ΑΠΟΚΡΙΣΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ (Frequency response)

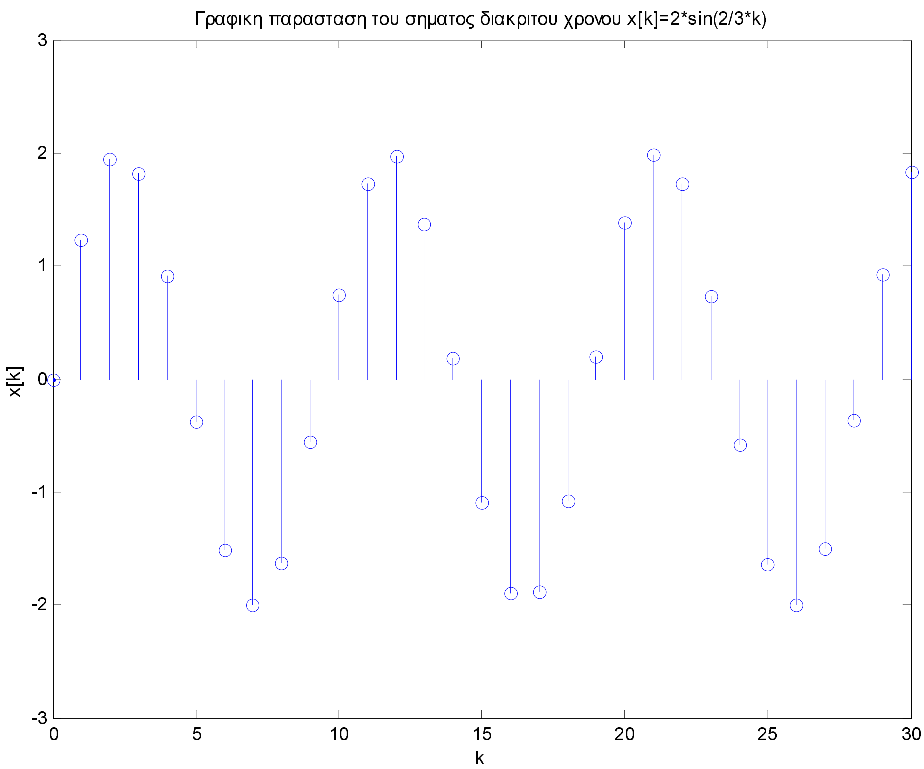
Έστω ημιτονικό σήμα διακριτού χρόνου

$$x[k] = 2\sin\omega k$$

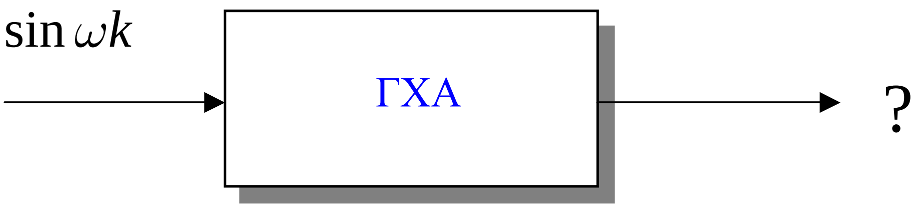
$\omega = \dfrac{2}{3}$ κυκλική συχνότητα

$\omega = 2\pi f,$ f συχνότητα (κύκλοι/sec = Hz)

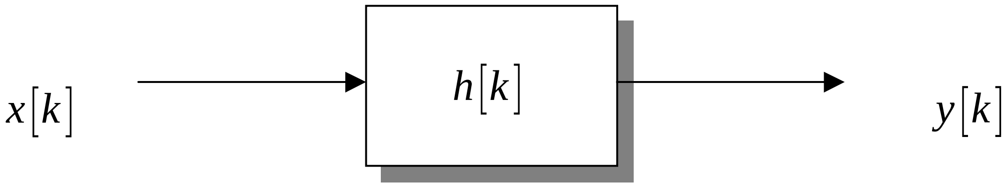
$f = \dfrac{1}{T},$ T περίοδος σήματος: $x[k] = x[k + nT], \quad n = 1, 2, \ldots$



$x[k] = 2\sin\omega k$



Έστω το ΓΧΑ σύστημα



$$y[k]=(h[k]*x[k])=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h[n]x[k-n]$$

