ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΠΕΡΙΟΔΙΚΩΝ ΣΗΜΑΤΩΝ ΜΕΣΩ ΣΕΙΡΑΣ FOURIER

Έστω $T > 0$. Το σήμα $x(t)$ είναι περιοδικό με θεμελιώδη περίοδο T αν

$$x(t) = x(t+nT) \qquad n = \ldots -2, -1, 1, 2, \ldots \qquad \forall t \in (-\infty, \infty)$$

Θεώρημα (Fourier**)**
Αν το σήμα $x(t)$ είναι περιοδικό με θεμελιώδη περίοδο T τότε μπορεί να εκφραστεί σαν μια σειρά (γενικώς άπειρων) μιγαδικών εκθετικών όρων :

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}, \qquad -\infty < t < \infty \qquad \text{(A)}$$

$c_0 \in \mathbb{R}, \quad c_k \in \mathbb{C},\ k \neq 0,$

$\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}$ θεμελιώδης κυκλική συχνότητα.

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Η σειρά (Α) ονομάζεται σειρά Fourier του περιοδικού σήματος $x(t)$

Ένα περιοδικό σήμα $x(t)$ έχει σειρά Fourier ή αλλιώς η σειρά Fourier ενός περιοδικού σήματος υπάρχει αν το σήμα ικανοποιεί της συνθήκες του **Dirichlet**:

1. $\displaystyle\int_a^{a+T} |x(t)| dt < \infty \qquad \forall a$
2. Σε κάθε περίοδο το $x(t)$ έχει πεπερασμένο αριθμό μεγίστων και ελαχίστων

3. Σε κάθε περίοδο το $x(t)$ έχει πεπερασμένο αριθμό ασυνεχιών.

Κάνοντας χρήση του τύπου του Euler η σειρά Fourier μιγαδικών εκθετικών όρων :

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}, \qquad -\infty<t<\infty \qquad \text{(A)}$$

γράφεται σε τριγωνομετρική μορφή:

$$\boxed{x(t)=c_0+\sum_{k=1}^{\infty} 2|c_k|\cos(k\omega_0 t+\angle c_k), \qquad -\infty<t<\infty}$$

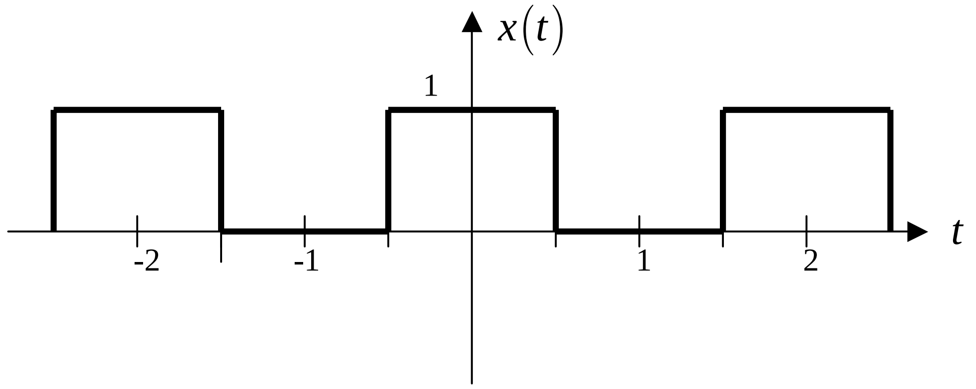
Ο όρος $2|c_1|\cos(\omega_0 t+\angle c_k), \qquad -\infty<t<\infty$

Ονομάζεται Θεμελιώδης όρος της σειράς Fourier.

Οι όροι $2|c_k|\cos(k\omega_0 t+\angle c_k)$ για $k=2,3,4,\ldots$ ονομάζονται αρμονικοί όροι της σειράς Fourier.

