

Γενική λύση της

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (1.1)$$

Έστω

$$x(t) \text{ η γενική λύση της (1.1)}$$

και

$$x_\mu(t) \text{ η μερική λύση της (1.1)}$$

έτσι ώστε

$$\dot{x}_\mu(t) = Ax_\mu(t) + Bu(t) \quad (1.2)$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις (1.1) και (1.2)

$$[\dot{x}(t) - \dot{x}_\mu(t)] = A[x(t) - x_\mu(t)]$$

και άρα η

$$x_h(t) := x(t) - x_\mu(t) \quad (1.3)$$

είναι λύση της «ομογενούς»

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$

Έστω ότι η μερική λύση της

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

είναι η

$$x_\mu(t) = \Psi(t)\omega(t)$$

όπου $\omega(t): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ άγνωστη ανυσματική συνάρτηση. Τότε

$$\frac{d}{dt}x_\mu(t) = Ax_\mu(t) + Bu(t)$$

ή

$$\begin{aligned}\frac{dx_\mu(t)}{dt} &= \frac{d}{dt} \Psi(t) \omega(t) + \Psi(t) \frac{d\omega(t)}{dt} \\ &= A\Psi(t) \omega(t) + Bu(t)\end{aligned}$$

ή, λόγω της $\frac{d}{dt} \Psi(t) = A\Psi(t)$

$$\frac{dx_\mu(t)}{dt} = A\Psi(t) \omega(t) + \Psi(t) \frac{d\omega(t)}{dt} = A\Psi(t) \omega(t) + Bu(t)$$

$$\Rightarrow \frac{d\omega(t)}{dt} = \Psi(t)^{-1} Bu(t)$$

και ολοκληρώνοντας

$$\omega(t) = \int_0^t \Psi(\tau)^{-1} Bu(\tau) d\tau$$

$$\Rightarrow x_\mu(t) = \Psi(t) \omega(t) = \Psi(t) \int_0^t \Psi(\tau)^{-1} Bu(\tau) d\tau$$

$$= \int_0^t \Psi(t) \Psi(-\tau) Bu(\tau) d\tau$$

$$= \int_0^t \Psi(t - \tau) Bu(\tau) d\tau$$

$$= \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau$$

Από την (1.3)

$$x_h(t) := x(t) - x_\mu(t)$$

η γενική λύση της (1.1) είναι

$$x(t) = x_h(t) + x_\mu(t)$$

και άρα

$$x(t) = e^{At} x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau$$

Αν την χρονική στιγμή $t = t_0 \neq 0$ το άνωσμα κατάστασης είναι το $x(t_0)$ τότε από την

$$x(t_0) = e^{At_0} x(0) + \int_0^{t_0} e^{A(t_0-\tau)} Bu(\tau) d\tau \Rightarrow$$

$$x(0) = e^{-At_0} x(t_0) - e^{-At_0} \int_0^{t_0} e^{A(t_0-\tau)} Bu(\tau) d\tau =$$

$$= e^{-At_0} x(t_0) - \int_0^{t_0} e^{-A\tau} Bu(\tau) d\tau$$

$$\begin{aligned}
x(t) &= e^{At} \left\{ e^{-At_0} x(t_0) - \int_0^{t_0} e^{-A\tau} Bu(\tau) d\tau \right\} + \\
&\quad + \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau = \\
&= e^{A(t-t_0)} x(t_0) - \int_0^{t_0} e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau + \\
&\quad + \int_0^{t_0} e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau \\
&= e^{A(t-t_0)} x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau
\end{aligned}$$

έχουμε ότι η γενική λύση της $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ είναι η

$$x(t) = \underbrace{e^{A(t-t_0)} x(t_0)}_{\text{ελευθερη αποκριση καταστασης}} + \underbrace{\int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau}_{\text{δυναμικη αποκριση καταστασης}}$$

Από την

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

$$y(t) = \underbrace{Ce^{A(t-t_0)}x(t_0)}_{\text{ελευθερη αποκριση εξοδου}} + \underbrace{\int_{t_0}^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t)}_{\text{δυναμικη αποκριση εξοδου}}$$

Παράδειγμα

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$u(t) = 1, t \geq 0, \quad x(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

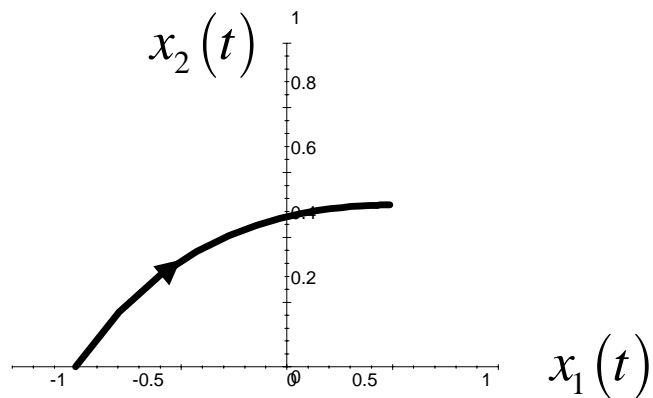
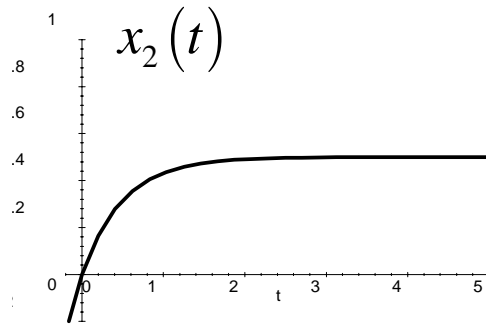
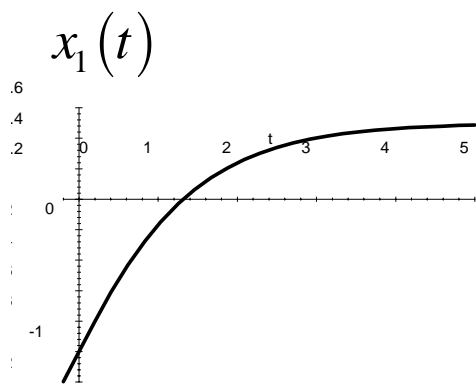
$$\Psi(t) = e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \\ &= \begin{bmatrix} e^{-t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} e^{-(t-\tau)} & e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)} \\ 0 & e^{-2(t-\tau)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} d\tau \\ &= \begin{bmatrix} -e^{-t} \\ 0 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)} \\ e^{-2(t-\tau)} \end{bmatrix} d\tau = \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} -e^{-t} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - 2e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2t} \end{bmatrix}$$

$$x_1(t) = \frac{1}{2} - 2e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t}$$

$$x_2(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2t}$$



Άσκηση. Να υπολογισθεί η λύση του συστήματος στον χώρο των καταστάσεων :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, u(t) = \sin(t)$$