Έστω ότι η είσοδος είναι το μιγαδικό εκθετικό σήμα

$$x[k]=e^{jk\omega},\quad \omega>0,$$

Η έξοδος είναι

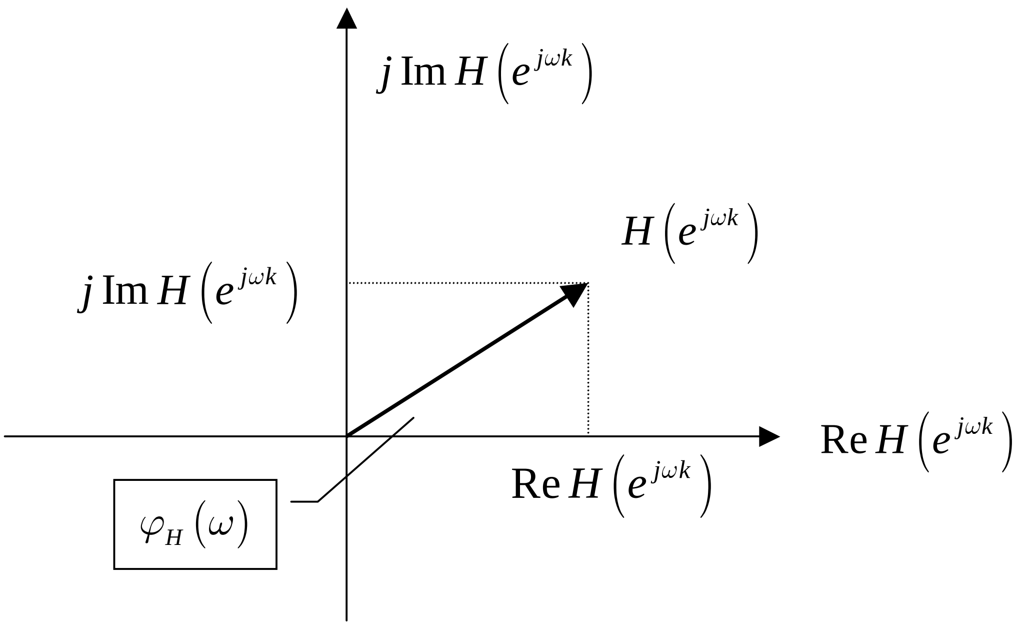
$$y[k]=(h[k]*x[k])=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h[n]x[k-n]$$
$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h[n]e^{j\omega(k-n)}=e^{j\omega k}\sum_{n=-\infty}^{\infty}h[n]e^{-jn\omega}=e^{j\omega k}H\left(e^{j\omega}\right)$$

όπου

$$H\left(e^{j\omega}\right):=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h[n]e^{-jn\omega}$$

$$H\left(e^{j\omega}\right) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] e^{-jn\omega}$$

Ο μιγαδικός αριθμός $H\left(e^{j\omega}\right)$ ονομάζεται ΑΠΟΚΡΙΣΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ του συστηματος και εξαρτάτε από την κυκλική συχνότητα ω του σήματος εισόδου $x[k] = e^{j\omega k}$.



$$H\left(e^{j\omega}\right)=\operatorname{Re}H\left(e^{j\omega}\right)+j\operatorname{Im}H\left(e^{j\omega}\right)$$

$$=\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|\cos\varphi_H\left(\omega\right)+j\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|\sin\varphi_H\left(\omega\right)=\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|\left(\cos\varphi_H\left(\omega\right)+j\sin\varphi_H\left(\omega\right)\right)$$

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|e^{j\varphi_H(\omega)}$$

$$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|=\sqrt{\left[\operatorname{Re}H\left(e^{j\omega}\right)\right]^2+\left[\operatorname{Im}H\left(e^{j\omega}\right)\right]^2}$$

$$\varphi_H\left(\omega\right)=\text{τοξεφ}\frac{\operatorname{Im}H\left(e^{j\omega}\right)}{\operatorname{Re}H\left(e^{j\omega}\right)}$$

Παράδειγμα Έστω ΓΧΑ σύστημα με κρουστική απόκριση $h(t)$ και είσοδο

$$x\left[k\right]=A\cos\omega_0 t,\quad \omega_0>0,\quad A\in\mathbb{R}$$

Λόγω των σχέσεων

$$e^{j\omega k}=\cos\omega k+j\sin\omega k,\qquad e^{-j\omega k}=\cos\omega k-j\sin\omega k$$

$$e^{j\omega k}+e^{-j\omega k}=2\cos\omega k\quad\Rightarrow\quad\boxed{\cos\omega k=\frac{1}{2}e^{j\omega k}+\frac{1}{2}e^{-j\omega k}}$$

$$e^{j\omega k}-e^{-j\omega k}=2j\sin\omega k\quad\Rightarrow\quad\sin\omega k=\frac{1}{2j}e^{j\omega k}-\frac{1}{2j}e^{-j\omega k}$$

