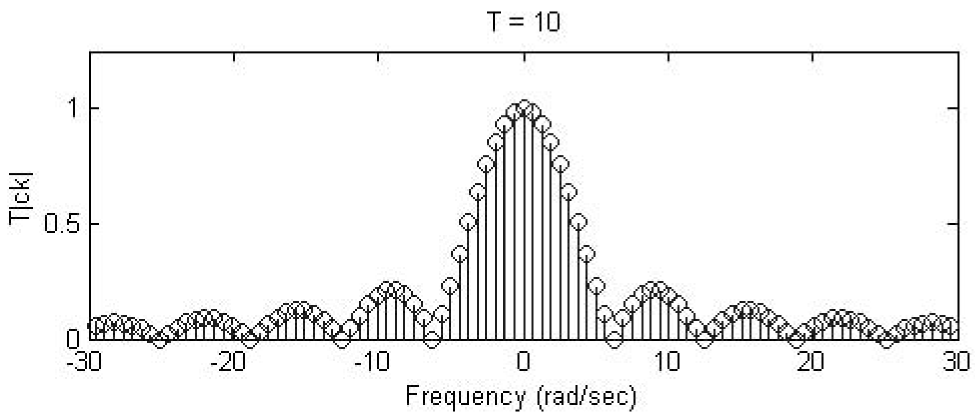
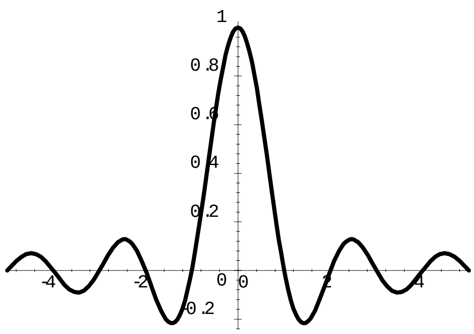


Από τα φάσματα αυτά βλέπουμε ότι η «πικνότητα» των πλατών των συχνοτικών συνιστωσών αυξάνεται όσο αυξάνεται η περίοδος T αλλά η περιβάλλουσες παραμένουν ίδιες.

Καθώς η περίοδος $T \to \infty$ το γραμμικό φάσμα των πλατών τείνει σε συνεχές φάσμα πλατών.

Θεωρείστε την συνάρτηση

$$\sin c\lambda = \frac{\sin \pi\lambda}{\pi\lambda}$$



Κάνοντας χρήση της συνάρτησης sinc οι συντελεστές

$$c_k = \frac{1}{k\pi}\sin\frac{k\omega_0}{2}, \qquad k = \pm 1, \pm 2, \ldots \qquad \text{(F)}$$

της σειράς Fourier του περιοδικού σήματος «τρένο τετραγωνικών παλμών» $x_T(t)$ γράφονται

$$\operatorname{sinc}\lambda = \frac{\sin\pi\lambda}{\pi\lambda} \qquad \Rightarrow \qquad (\pi\lambda)[\operatorname{sinc}\lambda] = \sin\pi\lambda$$

με

$$\lambda = \frac{k\omega_0}{2\pi}$$

$$\sin\frac{k\omega_0}{2} = \frac{k\omega_0}{2}\operatorname{sinc}\frac{k\omega_0}{2\pi} \qquad \text{(E)}$$

Αντικαθιστώντας την (E) στην (F) έχουμε

$$c_k = \frac{1}{k\pi}\frac{k\omega_0}{2}\operatorname{sinc}\frac{k\omega_0}{2\pi} = \frac{\omega_0}{2\pi}\operatorname{sinc}\frac{k\omega_0}{2\pi} \overset{\omega_0 = 2\pi/T}{=} \frac{1}{T}\operatorname{sinc}\frac{k\omega_0}{2\pi}, \qquad k = \pm 1, \pm 2, \ldots$$

$\Rightarrow$

$$Tc_k = \operatorname{sinc}\frac{k\omega_0}{2\pi} \qquad (1)$$

Έφόσον

$$c_0 = \frac{1}{T} \qquad \Rightarrow \quad Tc_0 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad Tc_0 = \operatorname{sinc}0$$

η (1) δίνει

$$Tc_k = \operatorname{sinc}\frac{k\omega_0}{2\pi}, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, ... \qquad \text{(G)}$$

Παρατηρείστε ότι καθώς η περίοδος $T \to 0$ η διακριτή κυκλική συχνότητα $k\omega_0$ γίνεται πραγματική μεταβλητή ω.

