ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΕΣ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ ΠΙΝΑΚΩΝ ΡΗΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Έστω $T(s) \in \mathbb{R}(s)^{p\times m}$ και έστω

$U_L(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times p}, U_R(s) \in \mathbb{R}[s]^{m\times m}$ unimodular πίνακες τέτοιοι ώστε

$$U_L(s)T(s)U_R(s) = S_{T(s)}^{\mathbb{C}}$$

είναι η Smith-McMillan μορφή του $T(s)$.

$$S_{T(s)}^{\mathbb{C}} = \begin{bmatrix} \frac{\varepsilon_1(s)}{\psi_1(s)} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\varepsilon_2(s)}{\psi_2(s)} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{\varepsilon_r(s)}{\psi_r(s)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Η $S_{T(s)}^{\mathbb{C}}$ μπορεί να εκφραστεί σαν γινόμενο δύο πινάκων ρητών συναρτήσεων και κατά δύο τρόπους:

$$S_{T(s)}^{\mathbb{C}} = \begin{bmatrix} \frac{\varepsilon_1(s)}{\psi_1(s)} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{\varepsilon_2(s)}{\psi_2(s)} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{\varepsilon_r(s)}{\psi_r(s)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \psi_1(s) & 0 & \cdots & 0 & 0_{1,p-r} \\ 0 & \psi_2(s) & \cdots & 0 & 0_{1,p-r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \psi_r(s) & 0_{1,p-r} \\ 0_{p-r,1} & 0_{p-r,1} & \cdots & 0_{p-r,1} & I_{p-r} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \varepsilon_1(s) & 0 & \cdots & 0 & 0_{1,m-r} \\ 0 & \varepsilon_2(s) & \cdots & 0 & 0_{1,m-r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \varepsilon_r(s) & 0_{1,m-r} \\ 0_{p-r,1} & 0_{p-r,1} & \cdots & 0_{p-r,1} & 0_{p-r,m-r} \end{bmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} \Psi(s) & 0_{r,p-r} \\ 0_{p-r,r} & I_{p-r} \end{bmatrix}^{-1}}_{p\times p} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathrm{E}(s) & 0_{r,m-r} \\ 0_{p-r,r} & 0_{p-r,m-r} \end{bmatrix}}_{p\times m}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} \mathrm{E}(s) & 0_{r,m-r} \\ 0_{p-r,r} & 0_{p-r,m-r} \end{bmatrix}}_{p\times m} \underbrace{\begin{bmatrix} \Psi(s) & 0_{r,m-r} \\ 0_{m-r,r} & I_{m-r} \end{bmatrix}^{-1}}_{m\times m}$$

όπου:

$$\Psi(s) := \begin{bmatrix} \psi_1(s) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \psi_2(s) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \psi_r(s) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}[s]^{r\times r}$$

$$\mathrm{E}(s) := \begin{bmatrix} \varepsilon_1(s) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varepsilon_2(s) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \varepsilon_r(s) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}[s]^{r\times r}$$

και άρα

$$U_L(s)T(s)U_R(s) = S_{T(s)}^{\mathbb{C}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \Psi(s) & 0_{r,p-r} \\ 0_{p-r,r} & I_{p-r} \end{bmatrix}^{-1}}_{p\times p} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathrm{E}(s) & 0_{r,m-r} \\ 0_{p-r,r} & 0_{p-r,m-r} \end{bmatrix}}_{p\times m}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} \mathrm{E}(s) & 0_{r,m-r} \\ 0_{p-r,r} & 0_{p-r,m-r} \end{bmatrix}}_{p\times m} \underbrace{\begin{bmatrix} \Psi(s) & 0_{r,m-r} \\ 0_{m-r,r} & I_{m-r} \end{bmatrix}^{-1}}_{m\times m}$$

και αν

$$U_L(s)^{-1} = T_L(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times p}, \quad U_R(s)^{-1} = T_R(s) \in \mathbb{R}[s]^{m\times m}$$