Παράδειγμα

Έστω το σήμα «τρένο τετραγωνικών παλμών» του σχήματος



$$T = 2, \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \pi$$

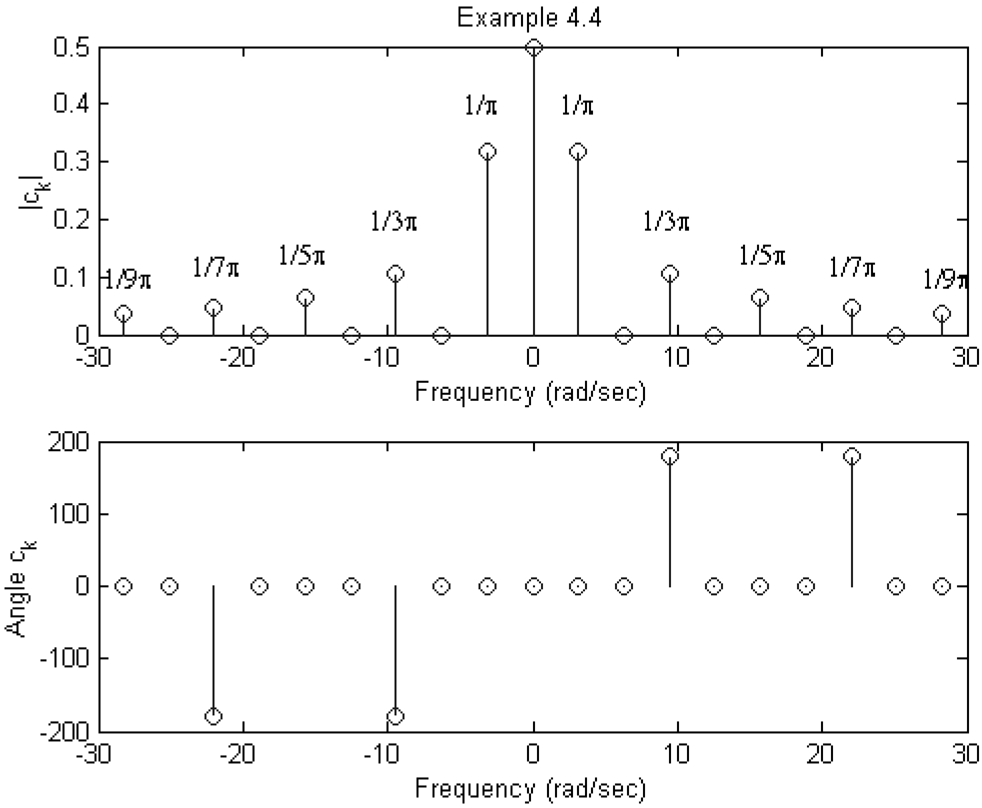
$$c_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x(t)dt = \frac{1}{2}\int_{-.5}^{.5}(1)dt = \frac{1}{2}$$

$$c_k = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x(t)e^{-jk\pi t}dt = \frac{1}{2}\int_{-.5}^{.5} e^{-jk\pi t}dt = -\frac{1}{j2k\pi}e^{-jk\pi t}\Big|_{t=-0.5}^{t=0.5}$$

$$= -\frac{1}{j2k\pi}\left(-j\sin\frac{k\pi}{2} - j\sin\frac{k\pi}{2}\right) = \frac{1}{k\pi}\sin\frac{k\pi}{2}, \qquad k = \pm 1, \pm 2, \ldots$$

$$c_k = 0, \qquad k = \pm 2, \pm 4, \ldots$$

$$c_k = \frac{1}{k\pi}(-1)^{|(k-1)/2|} \qquad k = \pm 1, \pm 3, \ldots$$



$$x(t) = \frac{1}{2} + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \text{ περιτος}}}^{\infty} \frac{1}{k\pi}(-1)^{|(k-1)/2|} e^{jk\pi t}, \qquad -\infty < t < \infty$$

$$|c_k| = 0, \quad k = 2, 4, \ldots$$

$$|c_k| = \frac{1}{k\pi}, \quad k = 1, 3, \ldots$$

$$\angle c_k = 0, \quad k = 2, 4, \ldots$$

$$\angle c_k = \left[(-1)^{(k-1)/2} - 1\right]\frac{\pi}{2}, \quad k = 1, 3, \ldots$$