Θεωρώντας το όριο

$$\lim_{T\to\infty} Tc_k = \operatorname{sinc}\frac{\omega}{2\pi}, \qquad -\infty < \omega < \infty$$

και αρα

$$\lim_{T\to\infty} T\left|c_k\right| = \left|\operatorname{sinc}\frac{\omega}{2\pi}\right|, \qquad -\infty < \omega < \infty \qquad \text{(H)}$$

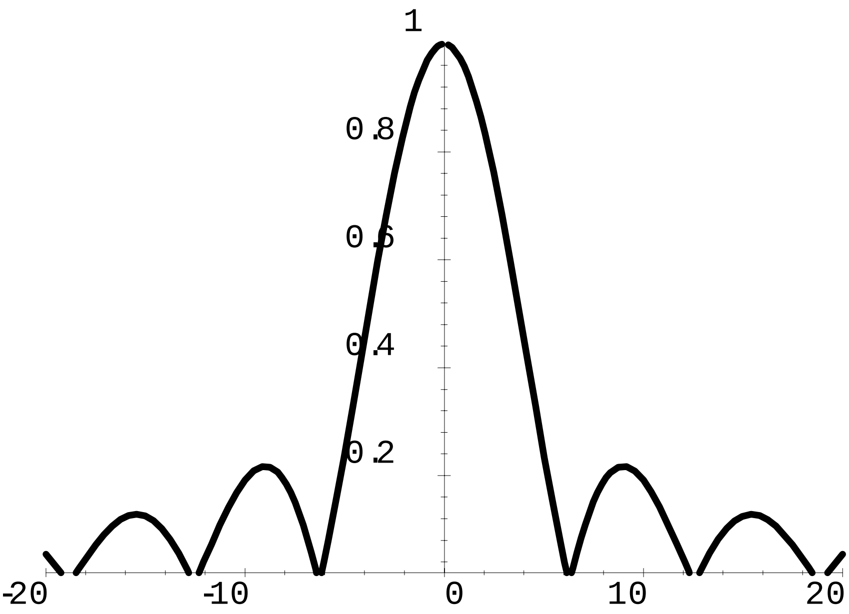
Η σχέση (H) δείχνει ότι στο όριο, και καθώς $T \to \infty$ το διακριτό φάσμα πλατών Tc_k του σήματος $x_T(t)$ «τρένο τετραγωνικών παλμών» τείνει σε συνεχές φάσμα το οποίο δίνεται από την

$$\left|\operatorname{sinc}\frac{\omega}{2\pi}\right|, \qquad -\infty < \omega < \infty$$

Σαν φάσμα πλατών του τετραγωνικού παλμού $x(t)$ ορίζουμε την συνάρτηση

$$\omega \mapsto \quad \left|\operatorname{sinc}\frac{\omega}{2\pi}\right| \quad \text{για} \quad -\infty < \omega < \infty$$

της οποίας γραφική παράσταση δίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Ο μετασχηματισμός Fourier του τετραγωνικού παλμού $x(t)$, τον οποίο συμβολίζουμε με $X(\omega)$ ορίζεται σαν το όριο του Tc_k καθώς η περίοδος $T \to \infty$. Άρα από την (G)

$$X(\omega) = \operatorname{sinc}\frac{\omega}{2\pi} = \frac{\sin\frac{\omega}{2}}{\frac{\omega}{2}}, \qquad -\infty < \omega < \infty$$

Το (συνεχές) φάσμα πλατών του τετραγωνικού παλμού $x(t)$ (βλέπε σχήμα παραπάνω) είναι το μέτρο $|X(\omega)|$ του μετασχηματισμού Fourier $X(\omega)$ και το φάσμα φάσεων του τετραγωνικού παλμού $x(t)$ είναι το όρισμα του μιγαδικού αριθμού $X(\omega)$.

