ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΜΟΤΗΤΑ (Observability)

Έστω οι εξισώσεις του χώρου των καταστάσεων που περιγράφουν την χρονική εξέλιξη συστήματος σε διακριτό χρόνο k:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \qquad (1.1)$$

$$y(k) = Cx(k) + Du(k) \qquad (1.2)$$

όπου

$$A \in \mathbb{R}^{n\times n},\ B \in \mathbb{R}^{n\times m},\ C \in \mathbb{R}^{p\times n},\ D \in \mathbb{R}^{p\times m}$$

Ορισμός
Το σύστημα διακριτού χρόνου (1.1)(1.2) ονομάζεται «παρατηρήσιμο (observable) αν και μόνο αν, γνώση της εξόδου $y(k)$ και της εισόδου $u(k)$ για $k = 0,1,2,\ldots,N-1$ επιτρέπει τον προσδιορισμό κάθε αρχικής κατάσταση $x(0) \in \mathbb{R}^n$.

Από την (1.2)

$$\begin{aligned} y(k+1) &= Cx(k+1) + Du(k+1) \\ &= C\left[Ax(k) + Bu(k)\right] + Du(k+1) \qquad (1.3) \\ &= CAx(k) + CBu(k) + Du(k+1) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
y(k+2) &= CAx(k+1)+CBu(k+1)+Du(k+2) \\
&= CA\left[Ax(k)+Bu(k)\right]+CBu(k+1)+Du(k+2) \quad (1.4) \\
&= CA^2x(k)+CABu(k)+CBu(k+1)+Du(k+2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y(k+3) &= CA^2x(k+1)+CABu(k+1)+CBu(k+2)+Du(k+3) \\
&= CA^2\left[Ax(k)+Bu(k)\right]+CABu(k+1)+CBu(k+2)+Du(k+3) \\
&= CA^3x(k)+CA^2Bu(k)+CABu(k+1)+CBu(k+2)+Du(k+3)
\end{aligned}
\quad (1.5)
$$

Οί (1.2),(1.3),(1.4),(1.5) γράφονται υπό μορφή πινάκων

$$
\begin{bmatrix} y(k) \\ y(k+1) \\ y(k+2) \\ y(k+3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} D & 0 & 0 & 0 \\ CB & D & 0 & 0 \\ CAB & CB & D & 0 \\ CA^2B & CAB & CB & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(k) \\ u(k+1) \\ u(k+2) \\ u(k+3) \end{bmatrix}
$$

Γενικά για N φυσικό έχουμε

$$
\begin{bmatrix} y(k) \\ y(k+1) \\ y(k+2) \\ \vdots \\ y(k+N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{N-1} \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} D & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ CB & D & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ CAB & CB & D & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ CA^{N-2}B & CA^{N-3}B & CA^{N-4}B & \dots & CB & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(k) \\ u(k+1) \\ u(k+2) \\ \vdots \\ u(k+N-1) \end{bmatrix}
$$

Ή

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{N-1} \end{bmatrix} x(k) = \begin{bmatrix} y(k) \\ y(k+1) \\ y(k+2) \\ \vdots \\ y(k+N-1) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} D & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ CB & D & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ CAB & CB & D & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ CA^{N-2}B & CA^{N-3}B & CA^{N-4}B & \dots & CB & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(k) \\ u(k+1) \\ u(k+2) \\ \vdots \\ u(k+N-1) \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

Για $k=0$ η (1.6) γράφεται

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{N-1} \end{bmatrix} x(0) = \begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(N-1) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} D & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ CB & D & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ CAB & CB & D & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ CA^{N-2}B & CA^{N-3}B & CA^{N-4}B & \dots & CB & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(0) \\ u(1) \\ u(2) \\ \vdots \\ u(N-1) \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

Αν οι τιμές της εισόδου και της εξόδου κατά τις χρονικές στιγμές $1,2,...,N-1$ είναι γνωστές τότε από την (1.7) και το θεώρημα (*) (που εξετάσαμε στην διερεύνηση της ελεγξιμότητας) για να μπορέσουμε να προσδιορίσουμε το αρχικό άνυσμα κατάστασης $x(0)$ πρέπει και αρκεί ο πίνακας «*παρατηρησιμότητας*»:

$$L = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{N-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{pN\times n} \qquad (1.8)$$

να έχει βαθμίδα *n*.

