# Δομικοί Πίνακες στο $\mathbb{C}$ πινάκων πραγματικών ρητών συναρτήσεων

Έστω $T(s) \in \mathbb{R}(s)^{p \times m}$ με $rank_{\mathbb{R}(s)} T(s) = r \leq \min\{p, m\}$ και με Smith-McMillan μορφή:

$$S_{T(s)}^{\mathbb{C}} = \begin{bmatrix} \frac{\varepsilon_1(s)}{\psi_1(s)} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{\varepsilon_2(s)}{\psi_2(s)} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{\varepsilon_r(s)}{\psi_r(s)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}(s)^{p \times m}$$

**Πρόταση**

Οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες

1. Ο $T(s)$ **δεν έχει** μηδενικά στο $\mathbb{C}$
2. $\varepsilon_i(s)=1 \qquad i=1,2,\ldots,r$ **ή** ισοδύναμα

$$S_{T(s)}^{\mathbb{C}}=\begin{bmatrix} \frac{1}{\psi_1(s)} & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\psi_2(s)} & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \frac{1}{\psi_r(s)} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}\in\mathbb{R}(s)^{p\times m}$$

Αν ο $T(s)\in\mathbb{R}[s]^{p\times m}$, $rank_{\mathbb{R}(s)}T(s)=r$, αν δηλαδή ο $T(s)$ **δεν έχει πόλους** στο $\mathbb{C}$ και ο $T(s)$ **δεν έχει μηδενικά** στο $\mathbb{C}$ τότε

Αν $r=p \qquad S_{T(s)}^{\mathbb{C}}=\begin{bmatrix} I_p & 0_{p,m-p} \end{bmatrix}$

Και

Αν $r=m, \qquad S_{T(s)}^{\mathbb{C}}=\begin{bmatrix} I_m \\ 0_{p-m,m} \end{bmatrix}$

## Ορισμός

Ένας πολυωνυμικός πίνακας

$T(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times m}$, $rank_{\mathbb{R}(s)} T(s) = p$ $(= m)$ με

$$S_{T(s)}^{\mathbb{C}} = \begin{bmatrix} I_p & 0_{p,m-p} \end{bmatrix}$$

$$\left( \quad S_{T(s)}^{\mathbb{C}} = \begin{bmatrix} I_m \\ 0_{p-m,m} \end{bmatrix} \quad \right)$$

ονομάζεται **δεξιά** (**αριστερά**) **unimodular.**

Έστω

$$T(s) \in \mathbb{R}(s)^{p\times m}, \ rank_{\mathbb{R}(s)} T(s) = r$$

και έστω

$$T_L(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times p}, \ \ T_R(s) \in \mathbb{R}[s]^{m\times m}$$

unimodular πίνακες τέτοιοι ώστε

$$\underset{p\times m}{T(s)} = \underset{p\times p}{T_L(s)}\,\underset{p\times m}{S_{T(s)}^{\mathbb{C}}(s)}\,\underset{m\times m}{T_R(s)}$$

Χωρίστε τον $T_R(s)$

$$T_R(s) = \begin{array}{c} \overset{m}{\longleftrightarrow} \\ \begin{bmatrix} T_1(s) \\ T_1(s) \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \updownarrow \quad r \\ \updownarrow \quad m-r \end{array}$$

όπου

$T_1(s)\in\mathbb{R}[s]^{r\times m}$, $T_2(s)\in\mathbb{R}[s]^{(m-r)\times m}$ και unimodular

και γράψτε την κανονική μορφή Smith-McMillan $S_{T(s)}^{\mathbb{C}}$ του $T(s)$ :

$$S_{T(s)}^{\mathbb{C}}=\begin{bmatrix}\frac{\varepsilon_1(s)}{\psi_1(s)} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \frac{\varepsilon_2(s)}{\psi_2(s)} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & \frac{\varepsilon_r(s)}{\psi_r(s)} & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}D(s) & 0_{r,m-r}\\ 0_{p-r,r} & 0_{p-r,m-r}\end{bmatrix}\in\mathbb{R}(s)^{p\times m}$$

