

## ΙΣΟΔΥΝΑΜΕΣ ΠΕΡΙΓΡΑΦΕΣ

Έστω γραμμικό και χρονικά αμετάβλητο πολυμεταβλητό σύστημα  $S$  με μαθηματικό πρότυπο της μορφής του χώρου των καταστάσεων:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times m}, C \in \mathbb{R}^{p \times n}, D \in \mathbb{R}^{p \times m}$$

$$x(t) \in \mathcal{X} \sim \mathbb{R}^n$$

**Ορισμός** Η τετράδα πινάκων

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times m}, C \in \mathbb{R}^{p \times n}, D \in \mathbb{R}^{p \times m}$$

ονομάζεται **περιγραφή** του  $S$  της μορφής του χώρου των καταστάσεων.

Αν  $e_1, e_2, \dots, e_n$  είναι η ορθοκανονική βάση του χώρου των καταστάσεων  $\mathcal{X}$  με

$$e_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow i\text{-στη γραμμή}$$

ΤΟΤΕ

$$\begin{aligned}
 x(t) &= e_1 x_1(t) + e_2 x_2(t) + \dots + e_n x_n(t) \\
 &= [e_1 \quad e_2 \quad \dots \quad e_n] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

και το άνυσμα στήλης

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

ονομάζεται περιγραφή του ανύσματος κατάστασης του  $S$  ως προς την βάση  $e_1, e_2, \dots, e_n$  του  $\mathcal{X} \sim \mathbb{R}^n$ .

Έστω  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$  μια άλλη βάση του  $\mathcal{X} \sim \mathbb{R}^n$ . Τότε

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \bar{e}_1 \bar{x}_1(t) + \bar{e}_2 \bar{x}_2(t) + \dots + \bar{e}_n \bar{x}_n(t) \\
 &= [\bar{e}_1 \quad \bar{e}_2 \quad \dots \quad \bar{e}_n] \begin{bmatrix} \bar{x}_1(t) \\ \bar{x}_2(t) \\ \vdots \\ \bar{x}_n(t) \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

και το άνυσμα στήλης

$$\bar{x}(t) = \begin{bmatrix} \bar{x}_1(t) \\ \bar{x}_2(t) \\ \vdots \\ \bar{x}_n(t) \end{bmatrix} \in \mathcal{X} \sim \mathbb{R}^n$$

ονομάζεται περιγραφή του ανύσματος κατάστασης  
ως προς την βάση  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$  του  $\mathcal{X} \sim \mathbb{R}^n$ .

Έστω

$$e_i = [\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n] \begin{bmatrix} p_{1i} \\ p_{2i} \\ \vdots \\ p_{ni} \end{bmatrix} = \bar{E}p_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

η περιγραφή του ανύσματος  $e_i$  ως προς την βάση  
 $[\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n] =: \bar{E} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

Για  $i = 1, 2, \dots, n$

$$\begin{aligned} [e_1 \quad e_2 \quad \dots \quad e_n] &= [\bar{E}p_1 \quad \bar{E}p_2 \quad \dots \quad \bar{E}p_n] \\ &= \bar{E} [p_1 \quad p_2 \quad \dots \quad p_n] \\ &= [\bar{e}_1 \quad \bar{e}_2 \quad \dots \quad \bar{e}_n] \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} \end{bmatrix} \\ &= \bar{E}P \end{aligned}$$

Όπου  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  έχει στήλη  $i$  την περιγραφή του  $e_i$   
ως προς την βάση  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$

$$[e_1 \ e_2 \ \dots \ e_n] = E = [\bar{e}_1 \ \bar{e}_2 \ \dots \ \bar{e}_n] P = \bar{E} P$$

$$\begin{aligned} x(t) &= [e_1 \ e_2 \ \dots \ e_n] x(t) \\ &= [\bar{e}_1 \ \bar{e}_2 \ \dots \ \bar{e}_n] P x(t) \\ &= [\bar{e}_1 \ \bar{e}_2 \ \dots \ \bar{e}_n] \bar{x}(t) \end{aligned}$$

