Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα Σπουδών στην Θεωρητική Πληροφορική και την Θεωρία Συστημάτων & Ελέγχου

Α. Ι. ΒΑΡΔΟΥΛΑΚΗΣ

ΠΟΛΥΜΕΤΑΒΛΗΤΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

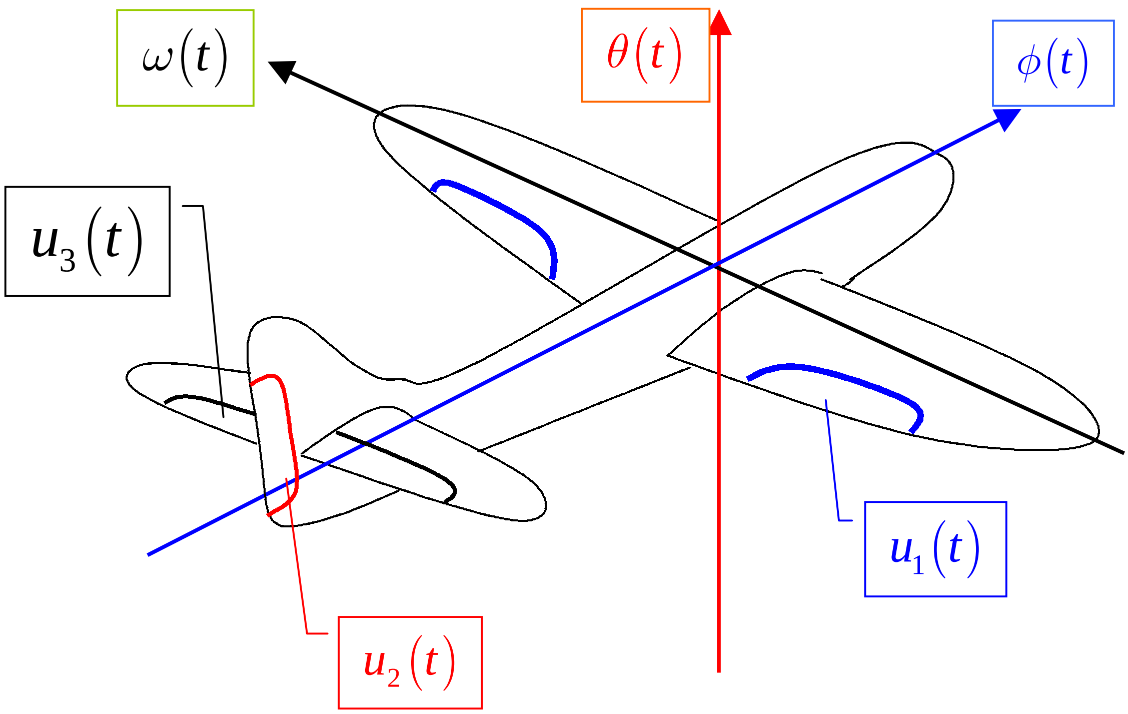
ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών
Τομέας Επιστήμης Η/Υ &
Αριθμητικής Ανάλυσης

Φεβρουάριος 2003

Παράδειγμα πολυμεταβλητού συστήματος

Αεροπλάνο.

Είσοδοι: θέσεις $u_1(t), u_2(t), u_3(t)$ των επιφανειών ελέγχου



Έξοδοι: οι τρεις βαθμοί ελευθερίας $\theta(t), \phi(t), \omega(t)$ του αεροπλάνου

Η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος είναι πίνακας (3×3)

$$\begin{bmatrix} \Theta(s) \\ \Phi(s) \\ \Omega(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11}(s) & g_{12}(s) & g_{13}(s) \\ g_{21}(s) & g_{22}(s) & g_{23}(s) \\ g_{31}(s) & g_{32}(s) & g_{33}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \\ U_3(s) \end{bmatrix}$$