και unimodular τότε

$$T(s)=T_L(s)\underbrace{\begin{bmatrix}\Psi(s) & 0_{r,p-r}\\ 0_{p-r,r} & I_{p-r}\end{bmatrix}}_{p\times p}^{-1}\underbrace{\begin{bmatrix}\mathrm{E}(s) & 0_{r,m-r}\\ 0_{p-r,r} & 0_{p-r,m-r}\end{bmatrix}}_{p\times m}T_R(s)$$

$$=\left\{\underbrace{\begin{bmatrix}\Psi(s) & 0_{r,p-r}\\ 0_{p-r,r} & I_{p-r}\end{bmatrix}}_{p\times p}T_L(s)^{-1}\right\}^{-1}\left\{\underbrace{\begin{bmatrix}\mathrm{E}(s) & 0_{r,m-r}\\ 0_{p-r,r} & 0_{p-r,m-r}\end{bmatrix}}_{p\times m}T_R(s)\right\}$$

$$=A_1(s)^{-1}B_1(s)$$

Επίσης

$$T(s)=T_L(s)\underbrace{\begin{bmatrix}\mathrm{E}(s) & 0_{r,m-r}\\ 0_{p-r,r} & 0_{p-r,m-r}\end{bmatrix}}_{p\times m}\underbrace{\begin{bmatrix}\Psi(s) & 0_{r,m-r}\\ 0_{m-r,r} & I_{m-r}\end{bmatrix}}_{m\times m}^{-1}T_R(s)$$

$$=\left\{T_L(s)\underbrace{\begin{bmatrix}\mathrm{E}(s) & 0_{r,m-r}\\ 0_{p-r,r} & 0_{p-r,m-r}\end{bmatrix}}_{p\times m}\right\}\left\{T_R(s)^{-1}\underbrace{\begin{bmatrix}\Psi(s) & 0_{r,m-r}\\ 0_{m-r,r} & I_{m-r}\end{bmatrix}}_{m\times m}\right\}^{-1}$$

$$=B_2(s)A_2(s)^{-1}$$

και άρα έχουμε την

Πρόταση

Έστω $T(s)\in\mathbb{R}(s)^{p\times m}$, $rank_{\mathbb{R}(s)}T(s)=r$. Τότε υπάρχουν πολυωνυμικοί πίνακες

$$A_1(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times p}, \quad B_1(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$$

και αριστερά πρώτοι τέτοιοι ώστε

$$T(s) = A_1(s)^{-1} B_1(s)$$

Επίσης υπάρχουν πολυωνυμικοί πίνακες

$$A_2(s) \in \mathbb{R}[s]^{m \times m}, \quad B_2(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$$

και δεξιά πρώτοι, τέτοιοι ώστε

$$T(s) = B_2(s) A_2(s)^{-1}$$

Ορισμός

Η περιγραφή $T(s) = A_1(s)^{-1} B_1(s)$ ονομάζεται αριστερά πρώτη κλασματική πολυωνυμική περιγραφή του $T(s)$ και η περιγραφή $T(s) = B_2(s) A_2(s)^{-1}$ ονομάζεται δεξιά πρώτη κλασματική πολυωνυμική περιγραφή του $T(s)$.

Ο $A_1(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times p}$ ονομάζεται αριστερός παρανομαστής του $T(s)$

Ο $A_2(s) \in \mathbb{R}[s]^{m \times m}$ ονομάζεται δεξιός παρανομαστής του $T(s)$

Ο $B_1(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$ ονομάζεται αριστερός αριθμητής του $T(s)$

Ο $B_2(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times m}$ ονομάζεται δεξιός αριθμητής του $T(s)$.