Άρα οι δύο περιγραφές συνδέονται μέσω της

$$\bar{x}(t) = P x(t)$$

Ομοίως

$$x(t) = Q \bar{x}(t)$$

Όπου  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  έχει στήλη  $i$  την περιγραφή του  $\bar{e}_i$   
ως προς την βάση  $e_1, e_2, \dots, e_n$

$$\bar{E} = EQ$$

$$\begin{aligned} \bar{x}(t) &= P x(t) = P Q \bar{x}(t) \\ \Rightarrow P Q &= I_n \Rightarrow P = Q^{-1} \end{aligned}$$

και  $P, Q$  ομαλοί πίνακες (non-singular)

Άρα αν  $x(t)$  είναι η περιγραφή του ανύσματος κατάστασης του  $S$  ως προς κάποια βάση του χώρου των καταστάσεων  $\mathcal{X} \sim \mathbb{R}^n$

και αν  $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$  και  $|R| \neq 0 \Leftrightarrow R$  είναι ομαλός τότε η εξίσωση

$$Rx(t) =: \bar{x}(t)$$

ορίζει μία νέα περιγραφή  $\bar{x}(t)$  του ανύσματος κατάστασης  $x(t)$  ως προς μια άλλη βάση του  $\mathcal{X} \sim \mathbb{R}^n$ .

Έστω η περιγραφή του  $S$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times m}, C \in \mathbb{R}^{p \times n}, D \in \mathbb{R}^{p \times m}$$

$$x(t) \in \mathcal{X} \sim \mathbb{R}^n$$

$$Rx(t) =: \bar{x}(t)$$

$$x(t) = R^{-1}\bar{x}(t)$$

$$\dot{x}(t) = R^{-1}\dot{\bar{x}}(t)$$

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= R^{-1}\dot{\bar{x}}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ &= AR^{-1}\bar{x}(t) + Bu(t) \\ \Rightarrow \dot{\bar{x}}(t) &= RAR^{-1}\bar{x}(t) + RBu(t)\end{aligned}$$

Αν

$$\bar{A} := RAR^{-1}, \quad \bar{B} := RB, \quad \bar{C} := CR^{-1}, \quad \bar{D} := D$$

τότε έχουμε την περιγραφή του  $S$

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}}(t) &= \bar{A}\bar{x}(t) + \bar{B}u(t) \\ y(t) &= \bar{C}\bar{x}(t) + \bar{D}u(t)\end{aligned}$$

και οι περιγραφές

$(A, B, C, D), (\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D})$  ονομάζονται **όμοιες**  
(similar) περιγραφές του  $S$

**Παράδειγμα**

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

έστω

$$\bar{x}(t) = Rx(t)$$

$$R = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad |R| = 3 \neq 0$$

$$x(t) = R^{-1}\bar{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{A} := RAR^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{B} := RB = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{C} := CR^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{D} := D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Οι δύο περιγραφές

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times m}, C \in \mathbb{R}^{p \times n}, D \in \mathbb{R}^{p \times m}$$

και

$$\bar{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \bar{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}, \bar{C} \in \mathbb{R}^{p \times n}, \bar{D} \in \mathbb{R}^{p \times m}$$

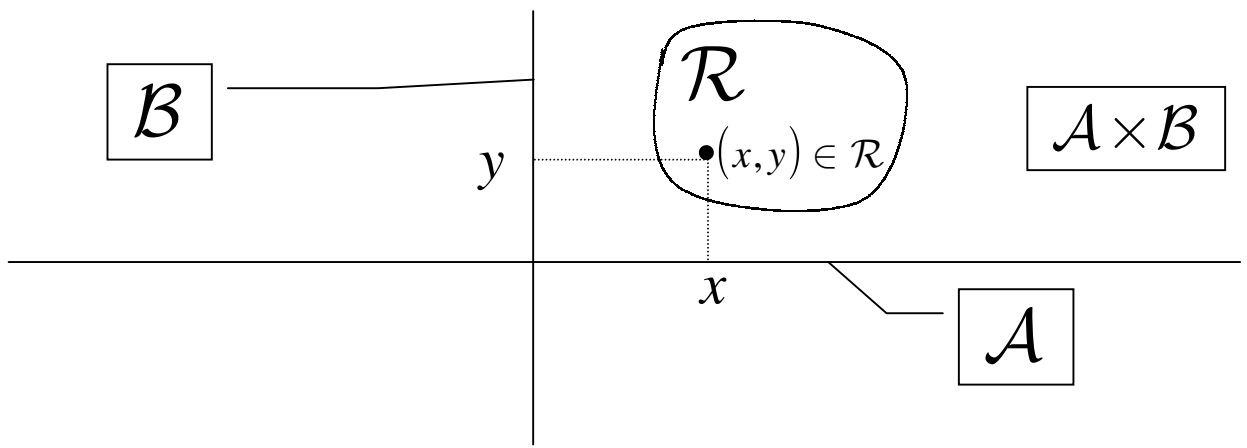
είναι **όμοιες**.

