ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΕΛΕΓΞΙΜΟΤΗΤΑΣ
(Συστήματα μίας εισόδου και μίας εξόδου)

Έστω το σύστημα της μορφής του χώρου των καταστάσεων:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \qquad (1.1)$$

$$y(k) = Cx(k) \qquad (1.2)$$

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times 1}, C \in \mathbb{R}^{1\times n}$.

Θεώρημα. Το σύστημα (1.1) είναι ελέγξιμο αν και μόνο αν υπάρχει μετασχηματισμός ομοιότητας

$$\tilde{x}(k) = T^{-1}x(k), \quad x(k) = T\tilde{x}(k) \qquad (1.3)$$

τέτοιος ώστε οι πίνακες $\tilde{A} = T^{-1}AT,\ \tilde{B} = T^{-1}B$ οι οποίοι περιγράφουν το σύστημα με άνυσμα κατάστασης το $\tilde{x}(k)$

$$\tilde{x}(k+1) = \tilde{A}\tilde{x}(k) + \tilde{B}u(k) \qquad (1.4)$$

να έχουν την μορφή

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n},\ \tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$$

(1.5)

όπου $a_i \in \mathbb{R},\ i = 0,1,2,...,n-1$ είναι οι συντελεστές του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του A :

$$\det\left(zI_n - A\right) = d\left(z\right) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0$$

Απόδειξη.
($\Longrightarrow$) (δηλαδή αν το σύστημα (1.1) είναι ελέγξιμο τότε υπάρχει μετασχηματισμός ομοιότητας

$$\tilde{x}\left(k\right) = T^{-1}x\left(k\right), \quad x\left(k\right) = T\tilde{x}\left(k\right) \qquad (1.6)$$

τέτοιος ώστε οι πίνακες $\tilde{A} = T^{-1}AT,\ \tilde{B} = T^{-1}B$ να έχουν την μορφή (1.5)

Για απλούστευση του συμβολισμού της απόδειξης έστω $n = 3$ έτσι ώστε $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}, B \in \mathbb{R}^{3\times 1}$.

Από το Θεώρμα Caley-Hamilton έχουμε

$$A^n + a_{n-1}A^{n-1} + ... + a_1 A + a_0 I_n = 0_{n,n}$$

$$\Rightarrow n = 3, \quad \det\left(zI_3 - A\right) = z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$$

$$A^3 + a_2 A^2 + a_1 A + a_0 I_n = 0_{3,3}$$

$$\Rightarrow$$

$$A^3 = -a_2 A^2 - a_1 A - a_0 I_n \Rightarrow A^3 B = -a_2 A^2 B - a_1 AB - a_0 B$$

Έστω ότι επιλέγουμε τον πίνακα T στον μετασχηματισμό ομοιότητας σύμφωνα με την σχέση

$$T := \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ a_2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = PS$$

Εξ υποθέσεως $rank \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} = 3$ και λόγω της μορφής

του $S = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ a_2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $rankS = 3$, άρα $rankT = 3$ και

$$AT = A\begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ a_2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} AB & A^2B & A^3B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ a_2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & -a_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ a_2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -a_0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ a_2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a \end{bmatrix}$$

$$= PS\widetilde{A} = T\widetilde{A}$$

$$AT = T\widetilde{A} \Rightarrow \widetilde{A} = T^{-1}AT$$

Επίσης

$$T\widetilde{B} = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ a_2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = B$$

Άσκηση.
Αποδείξτε το αντίστροφο. Αποδείξτε δηλαδή ότι η κανονική μορφή (1.5) είναι πάντα ελέγξιμη.

Ελέγξιμη πραγμάτωση κανονικής ρητής συνάρτησης

Ορισμός. Δεδομένης μίας κανονικής ρητής συνάρτησης $G(z)$ μία τετράδα πινάκων $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times 1}, C \in \mathbb{R}^{1\times n}, D \in \mathbb{R}$ ονομάζεται πραγμάτωση (realization) της $G(z)$ αν και μόνο αν

$$G(z) = C(zI_n - A)^{-1}B + D$$

Έστω η κανονική ρητή συνάρτηση

$$G(z) = \frac{n(z)}{d(z)} + D = \frac{c_q z^q + c_{q-1}z^{q-1} + \ldots + c_1 z + c_0}{z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0} + D, q \le n-1$$

