Η Παραμετρική Προσέγγιση στον Εύρωστο Έλεγχο

Δρ. Ε.Ν. Αντωνίου

Μεταδιδακτορικός Ερευνητής

Τμήμα Μαθηματικών, Α.Π.Θ.

Ιστορική Αναδρομή

- Κλασσική Θεωρία
  - Maxwell “On Governors” (1868) - Ρίζες της Θεωρίας Ελέγχου
  - Hermite (1856) – Συσχέτιση θέσης των ριζών πολυωνύμου με την «υπογραφή» τετραγωνικών μορφών
  - Routh (1877), Hurwitz (1895) – Αλγεβρικά Κριτήρια Ευστάθειας
  - Lyapunov (1892) – Εξίσωση Lyapunov – Μη γραμμικά συστήματα
  - Nyquist (1932), Bode (1945) – Γεωμετρικό Κριτήριο – Περιθώρια Ενίσχυσης και Φάσης
  - Pontryagin, Bellman, Kalman, Bucy (1960 – 1975) – Χώρος Καταστάσεων – Βέλτιστος Έλεγχος
  - Youla , Kucera, Desoer, Liu, Murray, Rosenbrock κ.α. (1970-1980) – Πολυωνυμική περιγραφή
- Ένα σημαντικό πρόβλημα:
  - Doyle (1978) – Η Θεωρία Βέλτιστου Ελέγχου **δεν μπορεί** να εγγυηθεί ικανοποιητικά περιθώρια ενίσχυσης και φάσης.

Ιστορική Αναδρομή

- Εύρωστος Έλεγχος (Robust Control)
  - Μη-Δομημένη Αβεβαιότητα (Διαταραχές Περιορισμένου Μέτρου)
    - Zames, Francis, Doyle, Kimura, Vidyasagar, Glover κ.α. (1980 - Σήμερα) - H_∞ Control – Small Gain Theorem.
  - Δομημένη Αβεβαιότητα (Παραμετρική Προσέγγιση)
    - Kharitonov (1979), Θεώρημα Kharitonov,
    - Soh, Berger, Dabke (1985) – Ακτίνα ευστάθειας πολυωνύμου στο χώρο των συντελεστών,
    - Barlett, Hollot, Lin (1988) – Πολυτοπική αβεβαιότητα – Θεώρημα Ακμών,
    - Biernacki, Hwang, Bhattacharyya (1987) Ακτίνα ευστάθειας πολυωνύμου στο χώρο των παραμέτρων,
    - Chapellat, Bhattacharyya (1989) - Γενικευμένο Θεώρημα Kharitonov,
    - Γεωμετρικός τόπος Tsypkin – Polyak (1991).

Παράδειγμα: Το ανάστροφο εκκρεμές

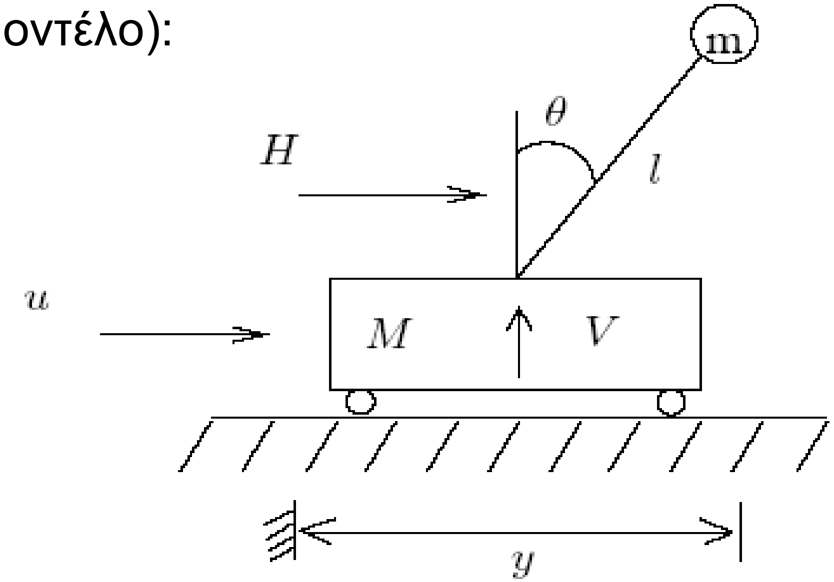
Θέτοντας (στο γραμμικοποιημένο μοντέλο):

$$x_1 = y, x_2 = \dot{y}, x_3 = \theta, x_4 = \dot{\theta}$$

Για

$$l = 1, g \simeq 10$$

Οι εξισώσεις κατάστασης είναι:



$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{20m}{m+2M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dfrac{20(m+M)}{m+2M} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{2}{m+2M} \\ 0 \\ -\dfrac{1}{m+2M} \end{pmatrix} u$$

Παράδειγμα: Το ανάστροφο εκκρεμές

- Το σύστημα είναι προφανώς ασταθές
- Εφαρμογή ανάδρασης κατάστασης της μορφής:

$$u = Kx + v$$

- Οι εξισώσεις κατάστασης του κλειστού συστήματος είναι:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{2k_1}{m+2M} & \frac{2k_2}{m+2M} & \frac{2k_3}{m+2M} - \frac{20m}{m+2M} & \frac{2k_4}{m+2M} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1}{m+2M} & -\frac{k_2}{m+2M} & \frac{20(m+M)}{m+2M} - \frac{k_3}{m+2M} & -\frac{k_4}{m+2M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{m+2M} \\ 0 \\ -\frac{1}{m+2M} \end{pmatrix} v$$

- Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του κλειστού συστήματος είναι:

$$p(s) = \frac{1}{m+2M}[(m+2M)s^4 + (k_4 - 2k_2)s^3 + (-20m - 20M - 2k_1 + k_3)s^2 + 20k_2 s + 20k_1]$$

Διαπιστώσεις – Ερωτήματα

- Η ευστάθεια του συστήματος εξαρτάται από τη θέση των ριζών του χαρακτηριστικού πολυωνύμου στο μιγαδικό επίπεδο.
- Οι συντελεστές του χαρακτηριστικού πολυωνύμου εξαρτώνται (γραμμικά) από τις παρακάτω παραμέτρους:
  - M, m – μάζες του αμαξιδίου και της σφαίρας
  - k_1, k_2, k_3, k_4 - συντελεστές της ανάδρασης κατάστασης
- Είναι δύσκολο να εφαρμόσουμε κλασσικά κριτήρια ευστάθειας (Routh, Hurwitz, Nyquist) λόγω του μεγάλου πλήθους των παραμέτρων.
- Δεδομένων των (M, m), μπορούμε να προσδιορίσουμε το σύνολο των (k_1, k_2, k_3, k_4) που καθιστούν το κλειστό σύστημα ευσταθές?
- Δεδομένου ενός αντιστάθμιστη (k_1, k_2, k_3, k_4) που σταθεροποιεί το σύστημα, πόσο «*μεγάλες*» μεταβολές των (M, m) είναι «*ανεκτές*» ώστε το σύστημα να παραμείνει ευσταθές?

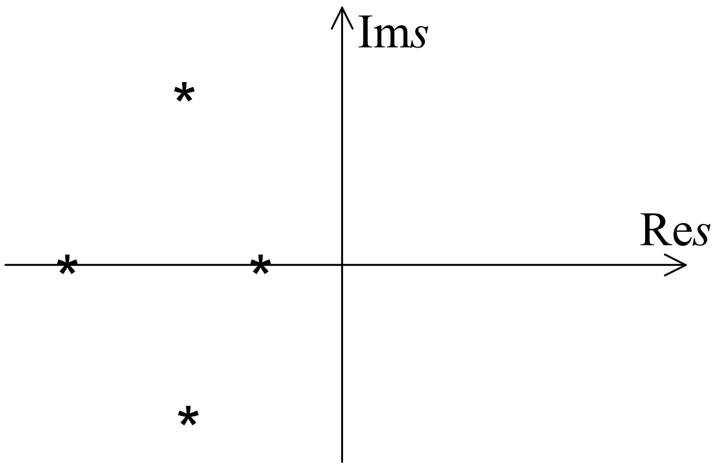
Ευστάθεια Hurwitz

Έστω: $$p(s) = p_0 + p_1 s + p_2 s^2 + \ldots + p_n s^n, \quad p_i \in \mathbb{R}$$

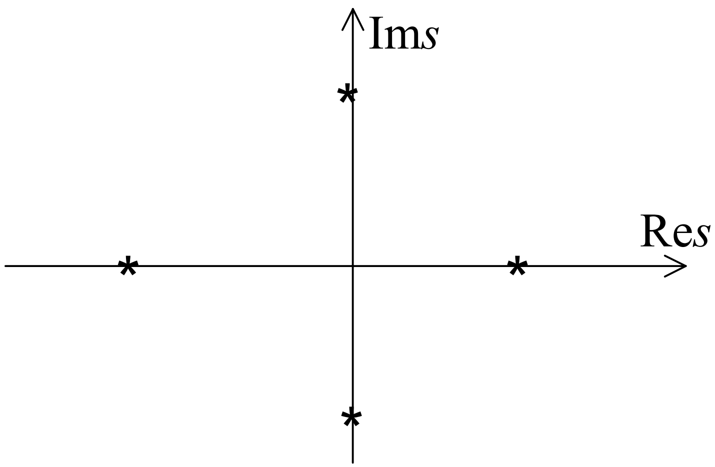
Με ρίζες: $$p(s_i) = 0, \; s_i \in \mathbb{C}, \; i = 1, 2, 3, \ldots, n$$

Ορισμός: $$\boxed{p(s) \text{ Hurwitz Stable } \Leftrightarrow \operatorname{Re} s_i < 0, \; i = 1, 2, 3, \ldots, n}$$

Αναγκαία Συνθήκη: $$p(s) \text{ Hurwitz Stable } \Rightarrow p_i > 0, \; i = 1, 2, 3, \ldots, n$$



Ρίζες Ευσταθούς Πολυωνύμου



Ρίζες Ασταθούς Πολυωνύμου

Θεώρημα Hermite - Biehler

Ορίζουμε:

$$p^{even}(s) = p_0 + p_2 s^2 + p_4 s^4 + ...$$

$$p^{odd}(s) = p_1 s + p_3 s^3 + p_5 s^5 + ...$$

και

$$p^e(\omega) = p^{even}(j\omega) = p_0 - p_2\omega^2 + p_4\omega^4 - ....$$

$$p^o(\omega) = \frac{p^{odd}(j\omega)}{j\omega} = p_1 - p_3\omega^2 + p_5\omega^4 - ...$$

