Παράδειγμα εύρεσης μιας αριστερά πρώτης κλασματικής περιγραφής ενός πίνακα κανονικών ρητών συναρτήσεων με κανονικό ως προς τις γραμμές πίνακα παρανομαστή.
Έστω ότι ο πίνακας συναρτήσεων μεταφοράς είναι ο

$$G(s)=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{(s+2)} & \dfrac{1}{(s+1)} \\ \dfrac{1}{(s+2)} & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_{pr}(s)$$

$$=\frac{1}{(s+2)(s+1)}\begin{bmatrix} (s+1) & (s+2) \\ (s+1) & 0 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{(s+2)(s+1)} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{(s+2)(s+1)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (s+1) & (s+2) \\ (s+1) & 0 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} (s+2)(s+1) & 0 \\ 0 & (s+2)(s+1) \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} (s+1) & (s+2) \\ (s+1) & 0 \end{bmatrix}$$

$$=\widetilde{D}_L(s)^{-1}\widetilde{N}_L(s)$$

$$\widetilde{D}_L(s)=\begin{bmatrix} (s+2)(s+1) & 0 \\ 0 & (s+2)(s+1) \end{bmatrix}$$

$$\widetilde{N}_L(s)=\begin{bmatrix} (s+1) & (s+2) \\ (s+1) & 0 \end{bmatrix}$$

Οι $\widetilde{D}_L(s), \widetilde{N}_L(s)$ αποτελούν μια αριστερή κλασματική περιγραφή της $G(s) \in \mathbb{R}_{pr}(s)^{2\times 2}$.

Είναι οι $\widetilde{D}_L(s), \widetilde{N}_L(s)$ αριστερά πρώτοι ?

Ισοδύναμα είναι ο μέγιστος κοινός αριστερός διαιρέτης των $\widetilde{D}_L(s), \widetilde{N}_L(s)$ unimodular ?

Τεστ για να είναι οι $\widetilde{D}_L(s), \widetilde{N}_L(s)$ αριστερά πρώτοι

Οι $\widetilde{D}_L(s), \widetilde{N}_L(s)$ είναι αριστερά πρώτοι αν και μόνο αν

$$rank_{\mathbb{R}}\left[\widetilde{D}_L(s_i) \quad \widetilde{N}_L(s_i)\right] = 2 \ \forall \ s_i \in \mathbb{C} \quad (1)$$

Δεν είναι ανάγκη να εξετάσουμε αν ισχύει η (1) $\forall \ s_i \in \mathbb{C}$.
Βρίσκουμε τα υποψήφια $s_i \in \mathbb{C}$ στην (1) ως εξής. Επειδή

$$rank_{\mathbb{R}}\left[\widetilde{D}_L(s_i) \quad \widetilde{N}_L(s_i)\right] < 2 \qquad (2)$$

αν και μόνο αν **όλες** οι 2×2 υπο-ορίζουσες του 2×4 πίνακα

$$\left[\widetilde{D}_L(s_i) \quad \widetilde{N}_L(s_i)\right] \in \mathbb{C}^{2\times 4} \qquad (3)$$

είναι ίσες με μηδέν, η (2) συνεπάγεται ότι **και** η υπο-ορίζουσα που παράγεται από τις δύο γραμμές και την πρώτη και δεύτερη στήλη του πίνακα στην (3), δηλαδή η ορίζουσα $\left|\widetilde{D}_L(s_i)\right|$ του $\widetilde{D}_L(s_i)$ θα πρέπει να είναι ίση με μηδέν.

