Στοιχειώδεις πράξεις επί των γραμμών (στηλών) ενός πίνακα πραγματικών ρητών συναρτήσεων

Ορίζουμε ***στοιχειώδης πράξεις*** επί των γραμμών (στηλών) ενός πίνακα $T(s) \in \mathbb{R}(s)^{p\times m}$

1. **εναλλαγή των γραμμών (στηλών)** i και j **του** $T(s)$**.**

2. **πολλαπλασιασμός της γραμμής (στήλης)** i **του** $T(s)$ **με οποιοδήποτε αντιστρέψιμο στοιχείο** a **του** $\mathbb{R}[s]$ **(δηλαδή με οποιοδήποτε μη μηδενικό στοιχείο του** $\mathbb{R}$**).**

3. **πολλαπλασιασμός της γραμμής (στήλης)** i **του** $T(s)$ **με μη μηδενικό στοιχείο** $\alpha(s)$ **του** $\mathbb{R}[s]$ **και πρόσθεση της σε οποιαδήποτε άλλη γραμμή (στήλη)** j **του** $T(s)$

Οι *στοιχειώδης πράξεις* επί των γραμμών (στηλών) του $T(s)$ επιτυγχάνονται με πολλαπλασιασμό του $T(s)$ από αριστερά (δεξία) με τον **στοιχειώδεις (unimodular) πίνακες** $U(s)_L \in \mathbb{R}[s]^{p\times p}$ $\left(U(s)_R \in \mathbb{R}[s]^{m\times m}\right)$ οι οποίοι παράγονται εκτελώντας τις αντίστοιχες πράξεις στον μοναδιαίο πίνακα $I_p \quad \left(I_m\right)$.

Π.χ.

1. Η **εναλλαγή των γραμμών (στηλών)** i και j **του** $T\left(s\right)$ επιτυγχάνεται με πολλαπλασιασμό του $T\left(s\right)$ από αριστερά (δεξία) με τον στοιχειώδη (unimodular) πίνακα

$$
U = \begin{array}{cl}
\left[\begin{array}{cccccccc}
1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\
0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \dots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1
\end{array}\right]
&
\begin{array}{l}
\\ \\ \\
\leftarrow i\text{-στη γραμμη} \\
\\
j\text{-στη γραμμη} \\
\\ \\
\end{array}
\\
\begin{array}{cccccccc}
 & & & \uparrow & \dots & \uparrow & & \\
 & & & i\text{-στη} & & j\text{-στη} & & \\
 & & & \text{στηλη} & & \text{στηλη} & &
\end{array}
&
\end{array}
$$

2. Ο **πολλαπλασιασμός της γραμμής (στήλης)** i του $T(s)$ **με οποιοδήποτε** **αντιστρέψιμο στοιχείο** a του $\mathbb{R}[s]$ επιτυγχάνεται με πολλαπλασιασμό του $T(s)$ από αριστερά (δεξία) με τον στοιχειώδη (unimodular) πίνακα

$$U=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & a & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}\begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow i\text{-στη γραμμη} \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$\uparrow \quad \dots$

i-στη

στηλη

3. **Ο πολλαπλασιασμός της γραμμής (στήλης) i του $T(s)$ με μη μηδενικό στοιχείο $\alpha(s)$ του $\mathbb{R}[s]$ και πρόσθεση της σε οποιαδήποτε άλλη γραμμή (στήλη) j του $T(s)$** επιτυγχάνεται με πολλαπλασιασμό του $T(s)$ από αριστερά (δεξία) με τον στοιχειώδη (unimodular) πίνακα

$$
\begin{array}{cl}
U = \begin{bmatrix}
1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\
0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & \dots & 1 & \dots & a(s) & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \dots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1
\end{bmatrix} &
\begin{array}{l}
\\ \\ \\ \leftarrow i\text{-στη γραμμη} \\ \\ \leftarrow j\text{-στη γραμμη} \\ \\ \\
\end{array}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccc}
\uparrow & \dots & \uparrow \\
i\text{-στη} & & j\text{-στη} \\
\text{στηλη} & & \text{στηλη}
\end{array}
$$

