ΕΣΩΤΕΡΙΚΗ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ
ΣΤΑΘΕΡΟΠΟΙΗΣΙΜΟΤΗΤΑ (STABILIZABILITY)
ΠΑΡΑΤΗΡΗΤΙΚΟΤΗΤΑ (DETECTABILITY)

Έστω γραμμικό και χρονικά αναλλοίωτο πολυμεταβλητό σύστημα το οποίο περιγράφεται από το μαθηματικό πρότυπο **Π**εριγραφής μέσω **Π**ολυωνυμικών **Π**ινάκων (**ΠΠΠ**) (**P**olynomial **M**atrix **D**escription (**PMD**))

$$\begin{aligned} A(\rho)\beta(t) &= B(\rho)u(t) \\ y(t) &= C(\rho)\beta(t) + D(\rho)u(t) \end{aligned} \qquad (1)$$

όπου

$$A(\rho) \in \mathbb{R}[\rho]^{r\times r}, B(\rho) \in \mathbb{R}[\rho]^{r\times m}$$

$$C(\rho) \in \mathbb{R}[\rho]^{p\times r}, D(\rho) \in \mathbb{R}[\rho]^{p\times m}$$

και

$$\beta(t):\mathbb{R}\to\mathbb{R}^r, \quad u(t):\mathbb{R}\to\mathbb{R}^m, \quad y(t):\mathbb{R}\to\mathbb{R}^p$$

τα ανύσματα «ψευδοκατάστασης», εισόδων και εξόδων αντίστοιχα.

Έστω

$$A(s) = A_q s^q + \ldots + A_1 s + A_0 \in \mathbb{R}[s]^{r\times r}, \ A_q \neq 0$$

και έστω $\lambda_i \in \mathbb{C}, \ i = 1, 2, \ldots, \ell$ τα μηδενικά του $A(s)$

$\Leftrightarrow$

$\det A(\lambda_i) = 0$

και έστω

$$S_{A(s)}^{\lambda_i} = diag\left[(s-\lambda_i)^{m_{i1}} \quad \ldots \quad (s-\lambda_i)^{m_{ir}} \right]$$

η μορφή Smith του $A(s)$ στο σημείο $s = \lambda_i$ όπου

$$0 \le m_{i1} \le m_{i2} \le \ldots \le m_{ir}$$

Οι μη αρνητικοί ακέραιοι $m_{ij} \ge 0$ είναι οι μερικές πολλαπλότητες του μηδενικού λ_i του $A(s)$και ο ακέραιος

$$m_i = \sum_{j=1}^{r} m_{ij}$$

είναι η πολλαπλότητα του μηδενικού λ_i του $A(s)$.

Οι όροι

$$(s-\lambda_i)^{m_{ij}} \qquad i = 1, 2, \ldots, \ell \qquad j = 1, 2, \ldots, r$$

ονομάζονται πεπερασμένοι στοιχειώδεις διαιρέτες (finite elementary divisors) του πολυωνυμικού πίνακα $A(s)$.

Έστω

$$J_{ij} := \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m_{ij} \times m_{ij}}$$

$i = 1, 2, \dots, \ell \quad j = 1, 2, \dots, r$ Jordan blocks που αντιστοιχούν στους πεπερασμένους στοιχειώδεις διαιρέτες $(s - \lambda_i)^{m_{ij}} \quad i = 1, 2, \dots, \ell \quad j = 1, 2, \dots, r$ και έστω

$$J_i = block\ diag\begin{bmatrix} J_{i1} & J_{i2} & \dots & J_{ir} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m_i \times m_i}$$
$$i = 1, 2, \dots, \ell$$

Ορισμός

Ένα ζεύγος πινάκων

$$C_i \in \mathbb{R}^{r \times m_i}, J_i \in \mathbb{R}^{m_i \times m_i}$$

ονομάζεται πεπερασμένο ζεύγος Jordan οποίο αντιστοιχεί στο μηδενικό λ_i του $A(s)$ αν

$$A_q C_i J_i^q + A_{q-1} C_i J_i^{q-1} + \dots + A_1 C_i J_i + A_0 C_i = 0_{r_i, m_i} \quad (1)$$

