

# Ξενάγηση στο *Mathematica*.

## ■ Αριθμητικοί υπολογισμοί

### ■ Απλοί αριθμητικοί υπολογισμοί.

Μπορούμε να κάνουμε απλούς υπολογισμούς χρησιμοποιώντας τα σύμβολα +,-,\*,/,^,(,),!. Το αποτέλεσμα της πράξης θα εμφανιστεί αν πατήσουμε Shift+Enter.

```
In[1]:= 19 + 67
```

```
Out[1]= 86
```

Παρατηρούμε ότι το *Mathematica* αριθμεί τις πράξεις που του δίνουμε να κάνει καθώς και τα αποτελέσματα που μας έδωσε. Η συγκεκριμένη αρίθμηση γίνεται σύμφωνα με την σειρά που του ζητάμε τις πράξεις και όχι με την θέση στην οποία τις τοποθετούμε. Ας δούμε μερικά ακόμα παραδείγματα :

```
In[2]:= 200 * 300
```

```
Out[2]= 60000
```

```
In[3]:= 1000 / 20
```

```
Out[3]= 50
```

```
In[4]:= 12 * 10 + (24 - 12) / 6
```

```
Out[4]= 122
```

```
In[5]:= 6 ^ 20
```

```
Out[5]= 3656158440062976
```

```
In[6]:= 6 ^ 200
```

```
Out[6]= 4268252238120274007969748915187737323429887453544894294954790789351129295496197390190721393407570  
97296812815466676129830954465240517595242384015591919845376
```

```
In[7]:= 100!
```

```
Out[7]= 9332621544394415268169923885626670049071596826438162146859296389521759999322991560894146397615651.  
82862536979208272237582511852109168640000000000000000000000000000000
```

Η αναφορά στο προηγούμενο αποτέλεσμα γίνεται με το σύμβολο %, στο πιο προηγούμενο με το σύμβολο %% ενώ στο αποτέλεσμα με συγκεκριμένο νούμερο εξόδου με %n.

```
In[8]:= %/6
```

```
Out[8]= 1555436924065735878028320647604445008178599471073027024476549398253626666553831926815691066269275.  
30477089496534712039597085308684861440000000000000000000000000000000
```

```
In[9]:= %%/6
```

```
Out[9]= 1555436924065735878028320647604445008178599471073027024476549398253626666553831926815691066269275.
30477089496534712039597085308684861440000000000000000000000
```

```
In[10]:= %4 - 10
```

```
Out[10]= 112
```

Προσπάθησε να υπολογίσεις τις επόμενες εκφράσεις

$$3 \frac{5}{7} - 4^3 ; 12 \times 10 + \frac{24-12}{6}$$

Αν το αποτέλεσμα μιας πράξης είναι ρητός αριθμός a και εμείς θέλουμε να τον κάνουμε πραγματικό με n δεκαδικά ψηφία τότε θα γράψουμε N[a,n].

```
In[11]:= 1/3
```

```
Out[11]= 1/3
```

```
In[12]:= N[%, 10]
```

```
Out[12]= 0.333333
```

```
In[13]:= N[Pi, 100]
```

```
Out[13]= 3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781640628620899862803482534211.
7068
```

όπου Pi ο γνωστός σε όλους αριθμός π. Άλλοι αριθμοί που αναγνωρίζει το *Mathematica* είναι ο E, το Infinity κ.α.

```
In[14]:= N[E, 10]
```

```
Out[14]= 2.71828
```

Ας δούμε τι σημαίνει όμως για το *Mathematica* μια πράξη όπως η παρακάτω :

```
In[15]:= a + x
```

```
Out[15]= a + x
```

```
In[16]:= FullForm[%]
```

```
Out[16]//FullForm=
Plus[a, x]
```

```
In[17]:= b * y
```

```
Out[17]= b y
```

```
In[18]:= FullForm[%]
```

```
Out[18]//FullForm=
Times[b, y]
```

```
In[19]:= a + x * (y - c)
```

```
Out[19]= a + x(y - c)
```

```
In[20]:= FullForm[%]
```

```
Out[20]//FullForm=
```

```
Plus[a, Times[x, Plus[Times[-1, c], y]]]
```

```
In[21]:= TracePrint[a + x*(y - c)]
```

