ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΤΥΠΑ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΠΟΛΥΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΜΕΣΩ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΩΝ ΠΙΝΑΚΩΝ

Αν για σήματα $x(t)$ συνεχούς χρόνου $t \in \mathbb{R}$

$$\rho := \frac{d}{dt}, \quad \rho^i := \frac{d^i}{dt^i} \qquad i = 0,1,2,\ldots$$

είναι ο διαφορικός τελεστής έτσι ώστε

$$\rho^i x(t) := \frac{d^i x(t)}{dt^i} \qquad i = 0,1,2,\ldots$$

και για σήματα διακριτού χρόνου

$$x(kT) = x(t), \quad t = kT, \qquad k = \ldots -2,-1,0,1,2,\ldots.$$

$$\rho x(kT) := x(kT+T) \quad \rho^i x(kT) := x(kT+iT) \quad i = 0,1,2,\ldots$$

είναι ο τελεστής μετατόπισης «προς τα εμπρός»

τότε το ποιο γενικό μαθηματικό πρότυπο ενός γραμμικού και χρονικά αναλλοίωτου συστήματος έχει την μορφή

$$\begin{aligned} A(\rho)\beta(t) &= B(\rho)u(t) \\ y(t) &= C(\rho)\beta(t) + D(\rho)u(t) \end{aligned} \qquad (1)$$

όπου

$$A(\rho) \in \mathbb{R}[\rho]^{r\times r}, B(\rho) \in \mathbb{R}[\rho]^{r\times m}$$
$$C(\rho) \in \mathbb{R}[\rho]^{p\times r}, D(\rho) \in \mathbb{R}[\rho]^{p\times m}$$

και

$$\beta(t):\mathbb{R}\to\mathbb{R}^r, \quad u(t):\mathbb{R}\to\mathbb{R}^m, \quad y(t):\mathbb{R}\to\mathbb{R}^p$$

τα ανύσματα «ψευδοκατάστασης», εισόδων και εξόδων αντίστοιχα

Η περιγραφή (1) ονομάζεται **Π**εριγραφή μέσω **Π**ολυωνυμικών **Π**ινάκων (**ΠΠΠ**) (**P**olynomial **M**atrix **D**escription (**PMD**)) του συστήματος.

Θεωρώντας τον μετασχηματισμό Laplace των (1) έχουμε

$$\begin{aligned} A(s)\hat{\beta}(s) &= B(s)\hat{u}(s) \\ \hat{y}(s) &= C(s)\hat{\beta}(s) + D(s)\hat{u}(s) \end{aligned} \qquad (2)$$

όπου

$$\hat{\beta}(s) = \mathcal{L}\{\beta(t)\}, \quad \hat{u}(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}, \quad \hat{y}(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$$

οι μετασχηματισμοί Laplace των

$$\beta(t):\mathbb{R}\to\mathbb{R}^r, \quad u(t):\mathbb{R}\to\mathbb{R}^m, \quad y(t):\mathbb{R}\to\mathbb{R}^p$$

αντίστοιχα.

Από τις (2)

$$\hat{y}(s)=\left[C(s)A(s)^{-1}B(s)+D(s)\right]\hat{u}(s)$$

Ο πίνακας ρητών συναρτήσεων

$$H(s):=C(s)A(s)^{-1}B(s)+D(s)\in\mathbb{R}(s)^{p\times m}$$

ονομάζεται Πίνακας Συναρτήσεων Μεταφοράς του συστήματος.

Οι (2) γράφονται και ως

$$\begin{bmatrix} A(s) & B(s) \\ -C(s) & D(s) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{\beta}(s) \\ \hat{u}(s) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ -\hat{y}(s) \end{bmatrix}$$

Ο πολυωνυμικός πίνακας

$$P(s):=\begin{bmatrix} A(s) & B(s) \\ -C(s) & D(s) \end{bmatrix}\in\mathbb{R}[s]^{(r+p)\times(r+m)}$$

ονομάζεται πίνακας συστήματος του Rosenbrock.

Τάξη του συστήματος είναι ο βαθμός της $\left|A(s)\right|$.