## ΣΧΕΣΕΙΣ ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑΣ (Equivalence relations)

**Ορισμός.**

**Σχέση.** Έστω  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  δύο αυθαίρετα σύνολα.

Ένα υποσύνολο  $\mathcal{R}$  του καρτεσιανού γινομένου  $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$  ονομάζεται **σχέση από το  $\mathcal{A}$  στο  $\mathcal{B}$** .



Αν  $\mathcal{A} = \mathcal{B}$  τότε το  $\mathcal{R}$  ονομάζεται **σχέση επάνω στο  $\mathcal{A}$** .

Αν  $x \in \mathcal{A}$ ,  $y \in \mathcal{B}$  και  $(x, y) \in \mathcal{R}$  τότε λέμε ότι:

το  $x$  **σχετίζεται με το**  $y$  μέσω του  $\mathcal{R}$  ή ότι

$\mathcal{R}$  **είναι η σχέση μεταξύ**  $x \in \mathcal{A}$  **και**  $y \in \mathcal{B}$  ή ότι

το  $x \in \mathcal{A}$  **είναι ισοδύναμο με το**  $y \in \mathcal{B}$  **μέσω της**  $\mathcal{R}$

Το **πεδίο ορισμού** του  $\mathcal{R}$  είναι το σύνολο

$$\{x \in \mathcal{A} \mid (x, y) \in \mathcal{R}\}$$



Το πεδίο τιμών του  $\mathcal{R}$  είναι το σύνολο

$$\{y \in \mathcal{B} \mid (x, y) \in \mathcal{R}\} =: \mathcal{R}x$$

Μια **σχέση**  $\mathcal{R}$  **επάνω σε ένα σύνολο**  $\mathcal{A}$  δηλαδή ένα υποσύνολο  $\mathcal{R}$  του  $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$  ονομάζεται **σχέση ισοδυναμίας επάνω στο**  $\mathcal{A}$  αν

- $(x, x) \in \mathcal{R}$  για κάθε  $x \in \mathcal{A}$

(διάβαζε: **κάθε**  $x \in \mathcal{A}$  **είναι ισοδύναμο με τον «εαυτό» του**) (ανακλαστική ιδιότητα)

- $(x, y) \in \mathcal{R} \Rightarrow (y, x) \in \mathcal{R}$

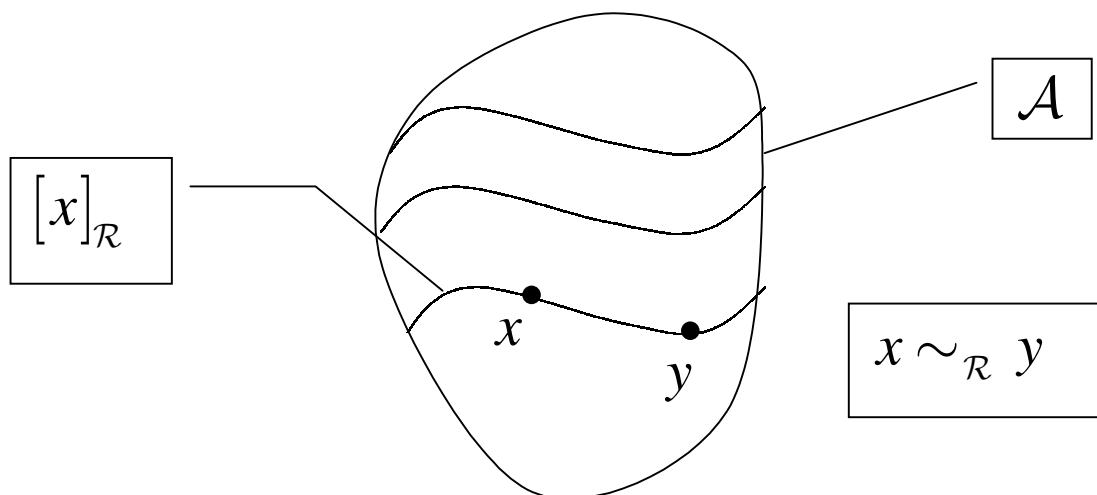
(διάβαζε: **το**  $x$  **είναι ισοδύναμο με το**  $y$  **συνεπάγεται ότι το**  $y$  **είναι ισοδύναμο με το**  $x$ ) (συμμετρική ιδιότητα)