$a + (y - c)x$

Plus

$a$

$x(y - c)$

Times

$x$

$y - c$

Plus

$y$

$-c$

Times

$-1$

$c$

$y - c$

$x(y - c)$

$a + x(y - c)$

```
Out[21]= a + x(y - c)
```

ΟΛΑ ΜΕΤΑΤΡΕΠΟΝΤΑΙ ΣΕ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ, ΑΛΛΑ ΚΑΙ ΜΠΟΡΟΥΝ ΝΑ ΕΚΤΕΛΕΣΤΟΥΝ ΣΑΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ.

```
In[22]:= Plus[10, 20, 30]
```

```
Out[22]= 60
```

```
In[23]:= Times[10, Plus[20, 30]]
```

```
Out[23]= 500
```

## ■ Πιο σύνθετα υπολογιστικά προβλήματα

Εύρεση, βάσει γνωστών αριθμητικών μεθόδων, προσεγγιστικών λύσεων εξισώσεων.

```
In[24]:= FindRoot[Cos[x] == x + Log[x], {x, 1}]
```

```
Out[24]= {x → 0.840619}
```

Μάλιστα επιλέγει και τον καλύτερο αλγόριθμο ανάμεσα σε πολλούς για την επίλυση του προβλήματος (π.χ. Gear, Runge Kutta, Adams).

```
In[25]:= NSolve[x^5 - 6 x^3 + 8 x + 1 == 0, x]
```

```
Out[25]= {{x → -2.05411}, {x → -1.2915}, {x → -0.126515}, {x → 1.55053}, {x → 1.9216}}
```

Μπορεί να επιλύσει ακόμα και διαφορικές εξισώσεις αριθμητικά όπως παρακάτω.

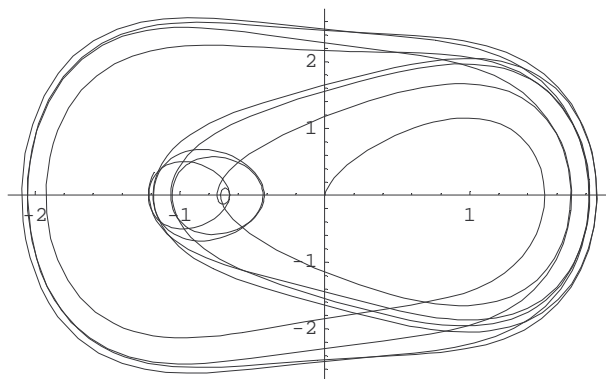
```
In[26]:= NDSolve[{x'[t] + x[t]^3 == Sin[t], x[0] == x'[0] == 0},
```

```
x, {t, 0, 50}]
```

```
Out[26]= {{x → InterpolatingFunction[({0. 50.}), <>]}}
```

και να σχεδιάσει την γραφική τους παράσταση

```
In[27]:= ParametricPlot[Evaluate[{x[t], x'[t]} /. %], {t, 0, 50}]
```



```
Out[27]= - Graphics -
```

Είναι δυνατός ο υπολογισμός ορισμένων ολοκληρωμάτων

```
In[28]:= NIntegrate[Log[x + Sin[x]], {x, 0, 2}]
```

```
Out[28]= 0.555889
```

Το *Mathematica* είναι πολύ καλό και στη Θεωρία αριθμών. Μπορεί να βρει τους πρώτους παράγοντες ενός ακεραίου

```
In[29]:= FactorInteger[2^105 - 1]
```

```
Out[29]=
```

$$\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 31 & 1 \\ 71 & 1 \\ 127 & 1 \\ 151 & 1 \\ 337 & 1 \\ 29191 & 1 \\ 106681 & 1 \\ 122921 & 1 \\ 152041 & 1 \end{pmatrix}$$

ή να ελέγξει αν ένας αριθμός είναι πρώτος

```
In[30]:= PrimeQ[2^7 - 1]
```

```
Out[30]= True
```

ή να βρεί τον 1000οστό πρώτο αριθμό

```
In[31]:= Prime[1000]
```

```
Out[31]= 7919
```

**Παράδειγμα 1.** Έλεγξε αν ο  $2^{17} - 1$  είναι πρώτος αριθμός. Αν όχι παραγοντοποίησε τον. Κάνε το ίδιο για τον  $2^{18} - 1$ .

**Παράδειγμα 2.** Προσπάθησε να επιλύσεις την δευτεροβάθμια εξίσωση  $x^2 - 5x + 6 = 0$ .

**ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ.** Από τα παραπάνω αλλά και από πολλά άλλα παραδείγματα που δεν αναφέραμε, συμπεραίνουμε ότι το *Mathematica* είναι πολύ καλό στον χειρισμό αριθμητικών δεδομένων.