Πόλοι του συστήματος είναι τα μηδενικά του $A(s)$

Στην περίπτωση κατά την οποία

$$A(s) = sI_n - A \in \mathbb{R}[s]^{n\times n}, B(s) = B \in \mathbb{R}^{n\times m}$$
$$C(s) = C \in \mathbb{R}^{p\times n}, D(s) = D \in \mathbb{R}^{p\times m}$$

όπου $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ αν δηλαδή $r = n := \deg|sI_n - A|$ τότε λέμε ότι ο $P(s)$ έχει την μορφή του χώρου των καταστάσεων και στην περίπτωση αυτή η συμπεριφορά του συστήματος περιγράφεται από τις εξισώσεις του χώρου των καταστάσεων

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

όπου $x(t): \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ είναι το άνυσμα κατάστασης του συστήματος.

Στην περίπτωση κατά την οποία

$$A(s) = sE - A \in \mathbb{R}[s]^{r\times r}, B(s) = B \in \mathbb{R}^{r\times m}$$
$$C(s) = C \in \mathbb{R}^{p\times r}, D(s) = D \in \mathbb{R}^{p\times m}$$

όπου $E \in \mathbb{R}^{r\times r}, \quad rankE < r \quad A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ αν δηλαδή $n := \deg|sE - A| < r$ τότε λέμε ότι ο $P(s)$ έχει την μορφή του γενικευμένου χώρου των καταστάσεων.

Στην περίπτωση αυτή η συμπεριφορά του συστήματος περιγράφεται από τις εξισώσεις του γενικευμένου χώρου των καταστάσεων

$$E\dot{\beta}(t) = A\beta(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = C\beta(t) + Du(t)$$

όπου $\beta(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^r$ είναι το άνυσμα ψευδοκατάστασης του συστήματος.

Στην περίπτωση κατά την οποία

$$A(s) = A_1(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times p}, B(s) = B_1(s) \in \mathbb{R}^{p\times m}$$
$$C(s) = I_p, D(s) = 0 \in \mathbb{R}^{p\times m}$$

αν δηλαδή $r = p$ τότε λέμε ότι ο $P(s)$ έχει την αριστερή κλασματική μορφή και η συμπεριφορά του συστήματος περιγράφεται από τις εξισώσεις

$$A_1(\rho)\beta(t) = B_1(\rho)u(t)$$
$$y(t) = \beta(t)$$

Στην περίπτωση κατά την οποία

$$A(s) = A_2(s) \in \mathbb{R}[s]^{m\times m}, B(s) = I_m \in \mathbb{R}^{p\times m}$$
$$C(s) = B(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times m}, D(s) = 0 \in \mathbb{R}^{p\times m}$$

αν δηλαδή $r=m$ τότε λέμε ότι ο $P(s)$ έχει την δεξιά κλασματική μορφή και η συμπεριφορά του συστήματος περιγράφεται από τις εξισώσεις

$$A_2(\rho)\beta(t)=u(t)$$
$$y(t)=B_2(\rho)\beta(t)$$

Για κάθε ΠΠΠ ενός συστήματος η διάσταση r του $A(s)\in\mathbb{R}[s]^{r\times r}$ και ο βαθμός της ορίζουσας $n:=\deg|A(s)|$ μπορούν να ικανοποιούν τις σχέσεις

$$r<n$$
$$r=n$$
$$r>n$$

Αν $r<n$ προσθέτουμε στον $P(s)$ $q-r$ "1" όπου $q\geq n=\deg|A(s)|$ και παίρνουμε τον "εκτεταμένο" πίνακα συστήματος Rosenbrock

$$P_e(s)=\left[\begin{array}{cc:c} I_{q-r} & 0_{q-r,r} & 0_{q-r,m} \\ 0_{r,q-r} & A(s) & B(s) \\ \hdashline 0_{p,q-r} & -C(s) & D(s) \end{array}\right]=:\begin{bmatrix} \overline{A}(s) & \overline{B}(s) \\ -\overline{C}(s) & \overline{D}(s) \end{bmatrix}$$

Ορισμός

Δεδομένων δύο συστημάτων τα οποία περιγράφονται από δύο εκτεταμένους πίνακες συστήματος Rosenbrock:

$$P_{ei}(s) = \begin{bmatrix} I_{q-r_i} & 0_{q-r_i,r_i} & 0_{q-r_i,m} \\ 0_{r,q-r_i} & A_i(s) & B_i(s) \\ 0_{p,q-r_i} & -C_i(s) & D_i(s) \end{bmatrix} =: \begin{bmatrix} \overline{A}_i(s) & \overline{B}_i(s) \\ -\overline{C}_i(s) & \overline{D}_i(s) \end{bmatrix} \qquad i = 1,2$$