Από την (1.6) το ίδιο ισχύει και για τον προσδιορισμό κάθε ανύσματος κατάστασης $x(k)$, $k \neq 0$, από γνώση της εισόδου και της εξόδου κατά τις χρονικές στιγμές $k, k+1, k+2, ..., k+N-1$. Άρα έχουμε το

Θεώρημα
Το σύστημα (1.1) - (1.2) είναι παρατηρήσιμο αν και μόνο αν

$$rank \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{N-1} \end{bmatrix} = n \qquad (1.9)$$

Ισοδύναμα, το σύστημα (1.1) - (1.2) είναι παρατηρησιμο αν και μόνο αν οι n στήλες του πίνακα παρατηρησιμότητας Lείναι γραμμικά ανεξάρτητες ή αν τουλάχιστον μία $n \times n$ υπο-ορίζουσα του L είναι διάφορη του μηδενός.

Παράδειγμα
Θεωρείστε το σύστημα διακριτού χρόνου του οποίου η σχέση εισόδου-εξόδου περιγράφεται από την ΓΕΔΣΣ

$$y(k+2) + y(k+1) + y(k) = u(k+1) + u(k) \qquad (1.10)$$

Αντικαθιστώντας

$$k+2 \rightarrow k$$
$$k+1 \rightarrow k-1$$
$$k \rightarrow k-2$$

η (1.10) γράφεται

$$y(k)+y(k-1)+y(k-2)=u(k-1)+u(k-2) \quad (1.11)$$

Ή

$$\begin{aligned} y(k)+Dy(k)+D^2y(k)&=Du(k)+D^2u(k) \\ \left(1+D+D^2\right)y(k)&=\left(D+D^2\right)u(k) \end{aligned} \quad (1.12)$$

Εισάγοντας την νέα μεταβλητή $\beta(k)$ η παραπάνω ΓΕΔΣΣ είναι ισοδύναμη με τις ΓΕΔΣΣ:

$$\left(1+D+D^2\right)\beta(k)=u(k) \quad (1.13)$$

$$y(k)=\left(D+D^2\right)\beta(k) \quad (1.14)$$

Οι (1.13)(1.14) γράφονται

$$\beta(k)+\beta(k-1)+\beta(k-2)=u(k) \quad (1.15)$$

$$y(k)=\beta(k-1)+\beta(k-2) \quad (1.16)$$

Ορίζουμε «καταστάσεις» μέσω των

$$\begin{aligned} x_1(k)&=\beta(k-2) \\ x_2(k)&=\beta(k-1) \end{aligned}$$

έτσι ώστε

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= \beta(k-1) = x_2(k) \\ x_2(k+1) &= \beta(k) = -x_2(k) - x_1(k) + u(k) \end{aligned} \tag{1.17}$$

και

$$y(k) = \beta(k-1) + \beta(k-2) = x_2(k) + x_1(k) \tag{1.18}$$

Οι (1.17)(1.18) γράφονται υπό μορφή πινάκων

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \tag{1.19}$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} \tag{1.20}$$

Άρα $n = 2, m = p = 1$ και

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}, \ D = 0$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \ CA = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Για $N = n = 2$ ο πίνακας ελεγξιμότητας είναι

$$S = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

και επειδή

$$rankS = n = 2$$

το σύστημα είναι ελέγξιμο.

Για $N = n = 2$ ο πίνακας παρατηρησιμότητας είναι

$$L = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

και επειδή

$$rankL = n = 2$$

το σύστημα είναι παρατηρήσιμο.

ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ, ΙΔΙΟΤΙΜΕΣ ΚΑΙ ΙΔΙΟΑΝΥΣΜΑΤΑ

Έστω η εξίσωση του χώρου των καταστάσεων συστήματος διακριτού χρόνου k:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \qquad (1.21)$$

Θεωρώντας τον μετασχηματισμό $\mathcal{Z}$ της (1.21) :

$$\mathcal{Z}\{x(k+1)\} = zX(z) - zx(0) = AX(z) + BU(z)$$

και αν $x(0)=0$

$$zX(z)-AX(z)=BU(z)$$
$$(zI_n-A)X(z)=BU(z)$$
$$X(z)=(zI_n-A)^{-1}BU(z)$$

Ορισμός

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο του συστήματος (1.21) είναι το πολυώνυμο

$$|zI_n-A|=z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\ldots+a_1z+a_0 \qquad (1.22)$$

Χαρακτηριστική εξίσωση του συστήματος (1.21) είναι η εξίσωση

$$|zI_n-A|=z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\ldots+a_1z+a_0=0 \qquad (1.23)$$

Ορισμός.

Πόλοι του συστήματος είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ που είναι οι ρίζες $\lambda_i\in\mathbb{C},\ i=1,2,\ldots,n$ της χαρακτηριστικής εξίσωσης.

Αν οι ρίζες $\lambda_i\in\mathbb{C},\ i=1,2,\ldots,n$ της χαρακτηριστικής εξίσωσης. είναι διακριτές, αν δηλαδή

$$|zI_n-A|=z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\ldots+a_1z+a_0=(z-\lambda_1)(z-\lambda_2)\cdots(z-\lambda_n) \qquad (1.24)$$

και $\lambda_i\neq\lambda_j\ i\neq j$ τότε αν $u_i\in\mathbb{R}^n,\ i=1,2,\ldots,n$ είναι το (δεξιό) ιδιοάνυσμα του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_i:

$$Au_i=u_i\lambda_i \quad i=1,2,\ldots,n \qquad (1.25)$$

τότε τα $u_i\in\mathbb{R}^n,\ i=1,2,\ldots,n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Γράφοντας τις (1.25) υπό μορφή πίνακα έχουμε

$$A\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (1.26)$$

Αν ορίσουμε τους πίνακες:

$$U := \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}, \ \ \Lambda := \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n} \quad (1.27)$$

τότε η (1.26) γράφεται

$$AU = U\Lambda \quad (1.28)$$

Επειδή τα $u_i \in \mathbb{R}^n, \ i = 1,2,\dots,n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα ο πίνακας $U := \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ είναι ομαλός και άρα ο αντίστροφος του U^{-1} υπάρχει, άρα από την (1.28) έχουμε

$$U^{-1}AU = \Lambda \quad (1.29)$$

Αν

$$V := U^{-1} \quad (1.30)$$

και γράψουμε τον πίνακα V ως προς τις γραμμές του

$$v_i^{\tau} \in \mathbb{R}^{1\times n}, \ i = 1,2,\dots,n \quad (1.31)$$

$$V = \begin{bmatrix} v_1^\tau \\ v_2^\tau \\ \vdots \\ v_n^\tau \end{bmatrix} \tag{1.32}$$

τότε η (1.29) γράφεται

$$\begin{bmatrix} v_1^\tau \\ v_2^\tau \\ \vdots \\ v_n^\tau \end{bmatrix} A = \Lambda \begin{bmatrix} v_1^\tau \\ v_2^\tau \\ \vdots \\ v_n^\tau \end{bmatrix} \tag{1.33}$$

και άρα θεωρώντας τις γραμμές της παραπάνω εξίσωσης πινάκων:

$$v_i^\tau A = \lambda_i v_i^\tau, \quad i = 1,2,...,n \tag{1.34}$$

προκύπτει ότι οι τα ανύσματα γραμμής

$$v_i^\tau \in \mathbb{R}^{1\times n}, \; i = 1,2,...,n$$

του $V := U^{-1}$ είναι τα αριστερά ιδιοανύσματα του A.

Έστω το γραμμικό, χρονικά αναλλοίωτο και ελεύθερο (εισόδων) σύστημα του χώρου των καταστάσεων:

$$x(k+1) = Ax(k), \quad A \in \mathbb{R}^{n\times n}, x(0) \neq 0$$

Έστω ότι ο $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ έχει n διακριτές πραγματικές ιδιοτιμές

$$\lambda_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1,2,\ldots,n \quad \lambda_i \neq \lambda_j \quad i \neq j$$