Θεώρημα H-B:

$$\boxed{\begin{gathered} p(s)\,\text{Hurwitz Stable} \\ \Updownarrow \\ 0 < \omega_{e,1} < \omega_{o,1} < \omega_{e,2} < \omega_{o,2} < \omega_{e,3} < \omega_{o,3} < ..... \\ \omega_{e,i} \in \mathbb{R} : p_e(\omega_{e,i}) = 0,\ \ \omega_{o,i} \in \mathbb{R} : p_o(\omega_{o,i}) = 0 \end{gathered}}$$

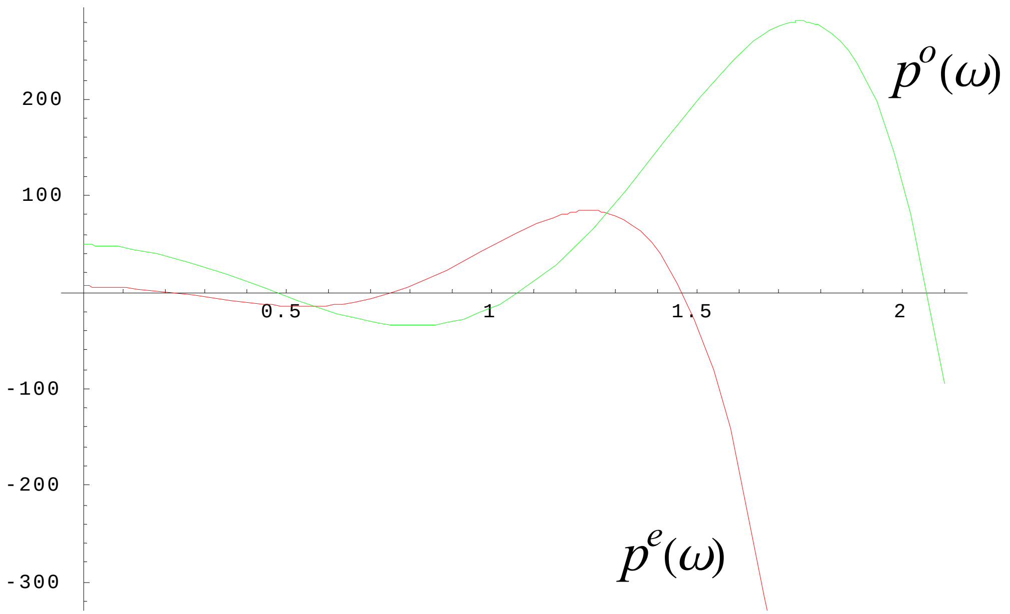
Παράδειγμα

Έστω το πολυώνυμο

$$p(s)=s^9+11s^8+52s^7+145s^6+266s^5+331s^4+280s^3+155s^2+49s+6$$

Έχουμε:

$$p^e(\omega)=11\omega^8-145\omega^6+331\omega^4-155\omega^2+6$$
$$p^o(\omega)=\omega^8-52\omega^6+266\omega^4-280\omega^2+49$$



Το πολυώνυμο είναι ευσταθές σύμφωνα με το Θεώρημα H-B

Το κριτήριο Routh-Hurwitz

Ορίζουμε την ακολουθία οριζουσών:

$$\Delta_0 = p_n,\ \Delta_1 = p_{n-1},\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} p_{n-1} & p_{n-3} \\ p_n & p_{n-2} \end{vmatrix},\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} p_{n-1} & p_{n-3} & p_{n-5} \\ p_n & p_{n-2} & p_{n-4} \\ 0 & p_{n-1} & p_{n-3} \end{vmatrix}, \ldots$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} p_{n-1} & p_{n-3} & p_{n-5} & \cdots & 0 & 0 \\ p_n & p_{n-2} & p_{n-4} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & p_{n-1} & p_{n-3} & p_{n-5} & \cdots & 0 \\ 0 & p_n & p_{n-2} & p_{n-4} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & p_0 \end{vmatrix}$$

Θεώρημα: $p(s) = p_0 + p_1 s + \ldots + p_n s^n$ Hurwitz ευσταθες $\Leftrightarrow \Delta_i > 0,\ i = 0,1,2,\ldots,n$

Το Θεώρημα Διάσχισης του Συνόρου (Boundary Crossing Theorem)

Έστω μια περιοχή ευστάθειας S. Στην περίπτωση της Hurwitz ευστάθειας:

$$S = \{s \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} s < 0\}$$

Έστω μια μονοπαραμετρική οικογένεια πολυωνύμων:

1. $p(\lambda, s) = p_0(\lambda) + p_1(\lambda)s + p_2(\lambda)s^2 + \ldots + p_n(\lambda)s^n, \lambda \in I = [a, b]$
2. $p_i(\lambda)$ συνεχεις συναρτησεις του λ
3. $\deg p(\lambda, s) = n, \forall \lambda \in I$

Θεώρημα: Αν $p(a, s)$ ειναι ευσταθες και $p(b, s)$ ασταθες, τοτε $\exists \rho \in (\mathrm{a,b}]$ ε.ω.