και

$$rank_{\mathbb{R}} \begin{bmatrix} C_i \\ C_i J_i \\ \vdots \\ C_i J_i^{m_i - 1} \end{bmatrix} = m_i \qquad (2)$$

Έστω

$$n := \deg \det A(s) = \sum_{i=1}^{\ell} m_i$$

Τότε το ζεύγος των πινάκων

$$C_F := \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & \dots & C_\ell \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{r \times n}$$
$$J_F := block\ diag \begin{bmatrix} J_1 & J_2 & \dots & J_\ell \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

σαν συνέπεια των (1) και (2) ικανοποιεί τις σχέσεις

$$A_q C_F J_F^q + A_{q-1} C_F J_F^{q-1} + \dots + A_1 C_F J_F + A_0 C_F = 0_{r,n}$$
$$rank_{\mathbb{R}} \begin{bmatrix} C_F \\ C_F J_F \\ \vdots \\ C_F J_F^{n-1} \end{bmatrix} = n$$

και ονομάζεται πεπερασμένο ζεύγος Jordan του $A(s)$.

Στο βιβλίο μου Linear Multivariable Control (σελ. 154-166) δίνω μία μέθοδο κατασκευής ενός πεπερασμένου ζεύγους Jordan ενός πολυωνυμικού πίνακα $A(s)$ μέσω της μορφής Smith $S_{A(s)}^{\mathbb{C}}$ του $A(s)$ και των unimodular πινάκων $U_L(s), U_R(s) \in \mathbb{R}[s]^{r\times r}$ για τους οποίους ισχύει $S_{A(s)}^{\mathbb{C}} = U_L(s)A(s)U_R(s)$, μαζί με ένα παράδειγμα (example 4.20).

Άσκηση

Βρείτε ένα ζεύγος Jordan $C_F \in \mathbb{R}^{2\times 2}, J_F \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ του πολυωνυμικού πίνακα

$A(s) = \begin{bmatrix} s+1 & s^3 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix}$ αν η μορφή Smith $S_{A(s)}^{\mathbb{C}}$ του $A(s)$ είναι

$S_{A(s)}^{\mathbb{C}} =$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (s+1)^2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ s+1 & 1 \end{bmatrix}}_{U_L(s)} \underbrace{\begin{bmatrix} s+1 & s^3 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix}}_{A(s)} \underbrace{\begin{bmatrix} s^2-s+1 & -s^3 \\ -1 & s+1 \end{bmatrix}}_{U_R(s)}$$

Επίσης στίς παραπάνω σελίδες του βιβλίου μου αποδεικνύω ότι αν η είσοδος $u(t)$ στην εξίσωση

$$A(\rho)\beta(t) = B(\rho)u(t)$$

είναι $u(t)=0,\ \ t\geq 0$ τότε η λύση της ομογενούς δ.ε.

$$A(\rho)\beta(t)=0, \quad t\geq 0 \quad (2)$$

εξαρτάτε από τα «μηδενικά» του πίνακα $A(s)$. Επειδή γενικώς ένας πολυωνυμικός πίνακας εκτός από τα «πεπερασμένα» μηδενικά $\lambda_i \in \mathbb{C},\ i=1,2,...,\ell$ έχει και μηδενικά στο σημείο $s=\infty$ η λύση της (2) εξαρτάτε από τα μηδενικά του $A(s)$ από τα πεπερασμένα μηδενικά $\lambda_i \in \mathbb{C},\ i=1,2,...,\ell$ αλλά και τα μηδενικά του $A(s)$ στο σημείο $s=\infty$. Μπορεί να αποδειχτεί ότι αν ο πίνακας $A_q \in \mathbb{R}^{r\times r}$ στην πολυωνυμική μορφή του $A(s)$:

$$A(s)=A_q s^q+...+A_1 s+A_0 \in \mathbb{R}[s]^{r\times r}, \ A_q \neq 0$$

είναι ομαλός, αν δηλαδή

$$rank_{\mathbb{R}} A_q = r$$

τότε η βάση του χώρου λύσεων της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης (2) είναι ο $r\times n$ πίνακας

$$\Psi(t)=\begin{bmatrix}\psi_1(t) & \psi_2(t) & \dots & \psi_n(t)\end{bmatrix}=C_F e^{J_F t}$$