## ■ Συμβολικοί υπολογισμοί

Το *Mathematica* μπορεί να χειριστεί με την ίδια ευκολία που χειρίζεται τους αριθμούς και τα σύμβολα.

### Παραγοντοποίηση

```
In[32]:= Factor[x^39 + y^39]
```

```
Out[32]= (x + y)(x^2 - yx + y^2)(x^12 - yx^11 + y^2x^10 - y^3x^9 + y^4x^8 - y^5x^7 + y^6x^6 - y^7x^5 + y^8x^4 - y^9x^3 + y^10x^2 - y^11x + y^12)
```

$$(x^{24} + yx^{23} - y^3x^{21} - y^4x^{20} + y^6x^{18} + y^7x^{17} - y^9x^{15} - y^{10}x^{14} + y^{12}x^{12} - y^{14}x^{10} - y^{15}x^9 + y^{17}x^7 + y^{18}x^6 - y^{20}x^4 - y^{21}x^3 + y^{23}x + y^{24})$$

### Απλοποίηση φόρμουλας

```
In[33]:= Simplify[%]
```

```
Out[33]= x^39 + y^39
```

In[34]:= **Expand[%%]**

Out[34]=  $x^{39} + y^{39}$

In[35]:= **Simplify[x(x - 2y)^3 + y(2x - y)^3]**

Out[35]=  $(x - y)(x + y)^3$

## Επίλυση εξισώσεων

In[36]:= **Solve[x^2 - 5x + 6 == 0, x]**

Out[36]=  $\{\{x \rightarrow 2\}, \{x \rightarrow 3\}\}$

In[37]:= **Reduce[a \* x + b == 0, x]**

Out[37]=  $a == 0 \wedge b == 0 \vee x == -\frac{b}{a} \wedge a \neq 0$

In[38]:= **Solve[x^2 - b \* x + 6 == 0, x]**

Out[38]=  $\left\{\left\{x \rightarrow \frac{1}{2}(b - \sqrt{b^2 - 24})\right\}, \left\{x \rightarrow \frac{1}{2}(b + \sqrt{b^2 - 24})\right\}\right\}$

## Επίλυση συστήματος εξισώσεων

In[39]:= **Solve[{  
     x1 - x2 + 2 \* x3 + x4 == -2,  
     -2 \* x1 + x2 - 3 \* x3 - 5 \* x4 == 4,  
     x1 - x2 + x3 + 6 \* x4 == 0,  
     2 \* x1 + 3 \* x2 + 5 \* x3 - 7 \* x4 == 1}, {x1, x2, x3, x4}]**

Out[39]=  $\left\{\left\{x1 \rightarrow -\frac{51}{2}, x2 \rightarrow \frac{11}{3}, x3 \rightarrow \frac{73}{6}, x4 \rightarrow \frac{17}{6}\right\}\right\}$

In[40]:= **Solve[{  
     x1 + x2 - x3 + x5 == 1,  
     -x1 - x2 + 2 \* x3 - x4 + x5 == 2,  
     2 \* x1 + 2 \* x2 - 3 \* x3 + 3 \* x4 + x5 == 0,  
     x1 + x2 - 3 \* x4 + 2 \* x5 == 3}, {x1, x2, x3, x4, x5}]**

Solve::svars : Equations may not give solutions for all "solve" variables.

Out[40]=  $\left\{\left\{x1 \rightarrow -x2 - \frac{7x5}{2} + \frac{9}{2}, x3 \rightarrow \frac{7}{2} - \frac{5x5}{2}, x4 \rightarrow \frac{1}{2} - \frac{x5}{2}\right\}\right\}$