Τότε ο A έχει n γραμμικώς ανεξάρτητα (δεξιά) ιδιοανύσματα και το ότι τα ιδιοανύσματα $u_i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1,2,\ldots,n$ του A είναι γραμμικώς ανεξάρτητα σημαίνει ότι **δεν υπάρχουν** n μιγαδικοί αριθμοί $c_i \in \mathbb{C}$ με $c_i \neq 0$ για τουλάχιστον ένα $i = 1,2,\ldots,n$ τέτοιοι ώστε

$$u_1c_1 + u_2c_2 + \ldots + u_nc_n = 0$$

ή ισοδύναμα ότι η εξίσωση

$$\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \ldots & u_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

έχει μόνη λύση την

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Έστω αλλαγή συντεταγμένων στο χώρο των καταστάσεων με νέο άνυσμα κατάστασης το

$$z(k) := U^{-1}x(k) = Vx(k)$$

ή

$$x(k) = Uz(k)$$

Άρα

$$x(k+1) = Ax(k)$$

$$Uz(k+1) = AUz(k)$$

$$z(k+1) = U^{-1}AUz(k) = \Lambda z(k)$$

$$z(k+1) = \begin{bmatrix} z_1(k+1) \\ z_2(k+1) \\ \vdots \\ z_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(k) \\ z_2(k) \\ \vdots \\ z_n(k) \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$z_i(k+1) = \lambda_i z_i(k) \qquad i = 1,2,\dots,n$$

$\Rightarrow$

$$z_i(k) = \lambda_i^k z_i(0) \qquad i = 1,2,\dots,n \qquad (1.35)$$

Οι λύσεις $z_i(k), \;\; i = 1,2,\dots,n$ ονομάζονται ιδιοκινήσεις και εξελίσσονται επί των ιδιοανυσμάτων. Υπό μορφή πίνακα οι (1.35) είναι

$$\begin{bmatrix} z_1(k) \\ z_2(k) \\ \vdots \\ z_n(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(0) \\ z_2(0) \\ \vdots \\ z_n(0) \end{bmatrix}$$

Αν

$$\Lambda^k : \underbrace{\Lambda\Lambda\cdots\Lambda}_{k\ \text{φορες}} = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

τότε η

$$z(t) = \Lambda^k z(0)$$

είναι λύση της

$$z(k+1) = \Lambda z(k)$$

Από την

$$\begin{aligned} & x(k) = Uz(k) \\ \Rightarrow\ & z(k) = U^{-1}x(k) \\ \Rightarrow\ & z(0) = U^{-1}x(0) \end{aligned}$$

Και άρα

$$
\begin{aligned}
x(k) &= Uz(k) \\
&= U\Lambda^k z(0) \\
&= U\Lambda^k U^{-1} x(0) \\
&= A^k x(0)
\end{aligned}
$$

Από την οποία προκύπτει ότι

$$\boxed{A^k = U\Lambda^k U^{-1} = U\Lambda^k V}$$

Παράδειγμα. Έστω ότι

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.12 & 0.8 \end{bmatrix},$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι

$$\psi(z) = \det[zI_2 - A] = \det\begin{bmatrix} z & -1 \\ 0.12 & z-0.8 \end{bmatrix} = z(z-0.8) + 0.12$$

$$= z^2 - 0.8z + 0.12 = (z-0.2)(z-0.6)$$

Και άρα οι ιδιοτιμές του συστήματος είναι

$$\lambda_1 = 0.2,\ \lambda_2 = 0.6$$

Τα ιδιοανύσματα

$$u_1 = \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{12} \end{bmatrix}, \quad u_2 = \begin{bmatrix} u_{21} \\ u_{22} \end{bmatrix}$$

Υπολογίζονται ως εξής

$$Au_1 = \lambda_1 u_1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.12 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{12} \end{bmatrix} = (0.2) \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{12} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow u_{12} = 0.2 u_{11}$$

η οποία για $u_{11} = 1$ δίνει $u_{12} = 0.2$, και άρα

$$u_1 = \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.2 \end{bmatrix}$$

Με παρόμοιο τρόπο βρίσκουμε ότι

$$u_2 = \begin{bmatrix} u_{21} \\ u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.6 \end{bmatrix}$$

και άρα

$$U = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0.2 & 0.6 \end{bmatrix}$$

