ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ Ζ

Ο υπολογισμός του αντίστροφου μετασχηματισμού Ζ είναι απλός όταν ο $X(z)$ είναι ρητή συνάρτηση

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE ΡΗΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Έστω

$$\mathbb{R}[z] := \{p(z) = p_q z^q + p_{q-1} z^{q-1} + \ldots + p_1 z + p_0,$$
$$q \in \mathbb{Z}^+ = (0,1,2,\ldots),\ \ p_i \in \mathbb{R},\ i = 0,1,2,\ldots,q\}$$

(το σύνολο (δακτύλιος) των πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές)

και

$$\mathbb{R}(z) := \{t(z) = \frac{b(z)}{a(z)},\ \ a(z), b(z) \in \mathbb{R}[z], a(z) \neq 0\}$$

(το σύνολο (σώμα) των πραγματικών ρητών συναρτήσεων)

π.χ.

$$t_1(z) = \frac{2z^2 + 3z + 6}{4z + 2} \in \mathbb{R}(z),$$

$$t_2(z) = \frac{3z^2 + 5z + 7}{z^3 + 5z} \in \mathbb{R}(z),$$

$$t_3(z) = 4z + 1 \in \mathbb{R}(z)$$

$$\mathbb{R}_{pr}(z) := \{t(z) = \frac{b(z)}{a(z)} \in \mathbb{R}(z),\ a(z) \neq 0,\ \deg a(z) \geq \deg b(z)\}$$

(το σύνολο (δακτύλιος) των κανονικών (**pr**oper) πραγματικών ρητών συναρτήσεων)

π.χ.

$$t_1(z)=\frac{2z^2+3z+6}{4z+2}\notin \mathbb{R}_{pr}(z)$$

$$t_2(z)=\frac{3z^2+5z+7}{z^3+5z}\in \mathbb{R}_{pr}(z)$$

$$t_3(z)=4z+1\notin \mathbb{R}_{pr}(z)$$

Έστω $x(k)\leftrightarrow X(z)$

$$X(z)=\frac{b(z)}{a(z)}\in \mathbb{R}(z)$$

$$b(z)=b_m z^m+b_{m-1}z^{m-1}+\ldots+b_1 z+b_0\in \mathbb{R}[z]$$

$$a(z)=a_n z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\ldots+a_1 z+a_0\in \mathbb{R}[z]$$

Έστω

$$p_1, p_2,\ldots p_n\in \mathbb{C}$$

οι n ρίζες της εξίσωσης

$$a(z)=0$$

Το πολυώνυμο $a(s)$ γράφεται

$$a(z)=a_n(z-p_1)(z-p_2)\cdots(z-p_n)$$

οι n ρίζες $p_1, p_2,\ldots p_n$ της εξίσωσης $a(z)=0$ ονομάζονται **μηδενικά** του πολυωνύμου $a(z)$.

Πόλοι της ρητής συνάρτησης

$$X(z)=\frac{b(z)}{a(z)}\in\mathbb{R}(z)$$

είναι τα **μηδενικά** του παρανομαστή $a(z)$.

Μηδενικά της ρητής συνάρτησης $X(z)$ είναι τα μηδενικά του αριθμητή $b(z)$.

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace μιάς ρητής συνάρτησης μπορεί να υπολογιστεί αναπτύσσοντας την ρητή συνάρτηση σε **άθροισμα μερικών κλασμάτων**.

