Εισαγωγή στη Θεωρία του Βέλτιστου Ελέγχου

Επικ. Καθ. Ν. Καραμπετάκης
Τμήμα Μαθηματικών, Α.Π.Θ.

Στόχος του Βέλτιστου Ελέγχου

Ο στόχος του βέλτιστου ελέγχου, είναι να προσδιορίσει τα σήματα εισόδου τα οποία θα εξαναγκάσουν μια διαδικασία να ικανοποιήσει φυσικούς περιορισμούς και ταυτόχρονα να ελαχιστοποιήσει (μεγιστοποιήσει) κάποια κριτήρια επίδοσης.

Παράδειγμα. Ελαχιστοποίηση καυσίμων κατά την διάρκεια πτήσης ενός αεροσκάφους.

Διατύπωση του προβλήματος

- Μαθηματική περιγραφή του συστήματος
- Προσδιορισμός φυσικών περιορισμών του συστήματος
- Προσδιορισμός των κριτηρίων απόδοσης

Μαθηματική περιγραφή του συστήματος – Μη γραμμικά συστήματα

Συνεχή συστήματα

$$\dot{x}(t) = a\left(x(t),u(t),t\right),\ y(t) = c\left(x(t),u(t),t\right)$$

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \text{ (state vector)}, u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{pmatrix} \text{ (input vector)}, y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} \text{ (output vector)}$$

Διακριτά συστήματα

$$x\left((k+1)T\right) = a\left(x(kT),u(kT),T\right),\ y\left(kT\right) = c\left(x(kT),u(kT),T\right)$$

$$x(kT) = \begin{pmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \\ \vdots \\ x_n(kT) \end{pmatrix} \text{ (state vector)}, u(kT) = \begin{pmatrix} u_1(kT) \\ u_2(kT) \\ \vdots \\ u_n(kT) \end{pmatrix} \text{ (input vector)}, y(kT) = \begin{pmatrix} y_1(kT) \\ y_2(kT) \\ \vdots \\ y_n(kT) \end{pmatrix} \text{ (output vector)}$$

Μαθηματική περιγραφή του συστήματος – Γραμμικά συστήματα

Χρονικά μεταβαλλόμενα

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

$$A(t) \in R(t)^{n\times n}, B(t) \in R(t)^{n\times m}$$

Χρονικά αμετάβλητα

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$A \in R^{n\times n}, B \in R^{n\times m}$$

Χρονικά μεταβαλλόμενα

$$x((k+1)T) = A(kT)x(kT) + B(kT)u(kT)$$

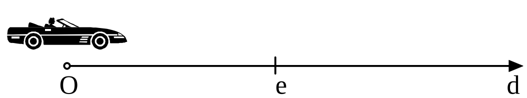
$$A(kT) \in R(kT)^{n\times n}, B(kT) \in R(kT)^{n\times m}$$

Χρονικά αμετάβλητα

$$x((k+1)T) = Ax(kT) + Bu(kT)$$

$$A \in R^{n\times n}, B \in R^{n\times m}$$

Παράδειγμα



d(t)=απόσταση
a(t)=επιτάχυνση από πεντάλ γκαζιού
b(t)=επιβράδυνση από πεντάλ φρένου

$$\ddot{d}(t) = a(t) + b(t)$$

$$x_1(t) = d(t) \Rightarrow \dot{x}_1(t) = \dot{d}(t)$$

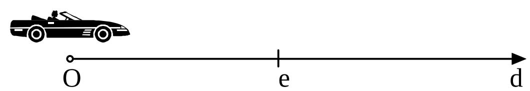
$$x_2(t) = \dot{d}(t) = \dot{x}_1(t)$$

$$\ddot{d}(t) = a(t) + b(t) \Rightarrow \dot{x}_2(t) = a(t) + b(t)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d(t) \\ \dot{d}(t) \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a(t) \\ b(t) \end{bmatrix}$$

Φυσικοί περιορισμοί για διάνυσμα καταστάσεως



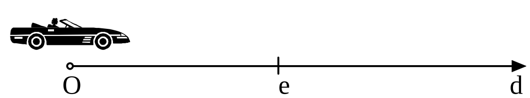
Ας θεωρήσουμε ότι το παραπάνω αυτοκίνητο ξεκινά από μηδενική ταχύτητα και θέλει να φτάσει και να σταματήσει στο σημείο e.