Αρα τα $s_i \in \mathbb{C}$ για τα οποία

$$rank_{\mathbb{R}}\left[\widetilde{D}_L(s_i) \quad \widetilde{N}_L(s_i)\right] < 2$$

είναι τα μηδενικά του $\widetilde{D}_L(s)$ ή ισοδύναμα οι ρίζες $s_i \in \mathbb{C}$ της

$$\left|\widetilde{D}_L(s)\right| = (s+1)^2 (s+2)^2 = 0$$

οι οποίες είναι $s_1 = -1, \quad s_2 = -2$. Πράγματι $\left|\widetilde{D}_L(-1)\right| = 0, \quad \left|\widetilde{D}_L(-2)\right| = 0$ και για $s = s_1 = -1$

$$rank_{\mathbb{R}}\left[\widetilde{D}_L(-1) \quad \widetilde{N}_L(-1)\right] =$$

$$rank_{\mathbb{R}}\begin{bmatrix} (s+2)(s+1) & 0 & (s+1) & (s+2) \\ 0 & (s+2)(s+1) & (s+1) & 0 \end{bmatrix}_{s=-1}$$

$$= rank_{\mathbb{R}}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 1 < 2$$

Ομοίως για $s = s_2 = -2$

$$rank_{\mathbb{R}}\left[\widetilde{D}_L(-2) \quad \widetilde{N}_L(-2)\right] =$$

$$rank_{\mathbb{R}}\begin{bmatrix} (s+2)(s+1) & 0 & (s+1) & (s+2) \\ 0 & (s+2)(s+1) & (s+1) & 0 \end{bmatrix}_{s=-2}$$

$$= rank_{\mathbb{R}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = 1 < 2$$

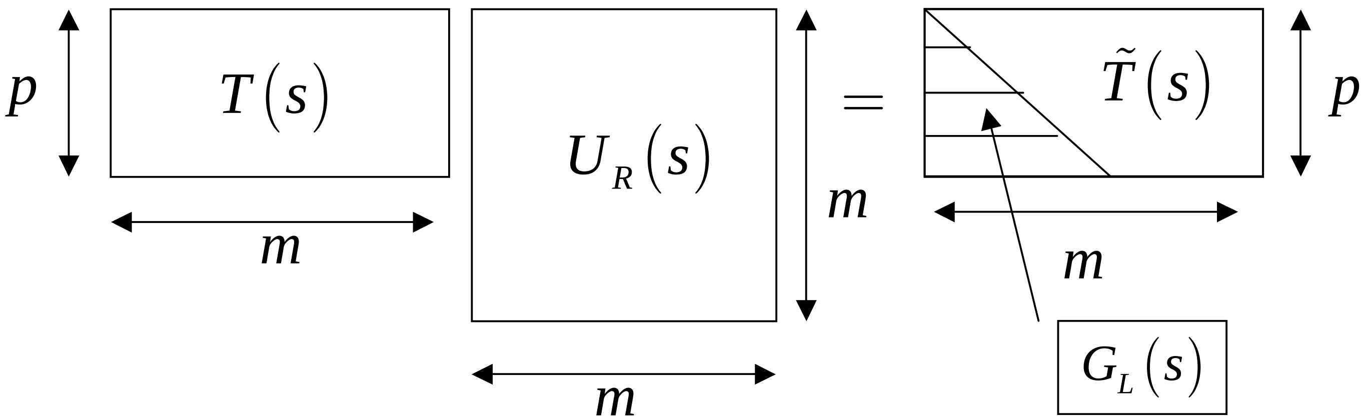
Αρα οι $\widetilde{D}_L(s), \widetilde{N}_L(s)$ **ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ** αριστερά πρώτοι.

Για να βρούμε μια **αριστερά πρώτη** κλασματική περιγραφή $D_L(s)^{-1} N_L(s)$ της $G(s)$ υπολογίζουμε τον **μέγιστο κοινό αριστερό διαιρέτη** $G_L(s)$ των $\widetilde{D}_L(s), \widetilde{N}_L(s)$. (ο οποίος βάσει των παραπάνω ΔΕΝ είναι unimodular και θα πρέπει να έχει μηδενικά τα κοινά μηδενικά των $\widetilde{D}_L(s), \widetilde{N}_L(s)$ ή ισοδύναμα τα μηδενικά του πολυωνυμικού πίνακα $T(s) := \begin{bmatrix} \widetilde{D}_L(s) & \widetilde{N}_L(s) \end{bmatrix}$) κάνοντας χρήση της προτάσεως:

Πρόταση

Με στοιχειώδης πράξεις επί των στηλών του, κάθε πολυωνυμικός πίνακας $T(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times m}, p \le m, \ rank_{\mathbb{R}(s)} T(s) = p$ μπορεί να αναχθεί πολυωνυμικό πίνακα $\widetilde{T}(s)$ ο οποίος είναι **κάτω τριγωνικός.**

και του αποτελέσματος της θεωρίας ότι το $p \times p$ μέρος του κάτω τριγωνικού πίνακα $\widetilde{T}(s)$ το οποίο αποτελείτε από τις p πρώτες γραμμές και στήλες του $\widetilde{T}(s)$ είναι **μέγιστος κοινός αριστερός διαιρέτης** $G_L(s)$ των $\widetilde{D}_L(s), \widetilde{N}_L(s)$ (βλέπε σχήμα)



Οπου

$$T(s) := \left[\widetilde{D}_L(s) \quad \widetilde{N}_L(s)\right] \quad (4)$$

Οι στοιχειώδεις πράξεις επί των στηλών του (4) ενσωματώνονται στο unimodular πίνακα $U_R(s)$ παρακάτω:

$$\begin{bmatrix} (s+2)(s+1) & 0 & (s+1) & (s+2) \\ 0 & (s+2)(s+1) & (s+1) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & s+2 & -2-s & 0 \\ 1 & -s-1 & s+1 & -s-1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -(s+1) & (s+1)(s+2) & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Άρα ο πολυωνυμικός πίνακας

$$G_L(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -(s+1) & (s+1)(s+2) \end{bmatrix}$$

είναι **μέγιστος αριστερός κοινός διαιρέτης** των $\widetilde{D}_L(s), \widetilde{N}_L(s)$.

Άρα θα υπάρχουν πολυωνυμικοι πίνακες $D_L(s), N_L(s)$

τέτοιοι ώστε οι $\widetilde{D}_L(s), \widetilde{N}_L(s)$ θα γράφονται

$$\widetilde{D}_L(s) = G_L(s) D_L(s)$$
$$\widetilde{N}_L(s) = G_L(s) N_L(s) \qquad (5)$$

Από την (5)

$$D_L(s) = G_L(s)^{-1}\widetilde{D}_L(s) = \begin{bmatrix} (s+2)(s+1) & 0 \\ s+1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$N_L(s) = G_L(s)^{-1}\widetilde{N}_L(s) = \begin{bmatrix} s+1 & s+2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

και πράγματι

$$\widetilde{D}_L(s) = \begin{bmatrix} (s+2)(s+1) & 0 \\ 0 & (s+2)(s+1) \end{bmatrix} = G_L(s) D_L(s)$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -(s+1) & (s+1)(s+2) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (s+2)(s+1) & 0 \\ s+1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\widetilde{N}_L(s) = \begin{bmatrix} (s+1) & (s+2) \\ (s+1) & 0 \end{bmatrix} = G_L(s) N_L(s)$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -(s+1) & (s+1)(s+2) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s+1 & s+2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Οι πολυωνυμικοί πίνακες

$$D_L(s)=\begin{bmatrix}(s+2)(s+1) & 0\\ s+1 & 1\end{bmatrix},\quad N_L(s)=\begin{bmatrix}s+1 & s+2\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