$$\Theta(s) = g_{11}(s)U_1(s) + g_{12}(s)U_2(s) + g_{13}(s)U_3(s)$$

$$\Phi(s) = g_{21}(s)U_1(s) + g_{22}(s)U_2(s) + g_{23}(s)U_3(s)$$

$$\Omega(s) = g_{31}(s)U_1(s) + g_{32}(s)U_2(s) + g_{33}(s)U_3(s)$$

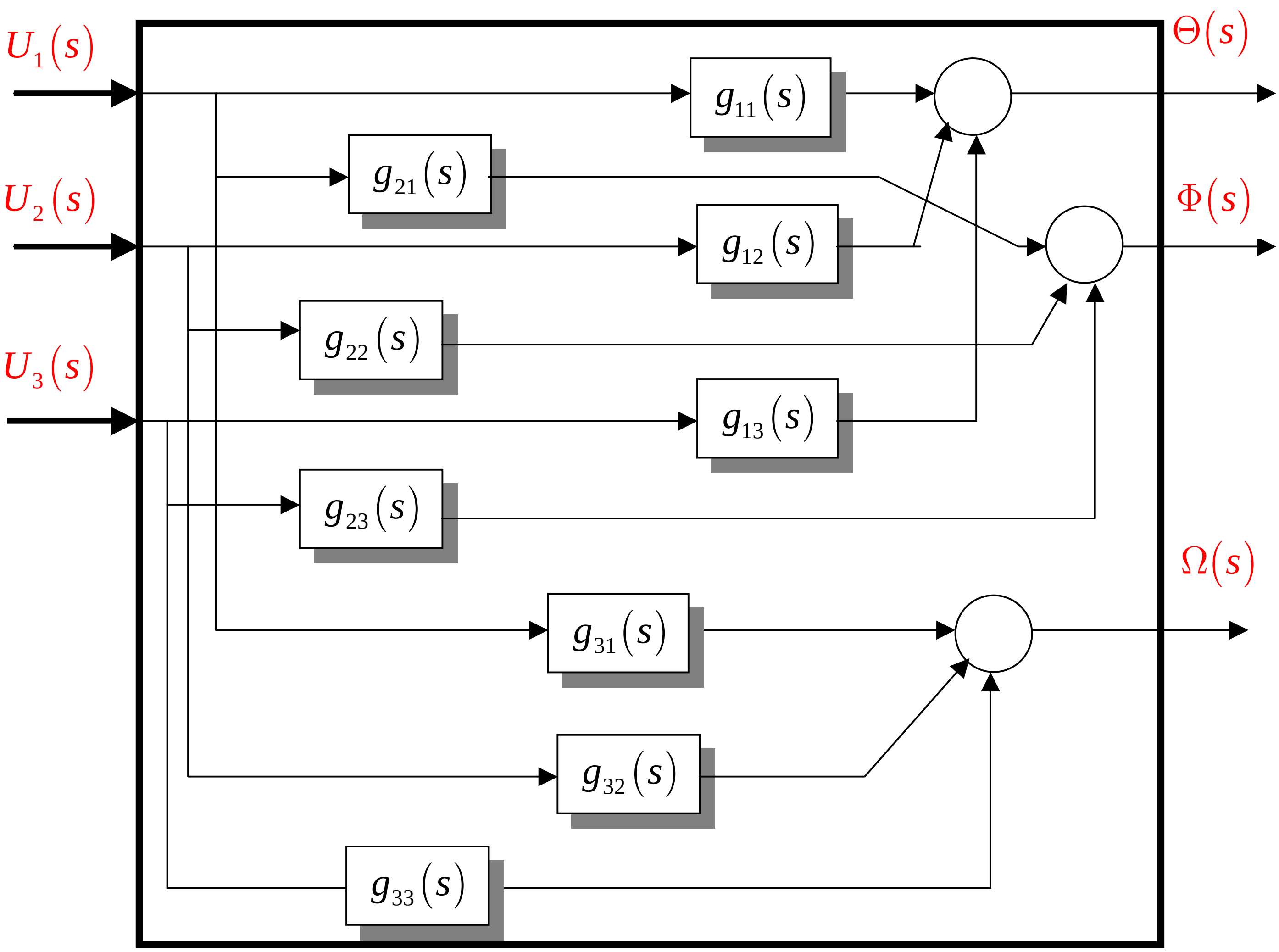
$$y(s)=\begin{bmatrix}\Theta(s)\\ \Phi(s)\\ \Omega(s)\end{bmatrix}$$ άνυσμα έξόδου, $$u(s)=\begin{bmatrix}U_1(s)\\ U_2(s)\\ U_3(s)\end{bmatrix}$$ άνυσμα εισόδου

$$G(s)=\begin{bmatrix}g_{11}(s) & g_{12}(s) & g_{13}(s)\\ g_{21}(s) & g_{22}(s) & g_{23}(s)\\ g_{31}(s) & g_{32}(s) & g_{33}(s)\end{bmatrix}$$ πίνακας **συναρτήσεων μετ**αφοράς

