ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑ ΣΤΟ $\mathbb{C}$ ΠΙΝΑΚΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΡΗΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΚΑΙ ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΜΟΡΦΗ SMITH-MCMILLAN ΣΤΟ $\mathbb{C}$

Ορισμός

Δύο πίνακες $T_1(s), T_2(s) \in \mathbb{R}(s)^{p\times m}$ πραγματικών ρητών συναρτήσεων ονομάζονται $\mathbb{R}[s]$-ισοδύναμοι (ή ισοδύναμοι στο $\mathbb{C}$) αν υπάρχουν unimodular πολυωνυμικοί πίνακες
$T_L(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times p}, T_R(s) \in \mathbb{R}[s]^{m\times m}$ έτσι ώστε

$$T_L(s)T_1(s)T_R(s) = T_2(s) \qquad (1)$$

Η (1) ορίζει μία **σχέση ισοδυναμίας** στο $\mathbb{R}(s)^{p\times m}$
Την οποία ονομάζουμε $\mathbb{R}[s]$-**ισοδυναμία** (ή ισοδυναμία στο $\mathbb{C}$) **Απόδειξη = άσκηση**.

Θεώρημα

Έστω $T(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times m}$ με
$rank_{\mathbb{R}(s)} T(s) = r \leq \min\{p, m\}$.
Ο $T(s)$ είναι $\mathbb{R}[s]$-**ισοδύναμος** με ένα διαγώνιο πίνακα

$$S_{T(s)}^{\mathbb{C}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1(s) & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varepsilon_2(s) & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \varepsilon_r(s) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}[s]^{p\times m}$$

όπου $\varepsilon_i(s) \in \mathbb{R}[s],\ i = 1,2,...,r$ ονομάζονται **αναλλοίωτα πολυώνυμα** του $T(s)$ και

το $\varepsilon_1(s)$ διαιρεί το $\varepsilon_2(s)$
το $\varepsilon_2(s)$ διαιρεί το $\varepsilon_3(s)$
$\vdots$
το $\varepsilon_{r-1}(s)$ διαιρεί το $\varepsilon_r(s)$

και ο $S_{T(s)}^{\mathbb{C}} \in \mathbb{R}[s]^{p\times m}$ ονομάζεται **SMITH μορφή του** $T(s)$.

Απόδειξη

Η αναγωγή του $T(s)$ στον $S_{T(s)}^{\mathbb{C}}$ γίνεται με στοιχειώδης πράξεις επί των γραμμών και/ή στηλών του $T(s)$.

Πρόταση. Η μορφή Smith $S_{T(s)}^{\mathbb{C}}$ ενός πολυωνυμικού πίνακα $T(s)$ αποτελεί **κανονική μορφή** και τα

αναλλοίωτα πολυώνυμα του $T(s)$ αποτελούν πλήρεις αναλλοίωτες της $\mathbb{R}[s]$**-ισοδυναμίας .**

Απόδειξη=άσκηση

Έστω $m_i(s) \in \mathbb{R}[s],\ i = 1,2,\ldots,r$ ο μέγιστος κοινός διαιρέτης όλων των υπο-οριζουσών τάξεως i του $T(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times m}$.

Μπορεί να αποδειχτεί (από την (1)) ότι τα **αναλλοίωτα πολυώνυμα** $\varepsilon_i(s) \in \mathbb{R}[s],\ i = 1,2,\ldots,r$ του $T(s)$ μπορούν να υπολογιστούν από τον αλγόριθμο:

$$\varepsilon_i(s) = \frac{m_i(s)}{m_{i-1}(s)}, \qquad i = 1,2,\ldots,r$$

με $m_0(s) := 1.$

Παράδειγμα

$$T(s) = \begin{bmatrix} s+1 & 0 & 2s+2 \\ -s-s^2 & (s+1)(s+2) & 4s+4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}[s]^{3\times 3}$$

$$rank_{\mathbb{R}(s)} T(s) = 2$$

$m_1(s) =$ ΜΚΔ υπο-οριζουσών τάξης 1 του $T(s) =$ ΜΚΔ των στοιχίων του $T(s) = s+1$