Έστω

$$X(z)=\frac{b(z)}{a(z)}\in\mathbb{R}_{pr}(z)$$

Γράφουμε

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{b(z)}{za(z)}$$

1. Διακριτοί πόλοι

Αν οι πόλοι $p_1, p_2, \ldots, p_n$ της $X(z)$ είναι *διακριτοί*

$$p_i\neq p_j \quad i\neq j$$

τότε

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{b(z)}{za(z)}=\frac{b(z)}{za_n(z-p_1)(z-p_2)\cdots(z-p_n)}$$

$$=\frac{c_0}{z}+\frac{c_1}{z-p_1}+\frac{c_2}{z-p_2}+\ldots+\frac{c_n}{z-p_n} \qquad (1)$$

όπου

$$c_0 = \left[z \frac{X(z)}{z} \right]_{z=0} = X(0)$$

$$c_i = \left[(z - p_i) \frac{X(s)}{z} \right]_{s=p_i}, \qquad i = 1, 2, ..., n$$

Πολλαπλασιάζοντας την (1) επί z παίρνουμε

$$X(z) = c_0 + \frac{c_1 z}{z - p_1} + \frac{c_2 z}{z - p_2} + ... + \frac{c_n z}{z - p_n} \qquad (2)$$

Λόγω των

$$c_0 \leftrightarrow c_0 \Delta[k]$$

$$\frac{c_i z}{z - p_i} \leftrightarrow c_i p_i^k, \qquad k \geq 0$$

Θεωρώντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό $\mathcal{Z}$ της (1) παίρνουμε

$$\begin{aligned} x(kT) &= \mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\} \\ &= \mathcal{Z}^{-1}\left\{ c_0 + \frac{c_1 z}{z - p_1} + \frac{c_2 z}{z - p_2} + ... + \frac{c_n z}{z - p_n} \right\} \\ &= \mathcal{Z}^{-1}\{c_0\} + \mathcal{Z}^{-1}\left\{ \frac{c_1 z}{z - p_1} \right\} + ... + \mathcal{Z}^{-1}\left\{ \frac{c_n z}{z - p_n} \right\} \\ &= c_0 \Delta[k] + c_1 p_1^k + c_2 p_2^k + ... + c_n p_n^k \qquad k = 0, 1, 2, ... \quad (3) \end{aligned}$$

Αν $p_1 = \sigma_1 + j\omega_1 \in \mathbb{C}, \quad \sigma_1, \omega_1 \in \mathbb{R},\ \omega_1 \neq 0$ τότε

$p_2 = \overline{p}_1 = \sigma_1 - j\omega_1 \in \mathbb{C}$

είναι επίσης πόλος της $X(z)$ και

$c_1 = \alpha_1 + j\beta_1 \in \mathbb{C}, \quad c_2 = \overline{c}_i = \alpha_1 - j\beta_1 \in \mathbb{C}, \quad \alpha_1, \beta_1 \in \mathbb{R},\ \beta_1 \neq 0$

και άρα ο 2ος και 3ος όρος στην (3) θα είναι

$$c_1 p_1^k + \overline{c}_1 \overline{p}_1^k, \qquad k = 0,1,2,...$$

Γράφουμε τους μιγαδικούς αριθμούς

$p_1 = \sigma_1 + j\omega_1,\ \overline{p}_1 = \sigma_1 - j\omega_1$ σε πολική μορφή:

$$p_1 = \rho e^{j\theta}, \qquad \overline{p}_1 = \rho e^{-j\theta}$$

$$p_1^k = \rho^k e^{jk\theta}, \qquad \overline{p}_1^k = \rho^k e^{-jk\theta}$$

Άρα

$$c_1 p_1^k + \overline{c}_1 \overline{p}_1^k = \rho^k \left(c_1 e^{jk\theta} + \overline{c}_1 e^{-jk\theta} \right) \tag{4}$$

$$c_1 e^{jk\theta} + \overline{c}_1 e^{-jk\theta} = c_1 \cos k\theta + jc_1 \sin k\theta + \overline{c}_1 \cos k\theta - j\overline{c} \sin k\theta$$

$$= \left(c_1 + \overline{c}_1\right) \cos k\theta + j\left(c_1 - \overline{c}_1\right) \sin k\theta$$

$$=2\left(\mathrm{Re}\ \mathrm{c}_1\right) \cos k\theta - 2\left(\mathrm{Im}\ \mathrm{c}_1\right) \sin k\theta \tag{5}$$