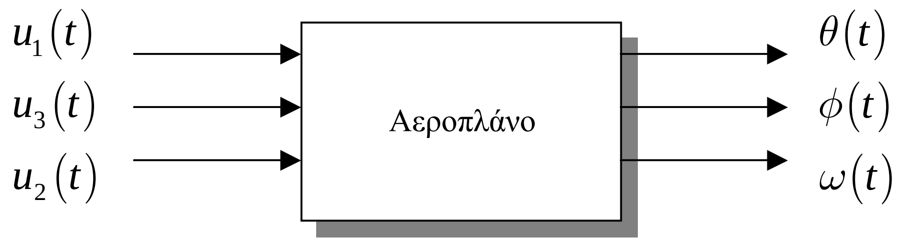
του συστήματος.

Οι συναρτήσεις μεταφοράς $g_{ij}(s)=\dfrac{n_{ij}(s)}{d_{ij}(s)}$, είναι πραγματικές ρητές συναρτήσεις

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΡΟΗΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ (BLOCK DIAGRAM)

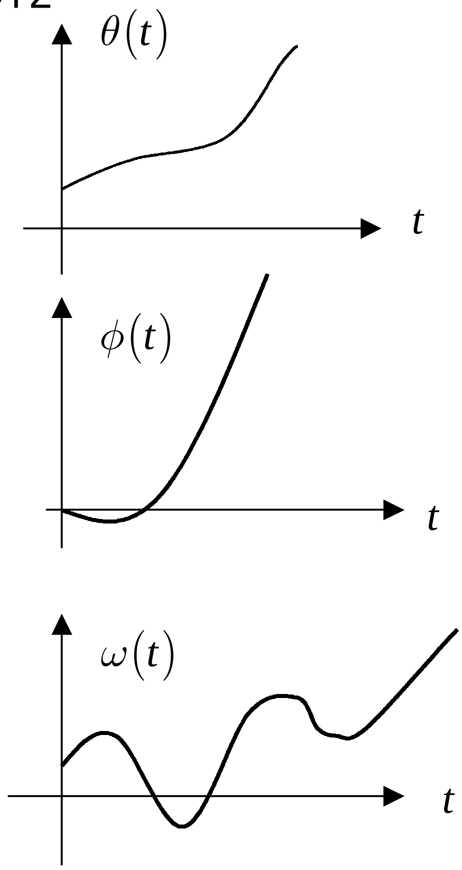


Ανοιχτό σύστημα



- Γενικώς ασταθές

Φραγμένη είσοδος Δίνει ΜΗ ΦΡΑΓΜΕΝΕΣ ΕΞΟΔΟΥΣ



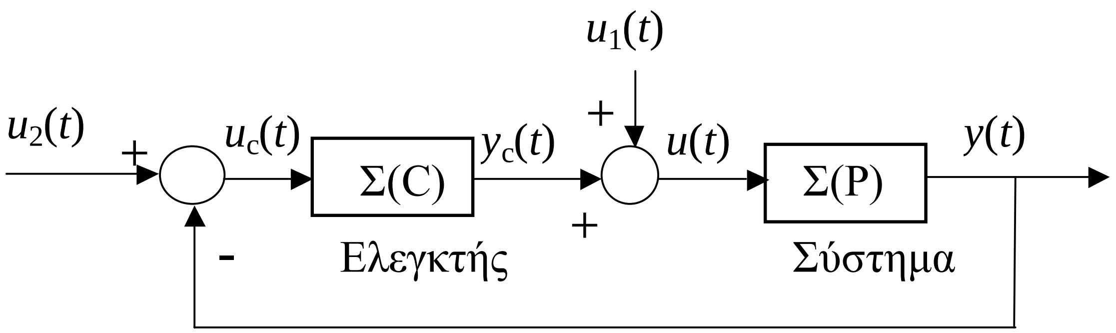
- Οι έξοδοι δεν είναι οι επιθυμητές

- Υπάρχουν αλληλεπιδράσεις έτσι ώστε

  η i-στη είσοδος να επηρεάζει όλες τις εξόδους.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΕΛΕΓΧΟΥ ΠΟΛΥΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

