ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ ΚΑΙ ΠΟΛΥΩΝΙΜΙΚΟΙ ΠΙΝΑΚΕΣ

Έστω $\mathbb{R}[s]$ το σύνολο των πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές και ανεξάρτητη μεταβλητή το s.

Το $\mathbb{R}[s]$ εφοδιασμένο με τις δυαδικές πράξεις

Πρόσθεση $+:\mathbb{R}[s]\times\mathbb{R}[s]\to\mathbb{R}[s]$

Πολλαπλασιασμός $\cdot:\mathbb{R}[s]\times\mathbb{R}[s]\to\mathbb{R}[s]$

Και

ένα ουδέτερο στοιχείο για την πρόσθεση το οποίο συμβολίζουμε με 0

ένα ουδέτερο στοιχείο για τον πολλαπλασιασμό το οποίο συμβολίζουμε με 1

έτσι ώστε

Η Πρόσθεση να είναι

Επιμεριστική:

$$(a(s)+b(s))+c(s)=a(s)+(b(s)+c(s))$$

$$\forall a(s),b(s),c(s)\in\mathbb{R}[s]$$

Εναλλακτική:

$$a(s)+b(s)=b(s)+a(s)$$

$$\forall a(s),b(s)\in\mathbb{R}[s]$$

Για το ουδέτερο στοιχείο

0: $a(s)+0=a(s)\quad \forall a(s)\in\mathbb{R}[s]$

$\exists$ αντίστροφο στοιχείο: $\forall a(s)$, $\exists$ στοιχείο

$(-a(s))$: $\quad a(s)+(-a(s))=0$

Ο πολλαπλασιασμός είναι

Επιμεριστικός:

$$\left(a(s)\cdot b(s)\right)\cdot c(s)=a(s)\cdot\left(b(s)\cdot c(s)\right)$$

ΟΧΙ κατ'ανάγκη εναλλακτικός

Για το ουδέτρο στοιχείο 1:

$$a(s)\cdot 1=1\cdot a(s)=a(s),\quad \forall a(s)\in\mathbb{R}[s]$$

$a\in\mathbb{R}[s],\ \ a\neq 0 \not\Rightarrow \text{το } a^{-1}$ υπάρχει

είναι δακτύλιος (ring).

Το $\mathbb{R}[s]$ είναι Ευκλείδιος δακτύλιος (Eucledian ring)

Δηλαδή

Υπάρχει μια συνάρτηση

$\partial:\mathbb{R}[s]\rightarrow\mathbb{N}$ $\quad$ ($\mathbb{N}=$ μη αρνητικοί ακέραιοι 0,1,2,3,)

τέτοια ώστε για κάθε $a(s)\in\mathbb{R}[s],\ \ a(s)\neq 0$

γράφουμε

$$\partial a(s)=\deg a(s)\in\mathbb{N}$$

και το ονομάζουμε **βαθμό** (degree) του $a(s)$ και

1.

$$\text{για } a(s),b(s)\in\mathbb{R}[s],\ \ a(s)b(s)\neq 0$$

$$\deg\left[a(s)b(s)\right]\geq\deg a(s)$$

2.

$$\text{για καθε } a(s),b(s),\ \ b(s)\neq 0,$$

υπάρχουν δύο στοιχεία $q(s),r(s)\in\mathbb{R}[s]$

τέτοια ώστε

$$a(s)=b(s)q(s)+r(s)$$

και ή $r(s)=0$ ή $\deg r(s)<\deg b(s)$.

Ένας $q \times r$ πολυωνυμικός πίνακας $A(s)$ είναι ένας $q \times r$ πίνακας τα στοιχεία του οποίου είναι πολυώνυμα στο $\mathbb{R}[s]$.

Π.χ.

$$A(s)=\begin{bmatrix} -2s^2+3s+1 & s-2 \\ 6s^3+5s & 3s^2+3s \\ s^4-3s^2+2s & 4s^3+2s^2 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} s^4+\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 6 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} s^3+\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} s^2+\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} s+\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\in \mathbb{R}[s]^{3\times 2}$$

Το σύνολο των $p \times q$ πολυωνυμικών πινάκων συμβολίζουμε με $\mathbb{R}[s]^{p\times q}$.