Αντικαθιστώντας την (5) στην (4) έχουμε

$$c_1 p_1^k + \overline{c}_1 \overline{p}_1^k = 2\rho^k \left[2\left(\mathrm{Re}\ \mathrm{c}_1\right)\cos k\theta - 2\left(\mathrm{Im}\ \mathrm{c}_1\right)\sin k\theta \ \right]$$

$$= 2\left|c_1\right|\rho^k \cos\left(k\theta + \angle c_1\right), \qquad k = 0,1,2,...$$

Παράδειγμα

$$X\left(z\right) = \frac{z^3+1}{z^3 - z^2 - z - 2} \in \mathbb{R}_{pr}\left(z\right)$$

$$a\left(s\right) = z^3 - z^2 - z - 2 = \left(z + \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(z + \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(z-2\right)$$

$$\Rightarrow \quad p_1 = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$p_2 = \overline{p}_1 = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} - 1,$$

$$p_3 = -3$$

$$\frac{X(s)}{z}=\frac{c_0}{z}+\frac{c_1 z}{z+\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}}+\frac{\overline{c}_1 z}{z+\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}}+\frac{c_3}{s-2}$$

$$c_0=X(0)=-\frac{1}{2}$$

$$c_1=\left[\left(z+\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\frac{X(z)}{z}\right]_{z=-\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{3}{7}+j\frac{\sqrt{3}}{21}$$

$$c_3=\left[(z-2)\frac{X(z)}{z}\right]_{z=2}=\frac{9}{14}$$

$$x(k)=-\frac{1}{2}\Delta[k]+c_1\left(-\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^k+\overline{c}_1\left(-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^k+\frac{9}{14}2^k\quad k\geq 0$$

Γράφοντας σε πολική μορφή του μιγαδικούς πόλους έχουμε

$$p_1 = (1)e^{j\frac{4\pi}{3}} \Rightarrow \rho_1 = 1, \;\; \theta = \frac{4\pi}{3}$$

$$|c_1| = \sqrt{\frac{9}{49} + \frac{3}{441}} = \sqrt{\frac{64}{441}} = \frac{2}{\sqrt{21}} = 0.436$$

$$\angle c_1 = \text{τοξεφ}\frac{7}{21\sqrt{3}} = 10.89^\circ$$

$$x[k] = -\frac{1}{2}\Delta[k] + 0.783\cos\left(\frac{4\pi}{3}k + 10.89^\circ\right) + \frac{9}{14}(2)^k, \qquad k = 0,1,2,\ldots$$

2. Επαναλαμβανόμενοι πόλοι

Έστω ότι $p_1, p_2, \ldots, p_n$ είναι οι n πόλοι της

$$X(z) = \frac{b(z)}{a(z)}$$

Τότε $0, p_1, p_2, \ldots, p_n$ είναι οι n+1 πόλοι της

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{b(z)}{za(z)}$$

Έστω ότι ο πόλος p_1 έχει πολλαπλότητα r και οι υπόλοιποι $(n+1)-r$ πόλοι $p_{r+1}, p_{r+2},..., p_n$ είναι διακριτοί

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{b(z)}{za(z)}= \qquad\qquad \text{(A)}$$

$$=\frac{c_0}{z}+\frac{c_1}{(z-p_1)}+\frac{c_2}{(z-p_1)^2}+\cdots+\frac{c_r}{(z-p_1)^r}+\frac{c_{r+1}}{(z-p_{r+1})}+\cdots+\frac{c_n}{(z-p_n)}$$

$$c_0=X(0)$$

$$c_i=\left[(z-p_i)\frac{X(z)}{z}\right]_{s=p_i}, \qquad i=r+1,r+2,...,n$$

$$c_{r-i}=\frac{1}{i!}\left[\frac{d^i}{dz^i}\left[(z-p_i)^r\frac{X(z)}{z}\right]\right]_{s=p_i}, \qquad i=1,2,...,r-1$$