ΔΕΔΟΜΕΝΟΥ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ ΠΡΟΤΥΠΟΥ ΕΝΟΣ ΠΟΛΥΜΕΤΑΒΛΗΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ Σ(P) ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΕΛΕΓΧΟΥ ΤΟΥ Σ(P) ΣΥΝΙΣΤΑΤΑΙ ΣΤΟΝ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ ΠΡΟΤΥΠΟΥ ΕΝΟΣ ΑΛΛΟΥ ΠΟΛΥΜΕΤΑΒΛΗΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ Σ(C) ΤΟ ΟΠΟΙΟ ΟΝΟΜΑΖΕΤΑΙ ΕΛΕΓΚΤΗΣ (CONTROLER) ΤΕΤΟΙΟΥ ΩΣΤΕ ΤΟ ΚΛΕΙΣΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΜΕ ΑΝΑΔΡΑΣΗ (FEEDBACK)



ΝΑ ΕΧΕΙ ΕΠΙΘΥΜΗΤΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΟΠΩΣ

- ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ
- ΟΙ ΕΞΟΔΟΙ ΝΑ ΕΧΟΥΝ ΕΠΙΘΥΜΗΤΗ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑ
- ΝΑ ΜΗΝ ΥΠΑΡΧΟΥΝ ΜΗ ΕΠΙΘΥΜΗΤΕΣ ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΤΩΝ ΕΙΣΟΔΩΝ ΚΑΙ ΤΩΝ ΕΞΟΔΩΝ
- κ. ά.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΤΥΠΑ ΠΟΛΥΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ ΤΟΥ **ΧΩΡΟΥ ΤΩΝ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΩΝ**

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_p(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{p1} & c_{p2} & \cdots & c_{pn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1m} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{p1} & d_{p2} & \cdots & d_{pm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}$$

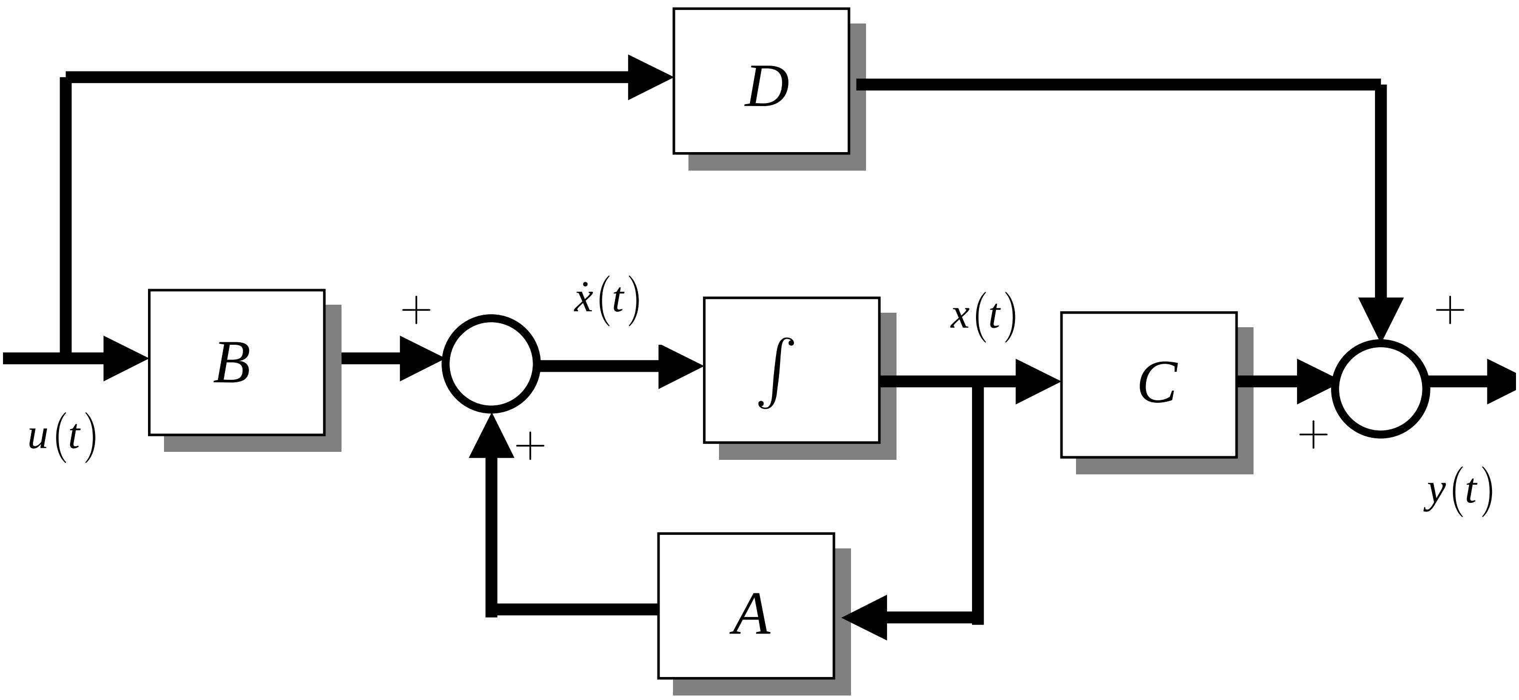
$x(t) := \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ $(n \times 1)$-ανυσμα καταστασης