$$\begin{bmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d(t_0) \\ \dot{d}(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} x_1(t_f) \\ x_2(t_f) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d(t_f) \\ \dot{d}(t_f) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ 0 \end{bmatrix}$$

Αν υποθέσουμε ότι το αυτοκίνητο δεν προσπερνά το σημείο e και μετά επιστρέφει σε αυτό, έχουμε

$$0 \le x_1(t) \le e$$
$$0 \le x_2(t)$$

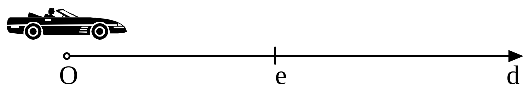
Φυσικοί περιορισμοί για είσοδο



•Η επιτάχυνση περιορίζεται από τις επιδόσεις της μηχανής (έστω μέγιστη επιτάχυνση M1).
•Η επιβράδυνση περιορίζεται από τις παραμέτρους των φρένων (έστω μέγιστη επιβράδυνση M2).

$$0 \le u_1(t) \le M_1$$
$$-M_2 \le u_2(t) \le 0$$

Κριτήριο απόδοσης



Ελάχιστη κατανάλωση καυσίμων.
Αν ο ρυθμός κατανάλωσης καυσίμων είναι ανάλογος της ταχύτητας και της επιτάχυνσης και έχουμε G λίτρα βενζίνης στο αυτοκίνητο, τότε θα πρέπει :

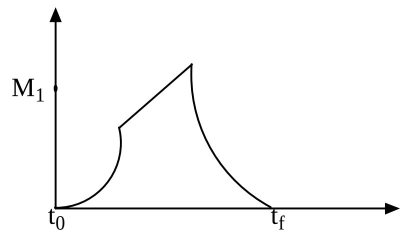
$$\int_{t_0}^{t_f}\left[k_1 u_1(t)+k_2 u_2(t)\right]dt \le G$$

Ορισμός των επιτρεπτών καταστάσεων-εισόδων

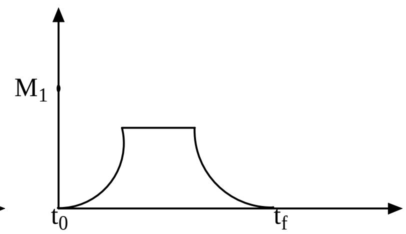
Ορισμός. Μια είσοδος λέγεται *επιτρεπτή* (admissible control input) αν ικανοποιεί τους φυσικούς περιορισμούς της εισόδου του συστήματος στο χρονικό διάστημα $\left[t_0,t_f\right]$

Ορισμός. Ένα διάνυσμα καταστάσεως λέγεται *επιτρεπτό* (admissible state trajectory) αν ικανοποιεί τους φυσικούς περιορισμούς του διανύσματος καταστάσεως του συστήματος στο χρονικό διάστημα $\left[t_0,t_f\right]$

Παράδειγμα επιτρεπτών-μη επιτρεπτών εισόδων



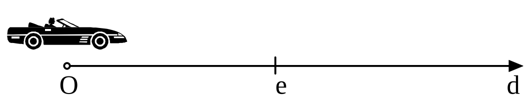
Μη επιτρεπτή είσοδος



Επιτρεπτή είσοδος

Κριτήριο απόδοσης (performance measure)

Για να μετρήσουμε την απόδοση του συστήματος ποσοτικά ο σχεδιαστής του συστήματος επιλέγει ένα ποσοτικό κριτήριο. Ως *βέλτιστο έλεγχο* εννοούμε την είσοδο που ελαχιστοποιεί (ή μεγιστοποιεί) το κριτήριο αυτό.



Αν θέλουμε το παραπάνω αυτοκίνητο να φτάσει στο συντομότερο δυνατό χρόνο τότε η ποσότητα που θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε είναι η παρακάτω :

$$J = t_f - t_0$$

Προβλήματα ελαχίστου χρόνου (minimum time problem)

Να βρεθεί η επιτρεπτή είσοδος που μεταφέρει το σύστημα μας από μια αρχική κατάσταση σε μια τελική κατάσταση στον ελάχιστο δυνατό χρόνο.