## Πίνακες (ορίζουσες, αντίστροφος πίνακα, ιδιοτιμές, ιδιοανύσματα)

In[41]:= **A = {  
     {1, 1, 1},  
     {a, b, c},  
     {a^2, b^2, c^2}}**

Out[41]=  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$

In[42] := **Det[A]**

$$\text{Out}[42] = -b a^2 + c a^2 + b^2 a - c^2 a + b c^2 - b^2 c$$

In[43] := **Factor[%]**

$$\text{Out}[43] = -(a-b)(a-c)(b-c)$$

In[44] := **Inverse[A]**

$$\text{Out}[44] = \begin{pmatrix} \frac{b c^2 - b^2 c}{-b a^2 + c a^2 + b^2 a - c^2 a + b c^2 - b^2 c} & \frac{b^2 - c^2}{-b a^2 + c a^2 + b^2 a - c^2 a + b c^2 - b^2 c} & \frac{c - b}{-b a^2 + c a^2 + b^2 a - c^2 a + b c^2 - b^2 c} \\ \frac{a^2 c - a c^2}{-b a^2 + c a^2 + b^2 a - c^2 a + b c^2 - b^2 c} & \frac{c^2 - a^2}{-b a^2 + c a^2 + b^2 a - c^2 a + b c^2 - b^2 c} & \frac{a - c}{-b a^2 + c a^2 + b^2 a - c^2 a + b c^2 - b^2 c} \\ \frac{a b^2 - a^2 b}{-b a^2 + c a^2 + b^2 a - c^2 a + b c^2 - b^2 c} & \frac{a^2 - b^2}{-b a^2 + c a^2 + b^2 a - c^2 a + b c^2 - b^2 c} & \frac{b - a}{-b a^2 + c a^2 + b^2 a - c^2 a + b c^2 - b^2 c} \end{pmatrix}$$

In[45] := **a = 1; b = 2; c = 3;**

In[46] := **Eigenvalues[A]**

$$\text{Out}[46] = \left\{ 4 + \frac{11}{\sqrt[3]{35+i\sqrt{106}}} + \sqrt[3]{35+i\sqrt{106}}, 4 - \frac{11(1+i\sqrt{3})}{2\sqrt[3]{35+i\sqrt{106}}} - \frac{1}{2}(1-i\sqrt{3})\sqrt[3]{35+i\sqrt{106}}, \right. \\ \left. 4 - \frac{11(1-i\sqrt{3})}{2\sqrt[3]{35+i\sqrt{106}}} - \frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})\sqrt[3]{35+i\sqrt{106}} \right\}$$

In[47] := **Eigenvectors[A]**

$$\text{Out}[47] = \begin{pmatrix} \frac{i(-16i-3\sqrt{106}-2i\sqrt[3]{35+i\sqrt{106}}+\sqrt{106}\sqrt[3]{35+i\sqrt{106}})}{\sqrt[3]{35+i\sqrt{106}}(11+6\sqrt[3]{35+i\sqrt{106}}+(35+i\sqrt{106})^{2/3})} & -\frac{-11+2\sqrt[3]{35+i\sqrt{106}}-(3}{11+6\sqrt[3]{35+i\sqrt{106}}+(3} \\ -5 - \frac{11(1+i\sqrt{3})}{2\sqrt[3]{35+i\sqrt{106}}} - \frac{1}{2}(1-i\sqrt{3})\sqrt[3]{35+i\sqrt{106}} + \frac{4\left(-2-\frac{11(1+i\sqrt{3})}{2\sqrt[3]{35+i\sqrt{106}}}-\frac{1}{2}(1-i\sqrt{3})\sqrt[3]{35+i\sqrt{106}}\right)}{-6+\frac{11(1+i\sqrt{3})}{2\sqrt[3]{35+i\sqrt{106}}}+\frac{1}{2}(1-i\sqrt{3})\sqrt[3]{35+i\sqrt{106}}} & -\frac{-2-\frac{11(1+i\sqrt{3})}{2\sqrt[3]{35+i\sqrt{106}}}-\frac{1}{2}(1-i\sqrt{3})\sqrt[3]{35+i\sqrt{106}}}{-6+\frac{11(1+i\sqrt{3})}{2\sqrt[3]{35+i\sqrt{106}}}+\frac{1}{2}(1-i\sqrt{3})\sqrt[3]{35+i\sqrt{106}}} \\ -5 - \frac{11(1-i\sqrt{3})}{2\sqrt[3]{35+i\sqrt{106}}} - \frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})\sqrt[3]{35+i\sqrt{106}} + \frac{4\left(-2-\frac{11(1-i\sqrt{3})}{2\sqrt[3]{35+i\sqrt{106}}}-\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})\sqrt[3]{35+i\sqrt{106}}\right)}{-6+\frac{11(1-i\sqrt{3})}{2\sqrt[3]{35+i\sqrt{106}}}+\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})\sqrt[3]{35+i\sqrt{106}}} & -\frac{-2-\frac{11(1-i\sqrt{3})}{2\sqrt[3]{35+i\sqrt{106}}}-\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})\sqrt[3]{35+i\sqrt{106}}}{-6+\frac{11(1-i\sqrt{3})}{2\sqrt[3]{35+i\sqrt{106}}}+\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})\sqrt[3]{35+i\sqrt{106}}} \end{pmatrix}$$