όπου

$$D(s):=\begin{bmatrix}\frac{\varepsilon_1(s)}{\psi_1(s)} & 0 & \dots & 0\\ 0 & \frac{\varepsilon_2(s)}{\psi_2(s)} & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & \frac{\varepsilon_r(s)}{\psi_r(s)}\end{bmatrix}\in\mathbb{R}(s)^{r\times r}$$

Τότε ο $T(s)$ γράφεται

$$\underset{p\times m}{T(s)} = \underset{p\times p}{T_L(s)}\,\underset{p\times m}{S^{\mathbb{C}}_{T(s)}(s)}\,\underset{m\times m}{T_R(s)} = \underset{p\times p}{T_L(s)}\underset{p\times r}{\begin{bmatrix} D(s) \\ 0_{p-r,r} \end{bmatrix}}\begin{bmatrix} I_r & 0_{r.m-r} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T_1(s) \\ T_2(s) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \underset{p\times r}{T_{L1}(s)} & \underset{p\times(p-r)}{T_{L2}(s)} \end{bmatrix}\underset{p\times r}{\begin{bmatrix} D(s) \\ 0_{p-r,r} \end{bmatrix}}\begin{bmatrix} I_r & 0_{r.m-r} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T_1(s) \\ T_2(s) \end{bmatrix}$$

$$= T_{L1}(s)D(s)T_1(s)$$

$$= \underset{p\times r}{T_L^{\mathbb{C}}(s)}\,\underset{r\times m}{T_1(s)}$$

όπου

$$\underset{p\times r}{T_L^{\mathbb{C}}(s)} \in \mathbb{R}(s)^{p\times r}$$

και η κανονική μορφή Smith-McMillan $S^{\mathbb{C}}_{T_L^{\mathbb{C}}}(s)$ του $T_L^{\mathbb{C}}(s)$ είναι

$$S^{\mathbb{C}}_{T_L^{\mathbb{C}}}(s)=\underbrace{\begin{bmatrix} \dfrac{\varepsilon_1(s)}{\psi_1(s)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \dfrac{\varepsilon_2(s)}{\psi_2(s)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \dfrac{\varepsilon_r(s)}{\psi_r(s)} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}}_{r} \begin{matrix} \\ \\ r \\ \\ \\ \\ p-r \\ \\ \end{matrix}$$

**άρα έχουμε την πρόταση**

**Πρόταση**

Έστω

$T(s)\in\mathbb{R}(s)^{p\times m}$ , $rank_{\mathbb{R}(s)}T(s)=r$. Τότε ο $T(s)$ παραγοντοποιείται ως εξής

$$\underset{p\times m}{T(s)}=\underset{p\times r}{T_L^{\mathbb{C}}(s)}\,\underset{r\times m}{T_1(s)}$$

όπου ο $\underset{p\times r}{T_L^{\mathbb{C}}(s)}\in\mathbb{R}(s)^{p\times r}$ , $\quad rank_{\mathbb{R}(s)}T_L^{\mathbb{C}}(s)=r$ έχει την ίδια δομή μηδενικών και πόλων $\mathbb{C}$ με τον $T(s)$ και ο $T_1(s)\in\mathbb{R}[s]^{r\times m}$ είναι δεξιά unimodular.