έτσι ώστε κάθε λύση της ομογενούς δ.ε. εξίσωσης (2) να γράφεραι σαν γραμμικός συνδιασμός των γραμμικά ανεξαρτήτων στηλών $\psi_i(s),\ i=1,2,\dots,n$ της βάση του χώρου λύσεων $\Psi(t)=C_F e^{J_F t}$

Έχουμε την

Πρόταση

Αν $rank_{\mathbb{R}} A_q = r$ τότε για κάθε σύνολο αρχικών συνθηκών $\beta^{(i)}(0)\in\mathbb{R}^r,\ \ i=0,1,\dots,q-1$ υπάρχει μοναδικό

$$x(0)=\begin{bmatrix} x_1(0)\\ x_2(0)\\ \vdots\\ x_n(0)\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^n,\quad n:=\deg\det A(s)$$

τέτοιο ώστε

$$\beta(t)=C_F e^{J_F t}x(0):\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^r$$
$$\mathbb{R}^+=\{t\in\mathbb{R}:t\geq 0\}$$

είναι λύση της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης

$$A(\rho)\beta(t)=0,\quad t\geq 0$$

Ορισμός

Το μαθηματικό πρότυπο **Π**εριγραφής μέσω **Π**ολυωνυμικών **Π**ινάκων (**ΠΠΠ**) (**P**olynomial **M**atrix **D**escription (**PMD**))

$$A(\rho)\beta(t) = B(\rho)u(t)$$
$$y(t) = C(\rho)\beta(t) + D(\rho)u(t)$$

ονομάζεται εσωτερικά ευσταθές αν η λύση

$$\beta(t) = C_F e^{J_F t} x(0) : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^r$$
$$\mathbb{R}^+ = \{t \in \mathbb{R} : t \geq 0\}$$

της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης

$$A(\rho)\beta(t) = 0, \quad t \geq 0$$

ελαττώνεται ασυμπτωτικά στον $\mathbb{R}^+ = \{t \in \mathbb{R} : t \geq 0\}$ δηλαδή υπάρχει $\alpha > 0 : \lim_{t\to\infty} e^{at}\beta(t) = 0 \in \mathbb{R}^r$.

Από την μορφή της λύσης

$$\beta(t) = C_F e^{J_F t} x(0)$$

και την κατασκευή του πίνακα $J_F \in \mathbb{R}^{n\times n}$ από τον $A(s)$ προκύπτει η πρόταση

Πρόταση
Το μαθηματικό πρότυπο **Π**εριγραφής μέσω **Π**ολυωνυμικών **Π**ινάκων (**ΠΠΠ**) (**P**olynomial **M**atrix **D**escription (**PMD**))

$$A(\rho)\beta(t) = B(\rho)u(t)$$
$$y(t) = C(\rho)\beta(t) + D(\rho)u(t)$$

είναι εσωτερικά ευσταθές ανν ο πολυωνυμικός πίνακας $A(s)$ ΔΕΝ ΕΧΕΙ ΜΗΔΕΝΙΚΑ ΕΝΤΟΣ ΤΟΥ ΚΛΕΙΣΤΟΥ ΔΕΞΙΟΥ ΗΜΙΕΠΙΠΕΔΟΥ $\mathbb{C}^{+}$ όπου

$$\mathbb{C}^{+} := \{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(s) \geq 0\}$$

ή ισοδύναμα ανν όλα τα μηδενικά $\lambda_i \in \mathbb{C},\ i = 1, 2, \ldots, \ell$ του $A(s)$ βρίσκονται εντός του ανοικτού αριστερού ημιεπιπέδου

$$\mathbb{C}^{-} := \{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(s) < 0\}$$

ή ισοδύναμα ανν όλα τα μηδενικά $\lambda_i \in \mathbb{C},\ i = 1, 2, \ldots, \ell$ του $A(s)$ έχουν πραγματικό μέρος μικρότερο του μηδενός.