είναι **αριστερά πρώτοι**. Αυτό το βλέπουμε από το ότι

Για $\quad s=-1$

$$rank_{\mathbb{R}}\left[D_L(-1),N_L(-1)\right]=$$

$$rank_{\mathbb{R}}\begin{bmatrix}(s+2)(s+1) & 0 & (s+1) & (s+2)\\ s+1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}_{s=-1}$$

$$=rank_{\mathbb{R}}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}=2$$

και για $\quad s=-2$

$$rank_{\mathbb{R}}\left[D_L(-2)\quad N_L(-2)\right]=$$

$$rank_{\mathbb{R}}\begin{bmatrix}(s+2)(s+1) & 0 & (s+1) & (s+2)\\ s+1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}_{s=-2}$$

$$= rank_{\mathbb{R}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 2$$

Επίσης έχουμε ότι

$$\widetilde{D}_L(s)^{-1}\widetilde{N}_L(s) = \left[G_L(s)D_L(s)\right]^{-1} G_L(s)N_L(s) =$$

$$= D_L(s)^{-1}G_L(s)^{-1}G_L(s)N_L(s) = D_L(s)^{-1}N_L(s)$$

και

$$D_L(s)^{-1}N_L(s) = \begin{bmatrix} (s+2)(s+1) & 0 \\ s+1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} s+1 & s+2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+2)(s+1)} & 0 \\ -\frac{1}{s+2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+1 & s+2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+2} & \frac{1}{s+1} \\ \frac{1}{s+2} & 0 \end{bmatrix} = G(s)$$

Αρα το ζεύγος

$$D_L(s) = \begin{bmatrix} (s+2)(s+1) & 0 \\ s+1 & 1 \end{bmatrix}, \quad N_L(s) = \begin{bmatrix} s+1 & s+2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

αποτελεί μία **αριστερά πρώτη** κλασματική πολυωνυμική περιγραφή του $G(s)$.

Έστω $D_{Lri}(s) \in \mathbb{R}[s]^{1\times 2}$ οι γραμμές του αριστερού παρανομαστή:

$$D_L(s) = \begin{bmatrix} (s+2)(s+1) & 0 \\ s+1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{Lr1}(s) \\ D_{Lr2}(s) \end{bmatrix}$$

της $G(s) = D_L(s)^{-1} N_L(s)$. Οι βαθμοί των γραμμών του $D_L(s)$ είναι

$$\deg D_{Lr1}(s) = \deg\left[(s+2)(s+1) \quad 0\right] = 2 =: r_1$$

$$\deg D_{Lr2}(s) = \deg\left[s+1 \quad 1\right] = 1 =: r_2$$

Η πολυπλοκότητα των γραμμών $c_r\left(D_L(s)\right)$ του $D_L(s)$ (*row complexity*) είναι το άθροισμα των βαθμών των γραμμών του $D_L(s)$

$$c_r(T) = \sum_{i=1}^{2} \deg D_{Lri}(s) = r_1 + r_2 = 2+1=3$$

Ο **Βαθμός** (degree) $\deg D_L(s)$ του $D_L(s) \in \mathbb{R}[s]^{2\times 2}$, , είναι ο βαθμός της ορίζουσας του $D_L(s)$:

$$\deg D_L(s) = \deg\left|D_L(s)\right| = \deg\left|\begin{bmatrix} (s+2)(s+1) & 0 \\ s+1 & 1 \end{bmatrix}\right|$$

$$= \deg(s+2)(s+1) = 2$$

Έχουμε δίξει ότι ο βαθμός $\deg D_L(s)$ κάθε πολυωνυμικού πίνακα όπως ο $D_L(s)$ δεν μπορεί να υπερβαίνει την πολυπλοκότητα των γραμμών $c_r(D_L(s))$ του. Δηλαδή είναι πάντα

$$c_r(D_L(s)) \geq \deg D_L(s)$$

Στην περίπτωση του παραδείγματος μας είναι

$$c_r(D_L(s)) = 3 > \deg D_L(s) = 2$$

Ο $D_L(s)$ γράφεται

$$D_L(s) = \begin{bmatrix} (s+2)(s+1) & 0 \\ s+1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s^2 & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} [D_L(s)]_r^h + \begin{bmatrix} 3s+2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} s^2 & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3s+2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ο μεγιστοβάθμιος ως προς τις γραμμές πίνακας συντελεστής του $D_L(s)$. (highest row degree coefficient matrix) είναι ο πίνακας

$$[D_L(s)]_r^h = \begin{bmatrix} (s+2)(s+1) & 0 \\ s+1 & 1 \end{bmatrix}_r^h = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

και επειδή

$$rank_{\mathbb{R}}\left[D_L(s)\right]_r^h = rank_{\mathbb{R}}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix} = 1 < 2$$

ο $D_L(s)$ **δεν είναι** κανονικός ως προς τις γραμμές του (row proper).

