ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΟΙ ΠΙΝΑΚΕΣ ΠΡΩΤΟΙ ΜΕΤΑΞΥ ΤΟΥΣ.

Δύο πολυώνυμα $a(s)\in\mathbb{R}[s], b(s)\in\mathbb{R}[s]$ ονομάζονται πρώτα μεταξύ τους (coprime) αν ο μέγιστος κοινός διαιρέτης τους είναι μια σταθερά $(c\in\mathbb{R})\, c\neq 0$

ή ισοδύναμα

Δύο πολυώνυμα $a(s)\in\mathbb{R}[s], b(s)\in\mathbb{R}[s]$ ονομάζονται πρώτα μεταξύ τους αν δεν έχουν μη τετριμμένους (δηλαδή πολυωνικοινούς) διαιρέτες.

π.χ. τα πολυώνυμα

$$a(s)=s^2+3s+2=(s+1)(s+2)$$

$$b(s)=s^3+8s^2+19s+12=(s+1)(s+3)(s+4)$$

Δεν είναι πρώτα μεταξύ τους γιατί έχουν τον κοινό διαιρέτη το πολυώνυμο $(s+1)$.

Ισοδύναμα, δύο πολυώνυμα $a(s)\in\mathbb{R}[s], b(s)\in\mathbb{R}[s]$ είναι πρώτα μεταξύ τους αν **δεν έχουν** κοινά μηδενικά.

(δηλαδή οι εξισώσεις

$$a(s)=0$$

$$b(s)=0$$

δεν έχουν κοινές ρίζες).

Βάσει των μέχρι τώρα αναφερθέντων η παραπάνω ιδέα γενικεύεται στην περίπτωση πολυωνυμικών πινάκων με τον παρακάτω ορισμό.

Ορισμός

Δύο πολυωνυμικοί πίνακες με τον ίδιο αριθμό **γραμμών** p

$$T_1(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times \ell}, T_2(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times t}$$

και $\ell + t \geq p = rank_{\mathbb{R}(s)} \begin{bmatrix} T_1(s) & T_2(s) \end{bmatrix}$

ονομάζονται **αριστερά πρώτοι** (left coprime) αν ο μέγιστος αριστερός κοινός διαιρέτης $T_{GL}(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times p}$ των $T_1(s)$ και $T_2(s)$ είναι **unimodular**.

Δύο πολυωνυμικοί πίνακες με τον ίδιο αριθμό **στηλών** m

$$T_1(s) \in \mathbb{R}[s]^{\ell \times m}, T_2(s) \in \mathbb{R}[s]^{t \times m}$$

και

$$\ell + t \geq m = rank_{\mathbb{R}(s)} \begin{bmatrix} T_1(s) \\ T_2(s) \end{bmatrix}$$

ονομάζονται **δεξιά πρώτοι** (right coprime) αν ο μέγιστος δεξιός κοινός διαιρέτης $T_{GR}(s) \in \mathbb{R}[s]^{m\times m}$ των $T_1(s)$ και $T_2(s)$ είναι **unimodular**.

Ο παραπάνω ορισμός δίνει λαβή στην παρακάτω πρόταση.

Πρόταση

Έστω

$T_1(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times \ell}, T_2(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times t}$,

$m := \ell + t \geq p = rank_{\mathbb{R}(s)} \begin{bmatrix} T_1(s) & T_2(s) \end{bmatrix}$.

Οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες

1. $T_1(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times \ell}, T_2(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times t}$ είναι αριστερά πρώτοι.

2. Ο πολυωνυμικός πίνακας $T(s) := \begin{bmatrix} T_1(s) & T_2(s) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}[s]^{p\times m}$ δεν έχει μηδενικά στο $\mathbb{C}$.

3. Υπάρχει unimodular πινακας $\overline{T}_R(s) \in \mathbb{R}[s]^{m\times m}$ τέτοιος ώστε

$$T(s)\overline{T}_R(s) = \begin{bmatrix} I_p & 0_{p,m-p} \end{bmatrix} = S^{\mathbb{C}}_{T(s)}$$

4. $rank_{\mathbb{C}} \begin{bmatrix} T_1(s_0) & T_2(s_0) \end{bmatrix} = p \quad \forall\ s_0 \in \mathbb{C}$

4. Υπάρχουν πίνακες $X(s) \in \mathbb{R}[s]^{\ell \times p}, Y(s) \in \mathbb{R}[s]^{t \times p}$ τέτοιοι ώστε

$$T_1(s) X(s) + T_2(s) Y(s) = I_p$$

5. Υπάρχουν πίνακες $T_3(s) \in \mathbb{R}[s]^{(m-p) \times \ell}, T_4(s) \in \mathbb{R}[s]^{(m-p) \times t}$ τέτοιοι ώστε ο πίνακας

$$\begin{bmatrix} T_1(s) & T_2(s) \\ T_3(s) & T_4(s) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}[s]^{m \times m}$$

είναι unimodular.