Ορισμός. Τάξη ενός πολυωνυμικού πίνακα $T(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times q}$ ονομάζεται το $p \times q$

Ένας πολυωνυμικός πίνακας $T(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times p}$ ονομάζεται $\mathbb{R}[s]-$**unimodular** ή απλώς **unimodular** αν υπάρχει πολυωνυμικός πίνακας $\widehat{T}(s)\in\mathbb{R}[s]^{p\times p}$ τέτοιος ώστε $T(s)\widehat{T}(s)=I_p \Leftrightarrow \det T(s)=c\in\mathbb{R},\ c\neq 0$.

Παράδειγμα

$$p=2,\ \ T(s)=\begin{bmatrix} s+2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\in\mathbb{R}[s]^{2\times 2},$$

$$\det T(s)=-3$$

είναι unimodular.

Ορισμός Βαθμός (degree) ενός πολυωνυμικού πίνακα $T(s)\in\mathbb{R}[s]^{p\times q}$, $\deg T(s)$, ορίζεται ο μέγιστος βαθμός όλων των μεγίστης τάξης (μη μηδενικών) υπό οριζουσών του $T(s)$.

Παράδειγμα

$$T(s)=\begin{bmatrix} (s+1)^2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix}, m_{12}(s)=(s+1)^2, m_{13}(s)=(s+1)^3$$

$$m_{23}(s)=s+1,\ \ \deg T(s)=\max\{2,3,1\}=3$$

Πόρισμα

Αν $p=q$ και $\det T(s)\neq 0$,

$$\deg T(s) = \deg\left[\det T(s)\right]$$

Παράδειγμα

$$T(s) = \begin{bmatrix} s+2 & 3s^2+1 \\ 2 & s^3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}[s]^{2\times 2}$$

$$\deg T(s) = \deg\left[\det T(s)\right]$$

$$= \deg\left(\left(s+2\right)s^3 - 2\left(3s^2+1\right)\right) = 3$$

Πόρισμα

$T(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times p}$ είναι unimodular ανν $\deg T(s) = 0$

Πόρισμα

Αν $p=1$ ή $q=1$ αν δηλαδή ο πίνακας είναι πολυωνυμικό άνυσμα γραμμής ή στήλης

$$t(s) = \begin{bmatrix} t_1(s) & t_2(s) & \dots & t_q(s) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}[s]^{1\times q}$$

$$\deg t(s) = \max_{i=1,2,\dots,q} \left\{t_i(s)\right\}$$

$$t(s) = \begin{bmatrix} t_1(s) \\ t_2(s) \\ \vdots \\ t_p(s) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}[s]^{p}$$

$$\deg t(s) = \max_{i=1,2,\dots,p} \left\{t_i(s)\right\}$$

Παράδειγμα

$$t(s)=\begin{bmatrix}3s^2+4s+2\\ s+2\\ s^3\\ 4s\end{bmatrix}\in\mathbb{R}[s]^4,\quad \deg t(s)=3$$

Το σώμα των πραγματικών ρητών συναρτήσεων

$$\mathbb{R}(s)=\left\{t(s)\,\middle|\,t(s)=\frac{n(s)}{d(s)},n(s),d(s)\in\mathbb{R}[s],d(s)\not\equiv 0\right\}$$

Το σύνολο των διατεταγμένων - p-άδων ρητών συναρτήσεων $\mathbb{R}(s)^p$:

$$\mathbb{R}(s)^p=\left\{t(s)\,\middle|\,t(s)=\begin{bmatrix}t_1(s)\\ t_2(s)\\ \vdots\\ t_p(s)\end{bmatrix},t_i(s)\in\mathbb{R}(s)\right\}$$

αποτελεί γραμμικό ανυσματικό χώρο

με πρόσθεση δύο στοιχείων:

$$t(s)=\begin{bmatrix} t_1(s) \\ t_2(s) \\ \vdots \\ t_p(s) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}(s)^p, u(s)=\begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \\ \vdots \\ u_p(s) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}(s)^p$$