Πολλαπλασιάζοντας την (A) επί z παίρνουμε

$$X(z)=c_0+\frac{c_1z}{(z-p_1)}+\frac{c_2z}{(z-p_1)^2}+\cdots+\frac{c_rz}{(z-p_1)^r}+\frac{c_{r+1}z}{(z-p_{r+1})}+\cdots+\frac{c_nz}{(z-p_n)}$$

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Z υπολογίζεται από τους τύπους

Για $i = 2,3$

$$c_2 k\left(p_1^{k-1}\right) \leftrightarrow \frac{c_2 z}{\left(s - p_1\right)^2},$$

$$\frac{1}{2} c_3 k\left(k-1\right)\left(p_1^{k-2}\right) u\left[k-1\right] \leftrightarrow \frac{c_3 z}{\left(z - p_1\right)^3}$$

Για $i = 4,5,\ldots$

Κάνοντας επανειλημμένη χρήση της ιδιότητας «πολλαπλασιασμός επί *k*» του μετασχηματισμού Ζ

$$\frac{c_i}{\left(i-1\right)!} k\left(k-1\right)\cdots\left(k-i+2\right)\left(p_1^{k-i+1}\right) u\left[k-i+2\right]$$

$$\leftrightarrow$$

$$\frac{c_i z}{\left(z - p_1\right)^i}, \qquad i = 4,5,\ldots$$

Παράδειγμα

$$X\left(z\right)=\frac{6z^3+2z^2-z}{z^3-z^2-z+1}$$

$$\frac{X\left(z\right)}{z}=\frac{6z^2+2z\ \ -1}{z^3-z^2-z+1}=\frac{6z^2+2z\ \ -1}{\left(z-1\right)^2\left(z+1\right)}$$

$$\frac{X\left(z\right)}{z}==\frac{c_1}{z-1}+\frac{c_2}{\left(z-1\right)^2}+\frac{c_3}{z+1}$$

$$c_2=\left[\left(z-1\right)^2\frac{X\left(s\right)}{z}\right]_{z=1}=\frac{6+2-1}{2}=3.5$$

$$c_1=\left[\frac{d}{dz}\left(z-1\right)^2\frac{X\left(s\right)}{z}\right]_{z=1}=\left[\frac{d}{dz}\frac{6z^2+2z-1}{z+1}\right]_{z=1}$$

$$=\left.\frac{\left(z+1\right)\left(12z+2\right)-\left(6z^2+2z-1\right)\left(1\right)}{\left(z+1\right)^2}\right|_{z=1}=\frac{1\left(14\right)-7}{4}=5.27$$

$$c_3=\left[\left(z+1\right)\frac{X\left(z\right)}{z}\right]_{z=-1}=\frac{6-2-1}{\left(-2\right)^2}=0.75$$

Άρα

$$X(z)=\frac{5.25z}{z-1}+\frac{3.5z}{(z-1)^2}+\frac{0.75z}{z+1}$$

$\Rightarrow$

$$x[k]=5.25(1)^k+3.5k(1)^{k-1}+0.75(-1)^k$$

$$=5.25+3.5k+0.75(-1)^k, \qquad k=0,1,2,\ldots$$

Ευρεση του αντίστροφου μετασχηματισμου $\mathcal{Z}$ μέσω «διαίρεσης»

$$X(s)=\frac{z^2-1}{z^3+2s+4}$$

$$
\begin{array}{r l|l}
 & z^2+0z-1 & z^3+0z^2+2z+4 \\ \hline
 & -z^2 \qquad -2-4z^{-1} & z^{-1}+0z^{-2}-3z^{-3}-4z^{-4}+\ldots \\ \cline{2-2}
+ & 0z^2+0z-3-4z^{-1} & \\
 & +3+0z^{-1}+6z^{-2}+12z^{-3} & \\
 & 0-4z^{-1}+6z^{-2}+12z^{-3} & \\ \cline{2-2}
 & +4z^{-1}+0z^{-2}+8z^{-3}+16z^{-4} &
\end{array}
$$