In[48] := **Clear[a, b, c]**

**Υπολογισμός παραγώγων**

$$\text{In}[49] := \partial_x \left( x^2 - 5x + \frac{6}{x-1} \right)$$

$$\text{Out}[49] = 2x - \frac{6}{(x-1)^2} - 5$$

**Υπολογισμός ολοκληρωμάτων**

$$\text{In}[50] := \int \frac{x-1}{x^2-5x+6} dx$$

$$\text{Out}[50] = 2 \log(x-3) - \log(x-2)$$

**Επίλυση διαφορικών εξισώσεων**



```
In[51]:= DSolve[y''[x] == a y'[x] + y[x], y, x]
```

```
Out[51]= {{y -> Function[{x}, e^(1/2 (a - sqrt(a^2 + 4)) x) c1 + e^(1/2 (a + sqrt(a^2 + 4)) x) c2]}}
```

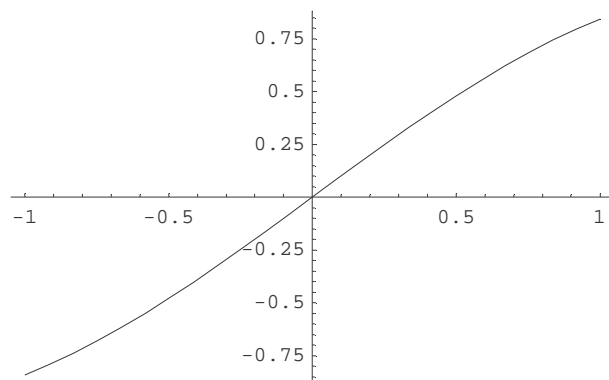
```
In[52]:= DSolve[{y[x] == -z'[x], z[x] == -y'[x]}, {y[x], z[x]}, x]
```

```
Out[52]= {{z(x) -> 1/2 e^-x (1 + e^2x) c1 - 1/2 e^-x (-1 + e^2x) c2, y(x) -> 1/2 e^-x (1 + e^2x) c2 - 1/2 e^-x (-1 + e^2x) c1}}
```

## ■ Γραφικές Παραστάσεις

Το *Mathematica* σου δίνει την δυνατότητα να δημιουργείς την γραφική παράσταση μιας συνάρτησης

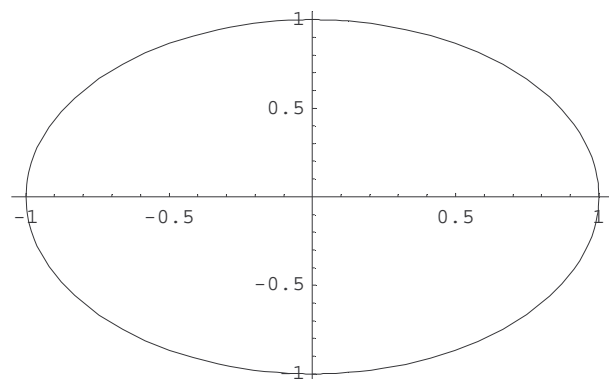
```
In[53]:= Plot[Sin[x], {x, -1, 1}]
```



```
Out[53]= -Graphics-
```

ή και παραπάνω από μια συναρτήσεων μαζί

```
In[54]:= Plot[{Sqrt[1 - x^2], -Sqrt[1 - x^2]}, {x, -1, 1}]
```



```
Out[54]= -Graphics-
```

Περισσότερες πληροφορίες για τα ορίσματα της παραπάνω συνάρτησης μπορείς να πάρεις γράφοντας

```
In[55]:= ?Plot
```

```
Plot[f, {x, xmin, xmax}] generates a plot of f as a function of x from xmin to
xmax. Plot[{f1, f2, ... }, {x, xmin, xmax}] plots several functions fi. More...
```

In[56]:= ?? Plot

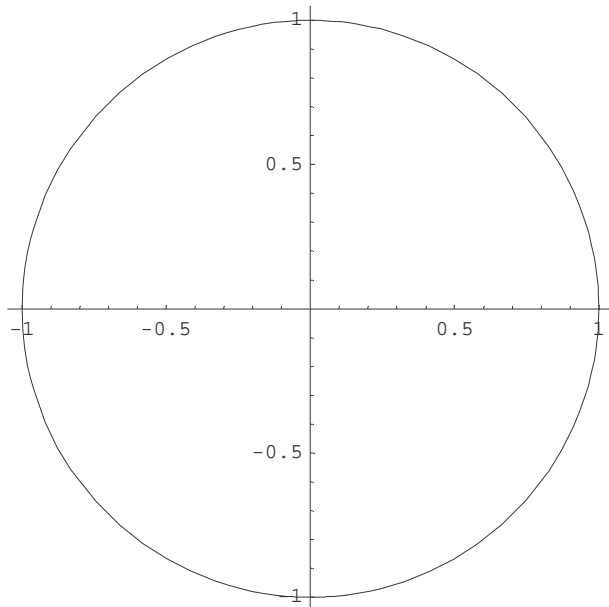
Plot[f, {x, xmin, xmax}] generates a plot of f as a function of x from xmin to xmax. Plot[{f1, f2, ... }, {x, xmin, xmax}] plots several functions fi. **More...**