Η απόδειξη στο Κεφάλαιο 1 του Βιβλίου μου :

Linear Multivariable Control
Algebraic Analysis and Synthesis Methods
A.I.G. Vardulakis
John Wiley and Sons Ltd
http://www.amazon.com/exec/obidos/tg/detail/-/0471928593/qid=1049360877/sr=8-1/ref=sr_8_1/103-7202373-0914262?v=glance&s=books&n=507846

ΔΙΟΦΑΝΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΩΝ ΠΙΝΑΚΩΝ

Έστω η εξίσωση

$$X(s) A(s) + Y(s) B(s) = C(s) \qquad (\Delta)$$

όπου οι πολυωνυμικοί πίνακες

$$A(s)\in\mathbb{R}[s]^{p\times m}, B(s)\in\mathbb{R}[s]^{q\times m}, C(s)\in\mathbb{R}[s]^{\ell\times m}$$

δίδονται και άγνωστοι είναι οι πολυωνυμικοί πίνακες $X(s)\in\mathbb{R}[s]^{\ell\times p}, Y(s)\in\mathbb{R}[s]^{\ell\times q}$ που την ικανοποιούν.

Η (Δ) ονομάζεται Διοφαντική εξίσωση πολυωνυμικών πινάκων. (polynomial matrix Diophantine equation)

Η (Δ) γράφεται

$$\begin{bmatrix} X(s) & Y(s) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A(s) \\ B(s) \end{bmatrix} = C(s) \qquad (\Delta)$$

και έχουμε το

Θεώρημα (Διόφαντος ο Αλεξανδρεύς 240 μ.Χ.)

Η εξίσωση (Δ) έχει λύση $X(s)\in\mathbb{R}[s]^{\ell\times p}, Y(s)\in\mathbb{R}[s]^{\ell\times q}$ **αν και μόνο αν** κάθε **μ**έγιστος **δ**εξιός **κ**οινός **δ**ιαιρέτης (ΜΔΚΔ) $G_L(s)\in\mathbb{R}[s]^{m\times m}$ των $A(s)\in\mathbb{R}[s]^{p\times m}, B(s)\in\mathbb{R}[s]^{q\times m}$ είναι δεξιός διαιρέτης του $C(s)\in\mathbb{R}[s]^{\ell\times m}$.

Αποδ. $(\Rightarrow)$ Δηλαδή:

(**Αν** κάθε μέγιστος δεξιός κοινός διαιρέτης $G_L(s) \in \mathbb{R}[s]^{m\times m}$ των $A(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times m}, B(s) \in \mathbb{R}[s]^{q\times m}$ είναι δεξιός διαιρέτης του $C(s) \in \mathbb{R}[s]^{\ell\times m}$ **τότε** η (Δ) **έχει λύση** $X(s) \in \mathbb{R}[s]^{\ell\times p}, Y(s) \in \mathbb{R}[s]^{\ell\times q}$).

Έστω $G_L(s) \in \mathbb{R}[s]^{m\times m}$ ένας ΜΔΚΔ των $A(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times m}, B(s) \in \mathbb{R}[s]^{q\times m}$. Τότε υπάρχει unimodular $T_L(s) \in \mathbb{R}[s]^{(p+q)\times(p+q)}$:

$$T_L(s)\begin{bmatrix} A(s) \\ B(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_R(s) \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (2)$$

και αν χωρίσουμε τον $T_L(s)$

$$T_L(s) = \begin{array}{cl} \begin{bmatrix} T_1(s) & T_2(s) \\ T_3(s) & T_4(s) \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \updownarrow \; m \\ \updownarrow \; (p+q)-m \end{array} \\ \begin{array}{cc} \overset{\longleftrightarrow}{p} & \overset{\longleftrightarrow}{q} \end{array} & \end{array}$$