Ομοίως έχουμε την πρόταση

**Πρόταση**
Έστω
$T(s) \in \mathbb{R}(s)^{p\times m}$, $rank_{\mathbb{R}(s)} T(s) = r$. Τότε ο $T(s)$ παραγοντοποιείται ως εξής

$$\underset{p\times m}{T(s)} = \underset{p\times r}{\hat{T}_1(s)} \underset{r\times m}{T_R^{\mathbb{C}}(s)}$$

όπου ο $\underset{r\times m}{T_R^{\mathbb{C}}(s)} \in \mathbb{R}(s)^{r\times m}, \quad rank_{\mathbb{R}(s)} T_R^{\mathbb{C}}(s) = r$
έχει την ίδια δομή μηδενικών και πόλων $\mathbb{C}$ με τον $T(s)$ και ο $\hat{T}_1(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times r}$ είναι αριστερά unimodular.

**Ορισμός**
Ο πίνακας $\underset{p\times r}{T_L^{\mathbb{C}}(s)} \in \mathbb{R}(s)^{p\times r}, \quad rank_{\mathbb{R}(s)} T_L^{\mathbb{C}}(s) = r$
ονομάζεται **αριστερός δομικός** πίνακας στο $\mathbb{C}$ του $T(s)$.
Ο πίνακας $\underset{r\times m}{T_R^{\mathbb{C}}(s)} \in \mathbb{R}(s)^{r\times m}, \quad rank_{\mathbb{R}(s)} T_R^{\mathbb{C}}(s) = r$
ονομάζεται **δεξιός δομικός** πίνακας στο $\mathbb{C}$ του $T(s)$.

## Πρόταση

Ένας **αριστερός δομικός** πίνακας στο $\mathbb{C}$ του $T(s)$ **μπορεί να** προκύψει με μόνο στοιχειώδεις πράξεις επί των **στηλών** του $T(s)$.

Έστω

$T(s)\in\mathbb{R}(s)^{p\times m}$, $rank_{\mathbb{R}(s)}T(s)=r$ και έστω

$T_R(s)\in\mathbb{R}[s]^{m\times m}$ unimodular πίνακας τέτοιος ώστε

$$T(s)T_R(s)=\begin{bmatrix}\hat{T}_L(s) & 0_{p,m-r}\end{bmatrix} \qquad (1)$$

όπου $\hat{T}_L(s)\in\mathbb{R}[s]^{p\times r}$, $rank_{\mathbb{R}(s)}\hat{T}_L(s)=r$.

Από την (1)

$$\begin{aligned} T(s) &= \begin{bmatrix}\hat{T}_L(s) & 0_{p,m-r}\end{bmatrix}T_R(s)^{-1} \\ &= \begin{bmatrix}\hat{T}_L(s) & 0_{p,m-r}\end{bmatrix}\hat{T}(s) \\ &= \underset{p\times r}{\hat{T}_L(s)}\begin{bmatrix}I_r & 0_{r,m-r}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}T_1(s)\\ T_2(s)\end{bmatrix} \\ &= \underset{p\times r}{\hat{T}_L(s)}T_1(s) \end{aligned}$$

Κατ'άναλογία έχουμε την

**Πρόταση**

Ένας **δεξιός** **δομικός** πίνακας στο $\mathbb{C}$ του $T(s)$ **μπορεί να** προκύψει με μόνο στοιχειώδεις πράξεις επί των **γραμμών** του $T(s)$.

**Παράδειγμα**

Έστω

$$T(s)=\begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 & \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{1}{s+2} & \frac{1}{s+3} & \frac{s+3}{(s+2)^2} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}(s)^{2\times 3}$$

