

ΑΝΑΓΩΓΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΟΥ ΠΙΝΑΚΑ ΣΕ ROW ή COLUMN PROPER

Πρότασης

Έστω $T(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$, $\text{rank}_{\mathbb{R}(s)} T(s) = p (= m)$.

Τότε υπάρχει **unimodular** $T_L(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times p}$

($T_R(s) \in \mathbb{R}[s]^{m \times m}$) τέτοιος ώστε

$$\bar{T}(s) := T_L(s)T(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$$

The diagram illustrates the row reduction process. On the left, a large rectangle represents the matrix $\bar{T}(s)$ with a vertical double-headed arrow on its left side labeled p and a horizontal double-headed arrow below it labeled m . To the right of this rectangle is an equals sign. To the right of the equals sign is another large rectangle representing the product $T_L(s)T(s)$. This rectangle is divided into two smaller rectangles: the left one is $T_L(s)$ with a vertical double-headed arrow on its left side labeled p and a horizontal double-headed arrow below it labeled p ; the right one is $T(s)$ with a horizontal double-headed arrow below it labeled m .

είναι **row proper**.

$$\bar{T}(s) := T(s)T_R(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$$

The diagram illustrates the column reduction process. On the left, a large rectangle represents the matrix $\bar{T}(s)$ with a vertical double-headed arrow on its left side labeled p and a horizontal double-headed arrow below it labeled m . To the right of this rectangle is an equals sign. To the right of the equals sign is another large rectangle representing the product $T(s)T_R(s)$. This rectangle is divided into two smaller rectangles: the left one is $T(s)$ with a vertical double-headed arrow on its left side labeled p and a horizontal double-headed arrow below it labeled m ; the right one is $T_R(s)$ with a vertical double-headed arrow on its right side labeled m and a horizontal double-headed arrow below it labeled m .

είναι **column proper**.

Απόδειξη (για την αναγωγή σε row proper)

Αν ο $T(s)$ ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ row proper τότε

$$c_r(T) > \deg T(s)$$

Επιλέγουμε τον $T_L(s)$ έτσι ώστε η row complexity του

$$\bar{T}(s) := T_L(s)T(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$$

να ελαττωθεί:

$$c_r(\bar{T}) = c_r(T_L(s)T(s)) < c_r(T)$$

μέχρι να γίνει ίση με τον βαθμό

$$\deg \bar{T}(s) = \deg T_L(s)T(s) = \deg T(s)$$

(ο οποίος παραμένει αναλλοίωτος λόγω του ότι $T_L(s)$ είναι unimodular)

Όταν

$$c_r(\bar{T}) = \deg \bar{T}(s)$$

ο $\bar{T}(s)$ θα είναι row proper.

Απόδειξη

Έστω

$$a^T = [a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_p] \in \mathbb{R}^{1 \times p} : a^T [T(s)]_r^h = 0$$

Έστω

$$r_i = \deg t_i^\tau(s), \quad r_0 = \max \{r_i\},$$

και

$$a(s)^\tau = \begin{bmatrix} a_1 s^{r_0-r_1} & a_2 s^{r_0-r_2} & \dots & a_{i_0} & \dots & a_2 s^{r_0-r_p} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}[s]^{1 \times l}$$

$$\deg a(s)^\tau < r_0$$

$$\begin{aligned} \widehat{t}_{i_0}(s) &:= a(s)^\tau T(s) = a(s)^\tau \left[\text{diag} \left[s^{r_1} \quad \dots \quad s^{r_p} \right] [T(s)]_r^h + T_r(s) \right] \\ &= s^{r_0} a^\tau [T(s)]_r^h + a(s)^\tau T_r(s) \\ &= a(s)^\tau T_r(s) \end{aligned}$$

και

$$\widehat{r}_0 := \deg \widehat{t}_{i_0}(s) < r_0 = \deg t_{i_0}(s)$$

Πολλαπλασιασμός του $a(s)^\tau$ με το $T(s)$ μπορεί να γίνει με πολλαπλασιασμό του $T(s)$ από δεξιά με τον unimodular πίνακα

$$T_{L_{i_0}}(s) := \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_1 s^{r_0-r_1} & a_1 s^{r_0-r_2} & \dots & a_{i_0} & x & \dots & a_1 s^{r_0-r_p} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \leftarrow \text{γραμμή}$$

Το αποτέλεσμα θα είναι ένας πίνακας

$$T_{i_0}(s) := T_{L_{i_0}}(s)T(s)$$

με γραμμές ίδιες με αυτές του $T(s)$ εκτός της γραμμής i_0 . Άρα θα είναι

$$c_r(T_{i_0}) < c_r(T)$$

και λόγω του ότι $T_{L_{i_0}}(s)$ είναι unimodular θα είναι

$$\deg T_{i_0}(s) = \deg T(s)$$

Παράδειγμα

$$T(s) = \begin{bmatrix} 1 & s^2 & 0 \\ 0 & s & 1 \end{bmatrix}, \quad [T(s)]_r^h = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{rank}_{\mathbb{R}} [T(s)]_r^h = 1 < 2 = \deg T(s)$$

άρα ο $T(s)$ **ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ** row proper.

$$a^T [T(s)]_r^h = [1 \quad -1] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = [0 \quad 0]$$

$$r_1 = \deg [1 \quad s^2 \quad 0] = 2$$

$$r_2 = \deg [0 \quad s \quad 1] = 1$$

$$r_0 = \max \{r_1, r_2\} = r_1 = 2 \Rightarrow i_0 = 1$$

$$a(s)^T = [1 \quad -s]$$

$$T_{L1}(s) = \begin{bmatrix} 1 & -s \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{T}(s) = T_{L1}(s)T(s) = \begin{bmatrix} 1 & -s \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & s^2 & 0 \\ 0 & s & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -s \\ 0 & s & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{rank} [\bar{T}(s)]_r^h = \text{rank} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 2$$

και ο $\bar{T}(s)$ είναι row proper.