Πρόταση. Η τετράδα πινάκων

$$\widetilde{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad \widetilde{B}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times 1} \tag{1.7}$$

$$\widetilde{C}=\begin{bmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_q & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times n}, \quad D\in\mathbb{R}$$

αποτελεί μια **ελέγξιμη** πραγμάτωση της $G(s)$ η οποία είναι παρατηρήσημη αν και μόνο αν τα πολυώνυμα

$$d(s)=s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\dots+a_1 s+a_0$$
$$n(s)=c_q s^q+c_{q-1}s^{q-1}+\dots+c_1 s+c_0$$

είναι πρώτα μεταξύ τους (δεν έχουν δηλαδή κοινές ρίζες).

Για την απόδειξη του παραπάνω Θεωρήματος θα χρειαστούμε το

Λήμμα. Το σύστημα (1.1) (1.2) είναι παρατηρησημο ανν

$$rank\begin{bmatrix} zI_n-A \\ C \end{bmatrix}=n,\ \forall z\in sp\left\{\widetilde{A}\right\}=\left\{\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n\right\}$$

Ισοδύναμα

$$rank\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = n \Leftrightarrow rank\begin{bmatrix} zI_n - A \\ C \end{bmatrix} = n,\ \forall z \in sp\left\{\widetilde{A}\right\} = \left\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\right\} \tag{1.8}$$

(όπου $sp\left\{A\right\} = \left\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\right\}$ είναι το σύνολο των ιδιοτιμών του A τις οποίες για απλούστευση θεωρούμε ότι έχουν όλες πολλαπλότητα 1)

Απόδειξη του Λήμματος.

Έστω ότι για

$$z \in sp\left\{A\right\} = \left\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\right\}$$

$$rank\begin{bmatrix} zI_n - A \\ C \end{bmatrix} < n \tag{1.9}$$

και

$$rank\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = n \tag{1.10}$$

Η (1.9) συνεπάγεται ότι

$$\exists x \in \mathbb{R}^{n\times 1} \neq 0 : \begin{bmatrix} zI_n - A \\ C \end{bmatrix} x = 0_{n+1}$$

$\Rightarrow$

$$\left[zI_n - A\right]x = 0 \Rightarrow Ax = zx \qquad (1.11)$$

και

$$Cx = 0 \qquad (1.12)$$

Πολλαπλασιάζοντας την (1.11) με $A, A^2, \ldots, A^{n-2}$ παίρνουμε

$$\begin{aligned}
&Ax = zx \\
&A^2x = AAx = Azx = zAx = z^2x \\
&A^3x = AA^2x = Az^2x = z^2Ax = z^3x \\
&\vdots \\
&A^{n-1}x = z^{n-1}x
\end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζοντας τις παραπάνω επί C λόγω της (1.12) παίρνουμε τις

$$\begin{aligned}
&CAx = zCx = 0 \\
&CA^2x = z^2Cx = 0 \\
&CA^3x = z^3Cx = 0 \qquad (1.13) \\
&\vdots \\
&CA^{n-1}x = z^{n-1}Cx = 0
\end{aligned}$$

ΟΙ (1.12)(1.13) γράφονται υπό μορφή πίνακα ως

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} x = 0 \qquad (1.14)$$

η οποία για $x \neq 0$ συνεπάγετε την

$$rank \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} < n \qquad (1.15)$$

η οποία αντιβαίνει στην (1.10).

Απόδειξη της Πρότασης.

Θεωρείστε τον χαρακτηριστικό πίνακα του $\widetilde{A}$:

$$zI_n - \widetilde{A} = \begin{bmatrix} z & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & z & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & z & -1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & z + a_{n-1} \end{bmatrix}$$

και έστω ότι $S(z)$ είναι το πολυωνυμικό άνυσμα

$$S(z) := \begin{bmatrix} 1 \\ z \\ \vdots \\ z^{n-1} \end{bmatrix}$$

Λόγω της κανονικής μορφής του πίνακα $\widetilde{A}$ στην (1.7) έχουμε την ταυτότητα

$$\left(zI_n - \widetilde{A}\right) S(z) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ d(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} d(z) = \widetilde{B} d(z)$$