Κριτήριο απόδοσης

$$J = t_f - t_0 = \int_{t_0}^{t_f} dt$$

Προβλήματα ελέγχου τελικής τιμής (terminal control problem)

Να βρεθεί η επιτρεπτή είσοδος η οποία ελαχιστοποιεί την την απόκλιση της τελικής τιμής του διανύσματος καταστάσεως από μια επιθυμητή τιμή.

Κριτήριο απόδοσης

$$J = \sum_{i=1}^{n} \left[x_i(t_f) - r_i(t_f) \right]^2 = \left\| x(t_f) - r(t_f) \right\|^2$$

ή πιο γενικά

$$J = \left[x(t_f) - r(t_f) \right] H \left[x(t_f) - r(t_f) \right]$$

όπου *H* συμμετρικός θετικά ημιορισμένος πίνακας.

Παράδειγμα. Πορεία βαλλιστικού πύραυλου για να πετύχει τον στόχο του.

Προβλήματα ελάχιστης ενέργειας (minimum control effort problem)

Να βρεθεί η επιτρεπτή είσοδος η οποία μεταφέρει το σύστημα μας από μια αρχική κατάσταση σε μια τελική κατάσταση καταβάλλοντας την ελάχιστη δυνατή είσοδο.

Κριτήριο απόδοσης

Ελάχιστα καύσιμα $J = \sum_{i=1}^{n} \left[b_i \left| u_i(t) \right| \right], b_i > 0$

Ελάχιστη ενέργεια $J = \int_{t_0}^{t_f} \left[u^T(t) R u(t) \right] dt = \int_{t_0}^{t_f} \left\| u(t) \right\|_R^2 dt$

όπου *R* συμμετρικός θετικά ορισμένος πίνακας.

Παράδειγμα. Ελάχιστα καύσιμα για την κίνηση ενός αεροπλάνου, αυτοκινήτου κ.λ.π..

Προβλήματα παρακολούθησης (Tracking problem)

Να βρεθεί η επιτρεπτή είσοδος η οποία προσπαθεί να διατηρήσει το διάνυσμα κατάστασης σε μια επιθυμητή τροχιά.

Κριτήριο απόδοσης

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \left[\left[x(t) - r(t) \right]^T Q \left[x(t) - r(t) \right] \right] dt = \int_{t_0}^{t_f} \left\| x(t) - r(t) \right\|_Q^2 dt$$

όπου *Q* συμμετρικός θετικά ορισμένος πίνακας.

Παράδειγμα. Πύραυλος που ακολουθεί τον στόχο.

Συνδυασμός παρακολούθησης και ελάχιστης ενέργειας (tracking problem in combination with minimum control effort)

Να βρεθεί η επιτρεπτή είσοδος η οποία προσπαθεί να διατηρήσει το διάνυσμα κατάστασης σε μια επιθυμητή τροχιά καταβάλλοντας την ελάχιστη δυνατή ενέργεια.

Κριτήριο απόδοσης

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \left[\left\| x(t) - r(t) \right\|_Q^2 + \left\| u(t) \right\|_R^2 \right] dt$$

όπου *Q,R* συμμετρικά θετικά ορισμένοι πίνακες.

Παράδειγμα. Πύραυλος που ακολουθεί τον στόχο ξοδεύοντας τα λιγότερα καύσιμα.

Συνδυασμός παρακολούθησης και ελάχιστης ενέργειας (tracking problem in combination with minimum control effort)

Αν επιπλέον θέλουμε και η τελική τιμή του διανύσματος κατάστασης να είναι όσο το δυνατό πιο κοντά σε μια επιθυμητή τιμή, τότε το κριτήριο δίνεται παρακάτω :

Κριτήριο απόδοσης

$$J = \left\| x(t_f) - r(t_f) \right\|_H^2 + \int_{t_0}^{t_f} \left[\left\| x(t) - r(t) \right\|_Q^2 + \left\| u(t) \right\|_R^2 \right] dt$$

όπου *Q,R* συμμετρικά θετικά ορισμένοι πίνακες και *H* συμμετρικά θετικά ημιορισμένος πίνακας.

Προβλήματα ρυθμιστή (regulator problem)

Πρόκειται για ειδική περίπτωση του προβλήματος ανίχνευσης στο οποίο το επιθυμητό διάνυσμα κατάστασης είναι το μηδενικό.