την

$$t(s)+u(s)=\begin{bmatrix} t_1(s)+u_p(s) \\ t_2(s)+u_p(s) \\ \vdots \\ t_p(s)+u_p(s) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}(s)^p$$

και πολλαπλασιασμό ενός στοιχείου:

$$t(s)=\begin{bmatrix} t_1(s) \\ t_2(s) \\ \vdots \\ t_p(s) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}(s)^p$$

με ένα στοιχείο $q(s) \in \mathbb{R}(s)$

την

$$q(s)t(s)=\begin{bmatrix} q(s)t_1(s) \\ q(s)t_2(s) \\ \vdots \\ q(s)t_p(s) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}(s)^p$$

$\mathbb{R}(s)^p$ ονομάζεται **πραγματικός ανυσματικός χώρος ρητών συναρτήσεων**. (***real rational vector space***)

Τα στοιχεία $t(s) \in \mathbb{R}(s)^p$ ονομάζονται ***ανύσματα πραγματικών ρητών συναρτήσεων.***

Γραμμική εξάρτηση k στοιχείων

$t_i(s) \in \mathbb{R}(s)^p, \quad i = 1, 2, \ldots, k$

k στοιχεία $t_i(s) \in \mathbb{R}(s)^p, \quad i = 1, 2, \ldots, k$ είναι $\mathbb{R}(s)-$γραμμικώς εξηρτημένα αν υπάρχουν k ρητές συναρτήσεις $a_1(s), a_2(s), \ldots, a_k(s) \in \mathbb{R}(s)$ (με $a_i(s) \not\equiv 0$ για τουλάχιστο ένα $i = 1, 2, \ldots, k$) έτσι ώστε

$$a_1(s)t_1(s) + a_2(s)t_2(s) + \ldots + a_k(s)t_k(s) = 0 \in \mathbb{R}(s)^p \tag{1.1}$$

Αντιθέτως αν, η (1.1) συνεπάγεται ότι

$$a_i(s) = 0, \quad \forall i = 1, 2, \ldots, k$$

τότε τα k στοιχεία $t_i(s) \in \mathbb{R}(s)^p, \quad i = 1, 2, \ldots, k$ είναι $\mathbb{R}(s)-$γραμμικώς ανεξάρτητα.

RANK ενός πίνακα ρητών συναρτήσεων.

Με $\mathbb{R}(s)^{p \times m}$ συμβολίζουμε το σύνολο των $p \times m$ πινάκων ρητών συναρτήσεων.

Αν $T(s)\in\mathbb{R}(s)^{p\times m}$ τότε ο πίνακας $T(s)$ ονομάζεται ***πίνακας πραγματικών ρητών συναρτήσεων.***

Το **rank** ενός $T(s)\in\mathbb{R}(s)^{p\times m}$ επάνω από το σώμα $\mathbb{R}(s)$ το οποίο συμβολίζουμε

$$rank_{\mathbb{R}(s)}T(s)$$

είναι ο αριθμός των γραμμικώς $\mathbb{R}(s)-$ανεξαρτήτων γραμμών ή στηλών του $T(s)$.