$u(t) := \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ $(m \times 1)$-ανυσμα εισοδου

$y(t) := \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_p(t) \end{bmatrix} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$ $(p \times 1)$-ανυσμα εξοδου

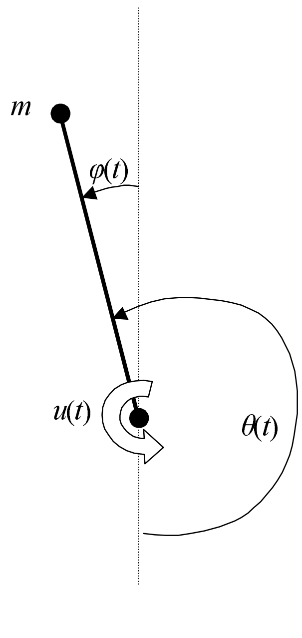
$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$



Παράδειγμα

Ανάστροφο εκκρεμές



$$\ddot{\phi}(t) - \frac{g}{L}\phi(t) = \frac{1}{mL^2}u(t)$$

$$\frac{g}{L} = 1, \quad \frac{1}{mL^2} = 1$$

$$\ddot{\phi}(t) - \phi(t) = u(t)$$

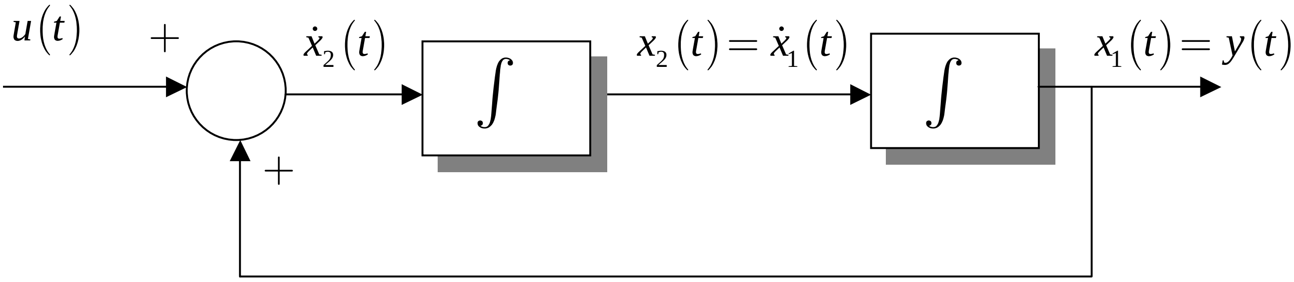
$$x_1(t) := \phi(t)$$
$$x_2(t) := \dot{\phi}(t)$$

$$\dot{x}_1(t) = \dot{\phi}(t) = x_2(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = \ddot{\phi}(t) = \phi(t) + u(t) = x_1(t) + u(t)$$
$$y(t) = x_1(t)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = 0$$



Ορισμός. Τάξη της περιγραφής είναι ο αριθμός n των συνιστωσών του ανύσματος κατάστασης $x(t)$

Χρονική απόκριση συστήματος

1. Λύση της ομογενούς ($u(t)=0, \quad \forall t \in \mathbb{R}$)

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \tag{1.1}$$

Θεώρημα Το σύνολο των λύσεων $x(t)$ της (1.1) αποτελεί γραμμικό διανυσματικό χώρο $\mathcal{X}$ διάστασης n.
Ο χώρος $\mathcal{X}$ είναι ισόμορφος με τον $\mathbb{R}^n$ και ονομάζεται χώρος των καταστάσεων.