Πόρισμα
Αν

$$A_1(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times p}, \quad B_1(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times m}$$

και αριστερά πρώτοι τέτοιοι ώστε

$$T(s) = A_1(s)^{-1} B_1(s)$$

τότε για κάθε unimodular πινακα $U_L(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times p}$

$$\overline{A}_1(s) := U_L(s) A_1(s)$$

$$\overline{B}_1(s) := U_L(s) B_1(s)$$

$$\begin{aligned} T(s) &= A_1(s)^{-1} B_1(s) \\ &= \left[U_L(s)^{-1} \overline{A}_1(s)\right]^{-1} \left[U_L(s)^{-1} \overline{B}_1(s)\right] \\ &= \overline{A}_1(s)^{-1} U_L(s) U_L(s)^{-1} \overline{B}_1(s) \\ &= \overline{A}_1(s)^{-1} \overline{B}_1(s) \end{aligned}$$

και η περιγραφή $T(s) = \overline{A}_1(s)^{-1} \overline{B}_1(s)$ είναι μια αριστερά πρώτη κλασματική πολυωνυμική περιγραφή του $T(s)$.

Επίσης

Αν

$$A_2(s) \in \mathbb{R}[s]^{m\times m}, \quad B_2(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times m}$$

και δεξιά πρώτοι τέτοιοι ώστε

$$T(s) = A_1(s)^{-1} B_1(s)$$

τότε για κάθε unimodular πινακα $U_R(s) \in \mathbb{R}[s]^{m\times m}$

$$\overline{A}_2(s) := A_2(s) U_R(s)$$

$$\overline{B}_2(s) := B_2(s) U_R(s)$$

$$\begin{aligned} T(s) &= B_2(s) A_2(s)^{-1} \\ &= \left[\overline{B}_2(s) U_R(s)^{-1}\right]\left[\overline{A}_2(s) U_R(s)^{-1}\right]^{-1} \\ &= \overline{B}_2(s) U_R(s)^{-1} U_R(s)^{-1} \overline{A}_2(s)^{-1} \\ &= \overline{B}_2(s) \overline{A}_2(s)^{-1} \end{aligned}$$

και η περιγραφή $T(s) = \overline{B}_2(s) \overline{A}_2(s)^{-1}$ είναι μια δεξιά πρώτη κλασματική πολυωνυμική περιγραφή του $T(s)$.

Ορισμός

Τα ζεύγη πολυωνυμικών πινάκων

$$\left(A_1(s)\in\mathbb{R}[s]^{p\times p},\quad B_1(s)\in\mathbb{R}[s]^{p\times m}\right) \text{ και}$$

$$\left(\overline{A}_1(s)\in\mathbb{R}[s]^{p\times p},\quad \overline{B}_1(s)\in\mathbb{R}[s]^{p\times m}\right)$$

για τα οποία ισχύουν οι σχέσεις

$$\overline{A}_1(s):=U_L(s)A_1(s),\quad \overline{B}_1(s):=U_L(s)B_1(s)$$

όπου $U_L(s)\in\mathbb{R}[s]^{p\times p}$ και unimodular ονομάζονται αριστερά UNIMODULAR.

Τα ζεύγη πολυωνυμικών πινάκων

$$\left(A_2(s)\in\mathbb{R}[s]^{m\times m},\quad B_2(s)\in\mathbb{R}[s]^{p\times m}\right) \text{ και}$$

$$\left(\overline{A}_2(s)\in\mathbb{R}[s]^{m\times m},\quad \overline{B}_2(s)\in\mathbb{R}[s]^{p\times m}\right)$$

για τα οποία ισχύουν οι σχέσεις

$$\overline{A}_2(s):=A_2(s)U_R(s),\quad \overline{B}_2(s):=B_2(s)U_R(s)$$

όπου $U_R(s)\in\mathbb{R}[s]^{m\times m}$ και unimodular ονομάζονται δεξιά UNIMODULAR

Προφανώς οι σχέσεις

$$\overline{A}_1(s) := U_L(s)A_1(s), \quad \overline{B}_1(s) := U_L(s)B_1(s)$$

ή οι σχέσεις

$$\overline{A}_2(s) := A_2(s)U_R(s), \quad \overline{B}_2(s) := B_2(s)U_R(s)$$

ορίζουν μια σχέση ισοδυναμίας πάνω στο σύνολο

$$\mathcal{A} \times \mathcal{A}$$

όπου

$\mathcal{A} = \mathbb{R}[s]^{p\times p} \times \mathbb{R}[s]^{p\times m}$ $\quad$ $(\mathcal{A} = \mathbb{R}[s]^{p\times m} \times \mathbb{R}[s]^{m\times m})$ την οποία ονομάζουμε ΑΡΙΣΤΕΡΗ (ΔΕΞΙΑ) UNIMODULAR EQUIVALENCE (RELATION)