Attributes[Plot] = {HoldAll, Protected}

Options[Plot] = {AspectRatio →  $\frac{1}{\text{GoldenRatio}}$ , Axes → Automatic, AxesLabel → None, AxesOrigin → Automatic, AxesStyle → Automatic, Background → Automatic, ColorOutput → Automatic, Compiled → True, DefaultColor → Automatic, Epilog → {}, Frame → False, FrameLabel → None, FrameStyle → Automatic, FrameTicks → Automatic, GridLines → None, ImageSize → Automatic, MaxBend → 10., PlotDivision → 30., PlotLabel → None, PlotPoints → 25, PlotRange → Automatic, PlotRegion → Automatic, PlotStyle → Automatic, Prolog → {}, RotateLabel → True, Ticks → Automatic, DefaultFont → \$DefaultFont, DisplayFunction → \$DisplayFunction, FormatType → \$FormatType, TextStyle → \$TextStyle}

Συνεπώς μπορούμε να αλλάξουμε το AspectRatio από  $1/\varphi$  σε Automatic και να έχουμε

In[57]:= Plot[{Sqrt[1 - x^2], -Sqrt[1 - x^2]}, {x, -1, 1}, AspectRatio → Automatic]



Out[57]= - Graphics -

Μπορούμε και να δημιουργήσουμε ένα σύνολο σημείων (ή να καλέσουμε ένα σύνολο σημείων από ένα αρχείο)

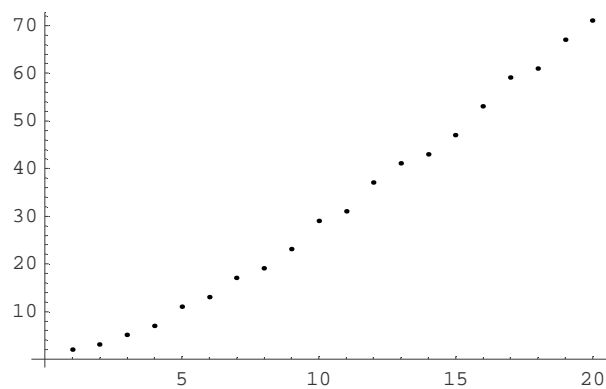
```
In[58]:= Table[{i, Prime[i]}, {i, 1, 20}]
```

```
Out[58]=
```

1	2
2	3
3	5
4	7
5	11
6	13
7	17
8	19
9	23
10	29
11	31
12	37
13	41
14	43
15	47
16	53
17	59
18	61
19	67
20	71

και να σχεδιάσουμε την γραφική παράσταση των σημείων αυτών

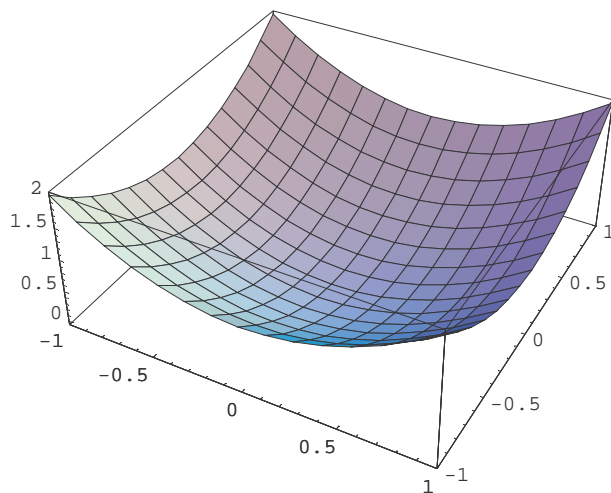
```
In[59]:= ListPlot[%]
```



```
Out[59]= -Graphics-
```

Μπορούμε να σχεδιάσουμε και γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων δύο μεταβλητών

```
In[60]:= Plot3D[x^2 + y^2, {x, -1, 1}, {y, -1, 1}]
```