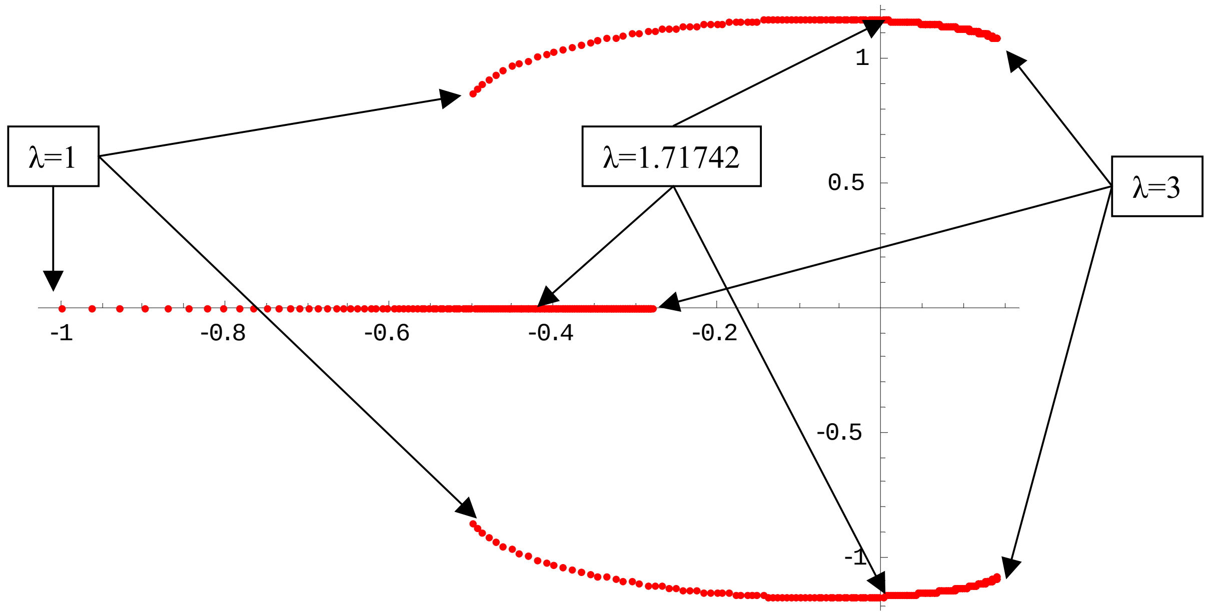
α) Το $p(\rho, s)$ εχει ολες του τις ριζες στο $S \cup \partial S$

β) Το $p(\rho, s)$ εχει τουλαχιστον μια ριζα στο ∂S

Το Θεώρημα Διάσχισης του Συνόρου (Παράδειγμα)

Έστω : $p(\lambda, s) = \lambda^2 s^3 + (3-\lambda)s^2 + (\lambda^2+1)s + \lambda,\ \lambda \in [1,3]$

Το ζητούμενο ρ του θεωρήματος είναι: ρ=1.71742



Ο Γεωμετρικός τόπος των ριζών του πολυωνύμου

Αρχή Εξαίρεσης του Μηδενός (Zero Exclusion Principle)

Έστω μια οικογένεια πολυωνύμων:

$$\Delta(s) = \{\delta(s,p),\ p \in \Omega\},\ \text{οπου}\ p \in \mathbb{R}^m\ \text{και}\ \Omega \subseteq \mathbb{R}^m$$

Που ικανοποιεί τις παρακάτω προϋποθέσεις:

1. Η $\Delta(s)$ περιεχει τουλαχιστον ενα ευσταθες πολυωνυμο
2. Το Ω ειναι συναφες με δρομους
3. $\deg \delta(s,p) = n,\ \forall p \in \mathbb{R}^m$

Θεώρημα: Καθε $\delta(s) \in \Delta(s)$ ειναι ευσταθες $\Leftrightarrow \delta(s^*) \neq 0, \forall p \in \Omega, \forall s^* \in \partial S$

Σημ. Η Αρχή Εξαίρεσης του Μηδενός είναι άμεση συνέπεια του Θεωρήματος Διάσχισης Συνόρου

Hurwitz ευστάθεια ευθυγράμμου τμήματος

Έστω: $p_1(s) = p_{10} + p_{11}s + \ldots + p_{1n}s^n,\ p_2(s) = p_{20} + p_{21}s + \ldots + p_{2n}s^n$

Ευθύγραμμο τμήμα των πολυωνύμων:

$$[p_1(s), p_2(s)] = \{p(s) : p(s) = \lambda p_1(s) + (1-\lambda)p_2(s), \lambda \in [0,1]\}$$

Ερώτημα:

Αν $p_1(s), p_2(s)$ είναι ευσταθή, ισχύει το ίδιο για κάθε $p(s) \in [p_1(s), p_2(s)]$?

Λήμμα (Segment Lemma):

Εστω $p_1(s), p_2(s)$ Hurwitz ευσταθη με $p_{1n}p_{2n} > 0$. Τοτε καθε $p(s) \in [p_1(s), p_2(s)]$ ειναι Hurwitz ευσταθες αν-ν δεν υπαρχει $\omega > 0$

1. $p_1^e(\omega)p_2^o(\omega) - p_2^e(\omega)p_1^o(\omega) = 0$
2. $p_1^e(\omega)p_2^e(\omega) \leq 0$
3. $p_1^o(\omega)p_2^o(\omega) \leq 0$

Παράδειγμα

Έστω τα ευσταθή πολυώνυμα:

$$p_1(\mathrm{s}) = 10s^3 + s^2 + 6s + 0.57$$

$$p_2(\mathrm{s}) = 10s^3 + 2s^2 + 8s + 1.57$$

Το ευθύγραμμο τμήμα των δύο πολυωνύμων:

$$p(s) = \lambda p_1(s) + (1-\lambda) p_2(s) = 10s^3 + (2-\lambda)s^2 + (8-2\lambda)s + 1.57 - \lambda$$

Για $\lambda = 0.5$

$$p(s) = 10s^3 + 1.5s^2 + 7s + 1.07$$

Οι ρίζες είναι:

$$-0.152765,\ 0.00138248 - 0.836911\,i,\ 0.00138248 + 0.836911\,i$$

Ασταθές!