Κάθε σημείο $x \in \mathcal{A}$ είναι ένα ζεύγος πολυωνυμικών πινάκων $A_1(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times p}, \quad B_1(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times m}$ $(A_2(s) \in \mathbb{R}[s]^{m\times m}, \quad B_2(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times m})$

$$x = \left(A_1(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times p}, B_1(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times m}\right)$$

$$\left(x = \left(A_2(s) \in \mathbb{R}[s]^{m\times m}, \quad B_2(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times m}\right)\right)$$

το οποίο ταυτίζουμε με μια αριστερά (δεξιά) πρώτη κλασματική πολυωνυμική περιγραφή του πίνακα συνάρτησεων μεταφοράς $T(s)$ ενός πολυμεταβλητού συστήματος.

Θεώρημα Η ΔΕΞΙΑ (ΑΡΙΣΤΕΡΗ) UNIMODULAR EQUIVALENCE αποτελεί σχέση ισοδυναμίας επάνω στο σύνολο

$$\mathcal{A} = \mathbb{R}[s]^{p\times p} \times \mathbb{R}[s]^{p\times m} \qquad (\mathcal{A} = \mathbb{R}[s]^{p\times m} \times \mathbb{R}[s]^{m\times m})$$

των δεξιά (αριστερά) πρώτων κλασματικών πολυωνυμικών περιγραφών του $T(s)$.

Η απόδειξη **άσκηση**.
Αποδείξτε τις τρεις ιδιότητες της σχέσης ισοδυναμίας.
Ορίστε τις κλάσεις ισοδυναμίας.
Αποδείξτε ότι τα μηδενικά των πινάκων
$A_1(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times p}, \quad B_1(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times m}$
$(A_2(s) \in \mathbb{R}[s]^{m\times m}, \quad B_2(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times m})$ αποτελούν ***αναλλοίωτες*** κάθε κλάσης ισοδυναμίας της ΔΕΞΙΑ (ΑΡΙΣΤΕΡΗΣ) UNIMODULAR EQUIVALENCE.

Πόρισμα

$$S_{B_1(s)}^{\mathbb{C}} = S_{B_2(s)}^{\mathbb{C}} = diag\left[\varepsilon_1(s) \quad \varepsilon_2(s) \quad \dots \quad \varepsilon_r(s) \quad 0_{p-r,m-r}\right]$$

ή με λόγια
Τα μηδενικά στο $\mathbb{C}$ του $T(s)$ είναι ίδια με τα μηδενικά στο $\mathbb{C}$ του $B_1(s)$ ή του $B_2(s)$.

Επίσης

$$S^{\mathbb{C}}_{A_1(s)} = diag\left[I_{p-r} \quad \psi_r(s) \quad \psi_{r-1}(s) \quad \ldots \quad \psi_1(s)\right] \in \mathbb{R}[s]^{p\times p}$$
$$S^{\mathbb{C}}_{A_2(s)} = diag\left[I_{m-r} \quad \psi_r(s) \quad \psi_{r-1}(s) \quad \ldots \quad \psi_1(s)\right] \in \mathbb{R}[s]^{m\times m}$$

ή με λογια
Οι πόλοι στο $\mathbb{C}$ του $T(s)$ είναι ίδιοι με τα μηδενικά στο $\mathbb{C}$ του $A_1(s)$ ή του $A_2(s)$.

Παράδειγμα $p=m=r=2$

$$T(s)=\begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ \frac{1}{s+2} & \frac{1}{s+3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s+2 & 0 \\ s+1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (s+1)(s+2) & 0 \\ 0 & s+3 \end{bmatrix}^{-1}$$

$B_2(s)=\begin{bmatrix} s+2 & 0 \\ s+1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}[s]^{2\times 2}$ είναι δεξιός αριθμητής του $T(s)$.