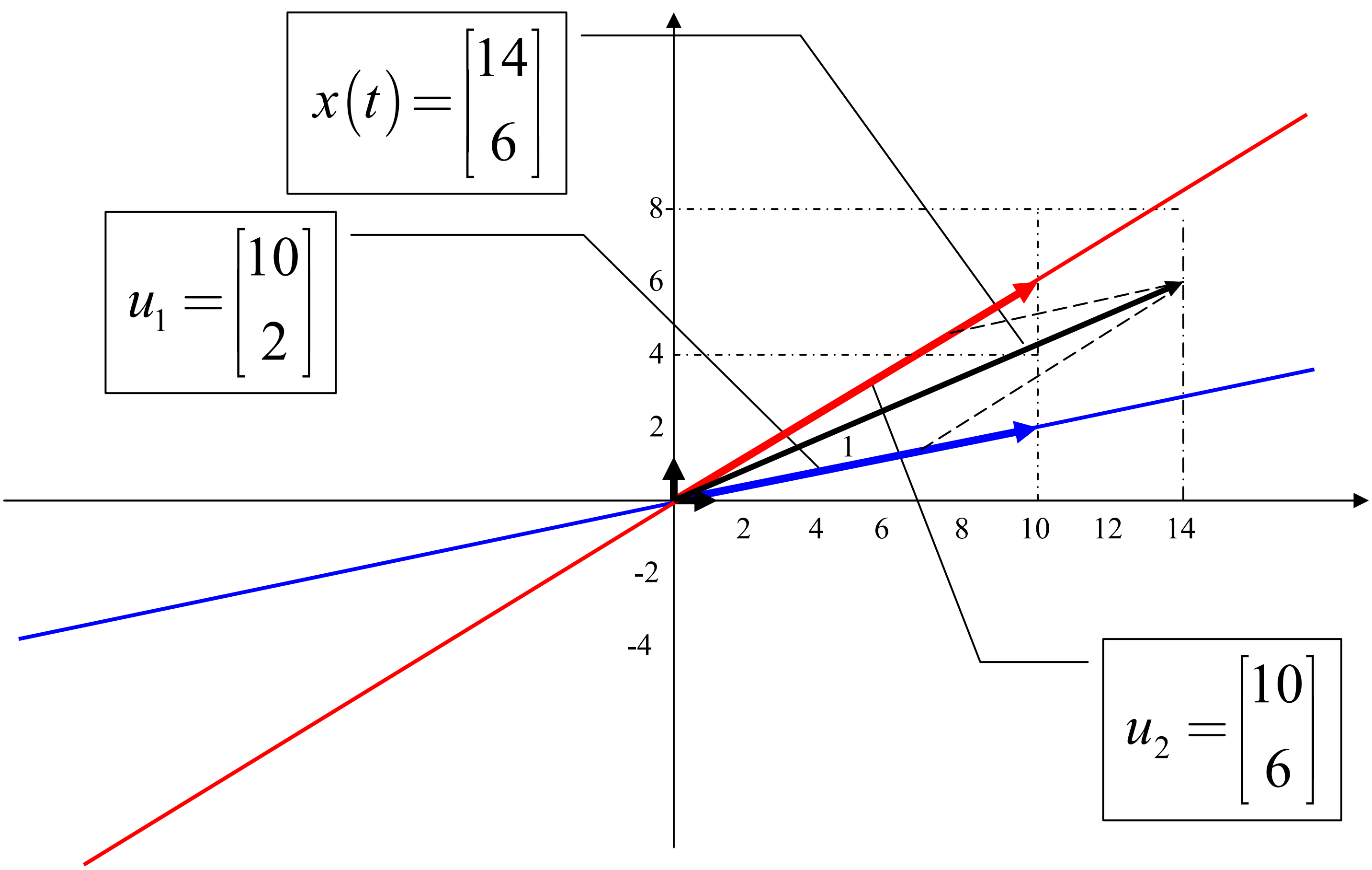
$$U^{-1} = V = \begin{bmatrix} 1.5 & -2.5 \\ -.5 & 2.5 \end{bmatrix}$$