Η τριγωνομετρική μορφή της σειράς Fourier

$$x(t)=\frac{1}{2}+\sum_{\substack{k=-\infty \\ k\ \pi\varepsilon\rho\iota\tau o\varsigma}}^{\infty}\frac{1}{k\pi}(-1)^{|(k-1)/2|}e^{jk\pi t},\qquad -\infty<t<\infty$$

είναι

$$x(t)=\frac{1}{2}+\sum_{\substack{k=-\infty \\ k\ \pi\varepsilon\rho\iota\tau o\varsigma}}^{\infty}\frac{2}{k\pi}\cos\left(k\pi t+\left[(-1)^{(k-1)/2}-1\right]\frac{\pi}{2}\right),\qquad -\infty<t<\infty$$

Το παρακάτω MATLAB m.file παράγει τους N όρους της σειράς

$$x_N(t)=\frac{1}{2}+\sum_{\substack{k=-\infty \\ k\ \pi\varepsilon\rho\iota\tau o\varsigma}}^{N}\frac{2}{k\pi}\cos\left(k\pi t+\left[(-1)^{(k-1)/2}-1\right]\frac{\pi}{2}\right),\qquad -\infty<t<\infty$$

```
t = -3:6/1000:3;
N = input('Number of harmonics ');
c0 = 0.5;
w0 = pi;
xN = c0*ones(1,length(t));   % dc component
for k=1:N,
  ck = 1/k/pi*sin(k*pi/2);
  c_k = ck;
  xN = xN + ck*exp(j*k*w0*t) + c_k*exp(-j*k*w0*t);
end
plot(t,xN)
title([' N = ',num2str(N)])
xlabel('Time (sec)')
ylabel(['x',num2str(N),'(t)'])
```

Ο ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ FOURIER

Βασικό στοιχείο της αναπαράστασης ενός περιοδικού σήματος με περίοδο T μέσω της σειράς Fourier

$$x(t) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2|c_k| \cos(k\omega_0 t + \angle c_k), \qquad -\infty < t < \infty$$

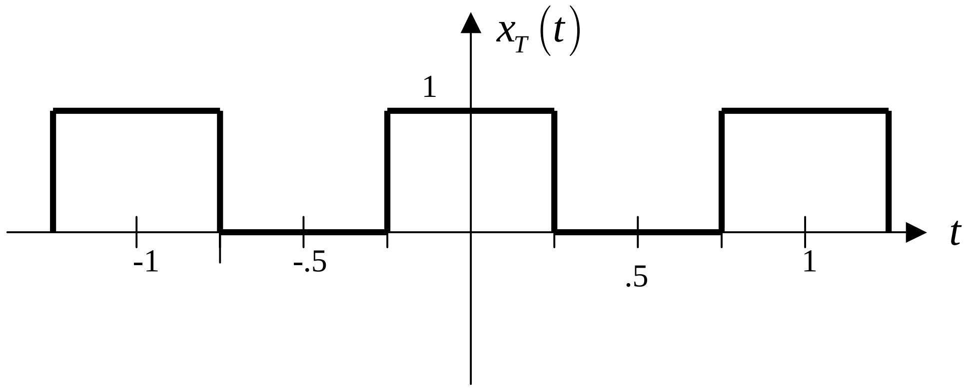
είναι η περιγραφή του σήματος μέσω των πλατών $|c_k|, \quad k = 1,2,3,\ldots$ και των φάσεων $\angle c_k, \quad k = 1,2,3,\ldots$ οι οποίες αντιστοιχούν στις διάφορες κυκλικές συχνότητες οι οποίες συνθέτουν το σήμα και είναι η θεμελιώδης κυκλική συχνότητα: $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}$ και οι αρμονικές της $k\omega_0 = \dfrac{k2\pi}{T}, \quad k = 2,3,4,\ldots$

(περιεχόμένο συχνοτήτων του σήματος = frequency content).