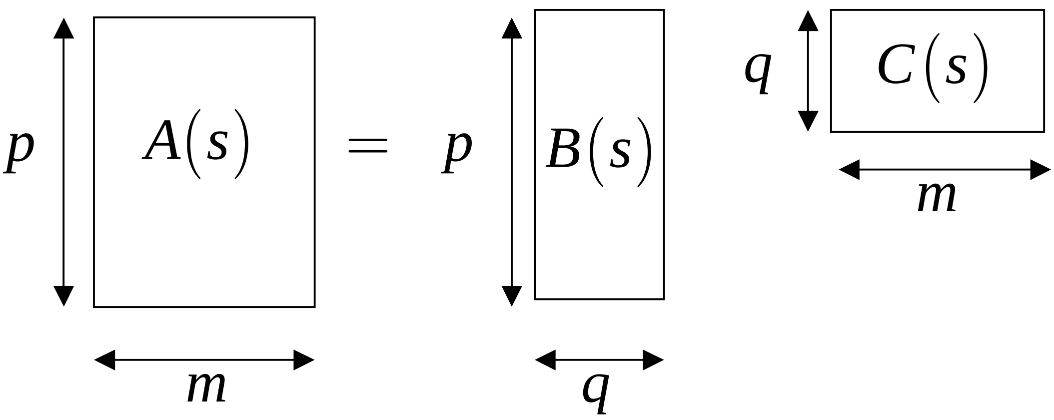
$$=\frac{1}{(s+1)(s+2)^2(s+3)}\begin{bmatrix} (s+2)^2(s+3) & 0 & (s+3)^2(s+2) \\ (s+1)(s+2)(s+3) & (s+1)(s+2)^2 & (s+3)^2(s+1) \end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{d(s)}N(s)$$

# ΔΙΑΙΡΕΤΕΣ ΚΑΙ ΜΕΓΙΣΤΟΙ ΚΟΙΝΟΙ ΔΙΑΙΡΕΤΕΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΩΝ ΠΙΝΑΚΩΝ

Δεδομένων τριών πολυωνυμικών πινάκων

$$A(s)\in\mathbb{R}[s]^{p\times m},\;\; B(s)\in\mathbb{R}[s]^{p\times q},\;\; C(s)\in\mathbb{R}[s]^{q\times m}$$




Λέμε ότι

Ο $B(s)$ είναι αριστερός διαιρέτης του $A(s)$

Ο $C(s)$ είναι δεξιός διαιρέτης του $A(s)$

Ο $A(s)$ είναι αριστερό πολλαπλάσιο του $C(s)$

Ή ότι

Ο $A(s)$ είναι δεξιό πολλαπλάσιο του $B(s)$

Θεωρείστε τώρα **δύο** πολυωνυμικούς πίνακες

$$T_1(s)\in\mathbb{R}[s]^{p\times l},\;\; T_2(s)\in\mathbb{R}[s]^{p\times t}$$

με τον ίδιο αριθμό γραμμών $p$ και έστω

$T_L(s)\in\mathbb{R}[s]^{p\times p}$ ένας αριστερός διαιρέτης του

$T_1(s)$ **και του** $T_2(s)$, έστω δηλαδή ότι

$$T_1(s) = T_L(s)\bar{T}_1(s) \quad \text{και} \quad T_2(s) = T_L(s)\bar{T}_2(s)$$

όπου $\bar{T}_1(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times l}$, $\bar{T}_2(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times t}$

**Ορισμός.** Ο $T_L(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times p}$ ονομάζεται **κοινός** αριστερός διαιρέτης των $T_1(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times l}$, $T_2(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times t}$.

Αν ο $T_L(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times p}$ είναι δεξιό πολλαπλάσιο **κάθε κοινού** αριστερού διαιρέτη $\bar{T}_L(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times p}$ των $T_1(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times l}$, $T_2(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times t}$, αν δηλαδή

$$T_L(s) = \bar{T}_L(s)T_3(s)$$

για κάποιο $T_3(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times p}$, τότε ο $T_L(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times p}$ ονομάσεται **μέγιστος κοινός αριστερός διαιρέτης** των

$$T_1(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times l}, \quad T_2(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times t}.$$