Ορισμός

Το μαθηματικό πρότυπο **Π**εριγραφής μέσω **Π**ολυωνυμικών **Π**ινάκων (**ΠΠΠ**) (**P**olynomial **M**atrix **D**escription (**PMD**))

$$A(\rho)\beta(t) = B(\rho)u(t)$$
$$y(t) = C(\rho)\beta(t) + D(\rho)u(t)$$

ονομάζεται σταθεροποιήσιμο (stabilizable) αν όλα τα **αποσυζευκτικά μηδενικά εισόδου**. (input decoupling zeros) ανήκουν στο $\mathbb{C}^- := \{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(s) < 0\}$

Ισοδύναμα αν

$$rank_{\mathbb{C}}\begin{bmatrix} A(s_0) & B(s_0) \end{bmatrix} = r \quad \forall s_0 \in \mathbb{C}^+$$

Ορισμός

Το μαθηματικό πρότυπο **Π**εριγραφής μέσω **Π**ολυωνυμικών **Π**ινάκων (**ΠΠΠ**) (**P**olynomial **M**atrix **D**escription (**PMD**))

$$A(\rho)\beta(t) = B(\rho)u(t)$$
$$y(t) = C(\rho)\beta(t) + D(\rho)u(t)$$

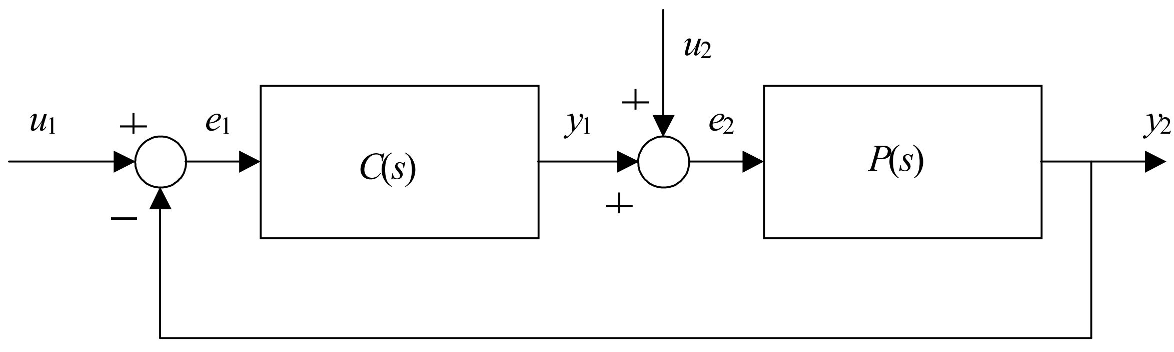
ονομάζεται παρατηρήσιμο (detectable) αν όλα τα **αποσυζευκτικά μηδενικά εξόδου**. (output decoupling zeros) ανήκουν στο $\mathbb{C}^- := \{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(s) < 0\}$

Ισοδύναμα αν

$$rank_{\mathbb{C}}\begin{bmatrix} A(s_0) \\ C(s_0) \end{bmatrix} = r \quad \forall s_0 \in \mathbb{C}^+$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΕΛΕΓΧΟΥ ΠΟΛΥΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΜΕΣΩ ΔΥΝΑΜΙΚΟΥ ΕΛΕΓΚΤΟΥ ΚΑΙ ΜΟΝΑΔΙΑΙΑΣ ΑΝΑΔΡΑΣΗΣ (DYNAMIC CONTROLLER AND UNITY FEEDBACK)