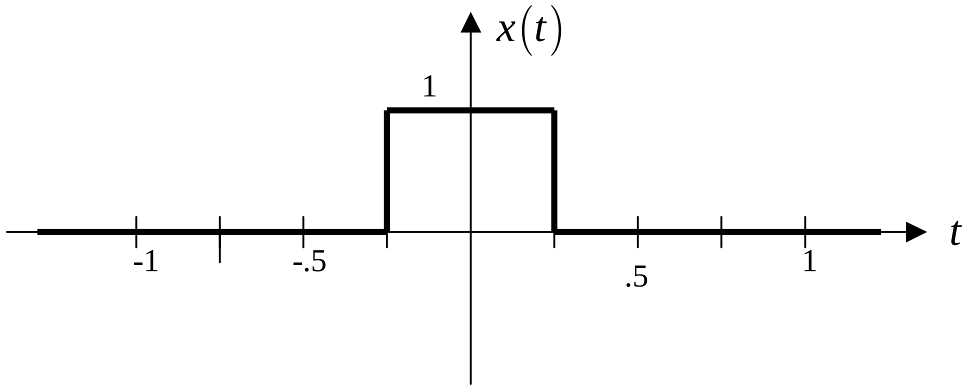
ΤΟ ΕΡΩΤΗΜΑ ΠΟΥ ΔΗΜΙΟΥΡΓΕΙΤΑΙ ΕΙΝΑΙ ΑΝ ΚΑΙ ΤΑ ΜΗ ΠΕΡΙΟΔΙΚΑ ΣΗΜΑΤΑ ΜΠΟΡΟΥΝ ΝΑ ΠΕΡΙΓΡΑΦΟΥΝ ΜΕΣΩ ΠΛΑΤΩΝ ΚΑΙ ΦΑΣΕΩΝ ΟΙ ΟΠΟΙΕΣ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΟΥΝ ΣΕ ΔΙΑΦΟΡΕΣ ΚΥΚΛΙΚΕΣ ΣΥΧΝΟΤΗΤΕΣ ΟΙ ΟΠΟΙΕΣ ΣΥΝΘΕΤΟΥΝ ΤΟ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΟ ΣΥΧΝΟΤΗΤΩΝ ΤΟΥ ΜΗ ΠΕΡΙΟΔΙΚΟΥ ΣΗΜΑΤΟΣ.

Η ΑΠΑΝΤΗΣΗ ΣΤΟ ΠΑΡΑΠΑΝΩ ΕΡΩΤΗΜΑ ΕΙΝΑΙ **ΚΑΤΑΦΑΤΙΚΗ**.

Έστω $T=1$ η περίοδος του περιοδικού σήματος $x_T(t)$ του σχήματος («τρένο τετραγωνικών παλμών»)



Παρατηρείστε ότι για το σήμα $x(t)$του σχήματος



είναι

$$x(t)=\lim_{T\to\infty} x_T(t)$$

Εφόσον το σήμα $x_T(t)$ είναι περιοδικό με περίοδο T έχει σειρά Fourier

$$x_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}, \qquad -\infty < t < \infty$$

$$c_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \quad \text{(D)}$$

Σκοπός μας είναι να δούμε τι γίνεται στις συχνοτικές συνιστώσες του $x_T(t)$ όταν η περίοδος $T \to \infty$, με άλλα λόγια τι γίνεται στις συχνοτικές συνιστώσες του $x_T(t)$ όταν το $x_T(t)$ τείνει να γίνει $x(t)$.