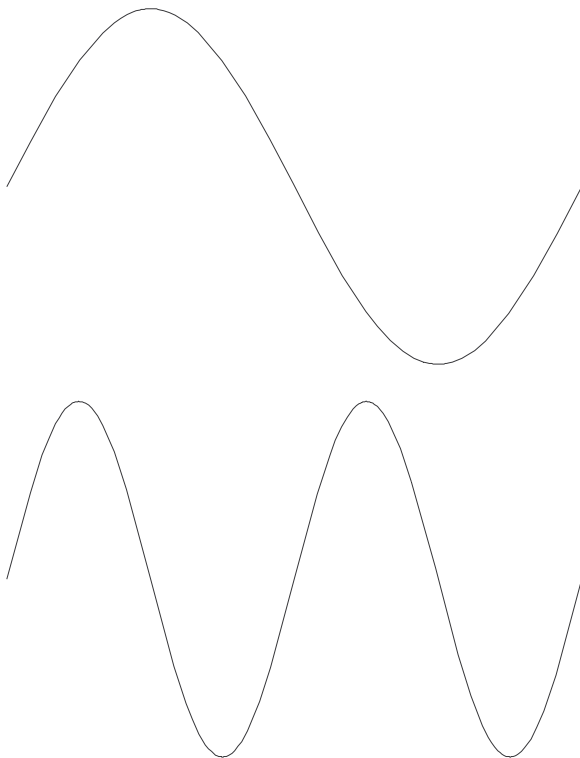


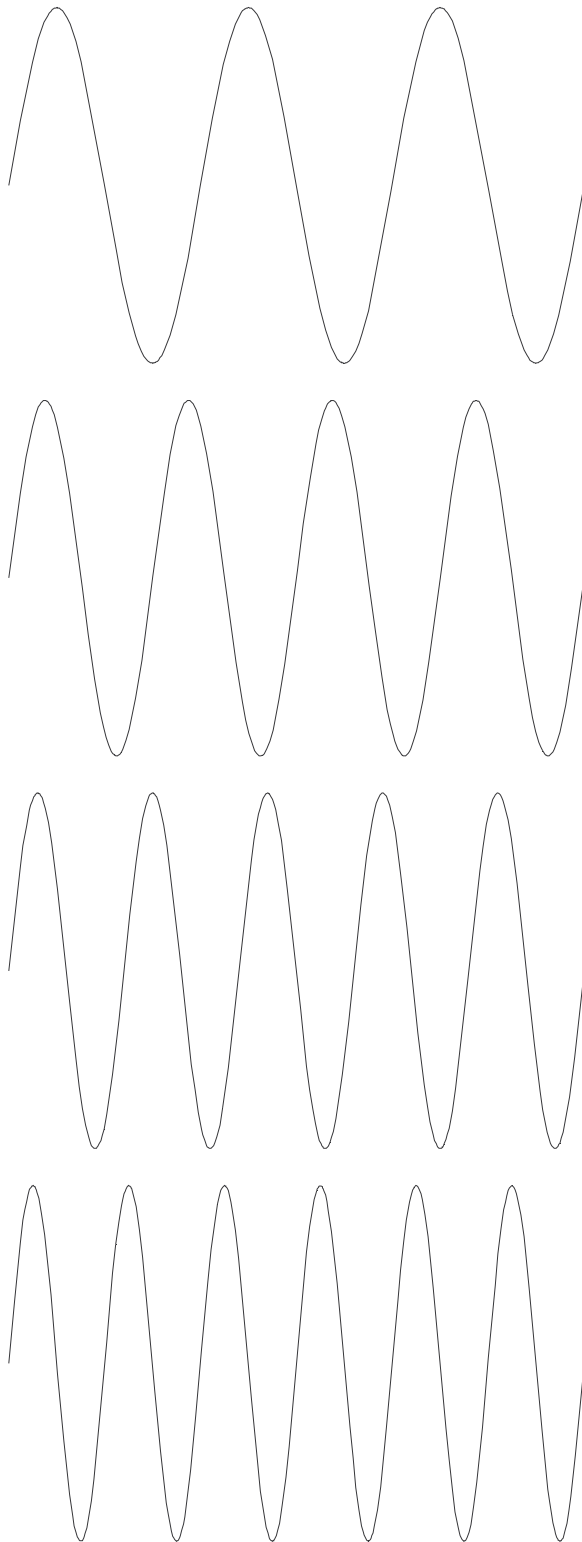
```
Out[60]= -SurfaceGraphics-
```

Επίσης μπορούμε να δώουμε κίνηση στα γραφικά μας.

```
In[61]:= << Graphics`Animation`
```

```
In[62]:= Animate[Plot[Sin[n x], {x, 0, 2 Pi}, Axes → False], {n, 1, 6, 1}]
```