$A_2(s)=\begin{bmatrix} (s+1)(s+2) & 0 \\ 0 & s+3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}[s]^{2\times 2}$ είναι δεξιός παρανομαστής του $T(s)$.

$B_2(s), A_2(s)$ δεξιά πρώτοι διότι

$$rank\begin{bmatrix} B_2(s) \\ A_2(s) \end{bmatrix} = rank\begin{bmatrix} s+2 & 0 \\ s+1 & 1 \\ (s+1)(s+2) & 0 \\ 0 & (s+3) \end{bmatrix} = 2$$

για $s = -1, -2, -3$

π.χ. για $s = -1$

$$rank\begin{bmatrix} B_2(-1) \\ A_2(-1) \end{bmatrix} = rank\begin{bmatrix} -1+2 & 0 \\ -1+1 & 1 \\ (-1+1)(-1+2) & 0 \\ 0 & (-1+3) \end{bmatrix}$$

$$= rank\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 2$$

$$rank\begin{bmatrix} B_2(-2) \\ A_2(-2) \end{bmatrix} = rank\begin{bmatrix} -2+2 & 0 \\ -2+1 & 1 \\ (-2+1)(-2+2) & 0 \\ 0 & (-2+3) \end{bmatrix}$$

$$= rank\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 2$$

$$rank\begin{bmatrix} B_2(-3) \\ A_2(-3) \end{bmatrix} = rank\begin{bmatrix} -3+2 & 0 \\ -3+1 & 1 \\ (-3+1)(-3+2) & 0 \\ 0 & (-3+3) \end{bmatrix}$$

$$= rank\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 2$$

Πρόταση

Έστω $T(s) \in \mathbb{R}(s)^{p\times m}$, $rank_{\mathbb{R}(s)} T(s) = r$. Τότε υπάρχουν πολυωνυμικοί πίνακες

$$\overline{A}_1(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times p}, \quad \overline{B}_1(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times m}$$

και αριστερά πρώτοι τέτοιοι ώστε

$$T(s) = \overline{A}_1(s)^{-1}\overline{B}_1(s)$$

και $\overline{A}_1(s)$ είναι κανονικός ως προς τις γραμμές του (row proper). Επίσης υπάρχουν πολυωνυμικοί πίνακες

$$\overline{A}_2(s) \in \mathbb{R}[s]^{m\times m}, \quad \overline{B}_2(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times m}$$

και δεξιά πρώτοι, τέτοιοι ώστε

$$T(s) = \overline{B}_2(s)\overline{A}_2(s)^{-1}$$

και $\overline{A}_2(s)$ είναι κανονικός ως προς τις στήλες του (column proper).

Αποδειξη

Έστω

$$A_1(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times p}, \quad B_1(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times m}$$

και αριστερά πρώτοι τέτοιοι ώστε

$$T(s) = A_1(s)^{-1} B_1(s)$$

‘Εστω $U_L(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times p}$ και unimodular τέτοιος ώστε

$$U_L(s) A_1(s) = \overline{A}_1(s)$$

κανονικός ως προς τις γραμμές του (row proper) και άρα

$$A_1(s) = U_L(s)^{-1} \overline{A}_1(s)$$

Έστω

$$\overline{B}_1(s) := U_L(s) B_1(s) \Rightarrow B_1(s) = U_L(s)^{-1} \overline{B}_1(s)$$

Τότε

$$
\begin{aligned}
T(s) &= A_1(s)^{-1} B_1(s) \\
&= \left[U_L(s)^{-1}\overline{A}_1(s)\right]^{-1}\left[U_L(s)^{-1}\overline{B}_1(s)\right] \\
&= \overline{A}_1(s)^{-1} U_L(s) U_L(s)^{-1}\overline{B}_1(s) \\
&= \overline{A}_1(s)^{-1}\overline{B}_1(s)
\end{aligned}
$$

Ομοίως αποδεικνύεται και το δεύτερο μέρος της πρότασης. (αποδείξτε το).