Το θεώρημα Kharitonov

Έστω: $p(s) = p_0 + p_1 s + p_2 s^2 + \ldots + p_n s^n, \;\; p_i \in \mathbb{R}$

Ορίζουμε την οικογένεια πολυωνύμων: $I(s) = \{p(s) : p_i \in [p_i^-, p_i^+]\}$

Θεώρημα Kharitonov:

$$\text{Καθε } p(s) \in I(s) \text{ ειναι Hurwitz ευσταθες}$$

$$\Updownarrow$$

$$\text{Τα 4 πολυωνυμα του Kharitonov ειναι Hurwitz ευσταθη:}$$

$$p^{--}(s) = p_0^- + p_1^- s + p_2^+ s^2 + p_3^+ s^3 + p_4^- s^4 + \ldots$$

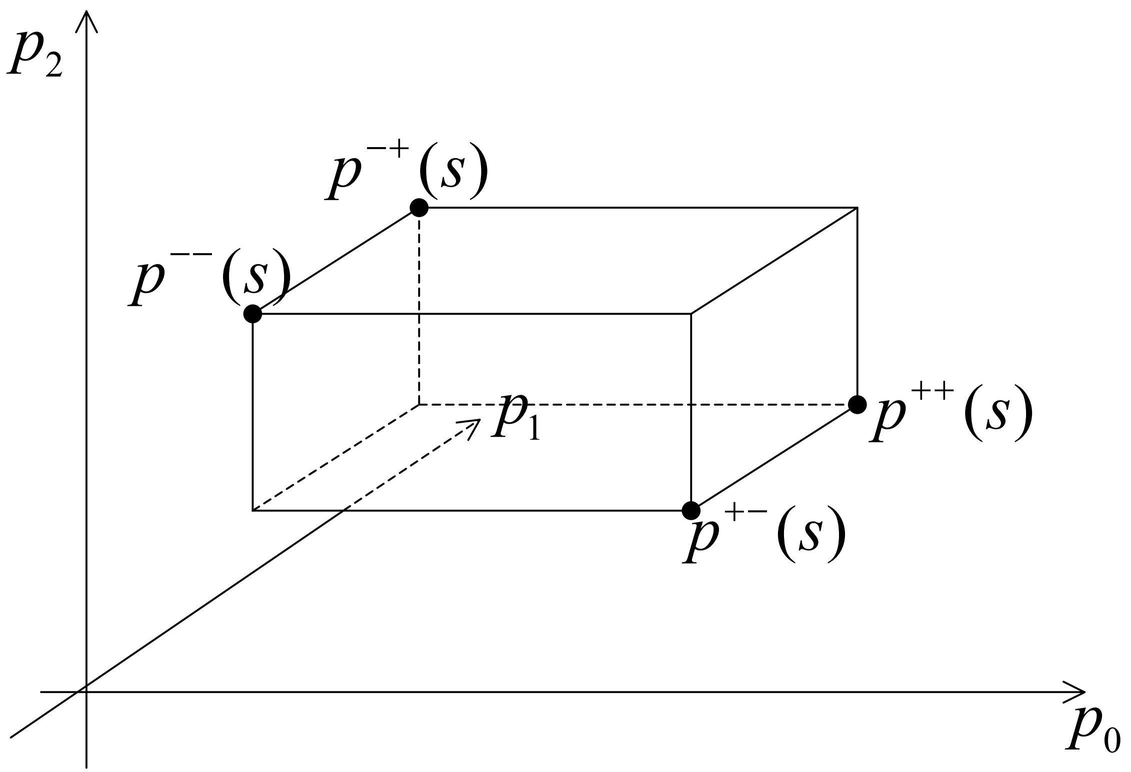
$$p^{-+}(s) = p_0^- + p_1^+ s + p_2^+ s^2 + p_3^- s^3 + p_4^- s^4 + \ldots$$

$$p^{+-}(s) = p_0^+ + p_1^- s + p_2^- s^2 + p_3^+ s^3 + p_4^+ s^4 + \ldots$$

$$p^{++}(s) = p_0^+ + p_1^+ s + p_2^- s^2 + p_3^- s^3 + p_4^+ s^4 + \ldots$$

Το θεώρημα Kharitonov (Ερμηνεία)

Το παραλληλεπίπεδο της οικογένειας $I(s)$ στο χώρο συντελεστών για $n=2$



Θεώρημα Kharitonov (Παράδειγμα)

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμου του ανάστροφου εκκρεμούς για $M=10$ και $m=1$ είναι:

$$p(s)=\frac{1}{21}[21s^4+(k_4-2k_2)s^3+(-2k_1+k_3-220)s^2+20k_2s+20k_1]$$

Για ευκολία θα χρησιμοποιήσουμε το πολυώνυμο χωρίς τον συντελεστή 1/21:

$$p(s)=21s^4+(k_4-2k_2)s^3+(-2k_1+k_3-220)s^2+20k_2s+20k_1$$

Για τα παρακάτω διαστήματα εφαρμόζουμε το θεώρημα Kharitonov:

$$p_0\in[30,60] \quad p_1\in[90,110] \quad p_2\in[100,200] \quad p_3\in[70,110] \quad p_4\in[10,30]$$

$$p^{--}(s)=10s^4+110s^3+200s^2+90s+30$$

$$p^{-+}(s)=10s^4+70s^3+200s^2+110s+30$$

$$p^{+-}(s)=30s^4+110s^3+100s^2+90s+60$$

$$p^{++}(s)=30s^4+70s^3+100s^2+110s+60$$

Τα 4 πολυώνυμα Kharitonov αποδεικνύονται Hurwitz ευσταθή.