τότε η (2) δίνει

$$\begin{bmatrix} T_1(s) & T_2(s) \\ T_3(s) & T_4(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A(s) \\ B(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_R(s) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$T_1(s)A(s) + T_2(s)B(s) = G_R(s)$$
$$T_3(s)A(s) + T_4(s)T_4(s) = 0$$

Εξ' υποθέσεως ο $G_L(s) \in \mathbb{R}[s]^{m\times m}$ είναι μέγιστος δεξιός κοινός διαιρέτης των
$A(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times m}, B(s) \in \mathbb{R}[s]^{q\times m}$, δηλαδή
$A(s) = A_0(s)G_R(s) \qquad B(s) = B_0(s)G_R(s)$

και είναι δεξιός διαιρέτης του $C(s) \in \mathbb{R}[s]^{\ell\times m}$, δηλαδή

$$C(s) = C_0(s)G_R(s)$$

Πολλαπλασιάζοντας από αριστερά την

$$T_1(s)A(s) + T_2(s)B(s) = G_R(s)$$

επί $C_0(s)$ παίρνουμε

$$C_0(s)T_1(s)A(s) + C_0(s)T_2(s)B(s) = C_0(s)G_R(s) = C(s)$$

και άρα

$$X(s) := C_0(s)T_1(s), \qquad Y(s) := C_0(s)T_2(s)$$

είναι μία λύση της (Δ).

$(\Leftarrow)$ Δηλαδή

(Αν η (Δ) έχει μια λύση $X(s) \in \mathbb{R}[s]^{\ell \times p}, Y(s) \in \mathbb{R}[s]^{\ell \times q}$ **τότε κάθε** μέγιστος δεξιός κοινός διαιρέτης $G_R(s)$ των $A(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}, B(s) \in \mathbb{R}[s]^{q \times m}$ είναι δεξιός διαιρέτης του $C(s)$.)

Εξ' υποθέσεως η (Δ) ισχύει:

$$X(s)A(s) + Y(s)B(s) = C(s) \qquad (\Delta)$$

Έστω $G_R(s)$ μέγιστος δεξιός κοινός διαιρέτης των $A(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}, B(s) \in \mathbb{R}[s]^{q \times m}$, έστω δηλαδή

$$A(s) = A_0(s)G_R(s) \qquad B(s) = B_0(s)G_R(s)$$

Τότε η (Δ) γράφεται

$$X(s)A_0(s)G_R(s) + Y(s)B_0(s)G_R(s) = C(s)$$

ή

$$\left[X(s)A_0(s) + Y(s)B_0(s)\right]G_R(s) = C(s)$$

η οποία λέει ότι ο $G_R(s)$ είναι δεξιός διαιρέτης του $C(s)$.

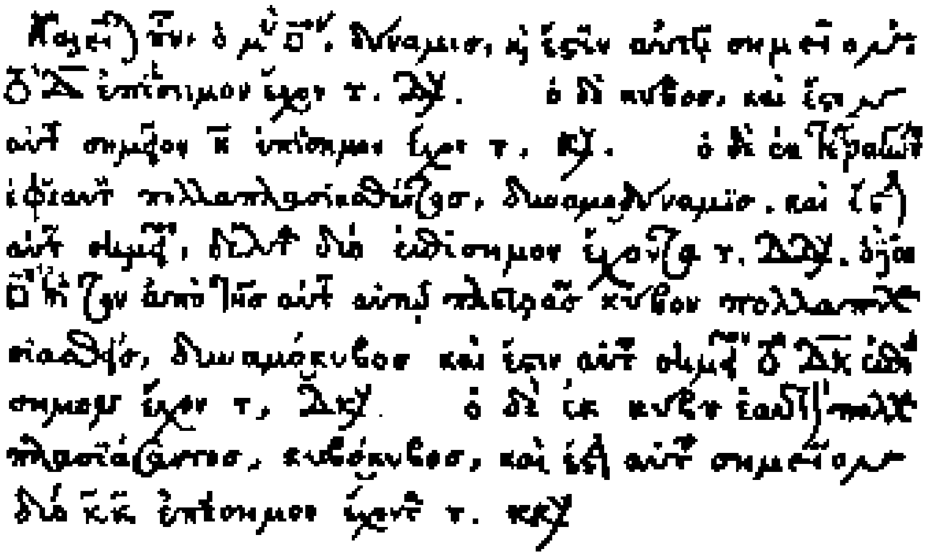
Πόρισμα

Αν οι $A(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times m}, B(s) \in \mathbb{R}[s]^{q\times m}$ είναι δεξιά πρώτοι τότε η (Δ) έχει πάντα λύση $X(s) \in \mathbb{R}[s]^{\ell\times p}, Y(s) \in \mathbb{R}[s]^{\ell\times q}$.