Θυμηθείτε την

Πρόταση

Έστω $T(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times m}, \quad rank_{\mathbb{R}(s)} T(s) = p.$

Ο $T(s)$ είναι κανονικός ως προς τις γραμμές του (row proper) αν και μόνο αν η πολυπλοκότητα γραμμών $c_r(T)$ ισούται με τον βαθμό $\deg T(s)$

Δηλαδή

$T(s)$ είναι row proper $\Leftrightarrow c_r(T) = \deg T(s)$

ΑΝΑΓΩΓΗ ΤΟΥ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΟΥ ΠΙΝΑΚΑ $D_L(s)$ ΣΕ κανονικό ως προς τις γραμμές του (ROW PROPER)

Θυμηθείτε την

Πρόταση

Έστω $D_L(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times p}, \quad rank_{\mathbb{R}(s)} D_L(s) = p$ μη κανονικός ως προς τις γραμμές του.

Τότε υπάρχει unimodular $T_L(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times p}$ τέτοιος ώστε ο

$$\overline{D}_L(s) := T_L(s) D_L(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times m} \quad (6)$$

είναι **κανονικός ως προς τις γραμμές του** (row proper).

$$p\left\{\underbrace{\boxed{\overline{D}_L(s)}}_{p}\right. \quad = \quad p\left\{\underbrace{\boxed{T_L(s)}}_{p}\right.\underbrace{\boxed{D_L(s)}}_{p}$$

Πως επιλέγουμε το $T_L(s)$? (δες την Θεωρία)

Έστω $a^{\tau} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times 2}$ τέτοιο ώστε

$$a^{\tau}\left[D_L(s)\right]_r^h = 0$$

Από την

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

έχουμε ότι $a^{\tau} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times 2}$

Έστω

$r_0 = \max\{r_i\}$,

$r_1 = 2, \quad r_2 = 1, \quad r_0 = \max\{r_i\} = \max\{2,1\} = 2$

και ο βαθμός $r_0 = 2$ βρίσκεται στην γραμμή $i_0 = 1$ του $D_L(s)$.

Ορίζουμε το άνυσμα

$$a(s)^{\tau}=\begin{bmatrix} a_1 s^{r_0-r_1} & a_2 s^{r_0-r_2}\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix} 1s^{2-2} & -1s^{2-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -s\end{bmatrix}\in\mathbb{R}[s]^{1\times 2}$$
$$\deg a(s)^{\tau}=\deg\begin{bmatrix} 1 & s\end{bmatrix}=1<2=r_0$$
και κατασκευάζουμε τον $T_L(s)$ αντικαθιστώντας την $i_0=1$ γραμμή του μοναδιαίου πίνακακα I_2 με την $a(s)^{\tau}=\begin{bmatrix} 1 & -s\end{bmatrix}$.

Άρα ο unimodular πίνακας $T_L(s)$ στην (6) είναι ο

$$T_L(s)=\begin{bmatrix} 1 & -s \\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

και

$$\overline{D}_L(s)=T_L(s)D_L(s)=\begin{bmatrix} 1 & -s \\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} (s+1)(s+2) & 0 \\ s+1 & 1\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix} (s+1)(s+2)-s(s+1) & -s \\ s+1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2s+2 & -s \\ s+1 & 1\end{bmatrix}$$
$$\left[\overline{D}_L(s)\right]_r^h=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0\end{bmatrix}$$
$$rank\left[\overline{D}(s)\right]_r^h=rank\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0\end{bmatrix}=2$$

(αν $rank\left[\overline{D}(s)\right]_r^h<2$ επαναλαμβάνουμε τα παραπάνω για τον $\overline{D}(s)$).