Πρόταση

Έστω $T(s) \in \mathbb{R}(s)^{p\times m}$, $rank_{\mathbb{R}(s)} T(s) = r$. Έστω

$$\overline{A}_1(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times p}, \quad \overline{B}_1(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times m}$$

και αριστερά πρώτοι τέτοιοι ώστε

$$T(s) = \overline{A}_1(s)^{-1}\overline{B}_1(s)$$

και $\overline{A}_1(s)$ είναι κανονικός ως προς τις γραμμές του (row proper).

αν

$$A_1(s) = \begin{bmatrix} a_{11}^{\tau}(s) \\ a_{12}^{\tau}(s) \\ \cdots \\ a_{1p}^{\tau}(s) \end{bmatrix}, \quad a_{1i}^{\tau}(s) \in \mathbb{R}[s]^{1\times p}, i = 1, 2, \ldots, p$$

τότε οι βαθμοί των γραμμών του $A_1(s)$

$$\mu_i := \deg a_i^T(s), \quad i = 1, 2, ..., p$$

είναι ίδιοι για κάθε ‘άλλο κανονικό ως προς τις γραμμές του (row proper) αριστερό παρανομαστή του $T(s)$ είναι δηλαδή αναλλοίωτες της ρητής συνάρτησης $T(s)$

Επίσης αν

$$\overline{A}_2(s) \in \mathbb{R}[s]^{m\times m}, \quad \overline{B}_2(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times m}$$

και δεξιά πρώτοι, τέτοιοι ώστε

$$T(s) = \overline{B}_2(s)\overline{A}_2(s)^{-1}$$

και $\overline{A}_2(s)$ είναι κανονικός ως προς τις στήλες του (column proper) και γράψουμε τον $A_2(s)$ ως προς τις στήλες του δηλαδή

$$A_2(s) = \begin{bmatrix} a_{21}(s) & a_{22}(s) & \ldots & a_{2m}(s) \end{bmatrix}$$

$$a_{2i}(s) \in \mathbb{R}[s]^{m\times 1}, \quad i = 1, 2, ..., m$$

τότε οι βαθμοί των στηλών του $A_2(s)$

$$k_i := \deg a_i(s), \quad i = 1, 2, ..., m$$

είναι ίδιοι για κάθε ‘άλλο κανονικό ως προς τις στήλες του (column proper) δεξιό παρανομαστή του $T(s)$ είναι δηλαδή αναλλοίωτες της ρητής συνάρτησης $T(s)$.

Παράδειγμα

Έστω

$$T(s)=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{(s+1)^2} & \dfrac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \dfrac{1}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{s+3}{(s+2)^2} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} s+2 & 0 \\ (s+3)(s+1) & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & s+1 \\ (s+2)^2(s+1) & -(s+2) \end{bmatrix}^{-1}=B_2(s)A_2(s)^{-}$$

είναι μια δεξιά πρώτη κλασματική πολυωνυμική περιγραφή του $T(s)$.

$$A_2(s)]_c^h=\begin{bmatrix} 0 & s+1 \\ (s+2)^2(s+1) & -(s+2) \end{bmatrix}_c^h=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\ rank\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}=2$$

και άρα $A_2(s)$ είναι κανονικός ως προς τις γραμμές του (column proper) και

$$\begin{bmatrix} 0 & s+1 \\ (s+2)^2(s+1) & -(s+2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1(s) & a_2(s) \end{bmatrix}$$

$$a_{21}(s) = \begin{bmatrix} 0 \\ (s+2)^2(s+1) \end{bmatrix} \qquad \deg a_1(s) = 3 = k_1$$

$$a_{22}(s) = \begin{bmatrix} s+1 \\ -(s+2) \end{bmatrix} \qquad \deg a_2(s) = 1 = k_2$$

και $k_1 = 3, k_2 = 1$ είναι αναλλοίωτες της ΔΕΞΙΑ (ΑΡΙΣΤΕΡΗΣ) UNIMODULAR EQUIVALENCE του $T(s)$.