## ■ Προγραμματισμός

### Αναδρομικός προγραμματισμός

Μπορούμε να ορίσουμε αναδρομικά μια συνάρτηση

```
In[63]:= fib[n_] := fib[n-1] + fib[n-2]
```

```
In[64]:= fib[1] = fib[2] = 1;
```

και να παρακολουθήσουμε την ροή εκτέλεσης της αναδρομικής συνάρτησης

```
In[65]:= Trace[fib[3]]
```

```
Out[65]= {fib(3), fib(3-2) + fib(3-1), {{3-1, 2}, fib(2), 1}, {{3-2, 1}, fib(1), 1}, 1+1, 2}
```

Ο χρόνος εκτέλεσης για την εύρεση του 20ου όρου της ακολουθίας Fibonacci δίνεται παρακάτω.

```
In[66]:= Timing[fib[20]]
```

```
Out[66]= {0.09 Second, 6765}
```

### Επαναληπτικός προγραμματισμός

Ένας άλλος τρόπος δημιουργίας της ακολουθίας Fibonacci είναι μέσω χρήσης εντολών όπως if, while, do, for

```
In[67]:= fibon[n_] := Module[{f1, f2, i, f},
  If[n == 1, 1, If[n == 2, 1,
    {f1 = 1;
     f2 = 1;
     For[i = 3, i ≤ n, i++,
      {f = f1 + f2;
       f1 = f2;
       f2 = f}];
    }];
  f]]
```

```
In[68]:= Timing[fibon[20]]
```

```
Out[68]= {0. Second, 6765}
```

και ο αντίστοιχος χρόνος εκτέλεσης είναι σαφώς μικρότερος. Συνεπώς υπάρχουν διάφοροι αλγόριθμοι επίλυσης ενός προβλήματος, από τους οποίους διαλέγουμε αυτόν που σπαταλάει τον λιγότερο χρόνο εκτέλεσης και την λιγότερη μνήμη. Παρακάτω παρατηρούμε ότι υπάρχει έτοιμη συνάρτηση για τον υπολογισμό της ακολουθίας Fibonacci.

```
In[69]:= Timing[Fibonacci[20]]
```

```
Out[69]= {0.01 Second, 6765}
```

Παρακάτω βλέπουμε ένα πρόγραμμα που υπολογίζει τον πρώτο αριθμό Fibonacci που διαρείται ακριβώς με τον ακέραιο m.

```
In[70]:= f[m_Integer] := Module[{f1, f2, i, f},  
          f1 = 1;  
          f2 = 1;  
          f = f1 + f2;  
          i = 3;  
          While[Mod[f, m] != 0,  
            {f1 = f2;  
              f2 = f;  
              f = f1 + f2;  
              i = 1 + 1};  
          i  
          f]
```

```
In[71]:= f[10000]
```

```
Out[71]= 228479304630411740944409778573138083969743732666351215959180611914765272871766105279286421610339.  
82859875257772459110680293288885488946370921556605869487614004496219391482417564822318379989303.  
04186018240407020253870104721883455308441936452233630108958005012558841818300740417714867730092.  
11385911849973328864796159790451861451243172818949373137752917587124026031896837449829951127791.  
11634555016698116660996015167628540246659448706466312058255821936740105469622385320985466750788.  
94538438316897897918194050888182844555676487867866835124932058317755691250095837047579661822463.  
76599687164326746950980286730349729932864490055467600841423487211943846861126369785740768940094.  
61844147961740145981412135017248076815776942588097824588306982797861431287280340345674758255938.  
20235312290117389143092055356161961577932854563663373142344997129310911861066868063798922437052.  
14380840179206225380002453451794625668392161966067345207647593208045237731499044235673662089066.  
68563368851988894612612829320065038110159008627125389917871508237592315265957940441560576337984.  
36339941784594283413547028985892238727816289040157376309866230076243214741083506233357326938093.  
84128372230493260277083960905696134414705474300937774098336437105550860526924307105727917085263.  
36502136300749977703241002393887810062570098155256887608104269014045009364966586792430536373240.  
24952475948933618433207062910708346307449189251284572370514601246098464451926068458870165436968.  
12150199385786566407201864095668957219116127927014466825231285712989060158981783083305776796288.  
85354678689589383763020779711531165433548980000
```