ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΩΝ ΠΙΝΑΚΩΝ

Το σώμα των πραγματικών ρητών συναρτήσεων:

$$\mathbb{R}(s)=\left\{t(s)\middle| t(s)=\frac{n(s)}{d(s)}, n(s), d(s)\in\mathbb{R}[s], d(s)\not\equiv 0\right\}$$

Ο δακτύλιος των κανονικών πραγματικών ρητών συναρτήσεων:

$$\mathbb{R}_{pr}(s)=\left\{t(s)=\frac{n(s)}{d(s)}, n(s), d(s)\in\mathbb{R}[s], d(s)\not\equiv 0\right\}$$

$$\deg d(s)\geq \deg n(s)$$

Ο δακτύλιος των αυστηρά κανονικών πραγματικών ρητών συναρτήσεων:

$$\mathbb{R}_{sp}(s)=\left\{t(s)=\frac{n(s)}{d(s)}, n(s), d(s)\in\mathbb{R}[s], d(s)\not\equiv 0\right\}$$

$$\left\{\deg d(s) > \deg n(s)\right\}$$

$$\mathbb{R}_{sp}(s)\subset\mathbb{R}_{pr}(s)\subset\mathbb{R}(s)$$

$$\mathbb{R}[s]\subset\mathbb{R}(s)$$

$$\mathbb{R}(s)=\mathbb{R}_{sp}(s)+\mathbb{R}[s]$$

Πρόταση Έστω $t(s)\in\mathbb{R}(s)$. Τότε η $t(s)$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ώς

$$t(s)=t_1(s)+q(s)$$

όπου $t_1(s)\in\mathbb{R}_{sp}(s)$ και $q(s)\in\mathbb{R}[s]$.

Απόδειξη

Έστω $t(s)=\dfrac{n(s)}{d(s)},\ \ n(s),d(s)\in\mathbb{R}[s]$.

1. Αν $t(s)\in\mathbb{R}[s]$ τοτε $t_1(s)=0$ και $q(s)\equiv t(s)$
2. Αν $t(s)\in\mathbb{R}_{sp}(s)$ τοτε $t_1(s)=t(s)$ και $q(s)\equiv 0$
3. Έστω

$$t(s)=\frac{n(s)}{d(s)}\in\mathbb{R}(s) \text{ και } \deg n(s)\geq \deg d(s)$$

Τότε υπάρχουν $q(s)\in\mathbb{R}[s],\ \ r(s)\in\mathbb{R}[s]$ τέτοια ώστε

$$n(s)=d(s)q(s)+r(s) \qquad \deg r(s)<\deg d(s)$$

$$\Rightarrow$$

$$t(s)=\frac{n(s)}{d(s)}=\frac{r(s)}{d(s)}+q(s)$$

και $t_1(s)=\dfrac{r(s)}{d(s)}\in\mathbb{R}_{sp}(s)$

Γενίκευση του παραπάνω για πραγματικούς ρητούς πίνακες

Πρόβλημα

Δεδομένων δύο πολυωνυμικών πινάκων

$$N(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times m}, D(s) \in \mathbb{R}[s]^{m\times m}$$

να βρεθούν πολυωνυμικοί πίνακες

$$Q(s), R(s) \in \mathbb{R}(s)^{p\times m}$$

τέτοιοι ώστε

$$N(s) = Q(s)D(s) + R(s)$$

$$\Rightarrow$$

$$N(s)D(s)^{-1} = R(s)D(s)^{-1} + Q(s)$$

$$R(s)D(s)^{-1} \in \mathbb{R}_{sp}(s)^{p\times m}, \qquad Q(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times m}$$

Λύση

Έστω

$$T(s) := N(s)D(s)^{-1} \in \mathbb{R}(s)^{p\times m}$$

$$T(s) = \{t_{ij}(s)\},\ t_{ij}(s) = \frac{n_{ij}(s)}{d_{ij}(s)} \in \mathbb{R}(s)$$

και γράψτε κάθε

$$t_{ij}(s) = t_{ij}(s) + q_{ij}(s), \quad t_{ij}(s) \in \mathbb{R}_{sp}(s) \;\; q_{ij}(s) \in \mathbb{R}[s]$$

έτσι ώστε ο $T(s)$ να γράφεται

$$T(s) = T_{sp}(s) + T_{pol}(s),$$

$$T_{sp}(s) \in \mathbb{R}_{sp}(s)^{p\times m}, T_{pol}(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times m}$$

Τότε

$$Q(s) := T_{pol}(s)$$

$$R(s) := N(s) - T_{sp}(s)D(s)$$

Απόδειξη

Από την

$$T(s) = N(s)D(s)^{-1} = T_{sp}(s) + T_{pol}(s)$$

πολλαπλασιάζοντας από δεξία με τον $D(s)$ έχουμε

$$T(s)D(s) = N(s) = T_{sp}(s)D(s) + T_{pol}(s)D(s)$$

από την οποία

$$T_{sp}(s)D(s) = N(s) - T_{pol}(s)D(s) =: R[s] \in \mathbb{R}[s]^{p\times m}$$

και άρα

$$N(s) = Q(s)D(s) + R(s)$$

έτσι ώστε

$$
\begin{aligned}
R(s)D(s)^{-1} &= \left[N(s) - T_{pol}(s)D(s)\right]D(s)^{-1} \\
&= N(s)D(s)^{-1} - T_{pol}(s) \\
&= T(s) - T_{pol}(s) = T_{sp}(s)
\end{aligned}
$$

Άρα έχουμε την

Πρόταση

Έστω $D(s) \in \mathbb{R}[s]^{m\times m}, rank_{\mathbb{R}(s)} D(s) = m$. Τότε για κάθε $N(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times m}$ υπάρχουν $Q(s), R(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times m}$ τέτοιοι ώστε

$$
N(s) = Q(s)D(s) + R(s)
$$

και $R(s)D(s)^{-1} \in \mathbb{R}_{sp}(s)^{p\times m}$. Επιπλέον αν ο $D(s)$ είναι κανονικός ως τις στήλες (column proper) τότε η συνθήκη $R(s)D(s)^{-1} \in \mathbb{R}_{sp}(s)^{p\times m}$ μπορεί να αντικατασταθεί από τις συνθήκες

$$
\deg r_i(s) < \deg d_i(s) \qquad \forall i = 1, 2, \ldots, m
$$