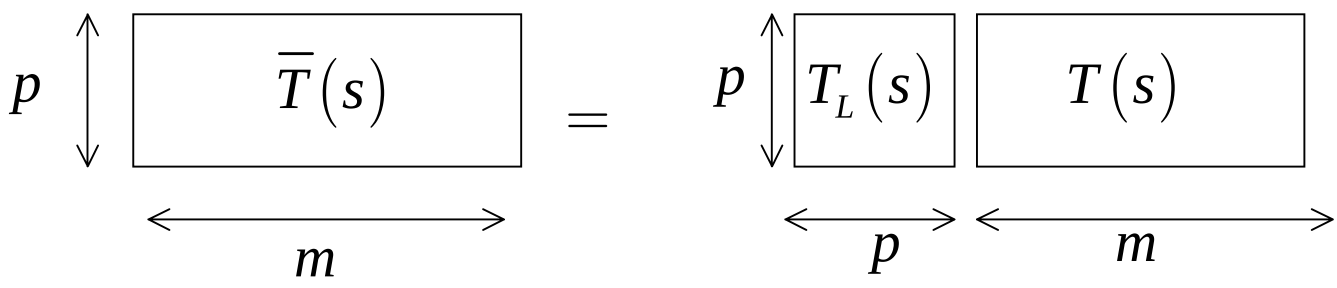
Πρόταση

Έστω

$$T(s)\in\mathbb{R}[s]^{p\times m}, \quad rank_{\mathbb{R}(s)}T(s)=p$$

$$T_L(s)\in\mathbb{R}[s]^{p\times p}, \quad rank_{\mathbb{R}(s)}T(s)=p \text{ και}$$

$$\overline{T}(s):=T_L(s)T(s)\in\mathbb{R}[s]^{p\times m}$$



$$\deg\overline{T}(s)=\deg T_L(s)+\deg T(s)$$

$$\deg\overline{T}(s)\geq\deg T(s)$$

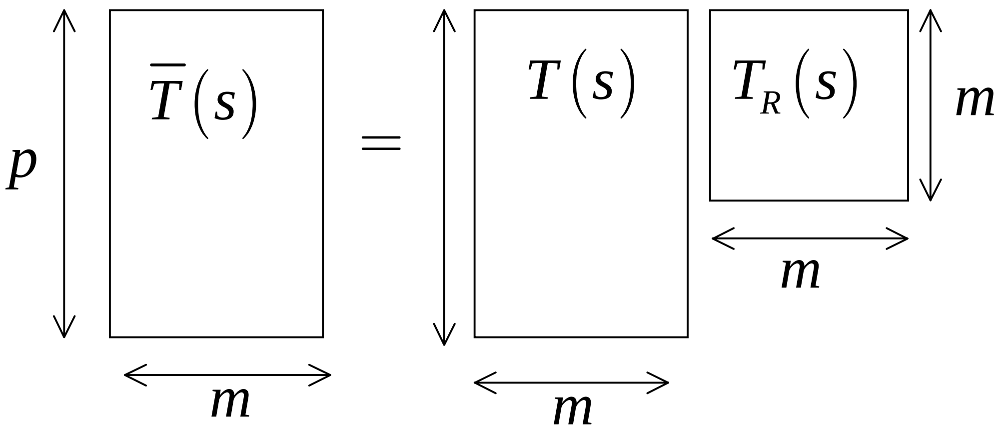
και $\deg\overline{T}(s)=\deg T(s)$ ανν $T_L(s)\in\mathbb{R}[s]^{p\times p}$ είναι unimodular.

Επίσης αν

$$T(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times m}, \quad rank_{\mathbb{R}(s)} T(s) = m$$

$$T_R(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times p}, \quad rank_{\mathbb{R}(s)} T(s) = m$$

$$\overline{T}(s) := T(s) T_R(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times m}$$



$$\deg \overline{T}(s) = \deg T(s) + \deg T_R(s)$$

$$\deg \overline{T}(s) \geq \deg T(s)$$

και $\deg \overline{T}(s) = \deg T(s)$ αν και μόνο αν

$T_R(s) \in \mathbb{R}[s]^{m\times m}$ είναι unimodular.

‘Εστω

$$T(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times m}, \quad rank_{\mathbb{R}(s)} T(s) = \min(p,m)$$

και

$$T(s) = \begin{bmatrix} \overline{t}_1(s) \\ \overline{t}_2(s) \\ \vdots \\ \overline{t}_p(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1(s) & t_2(s) & \dots & t_m(s) \end{bmatrix}$$

$\overline{t}_i(s) \in \mathbb{R}[s]^{1\times m}, \quad i = 1,2,\dots,p$ οι γραμμές του $T(s)$

$t_j(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times 1}, \quad j = 1,2,\dots,m$ οι στήλες του $T(s)$