Θεωρείστε τώρα **δύο** πολυωνυμικούς πίνακες

$$T_1(s)\in\mathbb{R}[s]^{l\times m},\ \ T_2(s)\in\mathbb{R}[s]^{t\times m}$$

με τον ίδιο αριθμό στηλών $m$ και έστω $T_R(s)\in\mathbb{R}[s]^{m\times m}$ ένας δεξιός διαιρέτης του $T_1(s)$ **και του** $T_2(s)$, έστω δηλαδή ότι

$$T_1(s)=\overline{T}_1(s)T_R(s)\ \ \text{και}\ T_2(s)=\overline{T}_2(s)T_R(s)$$

όπου $\overline{T}_1(s)\in\mathbb{R}[s]^{l\times m},\ \ \overline{T}_2(s)\in\mathbb{R}[s]^{t\times m}$

**Ορισμός.** Ο $T_R(s)\in\mathbb{R}[s]^{m\times m}$ ονομάζεται **κοινός** δεξιός διαιρέτης των

$$T_1(s)\in\mathbb{R}[s]^{l\times m},\ \ T_2(s)\in\mathbb{R}[s]^{t\times m}.$$

Αν ο $T_R(s)\in\mathbb{R}[s]^{m\times m}$ είναι αριστερό πολλαπλάσιο **κάθε κοινού** δεξιού διαιρέτη $\overline{T}_R(s)\in\mathbb{R}[s]^{m\times m}$ των $T_1(s)\in\mathbb{R}[s]^{l\times m},\ \ T_2(s)\in\mathbb{R}[s]^{t\times m}$, αν δηλαδή

$$T_R(s)=T_3(s)\overline{T}_R(s)$$

για κάποιο $T_3(s)\in\mathbb{R}[s]^{m\times m}$, τότε ο $T_R(s)\in\mathbb{R}[s]^{m\times m}$ ονομάσεται **μέγιστος κοινός δεξιός** διαιρέτης των

$$T_1(s)\in\mathbb{R}[s]^{l\times m},\ \ T_2(s)\in\mathbb{R}[s]^{t\times m}.$$

**Εξαγωγή μέγιστου κοινού αριστερού ή δεξιού διαιρέτη δύο πολυωνυμικών πινάκων.**

1. Εξαγωγή **μέγιστου κοινού αριστερού** διαιρέτη δύο πινάκων με τον ίδιο αριθμό γραμμών.

Έστω

$T_1(s)\in\mathbb{R}[s]^{p\times\ell},\qquad T_2(s)\in\mathbb{R}[s]^{p\times t}$

με $\ell+t=:m\geq p=rank_{\mathbb{R}(s)}\begin{bmatrix}T_1(s) & T_2(s)\end{bmatrix}$

Έστω $T(s):=\begin{bmatrix}T_1(s) & T_2(s)\end{bmatrix}\in\mathbb{R}[s]^{p\times m}$ και

έστω $T_R(s)\in\mathbb{R}[s]^{m\times m}$ unimodular τέτοιος ώστε

$$T(s)T_R(s)=\begin{bmatrix}T_{GL}(s) & 0_{p,m-p}\end{bmatrix}$$

όπου $T_{GL}(s)\in\mathbb{R}[s]^{p\times p}$, $rank_{\mathbb{R}(s)}T_{GL}(s)=p$.

Έστω

$$T_R(s)^{-1}=:\hat{T}(s)=\begin{array}{c} \begin{bmatrix}\hat{T}_1(s) & \hat{T}_2(s)\\ \hat{T}_3(s) & \hat{T}_4(s)\end{bmatrix} \begin{array}{l} \updownarrow\ p \\ \updownarrow\ m-p\end{array} \\ \begin{array}{cc}\overset{\longleftrightarrow}{\ell} & \overset{\longleftrightarrow}{t}\end{array}\end{array}$$