Κριτήριο απόδοσης

$$J = \left\| x(t_f) \right\|_H^2 + \int_{t_0}^{t_f} \left[\left\| x(t) \right\|_Q^2 \right] dt$$

όπου *Q* συμμετρικά θετικά ορισμένος πίνακες και H συμμετρικά θετικά ημιορισμένος πίνακας.

Το γενικό πρόβλημα της Θεωρίας Βέλτιστου Ελέγχου

Να υπολογιστεί μια *επιθυμητή είσοδος* u*(t) η οποία θα οδηγήσει το σύστημα :

$$\dot{x}(t) = a\left(x(t), u(t), t \right)$$

σε μια *επιθυμητή τροχιά* x*(t) η οποία θα ελαχιστοποιήσει τον παρακάτω δείκτη απόδοσης

$$J = h\left(x(t_f), t_f \right) + \int_{t_0}^{t_f} g\left(x(t), u(t), t \right) dt$$

Η είσοδος u*(t) ονομάζεται *βέλτιστος έλεγχος* (*optimal control*) και το διάνυσμα καταστάσεως x*(t) ονομάζεται *βέλτιστη τροχιά* (*optimal trajectory*).

Παρατηρήσεις

- Υπάρχει λύση ;
- Είναι μοναδική ;
- Η u*(t) είναι βέλτιστη αν

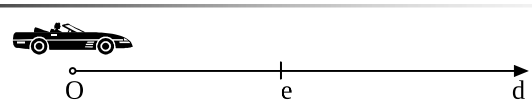
$$J^* = h\left(x^*(t_f),t_f\right) + \int_{t_0}^{t_f} g\left(x^*(t),u^*(t),t\right)dt$$

$$\leq h\left(x(t_f),t_f\right) + \int_{t_0}^{t_f} g\left(x(t),u(t),t\right)dt$$

$$\forall u(t) \in U, x(t) \in X$$

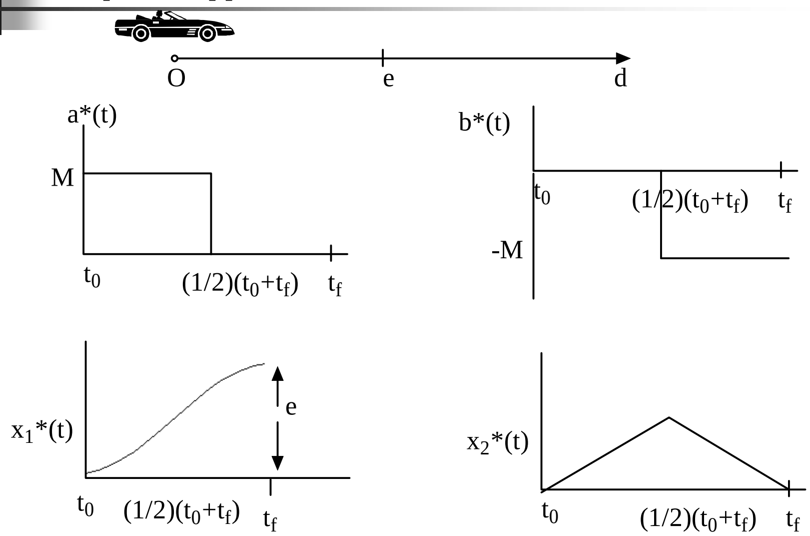
Μιλάμε λοιπόν για **ολικό** και όχι **τοπικό** ελάχιστο.

Παράδειγμα



Η επίλυση στο πρόβλημα που παρουσιάσαμε στην αρχή με τις προϋποθέσεις για τις εισόδους (με την προϋπόθεση ότι η μέγιστη επιτάχυνση είναι M αλλά και η μέγιστη επιβράδυνση είναι –M) και το διάνυσμα κατάστασης οδηγεί στην παρακάτω λύση :

Παράδειγμα



Παράδειγμα

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} x_1(s) \\ x_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} x_1(s) \\ x_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s^2} \\ 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s^2} \\ 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{s^2} & \frac{1}{s^2} \\ \frac{1}{s} & \frac{1}{s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s^2}\left(u_1(s)+u_2(s)\right) \\ \frac{1}{s}\left(u_1(s)+u_2(s)\right) \end{bmatrix} \overset{u_1(t)+u_2(t)=e\delta^{(1)}(t)}{\Rightarrow}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(s) \\ x_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{e}{s} \\ e \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ e\delta(t) \end{bmatrix}$$

Ν. Καραμπετάκης, Τμήμα Μαθηματικών
Α.Π.Θ.