άρα

$$X(z)=z^{-1}-3z^{-3}-4z^{-4}+\ldots$$

εφόσον είναι

$$X(z) = x[0] + x[T]z^{-1} + x[2T]z^{-2} + \ldots$$

$$x[0] = 0,\ x[T] = 1,\ x[2T] = 0,\ x[3T] = -3$$
$$x[4T] = -4, \ldots.$$

ΓΕΝΙΚΑ

Αν

η αυστηρά κανονική ρητή συνάρτηση $X(z) = \dfrac{b(z)}{a(z)}$, έχει:	Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace $x[k]$ της $X(z)$ έχει όρο της μορφής
Απλό πραγματικό πόλο p	$cp^k, \quad c \in \mathbb{R},$
πραγματικό πόλο p με πολλαπλότητα 2	$c_1 p^k + c_2 k p^{k-1}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \quad i = 2,3$

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ

Η μορφή του σήματος $x[k]$ **εξαρτάτε μόνο από τους πόλους της**

$$X(z) = \frac{b(z)}{a(z)}$$

(πόλοι της $X(z) =$ ρίζες του παρανομαστή $a(z)$**)**

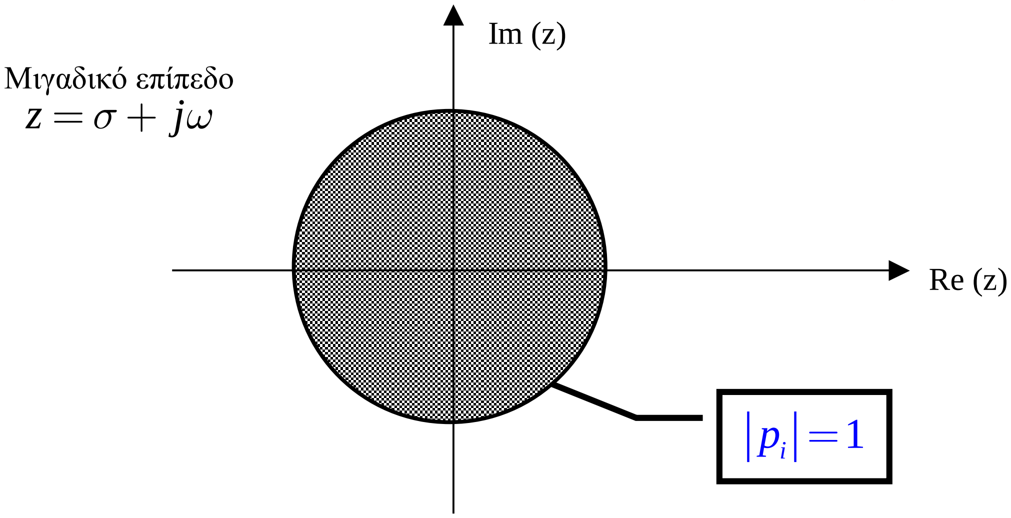
(δεν εξαρτάτε από τα μηδενικά της $X(z)$

(μηδενικά της $X(z) =$ ρίζες του αριθμητή $b(z)$**)**

ΣΥΝΕΠΕΙΑ ΤΩΝ ΠΑΡΑΠΑΝΩ είναι ότι

η συμπεριφορά του σήματος $x[k]$ όταν ο χρόνος $k \to \infty$

εξαρτάτε μόνο από τους πόλους της $X(z) = \dfrac{b(z)}{a(z)}$ και



$$\lim_{k \to \infty} x[k] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad |p_i| < 1, \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n$$

.