Θεώρημα Kharitonov (Παράδειγμα)

Το κλειστό σύστημα του ανάστροφου εκκρεμούς είναι ευσταθές για K που ικανοποιεί τις παρακάτω ανισότητες:

$$30 \leq 20k_1 \leq 60$$
$$90 \leq 20k_2 \leq 110$$
$$100 \leq -2k_1 + k_3 - 220 \leq 200$$
$$70 \leq k_4 - 2k_2 \leq 110$$

Λύνοντας τις παραπάνω ανισότητες παίρνουμε:

$$1.5 \leq k_1 \leq 2$$
$$4.5 \leq k_2 \leq 5.5$$
$$323 \leq k_3 \leq 424$$
$$79 \leq k_4 \leq 121$$

Σφαιρικές Περιοχές Πολυωνύμων

Έστω: $p(s) = p_0 + p_1 s + p_2 s^2 + \ldots + p_n s^n \in P_n$

Ταυτίζουμε: $P_n \ni p(s) \to \left[p_0, p_1, \ldots, p_n \right]^T \in \mathbb{R}^{n+1}$

Ανοικτή Σφαιρική Περιοχή: $B(p_0(s), r) = \{ p(s) \in P_n : \left\| p(s) - p_0(s) \right\| < r \}$

Υπερσφαίρα: $S(p_0(s), r) = \{ p(s) \in P_n : \left\| p(s) - p_0(s) \right\| = r \}$

Θεώρημα: Εστω $p_0(s) \in P_n$, ευσταθες. Τοτε υπαρχει $r(p_0)$:

1. $\forall p(s) \in B(p_0(s), r(p_0))$, ευσταθες.
2. $\exists p(s) \in S(p_0(s), r(p_0))$, που εχει μια τουλαχιστον ριζα στο ∂S η $\deg(p(s)) < n$
3. Δεν υπαρχει $p(s) \in S(p_0(s), r(p_0))$ με ριζες στο εσωτερικο του $\mathbb{C} - S$

Ακτίνα ευστάθειας Hurwitz (Ευκλείδεια Νόρμα)

Έστω: $p(s) = p_0 + p_1 s + p_2 s^2 + \ldots + p_n s^n \in P_n$ (Hurwitz Ευσταθές)

και $p^e(\omega) = p_0 - p_2\omega^2 + p_4\omega^4 - \ldots.,$ $p^o(\omega) = p_1 - p_3\omega^2 + p_5\omega^4 - \ldots$

Ευκλείδεια νόρμα: $\|p(s)\|_2^2 = p_0^2 + p_1^2 + p_2^2 + \ldots + p_n^2$

Θεώρημα:

$$r(p) = \min(|p_0|, |p_n|, d_{\min})$$

$$d_{\min} = \inf_{\omega \geq 0} d_\omega$$

$a)\, n = 2p$

$$d_\omega^2 = \frac{[p^e(\omega)]^2}{1+\omega^4+\ldots+\omega^{4p}} + \frac{[p^o(\omega)]^2}{1+\omega^4+\ldots+\omega^{4(p-1)}}$$

$b)\, n = 2p+1$

$$d_\omega^2 = \frac{[p^e(\omega)]^2 + [p^o(\omega)]^2}{1+\omega^4+\ldots+\omega^{4p}}$$

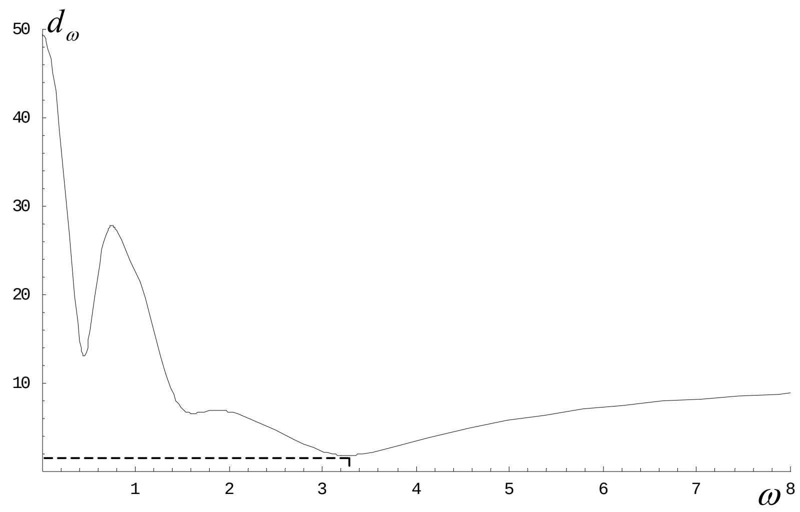
Ακτίνα ευστάθειας Hurwitz (Ευκλείδεια Νόρμα) - Παράδειγμα