Ποιός ήταν ο Διόφαντος

Very little known; dates depend on a letter of Michael Psellus (C11 AD) linking him with Anatolius bishop of Laodicea from AD 270. Epigram in the Greek anthology tells that Diophantos married at 33, had a son who died at 42, 4 years before his father died aged 84. (Αυτό είναι ένα αλγεβρικό πρόβλημα του οποίου η λύση είναι πόσα χρόνια έξησε ο Διόφαντος)

His *Arithmetica* concerns computational arithmetic needed to solve practical problems. There were originally 13 books; 7 were lost early. Hypatia (end C4 AD) commented on only 6, and there are only 6 in the earliest MS surviving today. Contrary to what older textbooks say, this is NOT algebra. The discovery of 4 new books in Arabic translation shows that the Greek books labelled 4-6 are numbered according to a later recension that changed the numbering, and perhaps the order of contents, of Diophantos' work.



Κείμενο του Διοφάντους

Καλείται ούν ο μεν τετράγωνος δύναμις και εστιν αυτής σημείον το Δ επίσημον έχον Υ, Δ^{Y} δύναμις.
Ο δε κύβος και εστίν αυτού σημείον Κ επίσημον έχον Υ, K^{Y} κύβος.

Ο δε εκ τετραγώνου εφ’ εαυτόν πολυπλασιασθέντος δυναμοδύναμις και εστίν αυτού σημείον δέλτα δύο επίσημον έχοντα Υ, $\Delta^{Y}\Delta$ δυναμοδύναμις.
Ο δε εκ τετραγώνου επί τον από της αυτής αυτώ πλευράς κύβου πολυπλασιασθέντος δυναμόκυβος και εστιν αυτού σημείον το ΔΚ επίσημον έχον Υ, ΔK^{Y}.
0 δε εκ κύβου εαυτόν πολυπλασιάσαντος κυβόκυβος, και εστίν αυτού σημείον δύο κ κ επίσημον έχοντα Υ, KK^{Y} (κυβόκυβος).

(αντιγραφή χωρίς τις οξείες τα πνέυματα και τα άλλα σημεία στίξεως (τα οποία, λόγω απείρου βλακείας, η κυβέρνήσις της Ελληνικής Δημοκρατίας με πρωθυπουργό τον κ. Γ. Ράλλη κατήργησε με νόμο γύρω στα 1978) από το GREEK MATHEMATICAL WORKS II, Aristarchus to Pappus of Alexandria, XXIII. Algebra: DIOPHANTUS, page 520, Loeb Classical Library, Harvard University Press, Cambridge Massachusetts, London, England)

http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Diophantus.html

ΠΟΡΙΣΜΑ

Αν οι $A(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}, B(s) \in \mathbb{R}[s]^{q \times m}$ είναι πρώτοι μεταξύ τους και $X(s) \in \mathbb{R}[s]^{\ell \times p}, Y(s) \in \mathbb{R}[s]^{\ell \times q}$ είναι μια λύση της (Δ) τότε η γενική λύση της (Δ) είναι η

$$X_0(s) = X(s) - T(s) B_0(s)$$

$$Y_0(s) = Y(s) + T(s) A_0(s)$$

όπου $T(s) \in \mathbb{R}[s]^{\ell \times [(p+q) - \sigma]}$ και

$$\begin{bmatrix} B_2(s) & -A_2(s) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}[s]^{[(p+q)-\sigma]\times(p+q)}$$

$$rank_{\mathbb{R}(s)} \begin{bmatrix} B_2(s) & -A_2(s) \end{bmatrix} = [(p+q)-\sigma]$$

$$\begin{bmatrix} B_2(s) & -A_2(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A(s) \\ B(s) \end{bmatrix} = 0$$

ΑΡΑ ΑΝ Η (Δ) ΕΧΕΙ ΜΙΑ ΛΥΣΗ ΤΟΤΕ ΕΧΕΙ ΑΠΕΙΡΙΑ ΛΥΣΕΩΝ ΟΙ ΟΠΟΙΕΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΠΟΙΟΥΝΤΑΙ ΜΕΣΩ ΤΟΥ ΑΥΘΑΙΡΕΤΟΥ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΟΥ ΠΙΝΑΚΑ *T*(*s*)