Βασικές έννοιες

1. Επίλυση συστημάτων – ελεγξιμότητα – παρατηρησιμότητα.
2. Θετικά-αρνητικά ορισμένοι πίνακες.
3. Διαφορικός λογισμός πολλών μεταβλητών.
4. Βελτιστοποίηση συναρτήσεων με ή χωρίς συνθήκες.

Επίλυση συστημάτων στον χώρο των καταστάσεων

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$A \in R^{n\times n}, B \in R^{n\times m}$$

$$x(t) = L^{-1}\left\{\left(sI - A\right)^{-1} x(0) + \left(sI - A\right)^{-1} BU(s)\right\} =$$

$$= e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

Ελεγξιμότητα

Ένα σύστημα

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

ονομάζεται ελέγξιμο, αν

$$\forall x(0), \exists t_1 > 0 \wedge u(t), t \in [0, t_1] : x(t_1) = 0$$

Κριτήρια Ελεγξιμότητας

Το (A,B) είναι ελέγξιμο ανν

$$rank_R\begin{pmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{pmatrix} = n, A \in R^{n\times n}, B \in R^{n\times m}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B} u(t)$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}; AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 9 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$A^2B = A(AB) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 9 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 47 \\ 50 \\ 47 \end{bmatrix}$$

$$rank_R\begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} = rank_R \begin{bmatrix} 1 & 8 & 47 \\ 2 & 9 & 50 \\ 1 & 7 & 47 \end{bmatrix} = 3$$

Παρατηρησιμότητα

Ένα σύστημα
$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

ονομάζεται παρατηρήσιμο, αν υπάρχει πεπερασμένος χρόνος $t_1 \geq t_0$ τέτοιος ώστε για κάθε αρχική κατάσταση $x_0:=x(t_0)$, γνώση της εισόδου $u(t),\{t_0 \leq t \leq t_1\}$, και της εξόδου $\{y(t),\ t_0 \leq t \leq t_1\}$ επιτρέπουν τον προσδιορισμό της αρχικής κατάστασης x_0.

Κριτήρια Παρατηρησιμότητας

Το (A,C) είναι παρατηρήσιμο ανν

$$rank_R \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = n, A \in R^{n\times n}, C \in R^{p\times n}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}; CA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B} u(t)$$

$$CA^2 = (CA)A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

$$rank_R \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = rank_R \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \end{bmatrix} = 2 < 3$$

Θεωρία Πινάκων

Έστω P,S δύο πραγματικοί συμμετρικοί πίνακες. Εάν

$$y^T Py > 0 \quad \forall y \neq 0$$

τότε ο P ονομάζεται θετικά ορισμένος (positive-definite matrix). Εάν

$$y^T Sy \geq 0 \quad \forall y \neq 0$$

τότε ο S ονομάζεται θετικά ημιορισμένος (positive semi-definite matrix).

Παρατηρήσεις. (όμοια για αρνητικά ορισμένους πίνακες)
- Αν ο S είναι θετικά ορισμένος τότε υπάρχει αντίστροφος.
- Αν ο P είναι θετικά ορισμένος και ο S είναι θετικά ημιορισμένος τότε ο P+S είναι θετικά ορισμένος (αποδείξτε το).
- Ο πραγματικός συμμετρικός πίνακας A είναι θετικά ορισμένος (συμμετρικά θετικά ορισμένος) ακριβώς όταν όλες οι ιδιοτιμές του A είναι θετικές (μη αρνητικές).

Θεωρία Πινάκων

Ο πίνακας P

$$P = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{vmatrix}$$

είναι θετικά ορισμένος αν

$$p_{11} > 0, \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{vmatrix} > 0, \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{vmatrix} > 0$$

Τα πρόσημα αλλάζουν αντίστοιχα για θετικά ημιορισμένους πίνακες ή αρνητικά ορισμένους ή ημιορισμένους πίνακες.