Ο μετασχηματισμός Fourier $X(\omega)$του τετραγωνικού παλμού $x(t)$, μπορεί να εκφραστεί μέσω του σήματος $x(t)$ ως εξής. Θεωρείστε πρώτα την έκφραση για τους συντελεστές c_k της σειράς Fourier του σήματος «τρένο τετραγωνικών παλμών» $x_T(t)$:

$$c_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \quad (1)$$

Εφόσον

$$x(t) = 0 \text{ για } t < -T/2 \text{ και } t > -T/2$$

η (1) γράφεται

$$Tc_k = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \quad (2)$$

Εξ’ορισμού είναι

$$X(\omega) = \lim_{T\to\infty} Tc_k$$

και εφόσον $k\omega_0 \to \omega$ καθώς $T \to \infty$, από την (2) παίρνουμε

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt, \qquad -\infty < \omega < \infty \quad (3)$$

Η σχέση (3) δείχνει ότι ο μετασχηματισμός Fourier $X(\omega)$ του τετραγωνικού παλμού $x(t)$ μπορεί να υπολογιστεί κατ’ευθείαν από το ολοκλήρωμα (3). Αντιστρόφως, δεδομένου του μετασχηματισμού Fourier $X(\omega)$ του $x(t)$ μπορούμε να υπολογίσουμε τον $x(t)$ μέσω του ολοκληρώματος

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\omega)e^{j\omega t}dt \qquad (4)$$

Η (4) ονομάζεται αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace.

Γενικά ο μετασχηματισμός Laplace $X(\omega)$ ενός σήματος $x(t)$ είναι

$$X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt, \qquad -\infty<\omega<\infty \qquad \text{(FT)}$$

και το ολοκλήρωμα (FT) υπάρχει (συγκλίνει) αν

$$\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|dt<\infty$$

Παράδειγμα

Θεωρείστε ότι

$$x(t)=1, \qquad -\infty<t<\infty$$

$$X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}(1)e^{-j\omega t}dt=\lim_{T\to\infty}\int_{-T/2}^{T/2}e^{-j\omega t}dt=\lim_{T\to\infty}-\frac{1}{j\omega}\left[e^{-j\omega t}\right]_{t=-T/2}^{t=T/2}$$

$$=\lim_{T\to\infty}-\frac{1}{j\omega}\left[e^{-j\omega\frac{T}{2}}-e^{j\omega\frac{T}{2}}\right]$$

Αλλά όριο $\lim_{T\to\infty}e^{j\omega\frac{T}{2}}$ δεν υπάρχει και άρα ο μετασχηματισμός Fourier του $x(t)=1$ δεν υπάρχει.

Παράδειγμα

$$x(t) = e^{-bt}u(t)$$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-bt}u(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{0}^{\infty} e^{-bt}e^{-j\omega t}dt$$

$$= -\frac{1}{b + j\omega}\left[e^{-(b+j\omega)t}\right]_{t=0}^{t=\infty}$$

Αν $b \leq 0$ το όριο για $t = \infty$ δεν υπάρχει και ο μετασχηματισμός Fourier δεν υπάρχει.

Αν

$b > 0 \qquad \lim_{t \to \infty} e^{-bt} = 0$

και

$\lim_{t \to \infty} e^{-(b+j\omega)t} = \lim_{t \to \infty} e^{-bt} e^{-j\omega t} = 0$

Αρα για $b > 0$

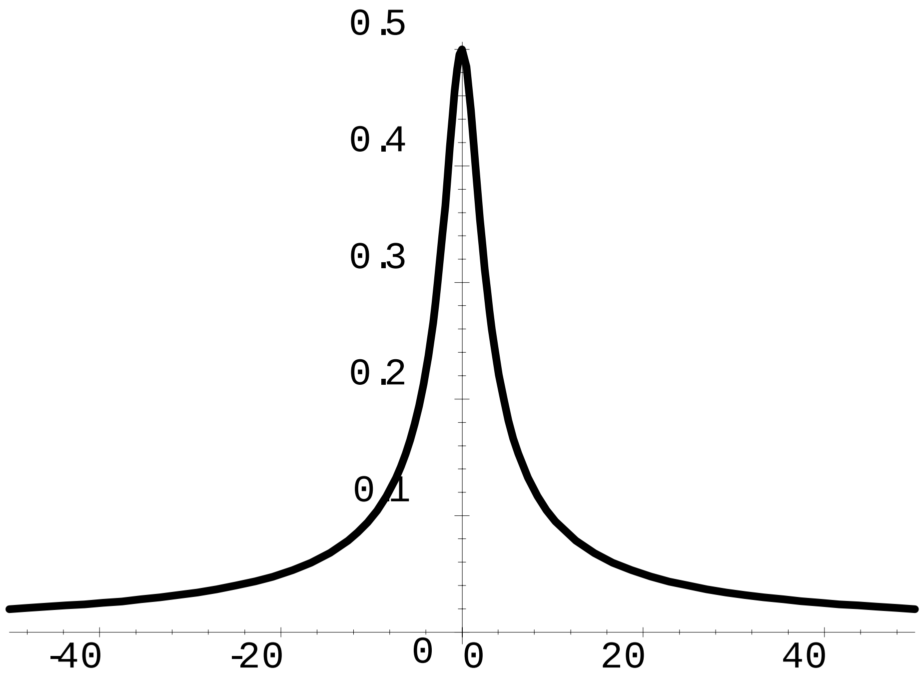
$$X(\omega) = -\frac{1}{b + j\omega}(0 - 1) = \frac{1}{b + j\omega} = \frac{b - j\omega}{b^2 + \omega^2}$$