Ορισμός Ενας $n \times n$ πίνακας $\Psi(t)$ ονομάζεται **θεμελιώδης πίνακας** της (1.1) αν οι στήλες του $\psi_i(t),\ i=1,2,\dots,n$ αποτελούν n γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της (1.1).

$$\dot{\psi}_i(t) = A\psi_i(t), \qquad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\psi}_1(t) & \dot{\psi}_2(t) & \dots & \dot{\psi}_n(t) \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} \psi_1(t) & \psi_2(t) & \dots & \psi_n(t) \end{bmatrix}$$

$$\Psi(t) := \begin{bmatrix} \psi_1(t) & \psi_2(t) & \dots & \psi_n(t) \end{bmatrix}$$

$$\dot{\Psi}(t) = A\Psi(t)$$

Θεώρημα. Κάθε θεμελιώδης πίνακας $\Psi(t)$ της (1.1) είναι ομαλός για κάθε $t \in \mathbb{R}$

Εύρεση της λύσεως $x(t)$ της $\dot{x}(t) = Ax(t)$

Έστω

$$x(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \ldots + b_k t^k + \ldots$$

$$b_i \in \mathbb{R}^n,\ i = 0,1,2,\ldots$$

$$\dot{x}(t) = b_1 + 2b_2 t + 3b_3 t^2 + \ldots + k b_k t^{k-1} + \ldots$$

και αρα

$$b_1 + 2b_2 t + 3b_3 t^2 + \ldots + k b_k t^{k-1} + \ldots = A\left[b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \ldots + b_k t^k + \ldots\right]$$

$$\Rightarrow \qquad b_1 = Ab_0$$

$$b_2 = \frac{1}{2} A b_1 = \frac{1}{2} A^2 b_0$$

$$\vdots$$

$$b_k = \frac{1}{k!} A^k b_0$$

Για $t = 0$, $\quad x(0) = b_0 \qquad$ και αρα

$$x(t) = x(0) + Atx(0) + \frac{1}{2} A^2 t^2 x(0) + \ldots + \frac{1}{k!} A^k t^k x(0) + .$$

$$= \left[I_n + At + \frac{1}{2} A^2 t^2 + \ldots + \frac{1}{k!} A^k t^k + \ldots\right] x(0)$$

Έστω ο συμβολισμός

$$I_n + At + \frac{1}{2}A^2t^2 + \ldots + \frac{1}{k!}A^kt^k + \ldots =: e^{At} \quad (1.2)$$

Τότε

$$\boxed{x(t) = e^{At}x(0)} \quad (1.3)$$

Από την (1.2)

$$\frac{d}{dt}e^{At} = \left[A + A^2t + \frac{1}{2!}A^3t^2 + \ldots + \frac{1}{(k-1)!}A^kt^{k-1} + \ldots\right]$$

$$= A\left[I_n + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \ldots + \frac{1}{k!}A^kt^k + \ldots\right]$$

$$= Ae^{At}$$

$$= \left[I_n + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \ldots + \frac{1}{k!}A^kt^k + \ldots\right]A$$

$$= e^{At}A$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At} = e^{At}A} \quad (1.4)$$

$$e^{At}e^{Ap} = \left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^k t^k\right]\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^k p^k\right]$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}A^k\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!(k-j)}t^j p^{k-j}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^k(t+p)^k$$

$$= e^{A(t+p)}$$

$$\boxed{e^{At}e^{Ap} = e^{A(t+p)}} \qquad (1.5)$$

Για $p = -t$

$$e^{At}e^{-At} = e^{A(t-t)} = e^0 = I_n$$

$$\Rightarrow \left[e^{At}\right]^{-1} = e^{-At}$$

Έστω

$$\Psi(t) := e^{At} \qquad (1.6)$$

Για $t = t_1$

$$\Psi(t_1) = e^{At_1}$$

$$\Psi(t)\Psi(t_1) := e^{At}e^{At_1} = e^{A(t+t_1)} = \Psi(t+t_1)$$

$$\Psi(t)^{-1} = \left[e^{At}\right]^{-1} = e^{-At} = \Psi(-t)$$

Η

$$x(t)=e^{At}x(0)$$

Για

$$t=t_0\neq 0, \quad \delta\iota\nu\varepsilon\iota$$

$$x(t_0)=e^{At_0}x(0)\Rightarrow x(0)=\left[e^{At_0}\right]^{-1}x(t_0)=e^{-At_0}x(t_0)$$