Άρα ο

$$\overline{D}_L(s)=\begin{bmatrix}2s+2 & -s\\ s+1 & 1\end{bmatrix}$$

είναι **κανονικός ως προς τις γραμμές** του (παρατηρήστε ότι

$$\deg \overline{D}_{Lr1}(s)=\deg\begin{bmatrix}2s+2 & -s\end{bmatrix}=1=\mu_1$$

$$\deg \overline{D}_{Lr2}(s)=\deg\begin{bmatrix}s+1 & 1\end{bmatrix}=1=\mu_2$$

$$c_r\left(\overline{D}_L(s)\right)=\mu_1+\mu_2=1+1=2=$$

$$\deg \overline{D}_L(s)=\deg\left|\overline{D}_L(s)\right|=\deg\left(2s+2-s(s+1)\right)=2$$

Ο αντίστοιχος πίνακας αριθμητής είναι

$$\overline{N}_L(s)=T_L(s)N_L(s)=\begin{bmatrix}1 & -s\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s+1 & s+2\\ 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

και

$$G(s)=\overline{D}_L(s)^{-1}\overline{N}_L(s)=\begin{bmatrix}2s+2 & -s\\ s+1 & 1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{s+2} & \dfrac{1}{s+1}\\ \dfrac{1}{s+2} & 0\end{bmatrix}$$

είναι μια **αριστερά πρώτη κλασματική περιγραφή** του $G(s)$ με τον $\overline{D}_L(s)$ **κανονικό ως προς τις γραμμές του**. Αποδεικνύετε ότι οι βαθμοί γραμμών

$$\deg \overline{D}_{L1}(s) = \deg\begin{bmatrix}2s+2 & -s\end{bmatrix} = 1 = \mu_1$$

$$\deg \overline{D}_{L2}(s) = \deg\begin{bmatrix}s+1 & 1\end{bmatrix} = 1 = \mu_2$$

του πίνακα παρανομαστή μιας τέτοιας αριστερά πρώτης πολυωνυμικής περιγραφής του $G(s)$ αποτελούν **αναλλοίωτες** της $G(s)$. Οι δείκτες αυτοί ονομάζονται **δείκτες παρατηρησιμότητας** του συστήματος (observability indices).

Για την εύρεση μιάς **δεξιά πρώτης** κλασματικής περιγραφής του $G(s)$ επαναλάβουμε κατ' αναλογία την παραπάνω διαδικασία βρίσκοντας πρώτα μια οποιαδήποτε δεξιά περιγραφή $\widetilde{N}_R(s)\widetilde{D}_R(s)^{-1} = G(s)$ και εν συνεχεία μια **δεξιά πρώτη** περιγραφή, εξάγοντας τον μέγιστο κοινό δεξιό διαιρέτη $G_R(s)$ των $\widetilde{N}_R(s), \widetilde{D}_R(s)$ (αν αυτός δεν είναι unimodular) κτλ κτλ. (κάντε το).

(Ακόμη λίγη θεωρία) Έστω

$$G(s) = D_L(s)^{-1} N_L(s) = N_R(s) D_R(s)^{-1} \qquad (7)$$

μια αριστερά πρώτη και μια δεξιά πρώτη αντίστοιχα, κλασματικές περιγραφές του $G(s) \in \mathbb{R}_{pr}(s)^{p\times m}$. Από την (7) έχουμε την

$$D_L(s) N_R(s) = N_L(s) D_R(s)$$

$$\begin{bmatrix} D_L(s) & N_L(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_R(s) \\ -D_R(s) \end{bmatrix} = 0_{p,m} \qquad (8)$$