$n_i = \deg|A_i(s)|, \quad q \geq \max\{n_1, n_2\}$, τότε οι $P_{e1}(s), P_{e2}(s)$ ονομάζονται **ακριβώς ισοδύναμοι** και τα συστήματα τα οποία περιγράφουν ονομάζονται **συστήματα ακριβώς ισοδύναμα (strict system equivalent)** αν υπάρχουν πολυωνυμικοί unimodular πίνακες

$$M(s), N(s) \in \mathbb{R}[s]^{q \times q}$$

και πολυωνυμικοί πίνακες

$$X(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times q}, Y(s) \in \mathbb{R}[s]^{q \times m}$$

τέτοιοι ώστε

$$\begin{bmatrix} M(s) & 0 \\ X(s) & I_p \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_{q-r_1} & 0_{q-r_1,r_1} & 0_{q-r_1,m} \\ 0_{r,q-r_1} & A_1(s) & B_1(s) \\ 0_{p,q-r_1} & -C_1(s) & D_1(s) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} I_{q-r_2} & 0_{q-r_2,r_2} & 0_{q-r_2,m} \\ 0_{r,q-r_2} & A_2(s) & B_2(s) \\ 0_{p,q-r_2} & -C_2(s) & D_2(s) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} N(s) & Y(s) \\ 0 & I_m \end{bmatrix} \qquad (3)$$

Άσκηση αποδείξτε ότι η (3) ορίζει μια σχέση ισοδυναμίας μεταξύ συστημάτων που περιγράφονται από πίνακες συστημάτων Rosenbrock $P_1(s), P_2(s)$

Την σχέση ισοδυναμίας αυτή την ονομάζουμε σχέση **αυστηρής ισοδυναμίας συστημάτων**

Θεώρημα

Αν δύο πίνακες συστήματος Rosenbrock $P_1(s), P_2(s)$ είναι αυστηρά ισοδύναμοι τότε

1. έχουν την ίδια τάξη $n = \deg|A_1| = \deg|A_2|$
2. έχουν την ίδια συνάρτηση μεταφοράς

$$H_1(s) := C_1(s)A_1(s)^{-1}B_1(s) + D_1(s)$$

$$= C_2(s)A_2(s)^{-1}B_2(s) + D_2(s) = H_2(s)$$

3. έχουν την ίδια μορφή Smith: $S^{\mathbb{C}}_{P_1(s)} = S^{\mathbb{C}}_{P_2(s)}$
4. Οι πίνακες $\begin{bmatrix} A_1(s) & B_1(s) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} A_2(s) & B_2(s) \end{bmatrix}$ έχουν την ίδια μορφή Smith.

5. Οι πίνακες

$$\begin{bmatrix} A_1(s) \\ -C_1(s) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} A_2(s) \\ -C_2(s) \end{bmatrix}$$ έχουν την ίδια μορφή Smith.

Θεώρημα

Κάθε πίνακας συστήματος $P_1(s)$ είναι αυστηρά ισοδύναμος με ένα πίνακα συστήματος $P_2(s)$ της μορφής του χώρου των καταστάσεων

$$P_2(s) = \begin{bmatrix} I_{r-n} & 0 & 0 \\ 0 & sI_n - A & B \\ 0 & -C & D(s) \end{bmatrix}$$

ΑΠΟΣΥΖΕΥΚΤΙΚΑ ΜΗΔΕΝΙΚΑ (Decoupling zeros)

Έστω

$$P(s) := \begin{bmatrix} A(s) & B(s) \\ -C(s) & D(s) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}[s]^{(r+p)\times(r+m)} \qquad (4)$$

και έστω $G_L(s)$ ο μέγιστος κοινός αριστερός διαιρέτης των $A(s), B(s)$ έτσι ώστε

$$\begin{bmatrix} A(s) & B(s) \end{bmatrix} = G_L(s)\begin{bmatrix} \overline{A}(s) & \overline{B}(s) \end{bmatrix} \qquad (5)$$

όπου $\overline{A}(s), \overline{B}(s)$ αριστερά πρώτοι.

Ορισμός

Τα μηδενικά του $G_L(s)$ ονομάζονται **αποσυζευκτικά μηδενικά εισόδου**. (input decoupling zeros)

Αντίστοιχα, έστω έστω $G_R(s)$ ο μέγιστος κοινός δεξιός διαιρέτης των $A(s), C(s)$ έτσι ώστε

$$\begin{bmatrix} A(s) \\ -C(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widehat{A}(s) \\ -\widehat{C}(s) \end{bmatrix} G_R(s) \quad (6)$$

όπου $\widehat{A}(s), \widehat{C}(s)$ δεξιά πρώτοι.