ΔΕΔΟΜΕΝΟΥ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ ΠΡΟΤΥΠΟΥ ΕΝΟΣ ΠΟΛΥΜΕΤΑΒΛΗΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ Σ(P) ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΕΛΕΓΧΟΥ ΤΟΥ Σ(P) ΣΥΝΙΣΤΑΤΑΙ ΣΤΟΝ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ ΠΡΟΤΥΠΟΥ ΕΝΟΣ ΑΛΛΟΥ ΠΟΛΥΜΕΤΑΒΛΗΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ Σ(C) ΤΟ ΟΠΟΙΟ ΟΝΟΜΑΖΕΤΑΙ ΕΛΕΓΚΤΗΣ (CONTROLER) ΤΕΤΟΙΟΥ ΩΣΤΕ ΤΟ ΚΛΕΙΣΤΟ ΜΕ ΑΝΑΔΡΑΣΗ (FEEDBACK) ΣΥΣΤΗΜΑ Σ(P,C) ΜΕ ΕΙΣΟΔΟ ΤΟ (ανυσμα εισόδων) $u_2(t)$ ΚΑΙ ΕΞΟΔΟ (ανυσμα εξόδων) $y(t)$



Σχήμα 1

ΝΑ ΕΧΕΙ ΕΠΙΘΥΜΗΤΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΟΠΩΣ

- ΕΣΩΤΕΡΙΚΗ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ

- ΟΙ ΕΞΟΔΟΙ ΝΑ ΕΧΟΥΝ ΕΠΙΘΥΜΗΤΗ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑ
- ΝΑ ΜΗΝ ΥΠΑΡΧΟΥΝ ΑΝΕΠΙΘΥΜΗΤΕΣ ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΤΩΝ ΕΙΣΟΔΩΝ ΚΑΙ ΤΩΝ ΕΞΟΔΩΝ
- Ο ΕΛΕΓΚΤΗΣ Σ(C) ΝΑ ΕΙΝΑΙ «ΡΩΜΑΛΕΟΣ» (Robust). Π.χ αν Σ(C) ο υπολογιστεί για ένα μαθηματικό πρότυπο P του συστήματος Σ(P) έτσι ώστε το κλειστό σύστημα Σ(P,C) να είναι ευσταθές τότε το Σ(P+ΔP,C) να είναι και αυτό ευσταθές για κάποιο ΔP$\neq 0$

Έστω ότι το δεδομένο σύστημα Σ(P) έχει πίνακα συναρτήσεων μεταφοράς τον αυστηρά κανονικό ρητό πίνακα

$$P(s) \in \mathbb{R}_{spr}(s)^{p\times m} \Leftrightarrow P(\infty) = 0_{p,m}$$

και έστω ότι το σύστημα Σ(P) περιγράφεται από το μαθηματικό πρότυπο **Π**εριγραφής μέσω **Π**ολυωνυμικών **Π**ινάκων (**ΠΠΠ**) (**P**olynomial **M**atrix **D**escription (**PMD**))

$$\begin{aligned} A(\rho)\beta(t) &= B(\rho)u(t) \\ y(t) &= C(\rho)\beta(t) + D(\rho)u(t) \end{aligned}$$

Υποθέτουμε ότι το σύστημα Σ(P) είναι

Σταθεροποιήσιμο και Παρατηρήσιμο

ή ισοδύναμα ότι

όλα τα αποσυζευκτικά μηδενικά εισόδου και όλα τα αποσυζευκτικά μηδενικά εξόδου του Σ(P) (αν υπάρχουν) ανοίκουν στο

$$\mathbb{C}^{-} := \{ s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(s) < 0 \}$$

Μέσω μετασχηματισμών ακριβούς ισοδυναμίας (strict system equivalence) προσδιορίζουμε ένα μαθηματικό πρότυπο του Σ(P) τέτοιο ώστε

$$A(s) = D_R(s) \in \mathbb{R}[s]^{m\times m}, B(s) = I_m \in \mathbb{R}^{p\times m}$$
$$C(s) = N_R \in \mathbb{R}[s]^{p\times m}, D(s) = 0 \in \mathbb{R}^{p\times m}$$

Έστω δηλαδή ότι το Σ(P) περιγράφεται από την δεξιά κλασματική μορφή

$$\begin{aligned} D_R(\rho)\beta_p(t) &= e_2(t) \\ y_2(t) &= N_R(\rho)\beta_p(t) \end{aligned} \qquad (3)$$