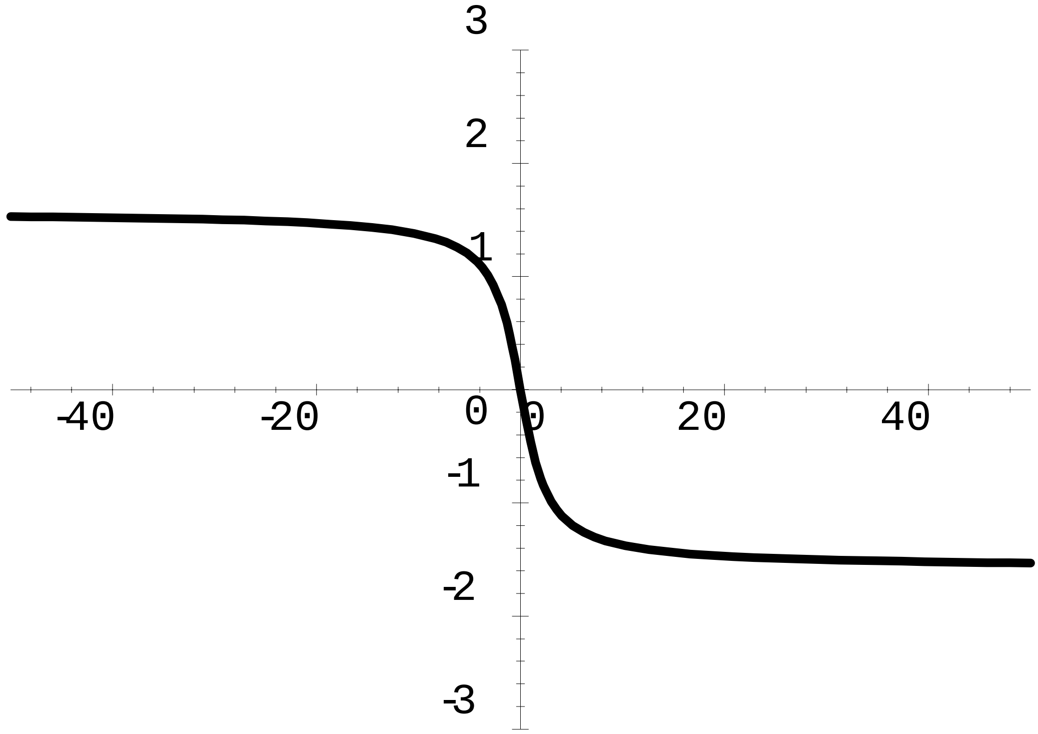
$$= \frac{b}{b^2 + \omega^2} - j\frac{\omega}{b^2 + \omega^2}$$

$$|X(\omega)| = \sqrt{\left(\frac{b}{b^2 + \omega^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{b^2 + \omega^2}\right)^2} = \sqrt{\frac{b^2}{\left(b^2 + \omega^2\right)^2} + \frac{\omega^2}{\left(b^2 + \omega^2\right)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{b^2 + \omega^2}{\left(b^2 + \omega^2\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{b^2 + \omega^2}}$$

$$\varphi_X(\omega) = \text{τοξεφ}\frac{-\dfrac{\omega}{b^2 + \omega^2}}{\dfrac{b}{b^2 + \omega^2}} = -\text{τοξεφ}\frac{\omega}{b}$$


0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
-40
-20
0
20
40


3
2
1
0
-40
-20
0
20
40
-1
-2
-3