- $(x, y) \in \mathcal{R}$  και  $(y, z) \in \mathcal{R} \Rightarrow (x, z) \in \mathcal{R}$

(διάβαζε: **το**  $x$  **είναι ισοδύναμο με το**  $y$ , **και το**  $y$  **είναι ισοδύναμο με το**  $z$  **συνεπάγεται ότι το**  $x$  **είναι ισοδύναμο με το**  $z$ ) (μεταβατική ιδιότητα)

Πολλές φορές αντί  $(x, y) \in \mathcal{R}$  γράφουμε  $x \sim_{\mathcal{R}} y$

Αν  $\mathcal{R}$  είναι σχέση ισοδυναμίας επάνω στο  $\mathcal{A}$  τότε η  $\mathcal{R}$  διαμελίζει το  $\mathcal{A}$  σε **ξεχωριστές κλάσεις ή  $\mathcal{R}$ -κλάσεις ισοδυναμίας**



Για κάθε  $x \in \mathcal{A}$  η  $\mathcal{R}$ - κλάση ισοδυναμίας του  $x$  είναι το σύνολο

$$[x]_{\mathcal{R}} = \{x \in \mathcal{A} \mid (x, y) \in \mathcal{R}\} = \{x \in \mathcal{A} \mid x \sim_{\mathcal{R}} y\} \subset \mathcal{A}$$

**ΔΗΛΑΔΗ**

Αν  $x \in \mathcal{A}$ , τότε η  $\mathcal{R}$ - κλάση ισοδυναμίας του  $x$  στην οποία το  $x$  ανήκει αποτελείται από όλα τα στοιχεία  $y \in \mathcal{A}$  με τα οποία το  $x$  είναι ισοδύναμο μέσω της  $\mathcal{R}$ .

Για κάθε σχέση ισοδυναμίας  $\mathcal{R}$  επάνω σε ένα σύνολο  $\mathcal{A}$  είναι:

$$[x]_{\mathcal{R}} \equiv [y]_{\mathcal{R}} \text{ αν και μόνο αν } x \sim_{\mathcal{R}} y$$

και

$$[x]_{\mathcal{R}} \cap [y]_{\mathcal{R}} = \emptyset \text{ αν και μόνο αν } x \not\sim_{\mathcal{R}} y$$

## ΤΟ ΠΗΛΙΚΟ ΤΟΥ $\mathcal{A}$ ΔΙΑ $\mathcal{R}$

Συμβολίζεται με  $\mathcal{A}/\mathcal{R}$  και είναι το σύνολο όλων των κλάσεων ισοδυναμίας  $[x]_{\mathcal{R}}$  όταν τα  $x$  διατρέχει όλες τις τιμές στο  $\mathcal{A}$

## ΑΝΑΛΛΟΙΩΤΕΣ της $\mathcal{R}$

Αν  $\mathcal{T}$  κάποιο σύνολο τότε μια απεικόνιση  $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{T}$  ονομάζεται **αναλλοίωτη** της  $\mathcal{R}$  αν

$$x \sim_{\mathcal{R}} y \Rightarrow f(x) = f(y)$$

(διάβαζε: η απεικόνιση  $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{T}$  είναι **αναλλοίωτη** της  $\mathcal{R}$  αν όλα τα  $y$  στην κλάση ισοδυναμίας  $[x]_{\mathcal{R}}$  έχουν την ίδια εικόνα κάτω από την  $f$ , αν δηλαδή  $f(x) = f(y)$ )