Διαφορικός λογισμός πολλών μεταβλητών

Η κλίση της συνάρτησης f σε σχέση με το x ορίζεται ως

$$\nabla_x f(x) = \frac{df}{dx} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_m} \end{bmatrix} \quad \mathrm{x} = \left(\mathrm{x}_1, x_2, ..., x_m\right)^T$$

Διαφορικός λογισμός πολλών μεταβλητών

Ιδιότητες της κλίσης των συναρτήσεων

$$\frac{\partial\left(x^T c\right)}{\partial x} = \frac{\partial\left(x_1 c_1 + x_2 c_2 + \cdots + x_m c_m\right)}{\partial x} = c$$

$$\frac{\partial\left(x^T M x\right)}{\partial x} = \frac{\partial\left(x^T \underbrace{\left[Mx\right]}_{c_1}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(\left(\underbrace{\left[M^T x\right]^T}_{c_2}\right) x\right)}{\partial x} =$$

$$= \frac{\partial\left(x^T \underbrace{\left[Mx\right]}_{c_1}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(x^T \underbrace{\left[M^T x\right]}_{c_2}\right)}{\partial x} = Mx + M^T x$$

Αν ο M είναι συμμετρικός

$$\frac{\partial\left(x^T M x\right)}{\partial x} = 2Mx$$

Διαφορικός λογισμός πολλών μεταβλητών

Ο πίνακας Hessian (hessian matrix) ή πίνακας καμπυλότητας

$$f_{xx} \triangleq \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}\right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_m} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_m^2} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 \left(x^T M x\right)}{\partial x^2} = \frac{\partial\left(\left(M + M^T\right)x\right)}{\partial x} = M + M^T$$

Αν ο M είναι συμμετρικός $\quad \dfrac{\partial^2 \left(x^T M x\right)}{\partial x^2} = 2M$

Διαφορικός λογισμός πολλών μεταβλητών

Μεταβολή μιας συνάρτησης εξαρτώμενης από δύο διανύσματα

$$f = f\left(x(t), y(t)\right) \Rightarrow df = \left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]^T dx + \left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]^T dy$$

Παραγώγιση πεπλεγμένων συναρτήσεων

$$f = f\left(x(t), y(t), t\right), y(t) = y\left(x(t), t\right)$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y^T}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\frac{df}{dt} = \left[\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y^T}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}\right]^T \frac{dx}{dt} + \left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]^T \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

Διαφορικός λογισμός πολλών μεταβλητών

Ανάπτυγμα Taylor μιας συνάρτησης

$$f(x) = f(x_0) + \left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]^T\Bigg|_{x=x_0} (x - x_0) + \frac{1}{2!}(x - x_0)^T \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right]\Bigg|_{x=x_0} (x - x_0) + O(3)$$

όπου ο όρος O(3) δηλώνει όρους τάξης μεγαλύτερης του 3.

$$\Delta f(x) = \left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]^T\Bigg|_{x=x_0} dx + \frac{1}{2!} dx^T \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right]\Bigg|_{x=x_0} dx + O(3)$$

Διαφορικός λογισμός πολλών μεταβλητών

Στατική βελτιστοποίηση

Η συνάρτηση f(x) παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο ανν υπάρχει x_0 τέτοιο ώστε

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]^T\Bigg|_{x=x_0} = 0$$

και ο πίνακας

$$K = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right]\Bigg|_{x=x_0}$$

είναι θετικά ορισμένος.

Διαφορικός λογισμός πολλών μεταβλητών

Στατική βελτιστοποίηση

Η συνάρτηση f(x) παρουσιάζει τοπικό μέγιστο ανν υπάρχει x_0 τέτοιο ώστε

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]^T\Bigg|_{x=x_0} = 0$$

και ο πίνακας

$$K = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right]\Bigg|_{x=x_0}$$

είναι αρνητικά ορισμένος.

Διαφορικός λογισμός πολλών μεταβλητών

Παρατηρήσεις

•Αν ο Κ είναι αόριστος (ούτε θετικά ορισμένος αλλά ούτε και αρνητικά ορισμένος τότε το σημείο αυτό αποτελεί ένα στάσιμο σημείο ή σαγματικό σημείο (saddle point).

•Αν ο πίνακας Κ είναι θετικά (αρνητικά) ημιορισμένος τότε το σημείο x_0 ονομάζεται ανώμαλο σημείο (singular point) και απαιτείται η εξέταση διαφορικών όρων ανώτερης τάξης για να καθορισθεί αν το σημείο αυτό αποτελεί τοπικό μέγιστο ή ελάχιστο.