Τελικά ο πίνακας μετάβασης της κατάστασης είναι

$$\Psi(k) = A^k = U\Lambda^k U^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0.2 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (0.2)^k & 0 \\ 0 & (0.6)^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.5 & -2.5 \\ -.5 & 2.5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1.5\times.2^k - .5\times.6^k & -2.5\times.2^k + 2.4\times.6^k \\ .3\times.2^k - .3\times.6^k & -.5\times.2^k + 1.5\times.6^k \end{bmatrix} \quad (1.36)$$



$$x(k) = Uz(k) = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(k) \\ z_2(k) \\ \vdots \\ z_n(k) \end{bmatrix}$$

$$= u_1 z_1(k) + u_2 z_2(k) + \ldots + u_n z_n(k)$$

$$= u_1 \lambda_1^k z_1(0) + u_1 \lambda_2^k z_2(0) + \ldots + u_n \lambda_n^k z_n(0)$$

από την

$$z(0) = U^{-1} x(0) = Vx(0)$$

$$\begin{bmatrix} z_1(0) \\ z_2(0) \\ \vdots \\ z_n(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1^\tau \\ v_2^\tau \\ \vdots \\ v_n^\tau \end{bmatrix} x(0), \quad v_i^\tau \in \mathbb{R}^{1\times n}$$

$$\Rightarrow$$

$$z_i(0) = v_i^\tau x(0), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$
\begin{aligned}
x(k) &= u_1\lambda_1^k z_1(0) + u_1\lambda_2^k z_2(0) + \ldots + u_n\lambda_n^k z_n(0) \\
&= u_1\lambda_1^k v_1^\tau x(0) + u_2\lambda_2^k v_2^\tau x(0) + \ldots + u_n\lambda_n^k v_n^\tau x(0) \\
&= \left[u_1\lambda_1^k v_1^\tau + u_2\lambda_2^k v_2^\tau + \ldots + u_n\lambda_n^k v_n^\tau\right] x(0) \\
&= A^k x(0)
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$

$$
\boxed{\Psi(k) = A^k = \left[u_1\lambda_1^k v_1^\tau + u_2\lambda_2^k v_2^\tau + \ldots + u_n\lambda_n^k v_n^\tau\right]}
$$

Παράδειγμα

$$
A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.12 & 0.8 \end{bmatrix},
$$

$$
U = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0.2 & 0.6 \end{bmatrix}
$$

$$
U^{-1} = V = \begin{bmatrix} 1.5 & -2.5 \\ -.5 & 2.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1^\tau \\ v_2^\tau \end{bmatrix}
$$

$$\Psi(k) = A^k = u_1\lambda_1^k v_1^\tau + u_2\lambda_2^k v_2^\tau$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 0.2 \end{bmatrix} (0.2)^k \begin{bmatrix} 1.5 & -2.5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0.6 \end{bmatrix} (0.6)^k \begin{bmatrix} -0.5 & 2.5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (0.2)^k 1.5 & (0.2)^k (-2.5) \\ 0.2(0.2)^k 1.5 & 0.2(0.2)^k (-2.5) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (0.6)^k (-0.5) & (0.6)^k 2.5 \\ 0.6(0.6)^k (-0.5) & 0.6(0.6)^k 2.5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1.5\times.2^k - .5\times.6^k & -2.5\times.2^k + 2.4\times.6^k \\ .3\times.2^k - .3\times.6^k & -.5\times.2^k + 1.5\times.6^k \end{bmatrix} \qquad (1.37)$$

(συγκρίνατε την (1.37) με την (1.36)).

ΔΙΑΓΩΝΙΑ ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΜΟΡΦΗ

Έστω το γραμμικό, χρονικά αναλλοίωτο σύστημα του χώρου των καταστάσεων διακριτού χρόνου:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \qquad (1.38)$$

$$y(k) = Cx(k) + Du(k), \qquad (1.39)$$

$$A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times m}$$

$$C \in \mathbb{R}^{p\times n}, D \in \mathbb{R}^{p\times m}$$

Έστω ότι ο $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ έχει n διακριτές πραγματικές ιδιοτιμές

$$\lambda_i \in \mathbb{R}, \quad i=1,2,\dots,n \quad \lambda_i \neq \lambda_j \quad i \neq j$$