## ΠΛΗΡΕΙΣ ΑΝΑΛΛΟΙΩΤΕΣ της $\mathcal{R}$

Αν  $\mathcal{T}$  κάποιο σύνολο τότε μια απεικόνιση  $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{T}$  ονομάζεται **πλήρης αναλλοίωτη** της  $\mathcal{R}$  αν

$$x \sim_{\mathcal{R}} y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$$

(παρατηρείστε το «διπλό» βέλος)

Θεωρείστε το σύνολο

$\mathcal{A} = \mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R}^{n \times m} \times \mathbb{R}^{p \times n} \times \mathbb{R}^{p \times m}$ . Κάθε σημείο

$x \in \mathcal{A}$  είναι μια τετράδα πινάκων

$x = (A \in \mathbb{R}^{n \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times m}, C \in \mathbb{R}^{p \times n}, D \in \mathbb{R}^{p \times m})$  την

οποία ταυτίζουμε με μια περιγραφή  $S$  ενός πολυμεταβλητού συστήματος της μορφής του χώρου των καταστάσεων.

**Θεώρημα** Η ομοιότητα περιγραφών μορφής του χώρου των καταστάσεων αποτελεί σχέση ισοδυναμίας επάνω στο σύνολο

$$\mathcal{A} = \mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R}^{n \times m} \times \mathbb{R}^{p \times n} \times \mathbb{R}^{p \times m}$$

των περιγραφών συστημάτων

$$S = (A \in \mathbb{R}^{n \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times m}, C \in \mathbb{R}^{p \times n}, D \in \mathbb{R}^{p \times m}) \subset \mathcal{A}$$

Η απόδειξη **άσκηση**.

Αποδείξτε τις τρεις ιδιότητες της σχέσης  
ισοδυναμίας.

Ορίστε τις κλάσεις ισοδυναμίας.

Αποδείξτε ότι οι ιδιοτιμές του πίνακα  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$   
αποτελούν **αναλλοίωτες** κάθε κλάσης  
ισοδυναμίας.

## Κανονικές απεικονίσεις και κανονικές μορφές

Μια απεικόνιση

$$g : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$$

ονομάζεται **κανονική απεικόνιση** για μια σχέση  
ισοδυναμίας  $\mathcal{R}$  επάνω στο σύνολο  $\mathcal{A}$  όταν

1.  $x \sim_{\mathcal{R}} g(x) \quad \forall x \in \mathcal{A}$
2.  $x \sim_{\mathcal{R}} y \Leftrightarrow g(x) = g(y)$

Αν  $\mathcal{R}$  είναι μια σχέση ισοδυναμίας επάνω σε ένα  
σύνολο  $\mathcal{A}$  και  $g : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  είναι μια **κανονική  
απεικόνιση**, τότε την εικόνα  $g(x) \in \mathcal{A}$  ενός  
στοιχείου  $x \in \mathcal{A}$  ονομάζουμε **κανονική μορφή** του  
 $x \in \mathcal{A}$ . Το σύνολο των εικόνων  $g(x)$  για κάθε  
 $x \in \mathcal{A}$ , τον οποίο συμβολίζουμε με  $\text{Im } g$ ,  
ονομάζουμε **σύνολο κανονικών μορφών** της  $\mathcal{R}$   
επάνω στο σύνολο  $\mathcal{A}$  ή σύνολο  **$\mathcal{R}$ -κανονικών  
μορφών**.

## Άσκηση

Αποδείξτε ότι η μορφή Jordan  $J \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ενός πίνακα  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  αποτελεί **κανονική μορφή** της **ομοιότητας** περιγραφών συστημάτων της μορφής του χώρου των καταστάσεων.

(για τον ορισμό της μορφής Jordan  $J \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ενός πίνακα  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  βλέπε Κεφάλαιο 8 , Σημειώσεις Μαθηματικής Θεωρίας Συστημάτων στο <http://control.math.auth.gr/>)