Η (D) για $k = 0$ δίνει

$$c_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt = \frac{1}{T}\int_{-0.5}^{0.5} dt = \frac{1}{T}$$

Η (D) για $k \neq 0$ δίνει

$$c_k = \frac{1}{T}\int_{-0.5}^{0.5} e^{-jk\omega_0 t} dt$$

$$= -\frac{1}{jk\omega_0 T}\left[e^{-jk\omega_0 t}\right]_{t=-0.5}^{t=0.5}$$

$$= -\frac{1}{jk\omega_0 T}\left[e^{-j(k\omega_0/2)} - e^{j(k\omega_0/2)}\right]$$

$$= -\frac{1}{jk\omega_0 T}\left(-j2\sin\frac{k\omega_0}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{k\omega_0 T}\sin\frac{k\omega_0}{2}$$

$$\overset{\omega_0=2\pi/T}{=} \frac{1}{k\pi}\sin\frac{k\omega_0}{2}, \qquad\qquad k = \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Το φάσμα πλατών του σήματος $x_T(t)$ είναι η γραφική παράσταση των $|c_k|$ ως προς $\omega = k\omega_0$.

Ας θεωρήσουμε την γραφική παράσταση των $T|c_k|$ ως προς $\omega = k\omega_0$ για $T = 2$, $T = 5$ και $T = 10$

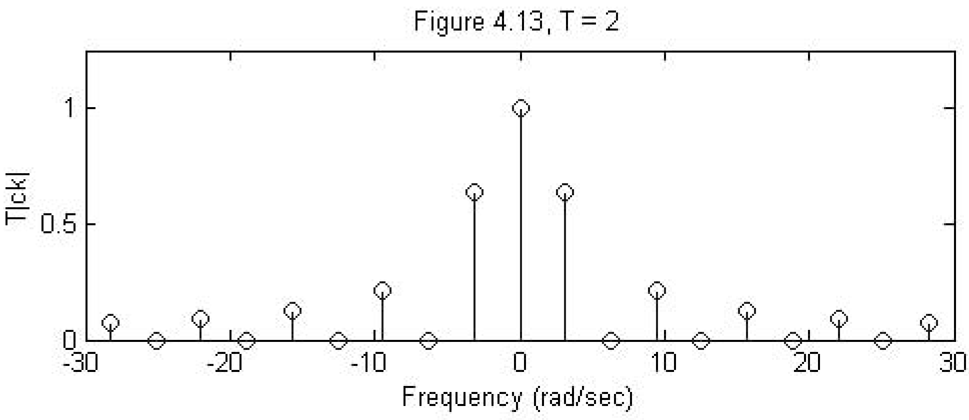
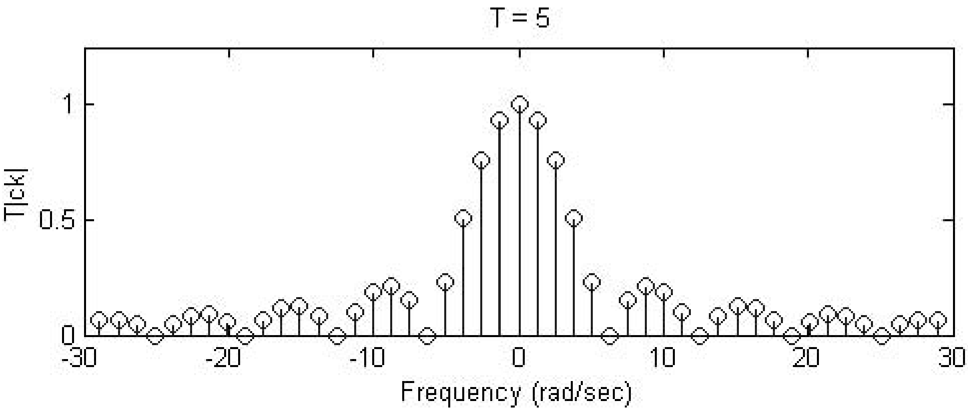


Figure 4.13, T = 2
T|ck|
1
0.5
0
-30
-20
-10
0
10
20
30
Frequency (rad/sec)



T = 5
T|ck|
1
0.5
0
-30
-20
-10
0
10
20
30
Frequency (rad/sec)