Ορισμός

Η πολυπλοκότητα των γραμμών $c_r(T)$(των στηλών $c_c(T)$) του $T(s)$ (*column (row) complexity*) είναι το άθροισμα των βαθμών των γραμμών (στηλών) του $T(s)$

$$c_r(T) = \sum_{i=1}^{p} \deg \overline{t}_i(s) \quad \left(c_c(T) = \sum_{j=1}^{m} \deg t_j(s) \right)$$

Αν $p \le m \quad (p \ge m)$, και εφόσον κάθε οριζουσα $p-$τάξεως ($m-$τάξεως) είναι αλγεβρικό άθροισμα γινομένων πολυωνύμων, ένα από κάθε στήλη (γραμμή) του $T(s)$, ο μέγιστος βαθμός μεταξύ των βαθμών όλων των οριζουσών τάξης p (m) του $T(s)$, δηλαδή ο βαθμός $\deg T(s)$ του $T(s)$ δεν μπορεί να υπερβαίνει την πολυπλοκότητα των γραμμών $c_r(T)$(των στηλών $c_c(T)$) του $T(s)$.

Δηλαδή είναι πάντα

$$c_r(T) \geq \deg T(s) \quad \left(c_c(T) \geq \deg T(s)\right)$$

Παράδειγμα

$$T(s) = \begin{bmatrix} (s+1)^2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix}, m_{12}(s) = (s+1)^2, m_{13}(s) = (s+1)^3$$

$$m_{23}(s) = s+1, \quad \deg T(s) = \max\{2,3,1\} = 3$$

$$c_c = 2+1 = 3 = \deg T(s)$$

$$T(s) = \begin{bmatrix} (s+1)^2 & s^2 \\ 1 & 1 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix}, \deg T(s) = \max\{1,3,1\} = 3$$

$$c_c = 4 > \deg T(s) = 3$$

ΚΑΝΟΝΙΚΟΤΗΤΑ ΓΡΑΜΜΩΝ (ΣΤΗΛΩΝ) ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΟΥ ΠΙΝΑΚΑ (column (row) properness)

‘Εστω

$$T(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times m}, \quad rank_{\mathbb{R}(s)} T(s) = \min(p,m)$$

και

$$T(s) = \begin{bmatrix} \overline{t}_1(s) \\ \overline{t}_2(s) \\ \vdots \\ \overline{t}_p(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1(s) & t_2(s) & \dots & t_m(s) \end{bmatrix}$$

$\overline{t}_i(s) \in \mathbb{R}[s]^{1\times m}, \quad i = 1,2,\dots,p$ οι γραμμές του $T(s)$

$t_j(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times 1}, \quad j = 1,2,\dots,m$ οι στήλες του $T(s)$

Έστω

$$r_i = \deg \overline{t}_i(s), \quad i = 1,2,..,p$$

$$q_j = \deg t_j(s), \quad j = 1,2,\dots,m$$

έτσι ώστε

$$\overline{t}_i(s) = \sum_{k=0}^{r_i} \overline{t}_{ik}^{\,T} s^k, \quad i = 1,2,\dots,p$$

$$t_j(s) \sum_{k=0}^{q_j} t_{jk} s^k, \quad \mathrm{j} = 1,2,\dots,m$$

όπου

$$\overline{t}_{ik}^{\tau} \in \mathbb{R}^{1\times m},\ i=1,2,\ldots,p \quad k=0,1,2,\ldots,r_i$$
$$t_{jk} \in \mathbb{R}^{p\times 1},\ j=1,2,\ldots,m \quad k=0,1,2,\ldots,q_j$$

και ο $T(s)$ να γράφεται ώς

$$T(s)=diag\begin{bmatrix} s^{r_1} & s^{r_2} & \ldots & s^{r_p}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\overline{t}_{1r_1}^{\tau}\\ \overline{t}_{1r_2}^{\tau}\\ \vdots \\ \overline{t}_{1r_p}^{\tau}\end{bmatrix}+T_r(s)$$