(βλέπε σχήμα 1) όπου $\beta_p(t)$ είναι η ψευδοκατάσταση του Σ(P) και $N_R(s), D_R(s)$ είναι δεξιά πρώτοι μεταξύ τους και ο $D_R(s)$ επιλέγεται να είναι κανονικός ως πρός τις στήλες (column proper) (θα δούμε παρακάτω γιατί) με βαθμούς στηλών

$$\deg D_{Rci}(s) = k_i,\ i = 1, 2, ..., m.$$

Λόγω του ότι

$$P(s) \in \mathbb{R}_{spr}(s)^{p \times m} \Leftrightarrow P(\infty) = 0_{p,m}$$

οι βαθμοί στηλών του $N_R(s)$ θα ικανοποιούν τις

$$\deg N_{Rci}(s) < k_i,\ i = 1, 2, .., m.$$

Από τις (3) έχουμε

$$\beta_p(t) = D_R(\rho)^{-1} e_2(t)$$
$$y_2(t) = N_R(\rho)\beta_c(t) = N_R(\rho) D_R(\rho)^{-1} e_2(t)$$
$$\hat{y}_2(s) = N_R(s) D_R(s)^{-1} \widehat{e_2}(s)$$

και άρα η

$$P(s) = N_R(s) D_R(s)^{-1}$$

θα είναι μια δεξιά πρώτη κλασματική πολυωνυμική περιγραφή του πίνακα συναρτήσεων μεταφοράς $P(s)$ του Σ(P).

Έστω επίσης ότι ο (άγνωστος για την ώρα) ΔΥΝΑΜΙΚΟΣ ΕΛΕΓΚΤΗΣ (controller) Σ(C) περιγράφεται από ένα μαθηματικό πρότυπο της αριστερής κλασματικής μορφής

$$X_L(\rho)\beta_c(t) = Y_L(\rho)e_1(t)$$
$$y_1(t) = \beta_c(t)$$

όπου $\beta_c(t)$ είναι η ψευδοκατάσταση του controller Σ(C), $X_L(s) \in \mathbb{R}[s]^{m\times m}$ και υποθέτουμε ότι είναι κανονικός ως προς τις γραμμές του με βαθμούς γραμμών $\deg X_{Lri}(s) = \mu_i,\ i = 1,2,\ldots,m$ και $Y_L(s) \in \mathbb{R}^{m\times p}$ έτσι ώστε ο πίνακας συναρτήσεων μεταφοράς του controller $C(s)$ να είναι κανονικός ($C(s) \in \mathbb{R}_{pr}(s)^{m\times p} \Leftrightarrow C(\infty) \in \mathbb{R}^{m\times p}$) και να δίνεται από την αριστερά πρώτη κλασματική πολυωνυμική περιγραφή

$$C(s) = X_L(s)^{-1}Y(s) \in \mathbb{R}_{pr}(s)^{m\times p}$$

Μετασχηματίζοντας κατά Laplace (με μηδενικές αρχικές συνθήκες) τις εξισώσεις που διέπουν τα δύο συστήματα πέρνουμε τις εξισώσεις

$$D_R(s)\beta_p(s) = e_2(s) \qquad \text{(a)}$$
$$y_2(s) = N_R(s)\beta_p(s) \qquad \text{(b)}$$
$$X_L(s)\beta_c(s) = Y_L(s)e_1(s) \qquad \text{(c)}$$
$$y_1(s) = \beta_c(s) \qquad \text{(d)}$$