Από την

$$T(s)T_R(s)=\left[T_{GL}(s)\quad 0_{p,m-p}\right]$$

$$\Rightarrow$$

$$T(s)=\left[T_{GL}(s)\quad 0_{p,m-p}\right]T_R(s)^{-1}$$

$$=T_{GL}(s)\left[I_p\quad 0_{p,m-p}\right]\begin{bmatrix}\hat{T}_1(s) & \hat{T}_2(s)\\ \hat{T}_3(s) & \hat{T}_4(s)\end{bmatrix}$$

$$=T_{GL}(s)\left[\hat{T}_1(s)\quad \hat{T}_2(s)\right]$$

όπου $\left[\hat{T}_1(s)\quad \hat{T}_2(s)\right]\in\mathbb{R}[s]^{p\times m}$ δεξιός unimodular

Δηλαδή

$$T_1(s)=T_{GL}(s)\hat{T}_1(s) \qquad\qquad T_2(s)=T_{GL}(s)\hat{T}_2(s)$$

και άρα ο $T_{GL}(s)$ είναι κοινός αριστερός διαιρέτης των $T_1(s),T_2(s)$.

Χωρίστε τώρα τον

$$T_R(s)=\begin{array}{cl}\begin{bmatrix}T_{R1}(s) & T_{R2}(s)\\ T_{R3}(s) & T_{R4}(s)\end{bmatrix} & \begin{matrix}\updownarrow\ \ell\\ \updownarrow\ t\end{matrix}\\ \begin{matrix}\longleftrightarrow & \longleftrightarrow\\ p & m-p\end{matrix} & \end{array}$$

Από την

$$T(s)T_R(s)=\left[T_{GL}(s) \quad 0_{p,m-p}\right]$$

$$T(s)\begin{bmatrix} T_{R1}(s) & T_{R2}(s) \\ T_{R3}(s) & T_{R4}(s) \end{bmatrix}=\left[T_{GL}(s) \quad 0_{p,m-p}\right]$$

$$\left[T_1(s) \quad T_2(s)\right]\begin{bmatrix} T_{R1}(s) & T_{R2}(s) \\ T_{R3}(s) & T_{R4}(s) \end{bmatrix}=\left[T_{GL}(s) \quad 0_{p,m-p}\right]$$

$$T_1(s)T_{R1}(s)+T_2(s)T_{R3}(s)=T_{GL}(s) \qquad (1)$$

Έστω τώρα $\overline{T}_L(s)\in\mathbb{R}[s]^{p\times p}$ ένας **άλλος** κοινός αριστερός διαιρέτης των $T_1(s)$ και $T_2(s)$, έστω δηλαδή

$$T_1(s)=\overline{T}_L(s)R(s) \qquad T_2(s)=\overline{T}_L(s)G(s) \qquad (2)$$

όπου $R(s)\in\mathbb{R}[s]^{p\times\ell}, G(s)\in\mathbb{R}[s]^{p\times t}$.

Από την (1) και τις (2) έχουμε

$$T_1(s)T_{R1}(s)+T_2(s)T_{R3}(s)=$$
$$=\overline{T}_L(s)\left[R(s)T_{R1}(s)+G(s)T_{R3}(s)\right]=T_{GL}(s)$$

η οποία σημαίνει ότι ο $T_{GL}(s)$ είναι δεξιό πολλαπλάσιο κάθε αριστερού διαιρέτη $\overline{T}_L(s)$ των

$T_1(s)$ και $T_2(s)$ και άρα βάσει του ορισμού ότι ο $T_{GL}(s)$ είναι μέγιστος κοινός διαιρέτης των $T_1(s)$ και $T_2(s)$.

‘Ασκηση
Διατυπώστε τα ανάλογα με τα παραπάνω για την εύρεση ενός μέγιστου κοινού δεξιού διαιρέτη $T_{GR}(s) \in \mathbb{R}[s]^{m\times m}$ δύο πινάκων $T_1(s) \in \mathbb{R}[s]^{\ell\times m}, T_1(s) \in \mathbb{R}[s]^{t\times m}$ με τον ίδιο αριθμό στηλών $m \geq \ell + t := p$.
Δώστε ένα απλό αριθμητικό παράδειγμα για $\ell = 2, t = 1, m = 2$.