Έστω: $p(s) = s^9 + 11s^8 + 52s^7 + 145s^6 + 266s^5 + 331s^4 + 280s^3 + 155s^2 + 49s + 6$

$$d_\omega^2 = \frac{(\omega^8 - 52\omega^6 + 266\omega^4 - 280\omega^2 + 49)^2 + (11\omega^8 - 145\omega^6 + 331\omega^4 - 155\omega^2 + 6)^2}{\omega^{16} + \omega^{12} + \omega^8 + \omega^4 + 1}$$

$$\text{Για } \omega = 3.2655, d_{\min} = \inf_{\omega \geq 0}(d_\omega) = 1.7662$$

$$r(p) = \min(6, 1, 1.7662) = 1$$



Γραμμική Αφφινική Αβεβαιότητα & Πολυτοπική Θεωρία

Ορισμός: $C \subseteq \mathbb{R}^n$ κυρτο $\Leftrightarrow \forall P_1, P_2 \in C, P = \lambda P_1 + (1-\lambda) P_2 \in C$ για $\lambda \in [0,1]$

Ορισμός (Πολύτοπο): $conv\{P_i\} = \{P \in \mathbb{R}^n : P = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i P_i,\ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1, i = 1, 2, ..., m\}$

Ορισμός: P_e κορυφη (ακραιο σημειο) του $conv\{P_i\}$

$$\Updownarrow$$

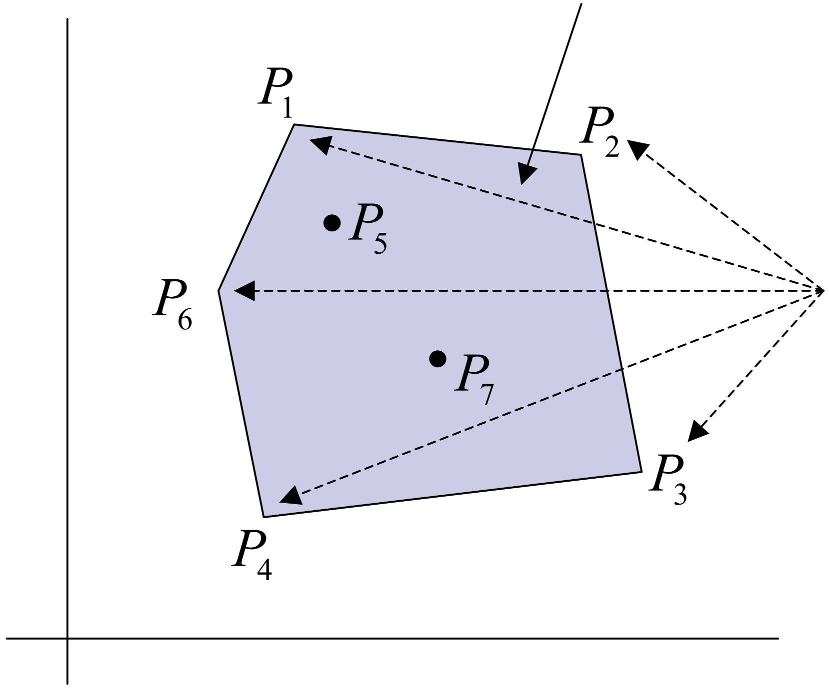
Δεν υπαρχουν $P_a \neq P_b \in conv\{P_i\} : P_e = \lambda P_a + (1-\lambda) P_b$ για $\lambda \in (0,1)$

Ορισμός:
Αν P_k, P_l κορυφες (ακραια σημεια) του $conv\{P_i\}$, το ευθυγραμμο τμημα $[P_k, P_l] = \{P : P = \lambda P_k + (1-\lambda) P_l, \lambda \in [0,1]\}$ ειναι ακμη του $conv\{P_i\}$ αν-ν:

$$\forall P_a, P_b \in conv\{P_i\},\ \text{με } P_a, P_b \notin [P_k, P_l] \Rightarrow [P_a, P_b] \cap [P_k, P_l] = \varnothing$$

Γραμμική Αφφινική Αβεβαιότητα & Πολυτοπική Θεωρία

$$conv\{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7\} = conv\{P_1, P_2, P_3, P_4, P_6\}$$



Κορυφες: P_1, P_2, P_3, P_4, P_6

Ακμες: $[P_1, P_2], [P_2, P_3], [P_3, P_4], [P_4, P_6], [P_6, P_1]$

Γραμμική Αφφινική Αβεβαιότητα & Πολυτοπική Θεωρία

Ορισμός (Πολύτοπο Πολυωνύμων):

$$P = \{p(s,q) : p(s,q) = p_0(q) + p_1(q)s + \ldots + p_n(q)s^n\}$$

$$q = [q_1, q_2, \ldots, q_m]^T \in \mathbb{R}^m,\ a_i = [a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{im}]^T \in \mathbb{R}^m,\ b_i \in \mathbb{R}$$

$$p_i(q) = a_i^T q + b_i,\ q \in Q = conv\{q^i\}$$

Αν $$q = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i q^i,\ \text{με} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$$

$$p(s,q) = \sum_{j=0}^{n} (a_j^{\mathrm{T}} q + b_j) s^j = \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_j^{\mathrm{T}} q^i s^j + \sum_{j=0}^{n} b_j s^j = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i p(s, q^i)$$