Ορισμός

Τα μηδενικά του $G_R(s)$ ονομάζονται **αποσυζευκτικά μηδενικά εξόδου**. (output decoupling zeros)

Από τις (4) και (5) έχουμε

$$\begin{bmatrix} A(s) & B(s) \\ -C(s) & D(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_L(s) & 0_{r,p} \\ 0_{p,r} & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{A}(s) & \overline{B}(s) \\ -C(s) & D(s) \end{bmatrix} \quad (7)$$

και έστω $\overline{G}_R(s) \in \mathbb{R}[s]^{r \times r}$ ο μέγιστος κοινός δεξιός διαιρέτης των $\overline{A}(s), C(s)$ έτσι ώστε

$$\begin{bmatrix} \overline{A}(s) \\ -C(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widetilde{A}(s) \\ -\widetilde{C}(s) \end{bmatrix} \overline{G}_R(s) \quad (8)$$

όπου $\widetilde{A}(s), \widetilde{C}(s)$ δεξιά πρώτοι και άρα από τις (7) και (8) έχουμε την

$$\begin{bmatrix} \overline{A}(s) & \overline{B}(s) \\ -C(s) & D(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widetilde{A}(s) & \overline{B}(s) \\ -\widetilde{C}(s) & D(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{G}_R(s) & 0_{r,p} \\ 0_{m,r} & I_p \end{bmatrix} \quad (8)$$

Συνδυάζοντας τις (7) και (8) έχουμε

$$\begin{bmatrix} A(s) & B(s) \\ -C(s) & D(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_L(s) & 0_{r,p} \\ 0_{p,r} & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{A}(s) & \widetilde{B}(s) \\ -\widetilde{C}(s) & D(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{G}_R(s) & 0_{r,p} \\ 0_{m,r} & I_p \end{bmatrix}$$

όπου για λόγους συμμετρίας ονομάσαμε $\widetilde{B}(s) := \overline{B}(s)$
και
$\widetilde{A}(s), \widetilde{B}(s)$ είναι αριστερά πρώτοι
$\widetilde{A}(s), \widetilde{C}(s)$ είναι δεξιά πρώτοι

Και

$$A(s) = G_L(s)\widetilde{A}(s)\overline{G}_R(s)$$

$$B(s) = G_L(s)\widetilde{B}(s)$$

$$C(s) = \widetilde{C}(s)\overline{G}_R(s)$$

έτσι ώστε ο πίνακας συναρτήσεων μεταφοράς του συστήματος να γράφεται

$$H(s)=C(s)A(s)^{-1}B(s)+D(s)=$$
$$\widetilde{C}(s)\overline{G}_R(s)\overline{G}_R(s)^{-1}\widetilde{A}(s)^{-1}G_L(s)^{-1}G_L(s)\widetilde{B}(s)+D(s)$$
$$=\widetilde{C}(s)\widetilde{A}(s)^{-1}\widetilde{B}(s)+D(s)$$

και τα μηδενικά των $\overline{G}_R(s), G_L(s)$ απλοποιούνται και δεν εμφανίζονται στην $H(s)$ σαν πόλοι.

Για τον λόγο αυτό τα αποσυζευκτικά μηδενικά εισόδου και εξόδου ονομάζονται και «κρυφοί δεσμοί» (hidden modes) του συστήματος.

Ορισμός

Τα μηδενικά του $\widetilde{A}(s)$ ονομάζονται πόλοι του πίνακα συναρτήσεων μεταφοράς $H(s)$

Από την

$$A(s)=G_L(s)\widetilde{A}(s)\overline{G}_R(s)$$

έχουμε ότι

$$n_1=\deg\left|A(s)\right|\geq\deg\left|\widetilde{A}(s)\right|=n$$

και το $\deg\left|\widetilde{A}(s)\right|=n$ ονομάζεται η ελάχιστη τάξη του συστήματος.

Ορισμός

Ένας πίνακας συστήματος

$$P(s) := \begin{bmatrix} A(s) & B(s) \\ -C(s) & D(s) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}[s]^{(r+p)\times(r+m)}$$

τέτοιος ώστε οι πίνακες $A(s), B(s)$ είναι αριστερά πρώτοι και οι πίνακες $A(s), C(s)$ είναι δεξιά πρώτοι ονομάζεται πίνακας συστήματος ελάχιστης τάξης.