$$U=\begin{array}{cl}\begin{bmatrix}1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & a(s) & \dots & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1\end{bmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow i\text{-στη γραμμη} \\ \\ \leftarrow j\text{-στη γραμμη} \\ \\ \\ \end{array}\\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \dots & \uparrow \\ i\text{-στη} & & j\text{-στη} \\ \text{στηλη} & & \text{στηλη}\end{array} & \end{array}$$

Κάθε unimodular πίνακας μπορεί να γραφεί σαν γινόμενο στοιχειωδών πινάκων.

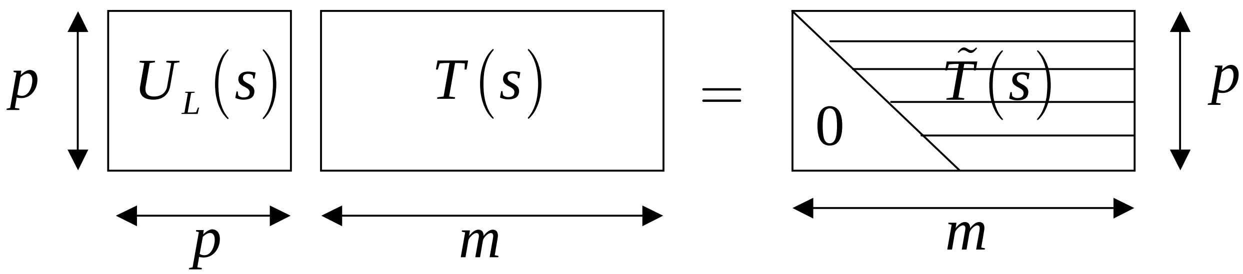
Θεώρημα

Με στοιχειώδης πράξεις επί των γραμμών (στηλών) κάθε πολυωνυμικός πίνακας

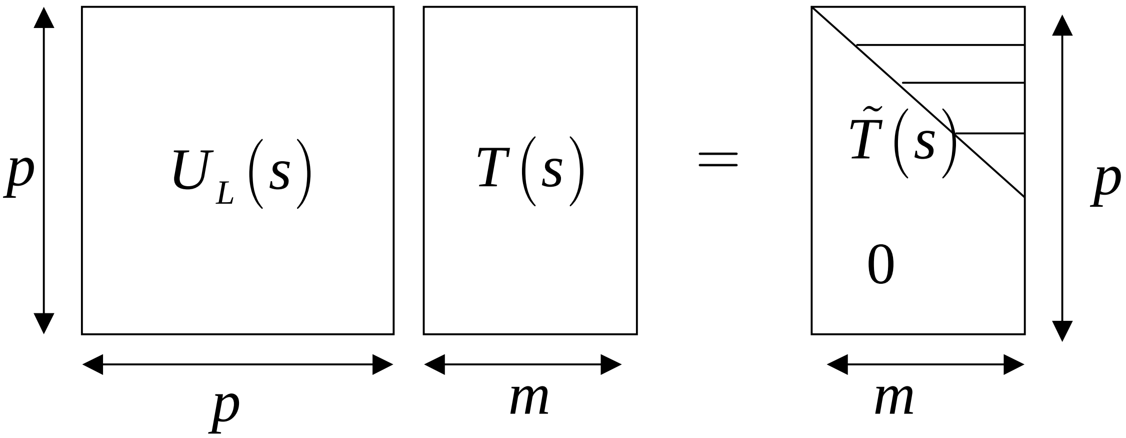
$$T(s)\in\mathbb{R}[s]^{p\times m},\quad rank_{\mathbb{R}(s)}T(s)=\min\{p,m\}$$