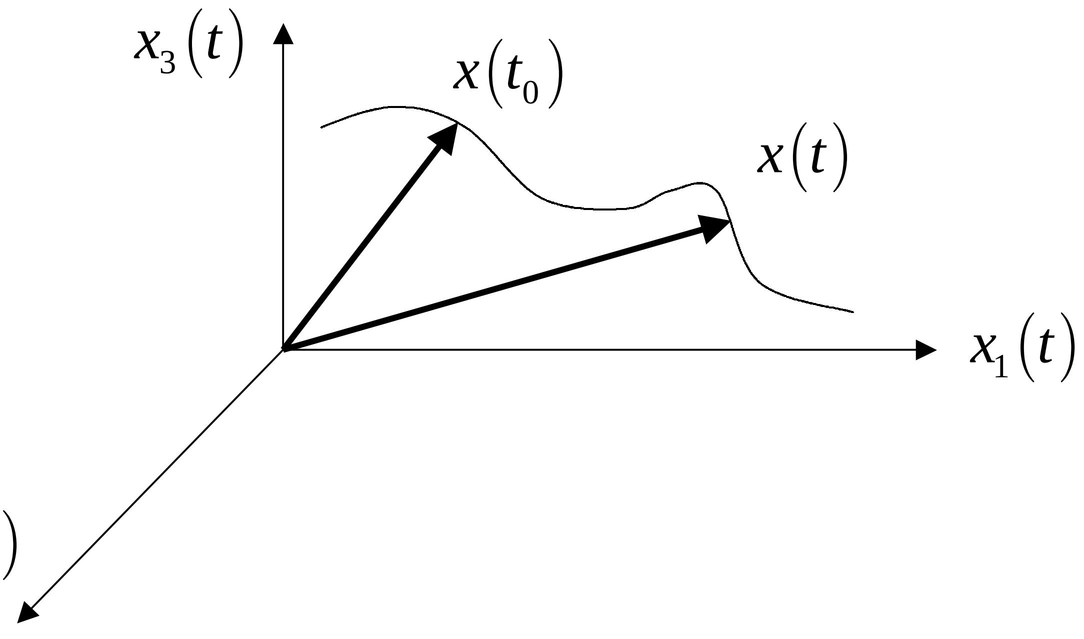
Και άρα

$$x(t)=e^{At}x(0)=e^{At}e^{-At_0}x(t_0)=e^{A(t-t_o)}x(t_0)=\Psi(t-t_0)x(t_0)$$

Ορισμός Ο πίνακας

$$\Psi(t-t_0)=e^{A(t-t_0)}$$

ονομάζεται πίνακας μετάβασης της κατάστασης (state transition matrix)



$$x(t)=e^{A(t-t_o)}x(t_0)=\Psi(t-t_0)x(t_0)$$

$$\Psi(t-t_0):\mathcal{X}\rightarrow\mathcal{X} \quad x(t_0)\mapsto x(t)$$

Υπολογισμός του πίνακα e^{At} μέσω του μετασχηματισμού Laplace

Μετασχηματίζοντας κατά Laplace την

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$

έχουμε. Έστω

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s)$$

$$\mathcal{L}\{\dot{x}(t)\} = sX(s) - x(0) = AX(s)$$

$$sX(s) - AX(s) = x(0)$$

$$[sI_n - A]X(s) = x(0)$$

$$X(s) = [sI_n - A]^{-1} x(0)$$

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{[sI_n - A]^{-1} x(0)\right\}$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{[sI_n - A]^{-1}\right\} x(0)$$

$$\Rightarrow \boxed{e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\left\{[sI_n - A]^{-1}\right\}}$$