•Για ολικά ακρότατα εκτός από τα παραπάνω εσωτερικά σημεία θα πρέπει επιπλέον να ψάξουμε ανάμεσα σε : α) συνοριακά σημεία του πεδίου ορισμού της f, και β) σε σημεία όπου οι μερικές παράγωγοι δεν υπάρχουν.

Άσκηση

Να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης

$$f\left(x,y\right)=xy-x^2-y^2-2x-2y+4$$

$$\left.\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=y-2x-2=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=x-2y-2=0\end{cases}\right\}\Rightarrow x=y=-2$$

$$K=\left.\begin{bmatrix}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\end{bmatrix}\right|_{x=y=-2}=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 1 & -2\end{bmatrix}<0$$

Άρα παρουσιάζει τοπικό μέγιστο f(-2,-2)=8 εφόσον ο πίνακας K είναι αρνητικά ορισμένος.

Άσκηση

Να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης

$$f\left(x,y\right)=2+2x+2y-x^2-y^2$$

Στην τριγωνική πλάκα, στο πρώτο τεταρτημόριο που περιορίζεται από τις ευθείες x=0,y=0,y=9-x.

Διαφορικός λογισμός πολλών μεταβλητών

Βελτιστοποίηση με περιορισμούς ισότητας

Να ελαχιστοποιηθεί η συνάρτηση J(x,u):R^n->R, κάτω από τους περιορισμούς f(x,u)=0, όπου f:^R^n->R^m και u(t) είναι το διάνυσμα ελέγχου και x(t) το διάνυσμα κατάστασης.

Ορίζουμε την συνάρτηση

$$L(x,u,\lambda) = J(x,u) + \lambda^T f(x,u)$$

που ονομάζεται Langrangian, ενώ η σταθερά $\lambda \in R^m$ ονομάζεται πολλαπλασιαστής Lagrange.

Διαφορικός λογισμός πολλών μεταβλητών

Η συνάρτηση J(x,u), υπό τον περιορισμό f(x,u)=0 παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο ανν υπάρχει x_0 τέτοιο ώστε

$$\left[\frac{\partial L}{\partial \lambda}\right]\Bigg|_{x=x_0,u=u_0} = f(x,u) = 0$$

$$\left[\frac{\partial L}{\partial x}\right]\Bigg|_{x=x_0,u=u_0} = \left[\frac{\partial J(x,u)}{\partial x}\right]\Bigg|_{x=x_0,u=u_0} + \left[\frac{\partial f(x,u)}{\partial x}\right]^T\Bigg|_{x=x_0,u=u_0} \lambda = 0$$

$$\left[\frac{\partial L}{\partial u}\right]\Bigg|_{x=x_0,u=u_0} = \left[\frac{\partial J(x,u)}{\partial u}\right]\Bigg|_{x=x_0,u=u_0} + \left[\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\right]^T\Bigg|_{x=x_0,u=u_0} \lambda = 0$$

και ο πίνακας

$$K = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial u} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial u \partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial u^2} \end{bmatrix}\Bigg|_{x=x_0,u=u_0}$$

είναι θετικά ορισμένος.

Διαφορικός λογισμός πολλών μεταβλητών

Η συνάρτηση J(x,u), υπό τον περιορισμό f(x,u)=0 παρουσιάζει τοπικό μέγιστο ανν υπάρχει x_0 τέτοιο ώστε

$$\left[\frac{\partial L}{\partial \lambda}\right]\Bigg|_{x=x_0,u=u_0} = f(x,u)=0$$

$$\left[\frac{\partial L}{\partial x}\right]\Bigg|_{x=x_0,u=u_0} = \left[\frac{\partial J(x,u)}{\partial x}\right]\Bigg|_{x=x_0,u=u_0} + \left[\frac{\partial f(x,u)}{\partial x}\right]^T\Bigg|_{x=x_0,u=u_0} \lambda = 0$$

$$\left[\frac{\partial L}{\partial u}\right]\Bigg|_{x=x_0,u=u_0} = \left[\frac{\partial J(x,u)}{\partial u}\right]\Bigg|_{x=x_0,u=u_0} + \left[\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\right]^T\Bigg|_{x=x_0,u=u_0} \lambda = 0$$

και ο πίνακας

$$K = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x \partial u} \\ \dfrac{\partial^2 L}{\partial u \partial x} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial u^2} \end{bmatrix}\Bigg|_{x=x_0,u=u_0}$$

είναι αρνητικά ορισμένος.