η οποία γράφεται ώς

$$\left(zI_n - \widetilde{A}\right)^{-1} \widetilde{B} = \frac{1}{d(z)} S(z)$$

Πολλαπλασιάζοντας την παραπάνω επί $\widetilde{C}$ παίρνουμε

$$\widetilde{C}\left(zI_n - \widetilde{A}\right)^{-1} \widetilde{B} = \frac{1}{d(z)} \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_q & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ z \\ z^2 \\ \vdots \\ z^{n-1} \end{bmatrix} = \frac{n(z)}{d(z)}$$

και άρα οι πίνακες στην (1.7) αποτελούν πραγμάτωση η οποία είναι ελέγξιμη λόγω του παραπάνω Θεωρήματος.

Ορισμός. Λέμε ότι οι πίνακες της μορφής (1.5) ευρίσκονται στην «κανονική μορφή ελέγξιμότητας».

Λόγω του Λήμματος η πραγμάτωση (1.7) είναι παρατηρήσημη ανν

$$rank\begin{bmatrix} zI_n - \widetilde{A} \\ \widetilde{C} \end{bmatrix} = n \ \forall z \in sp\left\{\widetilde{A}\right\} = \left\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\right\}$$

Προφανώς αν λ_i είναι ιδιοτιμή του $\widetilde{A}$ από την ταυτότητα

$$\left(zI_n - \widetilde{A}\right)S(z) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ d(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} d(z)$$

για $z = \lambda_i$ έχουμε

$$\left(\lambda_i I_n - \widetilde{A}\right) S\left(\lambda_i\right) = \begin{bmatrix} \lambda_i & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_i & -1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & \lambda + a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_i \\ \lambda_i^2 \\ \vdots \\ \lambda_i^{n-1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ d\left(\lambda_i\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Η οποία γράφεται

$$\left(\lambda_i I_n - \widetilde{A}\right) S\left(\lambda_i\right) = 0$$

ή

$$\widetilde{A} S\left(\lambda_i\right) = \lambda_i S\left(\lambda_i\right)$$

και άρα το

$$u_i = S\left(\lambda_i\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_i \\ \lambda_i^2 \\ \vdots \\ \lambda_i^{n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

είναι το ιδιοάνυσμα του πίνακα $\widetilde{A}$ το οποίο αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_i.

Βάσει του Λήμματος η πραγμάτωση είναι παρατηρήσημη ανν

$$rank\begin{bmatrix}\lambda_i I_n - \widetilde{A} \\ \widetilde{C}\end{bmatrix} = n \ \forall \lambda_i \in sp\left\{\widetilde{A}\right\} = \left\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\right\}$$

Ισοδύναμα η πραγμάτωση (2) είναι παρατηρήσημη ανν

$$\begin{bmatrix}\lambda_i I_n - \widetilde{A} \\ \widetilde{C}\end{bmatrix} S\left(\lambda_i\right) = \begin{bmatrix}\lambda_i I_n - \widetilde{A} \\ \widetilde{C}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 \\ \lambda_i \\ \lambda_i^2 \\ \vdots \\ \lambda_i^{n-1}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ d\left(\lambda_i\right) \\ c\left(\lambda_i\right)\end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix}0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0\end{bmatrix}$$

$\Leftrightarrow$

$d\left(z\right), c\left(z\right)$ δεν έχουν κοινές ρίζες, δηλαδή είναι πρώτα μεταξύ τους.

Άσκηση. Αποδείξτε ότι ένα σύστημα

$$x\left(k+1\right) = Ax\left(k\right) + Bu\left(k\right)$$

Είναι ελέγξιμο αν και μόνο αν

$$rank\left[zI_n - A, B\right] = n \quad \forall z \in sp\left\{A\right\} \quad (1.16)$$

Άσκηση Διατυπώστε και αποδείξτε τα αντίστοιχα με τα παραπάνω για μια κανονική μορφή παρατηρησημότητας

$$\widehat{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad \widehat{B} = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_q \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$$

$$\widehat{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times n}, \quad D \in \mathbb{R}$$

Δημιουργήθηκε την 10/1/2005 10:15:00 μμΔημιουργήθηκε από A. Vardulakis