$m_2(s) =$ ΜΚΔ υπο-οριζουσών τάξης 2 του $T(s) =$ ΜΚΔ

$$\left\{(s+1)^2(s+2),(s+1)^2(s+2),2(s+1)^2(s+2)\right\}$$

$$=(s+1)^2(s+2)$$

$$\varepsilon_1(s) = \frac{m_1(s)}{m_0(s)} = \frac{s+1}{1} = s+1$$

$$\varepsilon_1(s) = \frac{m_2(s)}{m_1(s)} = \frac{(s+1)^2(s+2)}{s+1} = (s+1)(s+2)$$

$$S_{T(s)}^{\mathbb{C}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1(s) & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2(s) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s+1 & 0 & 0 \\ 0 & (s+1)(s+2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

SMITH-MCMILLAN μορφή πίνακα ρητών συναρτήσεων

Αν $T(s) \in \mathbb{R}(s)^{p\times m}$,

$rank_{\mathbb{R}(s)} T(s) = r \le \min\{p,m\}$, έστω $d(s)$ ο ελάχιστος κοινός παρανομαστής των στοιχείων

$$t_{ij}(s)=\frac{n_{ij}(s)}{d_{ij}(s)}\in\mathbb{R}(s),\quad i=1,2,\ldots,p;\ j=1,2,\ldots,m$$

του $T(s)$ έτσι ώστε ο $T(s)$ να γράφεται

$$T(s)=\frac{1}{d(s)}N(s),\qquad N(s)\in\mathbb{R}[s]^{p\times m}$$

Έστω

$$S_{N(s)}^{\mathbb{C}}=diag\left[n_1(s)\quad n_2(s)\quad \ldots n_r(s)\quad 0_{p-r,m-r}\right]\in\mathbb{R}[s]^{p\times m}$$

η μορφή Smith του $N(s)$ και έστω

$$\frac{n_i(s)}{d(s)}=\frac{\varepsilon_i(s)}{\psi_i(s)},\quad i=1,2,\ldots,r$$

Θεώρημα

Έστω $T(s)\in\mathbb{R}(s)^{p\times m}$ με

$$rank_{\mathbb{R}(s)}T(s)=r\le\min\{p,m\}.$$

Ο $T(s)$ είναι $\mathbb{R}[s]$-**ισοδύναμος** με ένα διαγώνιο πίνακα

$$S_{T(s)}^{\mathbb{C}} = \begin{bmatrix} \frac{\varepsilon_1(s)}{\psi_1(s)} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{\varepsilon_2(s)}{\psi_2(s)} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{\varepsilon_r(s)}{\psi_r(s)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}(s)^{p \times m}$$

όπου $\frac{\varepsilon_i(s)}{\psi_i(s)} \in \mathbb{R}(s),\ i = 1,2,\ldots,r$ ονομάζονται **αναλλοίωτες ρητές συναρτήσεις** του $T(s)$ και

το $\varepsilon_1(s)$ διαιρεί το $\varepsilon_2(s)$

το $\varepsilon_2(s)$ διαιρεί το $\varepsilon_3(s)$

$\vdots$

το $\varepsilon_{r-1}(s)$ διαιρεί το $\varepsilon_r(s)$

και

το $\psi_r(s)$ διαιρεί το $\psi_{r-1}(s)$

το $\psi_{r-1}(s)$ διαιρεί το $\psi_{r-2}(s)$

$\vdots$

το $\psi_2(s)$ διαιρεί το $\psi_1(s)$

και ο $S_{T(s)}^{\mathbb{C}} \in \mathbb{R}(s)^{p\times m}$ ονομάζεται **McMillan μορφή του** $T(s)$.

Απόδειξη

Η αναγωγή του $T(s)$ στον $S_{T(s)}^{\mathbb{C}}$ γίνεται με στοιχειώδης πράξεις επί των γραμμών και/ή στηλών του $T(s)$.

