ΑΝΑΓΩΓΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΟΥ ΠΙΝΑΚΑ ΣΕ ROW ή COLUMN PROPER

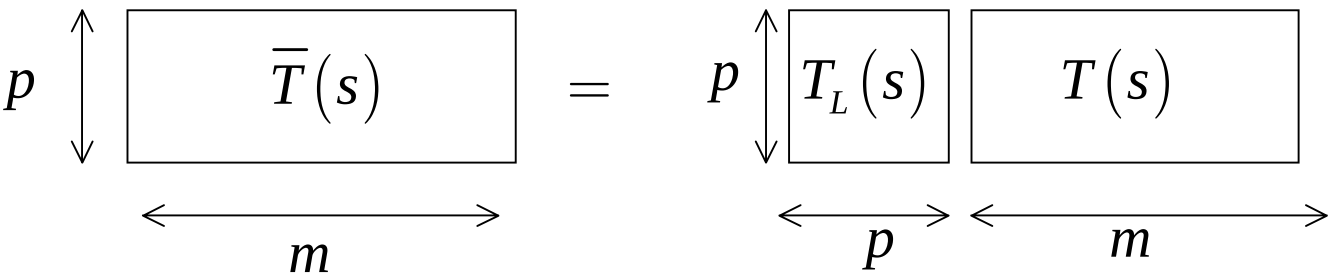
Πρότασης

Έστω $T(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times m}, \quad rank_{\mathbb{R}(s)} T(s) = p \ (=m)$.

Τότε υπάρχει unimodular $T_L(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times p}$

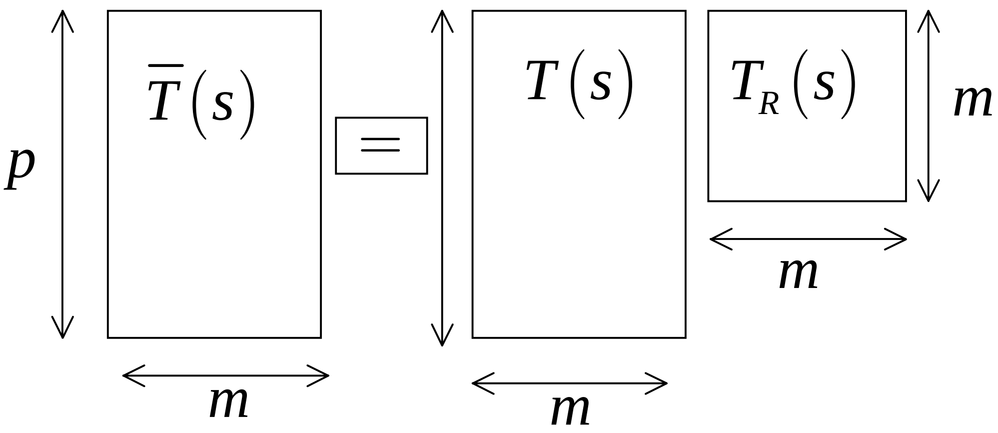
($T_R(s) \in \mathbb{R}[s]^{m\times m}$) τέτοιος ώστε

$$\overline{T}(s) := T_L(s) T(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times m}$$



είναι row proper.

$$\overline{T}(s) := T(s) T_R(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times m}$$



είναι column proper.

Απόδειξη (για την αναγωγή σε row proper)

Αν ο $T(s)$ ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ row proper τότε

$$c_r(T) > \deg T(s)$$

Επιλέγουμε τον $T_L(s)$ έτσι ώστε η row complexity του

$$\overline{T}(s) := T_L(s)T(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times m}$$

να ελαττωθεί:

$$c_r\left(\overline{T}\right) = c_r\left(T_L(s)T(s)\right) < c_r(T)$$

μέχρι να γίνει ίση με τον βαθμό

$$\deg \overline{T}(s) = \deg T_L(s)T(s) = \deg T(s)$$

(ο οποίος παραμένει αναλλοίωτος λόγω του ότι $T_L(s)$ είναι unimodular)

Όταν

$$c_r\left(\overline{T}\right) = \deg \overline{T}(s)$$

ο $\overline{T}(s)$ θα είναι row proper.

Απόδειξη

Έστω

$$a^{\tau} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_p \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times p} : \ a^{\tau}\left[T(s)\right]_r^h = 0$$

Έστω

$$r_i = \deg t_i^{\tau}(s), \quad r_0 = \max\{r_i\},$$

και

$$a(s)^{\tau} = \begin{bmatrix} a_1 s^{r_0 - r_1} & a_2 s^{r_0 - r_2} & \dots & a_{i_0} & \dots & a_2 s^{r_0 - r_p} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}[s]^{1\times p}$$

$$\deg a(s)^{\tau} < r_0$$

$$\widehat{t_{i_o}}(s) := a(s)^{\tau} T(s) = a(s)^{\tau}\left[diag\begin{bmatrix} s^{r_1} & \dots & s^{r_p} \end{bmatrix} [T(s)]_r^h + T_r(s) \right]$$

$$= s^{r_0} a^{\tau} [T(s)]_r^h + a(s)^{\tau} T_r(s)$$

$$= a(s)^{\tau} T_r(s)$$

και

$$\widehat{r_0} := \deg \widehat{t_{i_0}}(s) < r_0 = \deg t_{i_0}(s)$$

Πολλαπλασιασμός του $a(s)^{\tau}$ με το $T(s)$ μπορεί να γίνει με πολλαπλασιασμό του $T(s)$ από δεξιά με τον unimodular πίνακα

$$T_{L_{i_0}}(s) := \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_1 s^{r_0 - r_1} & a_1 s^{r_0 - r_2} & \dots & a_{i_0} & x & & a_1 s^{r_0 - r_p} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \leftarrow \text{γραμμη}$$

Το αποτέλεσμα θα είναι ένας πίνακας

$$T_{i_0}(s) := T_{L_{i_0}}(s) T(s)$$

με γραμμές ίδιες με αυτές του $T(s)$ εκτός της γραμμής i_0. Αρα θα είναι

$$c_r\left(T_{i_0}\right) < c_r(T)$$

και λόγω του ότι $T_{L_{i_0}}(s)$ είναι unimodular θα είναι

$$\deg T_{i_0}(s) = \deg T(s)$$

Παράδειγμα

$$T(s)=\begin{bmatrix}1 & s^2 & 0\\ 0 & s & 1\end{bmatrix},\ \left[T(s)\right]_r^h=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

$$rank_{\mathbb{R}}\left[T(s)\right]_r^h=1<2=\deg T(s)$$

άρα ο $T(s)$ ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ row proper.

$$a^{\tau}\left[T(s)\right]_r^h=\begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix}$$

$$r_1=\deg\begin{bmatrix}1 & s^2 & 0\end{bmatrix}=2$$

$$r_2=\deg\begin{bmatrix}0 & s & 1\end{bmatrix}=1$$

$$r_0=\max\{r_1,r_2\}=r_1=2\Rightarrow i_0=1$$

$$a(s)^{\tau}=\begin{bmatrix}1 & -s\end{bmatrix}$$

$$T_{L1}(s)=\begin{bmatrix}1 & -s\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\overline{T}(s)=T_{L1}(s)T(s)=\begin{bmatrix}1 & -s\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & s^2 & 0\\ 0 & s & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & -s\\ 0 & s & 1\end{bmatrix}$$

$$rank\left[\overline{T}(s)\right]_r^h=rank\begin{bmatrix}0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}=2$$

και ο $\overline{T}(s)$ είναι row proper.