Η είσοδος γράφεται

$$x\left[k\right]=A\cos\omega k=A\left(\frac{1}{2}e^{jk\omega_0}+\frac{1}{2}e^{-jk\omega_0}\right)$$

και η έξοδος θα είναι

$$
\begin{aligned}
y[k] &= (h[k] * x[k]) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]\,x[k-n] \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]\,A\left(\frac{1}{2}e^{j(k-n)\omega_0} + \frac{1}{2}e^{-j(k-n)\omega_0}\right) \\
&= Ae^{jk\omega_0}\,\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]\,e^{-jn\omega_0} + Ae^{-jk\omega_0}\,\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]\,e^{jn\omega_0} \\
&= Ae^{jk\omega_0}\,\frac{1}{2}H\left(e^{j\omega_0}\right) + Ae^{-jk\omega_0}\,\frac{1}{2}H\left(e^{-j\omega_0}\right) \\
&= \frac{A}{2}\left[e^{jk\omega_0}H\left(e^{j\omega_0}\right) + e^{-jk\omega_0}H\left(e^{-j\omega_0}\right)\right] \qquad (1)
\end{aligned}
$$

Επειδή η $h[k]$ είναι πραγματική συνάρτηση, η $H\left(e^{j\omega}\right)$ είναι συζυγής συμμετρική συνάρτηση:

$$
H\left(e^{j\omega_0}\right) = \operatorname{Re} H\left(e^{j\omega_0}\right) + j\operatorname{Im} H\left(e^{j\omega_0}\right)
$$

$$
H\left(e^{-j\omega_0}\right) = H^*\left(e^{j\omega_0}\right) = \operatorname{Re} H\left(e^{j\omega_0}\right) - j\operatorname{Im} H\left(e^{j\omega_0}\right)
$$

Ας υπολογίσουμε την παράσταση: $\left[e^{jk\omega_0}H\left(e^{j\omega_0}\right) + e^{-jk\omega_0}H\left(e^{-j\omega_0}\right)\right]$ στην (1)

$$H\left(e^{j\omega_0}\right)e^{jk\omega_0}=\left[\operatorname{Re}H\left(e^{j\omega_0}\right)+j\operatorname{Im}H\left(e^{j\omega_0}\right)\right]\left[\cos k\omega_0+j\sin k\omega_0\right]$$

$$=\operatorname{Re}H\left(e^{j\omega_0}\right)\cos k\omega_0+j\operatorname{Re}H\left(e^{j\omega_0}\right)\sin k\omega_0+j\operatorname{Im}H\left(e^{j\omega_0}\right)\cos k\omega_0-\operatorname{Im}H\left(e^{j\omega_0}\right)\sin k\omega_0.$$

και

$$H\left(e^{-j\omega_0}\right)e^{-jk\omega_0}=\left[\operatorname{Re}H\left(e^{j\omega_0}\right)-j\operatorname{Im}H\left(e^{j\omega_0}\right)\right]\left[\cos k\omega_0-j\sin k\omega_0\right]$$

$$=\operatorname{Re}H\left(e^{j\omega_0}\right)\cos k\omega_0-j\operatorname{Re}H\left(e^{j\omega_0}\right)\sin k\omega_0-j\operatorname{Im}H\left(e^{j\omega_0}\right)\cos k\omega_0-\operatorname{Im}H\left(e^{j\omega_0}\right)\sin k\omega_0$$

Αρα

$$\left[e^{jk\omega_0}H\left(e^{j\omega_0}\right)+e^{-jk\omega_0}H\left(e^{-j\omega_0}\right)\right]=2\left[\operatorname{Re}H\left(e^{j\omega_0}\right)\cos k\omega_0-\operatorname{Im}H\left(e^{j\omega_0}\right)\sin k\omega_0\right]$$

$$=2\left[\left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right|\cos\varphi_H\left(\omega_0\right)\cos k\omega_0-\left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right|\sin\varphi_H\left(\omega_0\right)\sin k\omega_0\right]$$

$$=2\left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right|\left[\cos\varphi_H\left(\omega_0\right)\cos k\omega_0-\sin\varphi_H\left(\omega_0\right)\sin k\omega_0\right]=$$

$$=2\left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right|\cos\left(k\omega_0+\varphi_H\left(\omega_0\right)\right)$$

και άρα από την (1)

$$y[k]=\frac{A}{2}\left[H\left(e^{j\omega_0}\right)e^{jk\omega_0}+H\left(e^{-j\omega_0}\right)e^{-jk\omega_0}\right]$$

$$=\frac{A}{2}2\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|\cos\left(k\omega_0+\varphi_H\left(\omega_0\right)\right)=A\left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right|\cos\left(k\omega_0+\varphi_H\left(\omega_0\right)\right)$$