Πρόταση. Η μορφή McMillan $S_{T(s)}^{\mathbb{C}}$ ενός πίνακα πραγματικών ρητών συναρτήσεων $T(s)$ αποτελεί **κανονική μορφή** της $\mathbb{R}[s]$-**ισοδυναμίας** και οι **αναλλοίωτες ρητές συναρτήσεις** $\dfrac{\varepsilon_i(s)}{\psi_i(s)} \in \mathbb{R}(s),\ i=1,2,\ldots,r$ του $T(s)$ αποτελούν πλήρεις αναλλοίωτες της $\mathbb{R}[s]$-**ισοδυναμίας .**

Ορισμός Έστω $T(s) \in \mathbb{R}(s)^{p\times m}$. Τα μηδενικά του $T(s)$ στο $\mathbb{C}$ είναι τα μηδενικά των $\varepsilon_i(s) \in \mathbb{R}[s],\ i=1,2,\ldots,r$. Οι πόλοι του $T(s)$ στο $\mathbb{C}$ είναι τα μηδενικά των $\psi_i(s),\ i=1,2,\ldots,r$.

Παράδειγμα

$$T(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{s+1} & 0\\ \dfrac{1}{s+2} & \dfrac{1}{s+3}\end{bmatrix}\in\mathbb{R}(s)^{2\times 2}$$

$$=\frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}\begin{bmatrix}(s+2)(s+3) & 0\\ (s+1)(s+3) & (s+1)(s+2)\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{d(s)}N(s)$$

$$m_1(s)=1$$

$$m_2(s)=\det N(s)=(s+2)^2(s+1)(s+3)$$

$$n_1(s)=\frac{m_1(s)}{m_0(s)}=\frac{1}{1}=1,$$

$$n_2(s)=\frac{m_2(s)}{m_1(s)}=(s+1)(s+2)^2(s+3)$$

$$S_{N(s)}^{\mathbb{C}}=\begin{bmatrix}n_1(s) & 0\\ 0 & n_2(s)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & (s+1)(s+2)^2(s+3)\end{bmatrix}$$

$$\frac{n_1(s)}{d(s)}=\frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}=:\frac{\varepsilon_1(s)}{\psi_1(s)}$$

$$\frac{n_2(s)}{d(s)}=\frac{(s+1)(s+2)^2(s+3)}{(s+1)(s+2)(s+3)}=(s+2)=:\frac{\varepsilon_2(s)}{\psi_2(s)}$$

$$S_{T(s)}^{\mathbb{C}}=\begin{bmatrix}\dfrac{\varepsilon_1(s)}{\psi_1(s)} & 0\\ 0 & \dfrac{\varepsilon_2(s)}{\psi_2(s)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)} & 0\\ 0 & \dfrac{s+2}{1}\end{bmatrix}$$

Είναι η μορφή McMillan του $T(s)$.

Τα μηδενικά του $T(s)$ στο $\mathbb{C}$ είναι τα μηδενικά των $\varepsilon_1(s)=1$ και $\varepsilon_2(s)=s+2$.

Άρα ο $T(s)$ έχει **ένα** μηδενικό στο $\mathbb{C}$ που είναι το το σημείο $s=-2$

Οι πόλοι του $T(s)$ στο $\mathbb{C}$ είναι τα μηδενικά των $\psi_1(s)=(s+1)(\mathrm{s}+2)(\mathrm{s}+3)$ και $\psi_2(s)=1$.

Άρα ο $T(s)$ έχει **τρείς** πόλους στο $\mathbb{C}$ που είναι το τα σημεία $s=-1,\ s=-2\ s=-3$

Παρατήρηση

Παρατηρήστε ότι γενικώς ένας πίνακας πραγματικών ρητών συναρτήσεων μπορεί έχει μηδενικά και πόλους στο $\mathbb{C}$ σε ίδια σημεία του $\mathbb{C}$.

Αυτό βέβαια δεν μπορεί να συμβεί αν $p = m = 1$.