Άσκηση

Να υπολογίσετε το μέγιστο και ελάχιστο της συνάρτησης

$$J(x,y)=xy$$

πάνω στην έλλειψη

$$f(x,y)=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-1=0$$

Άσκηση

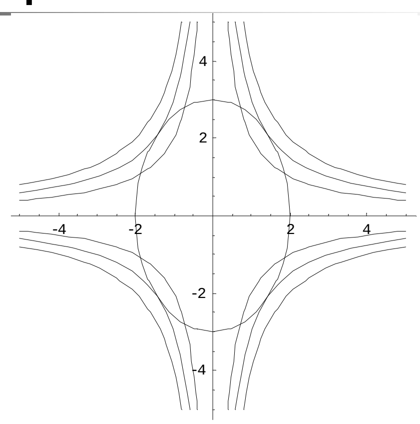
$$L(x,y) = J(x,y) + \lambda f(x,y) = xy + \lambda\left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 1\right)$$

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} - 1 = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial x} = y + \dfrac{\lambda x}{2} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = x + \dfrac{2\lambda y}{9} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \left\{\lambda = -3, x = -\sqrt{2}, y = -\dfrac{3}{\sqrt{2}}\right\} \\ \left\{\lambda = 3, x = -\sqrt{2}, y = \dfrac{3}{\sqrt{2}}\right\} \\ \left\{\lambda = -3, x = \sqrt{2}, y = \dfrac{3}{\sqrt{2}}\right\} \\ \left\{\lambda = 3, x = \sqrt{2}, y = -\dfrac{3}{\sqrt{2}}\right\} \end{array}\right\}$$

$$K_1 = \left.\begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial y^2} \end{bmatrix}\right|_{\substack{\lambda=-3 \\ x=-\sqrt{2} \text{ ή } \sqrt{2} \\ y=-\frac{3}{\sqrt{2}} \text{ ή } \frac{3}{\sqrt{2}}}} = \left.\begin{bmatrix} \dfrac{\lambda}{2} & 1 \\ 1 & \dfrac{2\lambda}{9} \end{bmatrix}\right|_{\substack{\lambda=-3 \\ x=-\sqrt{2} \text{ ή } \sqrt{2} \\ y=-\frac{3}{\sqrt{2}} \text{ ή } \frac{3}{\sqrt{2}}}} = \begin{bmatrix} -\dfrac{3}{2} & 1 \\ 1 & -\dfrac{2}{3} \end{bmatrix} \le 0$$

$$K_2 = \left.\begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial y^2} \end{bmatrix}\right|_{\substack{\lambda=3 \\ x=-\sqrt{2} \text{ ή } \sqrt{2} \\ y=\frac{3}{\sqrt{2}} \text{ ή } -\frac{3}{\sqrt{2}}}} = \left.\begin{bmatrix} \dfrac{\lambda}{2} & 1 \\ 1 & \dfrac{2\lambda}{9} \end{bmatrix}\right|_{\substack{\lambda=3 \\ x=-\sqrt{2} \text{ ή } \sqrt{2} \\ y=\frac{3}{\sqrt{2}} \text{ ή } -\frac{3}{\sqrt{2}}}} = \begin{bmatrix} \dfrac{3}{2} & 1 \\ 1 & \dfrac{2}{3} \end{bmatrix} \ge 0$$

Άσκηση



Άσκηση

Να ελαχιστοποιηθεί η τετραγωνική συνάρτηση κόστους

$$J(x,u) = \frac{1}{2}x^T Qx + \frac{1}{2}u^T Ru$$

$$x \in R^n, u \in R^r, f \in R^n, Q \geq 0, R > 0$$

όπου ο πίνακας Q (θετικά ημιορισμένος) και ο πίνακας R (θετικά ορισμένος) είναι συμμετρικοί πίνακες. Τα x,u υπόκεινται στον παρακάτω περιορισμό :

$$f(x,u) = x + Bu + c = 0$$

Εφόσον επιλύσετε την παραπάνω άσκηση, να εφαρμόσετε τα αποτελέσματα για

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, c = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix}$$