Η εξίσώση που διέπει τον ένα κόμβο (βλέπε σχήμα 1) του κλειστού συστήματος είναι η

$$e_2(s) = y_1(s) + u_2(s) \overset{(d)}{=} \beta_c(s) + u_2(s)$$

άρα η (a) γράφεται

$$D_R(s)\beta_p(s) = \beta_c(s) + u_2(s) \qquad \text{(a1)}$$

Η εξίσώση που διέπει τον άλλο κόμβο του κλειστού συστήματος (βλέπε σχήμα 1) είναι η

$$e_1(s) = u_1(s) - y_2(s)$$

άρα η (c) γράφεται

$$X_L(s)\beta_c(s) = Y_L(s)e_1(s)$$

$$X_L(s)\beta_c(s) = Y_L(s)\left[u_1(s) - y_2(s)\right]$$

$$X_L(s)\beta_c(s) + Y_L(s)y_2(s) = Y_L(s)u_1(s) \qquad \text{(c1)}$$

Η εξίσωση (c1) βάσει της (b) :

$$y_2(s) = N_R(s)\beta_p(s) \qquad \text{(b)}$$

γράφεται

$$X_L(s)\beta_c(s)+Y_L(s)y_2(s)=Y_L(s)u_1(s) \qquad \text{(c1)}$$

$$X_L(s)\beta_c(s)+Y_L(s)N_R(s)\beta_p(s)=Y_L(s)u_1(s) \qquad \text{(c2)}$$

Τελικά οι εξισώσεις που διέπουν το κλειστό σύστημα είναι οι

$$D_R(s)\beta_p(s)-\beta_c(s)=u_2(s) \qquad \text{(a1)}$$

$$Y_L(s)N_R(s)\beta_p(s)+X_L(s)\beta_c(s)=Y_L(s)u_1(s) \qquad \text{(c2)}$$

$$y_1(s)=\beta_c(s) \qquad \text{(d)}$$

$$y_2(s)=N_R(s)\beta_p(s) \qquad \text{(b)}$$

Οί παραπάνω εξισώσεις γράφονται υπό μορφή block πινάκων ως εξής

$$\begin{bmatrix} D_R(s) & -I_m \\ Y_L(s)N_R(s) & X_L(s) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \beta_p(s) \\ \beta_c(s) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & I_m \\ Y_L(s) & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & I_m \\ N_R(s) & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \beta_p(s) \\ \beta_c(s) \end{bmatrix}$$

Οι παραπάνω εξισώσεις αποτελόυν μαθηματικό πρότυπο **Π**εριγραφής μέσω **Π**ολυωνυμικών **Π**ινάκων (**ΠΠΠ**) (**P**olynomial **M**atrix **D**escription (**PMD**)) του **κλειστού συστήματος Σ(P,C)** της μορφής

$$A(\rho)\beta(t) = B(\rho)u(t)$$
$$y(t) = C(\rho)\beta(t) + D(\rho)u(t)$$

όπου

$$A(s) = \begin{bmatrix} D_R(s) & -I_m \\ Y_L(s)N_R(s) & X_L(s) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}[s]^{(m+m)\times(m+m)}$$

$$B(s) = \begin{bmatrix} 0 & I_m \\ Y_L(s) & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}[s]^{(m+m)\times(p+m)}$$

$$C(s) = \begin{bmatrix} 0 & I_m \\ N_R(s) & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}[s]^{(m+p)\times(m+m)}$$

$$D(s) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(m+p)\times(p+m)}$$

$$\beta(s) = \begin{bmatrix} \beta_p(s) \\ \beta_c(s) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}[s]^{(m+m)\times 1}, \quad y(s) = \begin{bmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}[s]^{(m+p)\times 1},$$

$$u(s) = \begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}[s]^{(m+p)\times 1}$$

όπου $\beta(s)$ ο μετασχηματισμός Laplace της ψευδοκατάστασης $\beta(t)=\begin{bmatrix}\beta_p(t)\\ \beta_c(t)\end{bmatrix}$ του κλειστού συστήματος Σ(P,C).