Άρα: $$P = conv\{p(s, q^i)\}$$

Σύνολο Τιμών - Το θεώρημα των Ακμών

Θεώρημα: Αν $P = conv\{p(s,q^i)\}$ και $z_0 \in \mathbb{C}$ τοτε το συνολο τιμων:

$$V(z_0,q) = \{p(z_0,q) : q \in conv\{q^i\}\}$$

ειναι ενα πολυγωνο στο $\mathbb{C}$ και μαλιστα

$$V(z_0,q) = conv\{p(z_0,q^i)\}$$

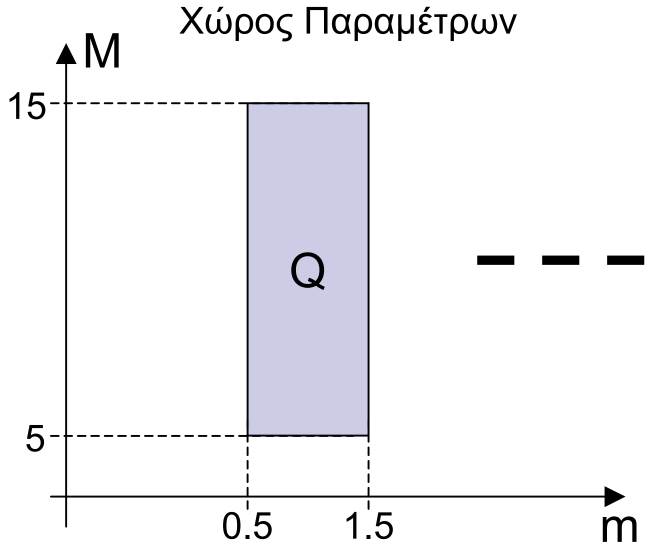
Θεώρημα (Edge Theorem):

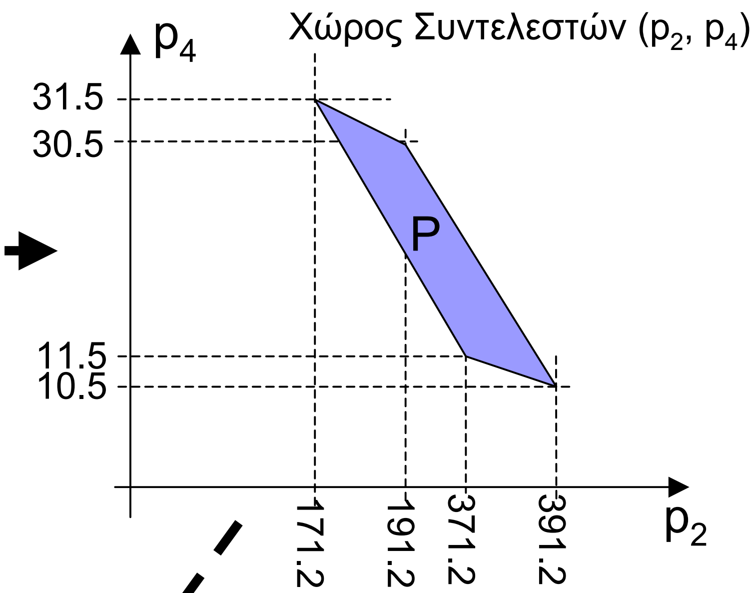
Τα μελη μιας πολυτοπικης οικογενειας πολυωνυμων $P = conv\{p(s,q^i)\}, q \in Q$ ειναι ευσταθη αν-ν για καθε ζευγος κορυφων q^i, q^j που αντιστοιχουν σε ακμες του Q, καθε πολυωνυμο στο ευθυγραμμο τμημα πολυωνυμων:

$$[p(s,q^i), p(s,q^j)] = \lambda p(s,q^i) + (1-\lambda)p(s,q^j)$$

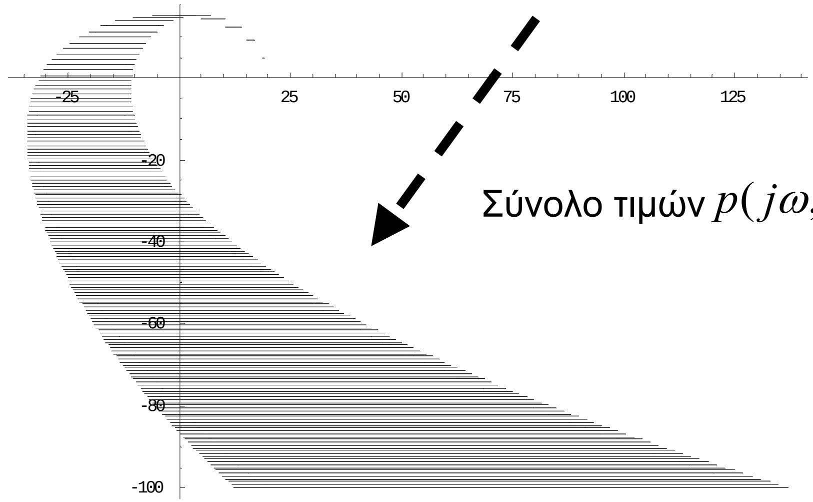
ειναι ευσταθες για καθε $\lambda \in [0,1]$

Εφαρμογή στο ανάστροφο εκκρεμές





Εφαρμογή της Αρχής Εξαίρεσης του Μηδενός



Σύνολο τιμών $p(j\omega, Q)$