Παράδειγμα

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & -2\end{bmatrix},$$

$$sI_n-A=\begin{bmatrix}s+1 & -1\\ 0 & s+2\end{bmatrix},\ \det\left[sI_n-A\right]=\left(s+1\right)\left(s+2\right)$$

$$\left[sI_n-A\right]^{-1}=\frac{adj\left[sI_n-A\right]}{\det\left[sI_n-A\right]}=\frac{1}{\left(s+1\right)\left(s+2\right)}\begin{bmatrix}s+2 & 1\\ 0 & s+1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{\left(s+1\right)} & \dfrac{1}{\left(s+1\right)\left(s+2\right)}\\ 0 & \dfrac{1}{\left(s+2\right)}\end{bmatrix}$$

$$e^{At}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\begin{bmatrix}\dfrac{1}{\left(s+1\right)} & \dfrac{1}{\left(s+1\right)\left(s+2\right)}\\ 0 & \dfrac{1}{\left(s+2\right)}\end{bmatrix}\right\}=\begin{bmatrix}e^{-t} & e^{-t}-e^{-2t}\\ 0 & e^{-2t}\end{bmatrix}$$

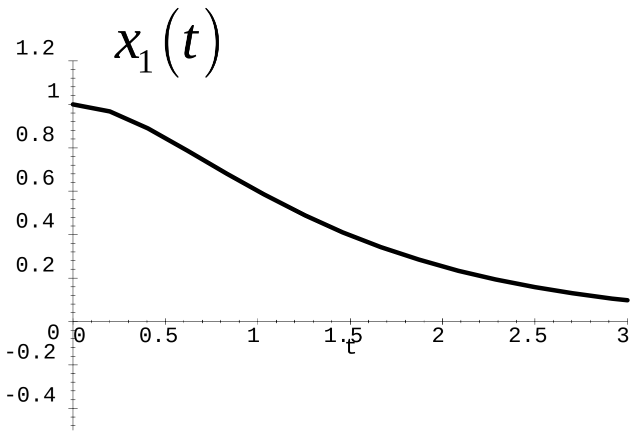
$$x(t)=\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e^{-t} & e^{-t}-e^{-2t}\\0 & e^{-2t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(0)\\x_2(0)\end{bmatrix}$$

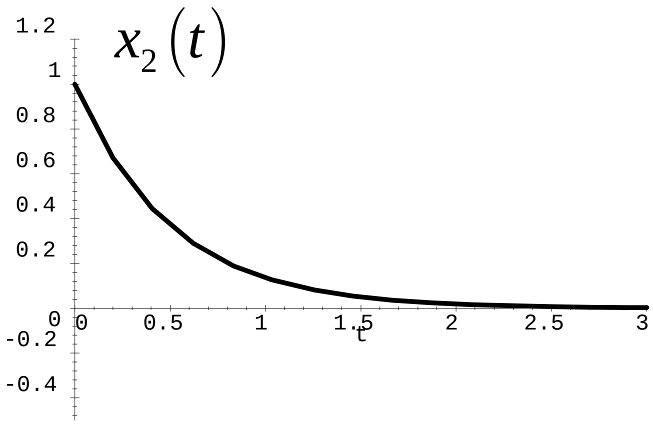
$$x_1(t)=e^{-t}x_1(0)+\left[e^{-t}-e^{-2t}\right]x_2(0)=$$

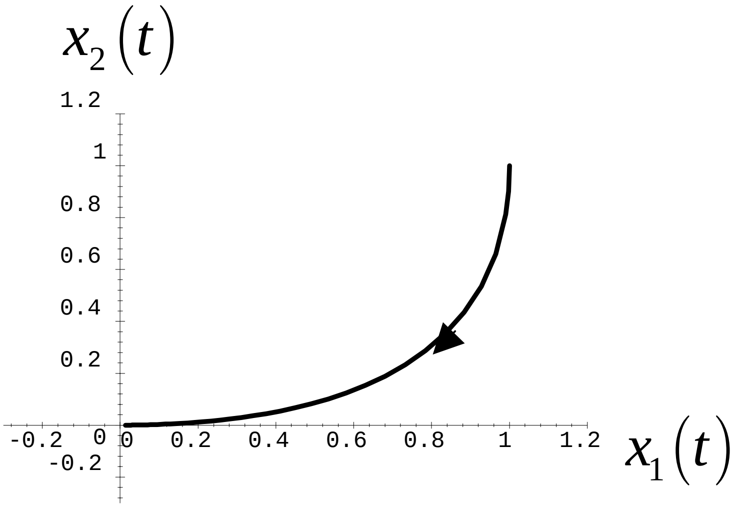
$$x_2(t)=e^{-2t}x_2(0)$$

Για $x_1(0)=1, x_2(0)=1$

$$x_1(t)=2e^{-t}-e^{-2t}, \quad x_2(t)=e^{-2t}$$






$x_2(t)$
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
$x_1(t)$