ΕΣΩΤΕΡΙΚΗ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ ΤΟΥ ΚΛΕΙΣΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ Σ(P,C)

Βάσει του Θεωρήματος εσωτερικής ευστάθειας (βλέπε παραπάνω) το κλειστό σύστημα Σ(P,C) είναι εσωτερικά ευσταθές ανν όλα τα μηδενικά του πίνακα παρανομαστή του κλειστού συστήματος Σ(P,C)

$$A(\rho)=\begin{bmatrix} D_R(s) & -I_m \\ Y_L(s)N_R(s) & X_L(s)\end{bmatrix}\in\mathbb{R}[s]^{(m+m)\times(m+m)}$$

ευρίσκονται εντός του ανοιχτού αριστερού ημιεπιπέδου

$$\mathbb{C}^- := \{s\in\mathbb{C} : \mathrm{Re}(s)<0\}$$

Τα μηδενικά του πίνακα

$$A(\rho)=\begin{bmatrix} D_R(s) & -I_m \\ Y_L(s)N_R(s) & X_L(s)\end{bmatrix}\in\mathbb{R}[s]^{(m+m)\times(m+m)}$$

μετά από (block) στοιχειώδεις πράξεις επί των γραμμών του, ταυτίζονται με τα μηδενικά του πολυωνυμικού πίνακα

$$\widetilde{A}(s) :=$$

$$\begin{bmatrix} I_m & 0 \\ X(s) & I_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} D_R(s) & -I_m \\ Y_L(s)N_R(s) & X_L(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_R(s) & -I_m \\ X(s)D_R(s)+Y_L(s)N_R(s) & 0 \end{bmatrix}$$

και τα μηδενικά του πολυωνυμικού πίνακα

$$\widetilde{A}(s) := \begin{bmatrix} D_R(s) & -I_m \\ X(s)D_R(s)+Y_L(s)N_R(s) & 0 \end{bmatrix}$$

δίνονται από τα μηδενικά του πολυωνυμικού πίνακα

$$D_k(s) := X(s)D_R(s)+Y_L(s)N_R(s)$$

ΑΡΑ ΓΙΑ ΝΑ ΕΙΝΑΙ ΤΟ ΚΛΕΙΣΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ Σ(P,C) ΕΣΩΤΕΡΙΚΑ ΕΥΣΤΑΘΕΣ Η ΕΠΙΛΟΓΗ ΤΟΥ ΔΥΝΑΜΙΚΟΥ ΕΛΕΓΚΤΟΥ

$$C(s) = X_L(s)^{-1}Y(s) \in \mathbb{R}_{pr}(s)^{m\times p}$$

ΘΑ ΠΡΕΠΕΙ ΝΑ ΕΙΝΑΙ ΤΕΤΟΙΑ ΕΤΣΙ ΩΣΤΕ Ο ΠΙΝΑΚΑΣ

$$D_k(s) := X(s)D_R(s)+Y_L(s)N_R(s)$$

ΝΑ ΕΧΕΙ ΟΛΑ ΤΑ ΜΗΔΕΝΙΚΑ ΤΟΥ ΕΝΤΟΣ ΤΟΥ

$$\mathbb{C}^- := \{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(s) < 0\}$$

ΕΠΙΛΕΓΟΝΤΑΣ ΤΟΝ $D_k(s) \in \mathbb{R}[s]^{m\times m}$ ΕΤΣΙ ΩΣΤΕ ΑΥΤΟΣ ΝΑ ΕΧΕΙ ΕΠΙΘΥΜΗΤΑ ΜΗΔΕΝΙΚΑ ΕΝΤΟΣ ΤΟΥ $\mathbb{C}^- := \{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(s) < 0\}$ ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΥ ΤΟΥ ΔΥΝΑΜΙΚΟΥ ΕΛΕΓΚΤΟΥ $C(s) = X_L(s)^{-1} Y(s) \in \mathbb{R}_{pr}(s)^{m\times p}$ ΑΝΑΓΕΤΑΙ ΣΤΗΝ ΕΥΡΕΣΗ ΛΥΣΗΣ $X(s), Y(s)$ ΤΗΣ ΔΙΟΦΑΝΤΙΚΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΩΝ ΠΙΝΑΚΩΝ

$$X(s)D_R(s) + Y_L(s)N_R(s) = D_k(s)$$

Δημιουργήθηκε την 6/5/2003 9:08 PM Δημιουργήθηκε από A. Vardulakis