μπορεί να αναχθεί σε **πάνω (κάτω) τριγωνικό.**

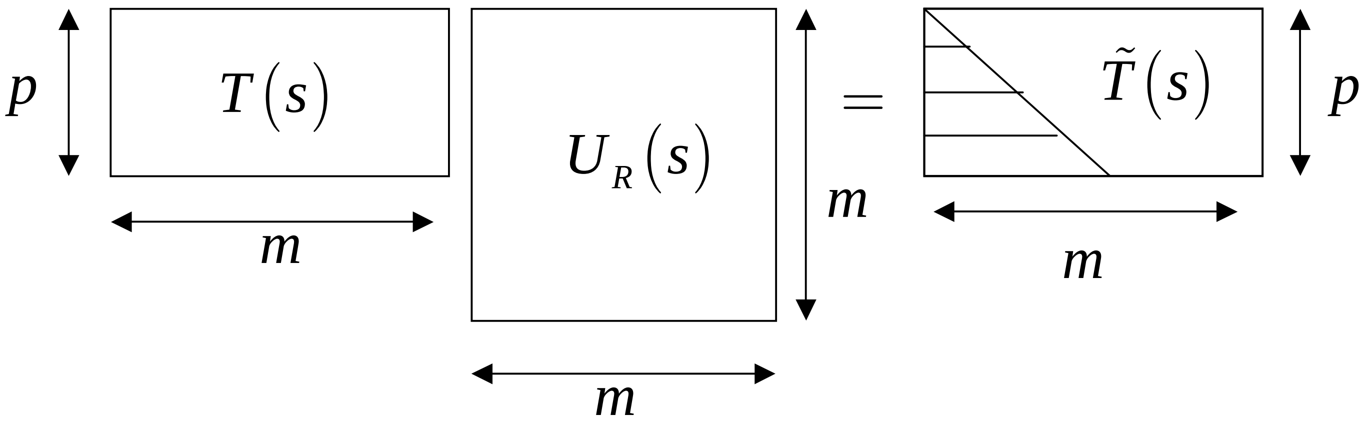
$$p\le m$$

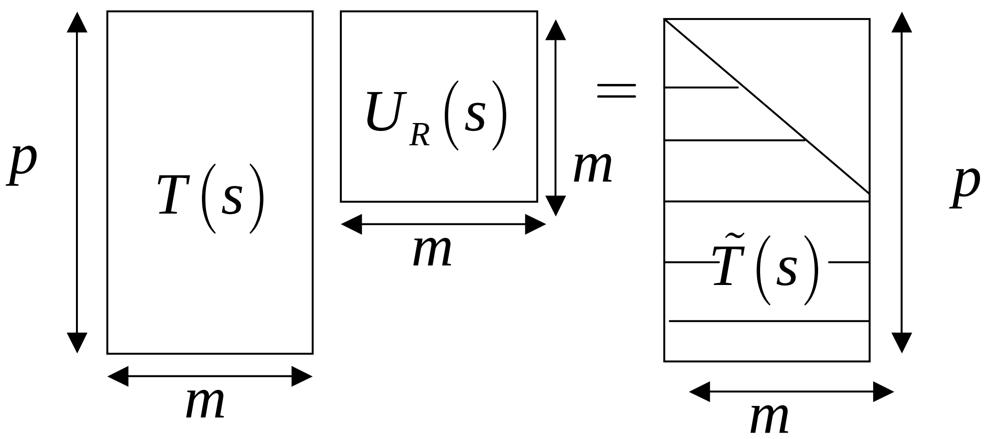


$p \geq m$


p
$U_L(s)$
$T(s)$
$=$
$\tilde{T}(s)$
0
p
p
m
m

$(p \leq m$


p
$T(s)$
$U_R(s)$
m
$=$
$\tilde{T}(s)$
p
m
m
m


p
$T(s)$
$U_R(s)$
m
$=$
$\tilde{T}(s)$
p
m
m
m