ή ως

$$T(s)=\begin{bmatrix} t_{1q_1} & t_{2q_2} & \ldots & t_{mq_m}\end{bmatrix} diag\begin{bmatrix} s^{q_1} & s^{q_2} & \ldots & s^{q_m}\end{bmatrix}+T_c(s)$$

Ορισμός

Ο πίνακας

$$\begin{bmatrix}\overline{t}_{1r_1}^{\tau}\\ \overline{t}_{1r_2}^{\tau}\\ \vdots \\ \overline{t}_{1r_p}^{\tau}\end{bmatrix}=:\left[T(s)\right]_r^h \in \mathbb{R}^{p\times m}$$

ονομάζεται ***μεγιστοβάθμιος ως προς τις γραμμές πίνακας συντελεστής*** του $T(s)$. (**highest row degree coefficient matrix**)

Ο πίνακας

$$\begin{bmatrix} t_{1q_1} & t_{2q_2} & \ldots & t_{mq_m}\end{bmatrix}=:\left[T(s)\right]_c^h \in \mathbb{R}^{p\times m}$$

ονομάζεται ***μεγιστοβάθμιος ως προς τις στήλες πίνακας συντελεστής*** του $T(s)$. (**highest column degree coefficient matrix**)

Παράδειγμα

$$T(s)=\begin{bmatrix} 2s^2+3s+1 & 1 \\ 5s+2 & s^2 \\ 5s^2+2s & -s^3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s^2 & 0 \\ 0 & s^3 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 2s+1 & 1 \\ s+2 & s^2 \\ 2s & 0 \end{bmatrix}$$

$$[T(s)]_c^h=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$T(s)=\begin{bmatrix} 2s^2+3s+1 & 1 \\ 5s+2 & s^2 \\ 5s^2+2s & -s^3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} s^2 & 0 & 0 \\ 0 & s^2 & 0 \\ 0 & 0 & s^3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix} 3s+1 & 1 \\ 5s+2 & 0 \\ 5s^2+2s & 0 \end{bmatrix}$$

$$[T(s)]_c^h=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Ορισμός. $T(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times m}$ ονομάζεται ***κανονικός ως προς τις γραμμές του*** (***κανονικός ως προς τις στήλες του***) (column (row) proper) αν

$$rank_{\mathbb{R}}\left[T(s)\right]_r^h = \min\{p,m\}$$

$$\left(rank_{\mathbb{R}}\left[T(s)\right]_c^h = \min\{p,m\}\right)$$

Παράδειγμα

$$T(s) = \begin{bmatrix} (s+1)^2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix}, rank_{\mathbb{R}}\left[T(s)\right]_r^h = rank_{\mathbb{R}}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 2$$

είναι row proper

$$rank_{\mathbb{R}}\left[T(s)\right]_c^h = rank_{\mathbb{R}}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 2$$ είναι column proper.

$$T(s) = \begin{bmatrix} 2s^2+3s+1 & s^2+2 & s \\ 4s^3 & s^3+4s & 3s^2+3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}[s]^{2\times 3}$$

$$\left[T(s)\right]_r^h = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \ \left[T(s)\right]_c^h = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

είναι row proper και **δεν είναι column proper**

$$T(s) = \begin{bmatrix} s+1 & 3s^2+2 \\ 1 & 0 \\ 2 & -s \end{bmatrix}$$

$$[T(s)]_r^h = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad [T(s)]_c^h = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

είναι row proper και δεν είναι column proper.

Πρόταση

‘Εστω $T(s) \in \mathbb{R}(s)^{p \times m}, \quad rank_{\mathbb{R}(s)} T(s) = p(=m)$.

Ο $T(s)$ είναι row (column) proper αν και μόνο αν η πολυπλοκότητα γραμμών $c_r(T)$ (στηλών $c_c(T)$) ισούται με τον βαθμό $\deg T(s)$

Δηλαδή

$T(s)$ είναι row proper $\Leftrightarrow c_r(T) = \deg T(s)$

$T(s)$ είναι column proper $\Leftrightarrow c_c(T) = \deg T(s)$