y_2 = -2 - 5y_2 = -2 - 5\times(-1) = 3 \end{matrix}\right\}$$

Επίλυση γραμμικού συστήματος με LU-παραγοντοποίηση

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 18 \end{bmatrix}}_{U}\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}}_{Y} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ -x_2 - 5x_3 = -1 \\ 18x_3 = 3 \end{matrix} \right\} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{matrix} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \Rightarrow x_1 = 1 - 2x_2 - 3x_3 = 1 - \dfrac{2}{6} - \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{6} \\ -x_2 - 5x_3 = -1 \Rightarrow x_2 = -5x_3 + 1 = -\dfrac{5}{6} + 1 = \dfrac{1}{6} \\ x_3 = \dfrac{3}{18} = \dfrac{1}{6} \end{matrix} \right\}$$

Γραμμικά συστήματα – Επίλυση

$$Ax = B$$

1. Με LU παραγοντοποίηση (προηγ. διαφάνεια).
2. Με την μέθοδο των οριζουσών.

2.1 Υπολογίζω την ορίζουσα του A. Αν η ορίζουσα είναι διάφορη του μηδέν τότε :

$$x_1 = \frac{Dx_1}{D_A}, x_2 = \frac{Dx_2}{D_A}, \ldots, x_n = \frac{Dx_n}{D_A} \quad \text{η} \quad x = A^{-1}B$$

2.2 Η ορίζουσα του A είναι μηδέν για συγκεκριμένες τιμές των παραμέτρων. Τότε αντικαθιστώ την κάθε παράμετρο στο σύστημα ξεχωριστά, παίρνοντας ένα καινούριο σύστημα, και ελέγχω αν ικανοποιείται η σχέση : rank[A B]=rank[A].

2.3 Αν δεν ικανοποιείται το σύστημα είναι αδύνατο. Αν ικανοποιείται έχει άπειρες λύσεις (δες πρδ. 3.7).

3. $X=A^{-1}B$

Γραμμικά συστήματα – Ασκ. 8.3

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha+1 \\ 1 & \alpha+2 & 1-\alpha \end{bmatrix}}_{A} X = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4\alpha+2 \end{bmatrix}}_{B}$$

$$\det[A] = a - a^2$$

$$\det[A] = 0 \Leftrightarrow a = 0 \forall a = 1$$

$$a \neq \{0,1\} \Rightarrow X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} \dfrac{3-6a}{a-1} \\ \dfrac{4a-3}{a-1} \\ \dfrac{1}{a-1} \end{bmatrix}$$

$$a = 0 \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}}_{A} X = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}}_{B}$$

$$rank[A,B] = 2 = rank[A] \Rightarrow x_1 = -x_3 - 4, x_2 = 3$$

$$a = 1 \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}}_{A} X = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 6 \end{bmatrix}}_{B}$$

$$rank[A,B] = 3 \neq 2 = rank[A] \Rightarrow \text{ΑΔΥΝΑΤΟ}$$

Γραμμικά ομογενή συστήματα

$$Ax = 0$$

Πάντα έχει λύση (τουλάχιστον την μηδενική)

1. Με LU παραγοντοποίηση (προηγ. διαφάνεια).

2. Με την μέθοδο των οριζουσών.

2.1 Υπολογίζω την υποορίζουσα του A που είναι διάφορη του μηδενός. Μεταφέρω τις υπόλοιπες μεταβλητές στο δεξιά μέρος και έχω :

$$A_S x_S = B_S \Rightarrow x_S = A_S^{-1} B_S$$

Γραμμικά ομογενή συστήματα – (Άσκ. 2.3.3)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -5 & 6 \end{bmatrix} x = 0_{2,3} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -6 \end{bmatrix} x_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -3 \\ -6 \end{bmatrix} x_3 = \frac{1}{-13} \begin{bmatrix} -5 & -2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ -6 \end{bmatrix} x_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{27}{13} \\ -\dfrac{6}{13} \end{bmatrix} x_3$$