έτσι ώστε ο πίνακας U των δεξιών ιδιοανυσμάτων του A να είναι ομαλός και έστω αλλαγή συντεταγμένων στο χώρο των καταστάσεων η οποία ορίζεται από την

$$z(k) := U^{-1}x(k) = Vx(k)$$

ή

$$x(k) = Uz(k)$$

Έτσι ώστε η (1.38) να γράφεται

$$Uz(k) = AUz(k) + Bu(k) \qquad (1.40)$$

ή

$$z(k) = U^{-1}AUz(k) + U^{-1}Bu(k) \qquad (1.41)$$

και αν ορίσουμε

$$\Lambda := U^{-1}AU = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

$$\mathrm{E} := U^{-1}B \in \mathbb{R}^{n\times m}$$

Η (1.41) γράφεται

$$z(k)=\Lambda z(k)+Eu(k) \qquad (1.42)$$

Επίσης (1.39) γράφεται

$$y(t)=CUz(t)+Du(t)$$

ή

$$y(t)=\Gamma z(t)+Du(t) \qquad (1.43)$$

όπου

$$\Gamma := CU \in \mathbb{R}^{p\times n}$$

Η περιγραφή $(\Lambda \in \mathbb{R}^{n\times n}, E \in \mathbb{R}^{n\times m}, \Gamma \in \mathbb{R}^{p\times n}, D \in \mathbb{R}^{p\times m})$ ονομάζεται διαγώνια κανονική μορφή της περιγραφής $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times m}, C \in \mathbb{R}^{p\times n}, D \in \mathbb{R}^{p\times m}$.

Άσκηση ΧΧ.

Αποδείξτε ότι η διαγώνια κανονική μορφή είναι

1. *ελέγξιμη* αν και μόνο αν όλες οι γραμμές $\varepsilon_i \in \mathbb{R}^{1\times m}$, $i=1,2,...,n$ του πίνακα $E=\begin{bmatrix} \varepsilon_1^\tau \\ \varepsilon_2^\tau \\ \vdots \\ \varepsilon_n^\tau \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ είναι διάφορες του μηδενικού ανύσματος, δηλαδή, αν και μόνο αν:

$$\varepsilon_i^\tau \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times m}, \ \forall\, i=1,2,...,n$$

1. *παρατηρήσιμη* αν και μόνο αν όλες οι στήλες $\gamma_i \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, $i=1,2,...,n$ του πίνακα $\Gamma := \begin{bmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{p\times n}$ είναι διάφορες του μηδενικού ανύσματος, δηλαδή, αν και μόνο αν

$$\gamma_i \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times 1},\ \forall\ i = 1,2,\ldots,n$$

Ορισμός (ομοιότητα περιγραφών)
Έστω το γραμμικό και χρονικά αναλλοίωτο σύστημα του χώρου των καταστάσεων διακριτού χρόνου (1.38) (1.39) όπου

$$\left(A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times m}, C \in \mathbb{R}^{p\times n}, D \in \mathbb{R}^{p\times m}\right) \qquad (1.44)$$

Έστω ο μετασχηματισμός του ανύσματος κατάστασης $x(k) \in \mathbb{R}^n$ που ορίζεται από την σχέση

$$\tilde{x}(k) = Tx(k) \qquad (1.45)$$

όπου $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ και ομαλός ($|A| \neq 0$) έτσι ώστε

$$\tilde{x}(k+1) = \tilde{A}x(k) + \tilde{B}u(k) \qquad (1.46)$$

$$y(k) = \tilde{C}\tilde{x}(k) + Du(k), \qquad (1.47)$$

όπου

$$\tilde{A} = TAT^{-1},\ \tilde{B} = TB,\ \ \tilde{C} = CT^{-1},\ \ \tilde{D} = D \qquad (1.48)$$

Τότε οι περιγραφές (1.38)-(1.39) και (1.46)-(1.47) ονομάζονται όμοιες (similar) περιγραφές και ο μετασχηματισμός (1.45) ονομάζεται μετασχηματισμός ομοιότητας (similarity transformation).

Προφανώς οι περιγραφές $\left(A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times m}, C \in \mathbb{R}^{p\times n}, D \in \mathbb{R}^{p\times m}\right)$ και $(\Lambda \in \mathbb{R}^{n\times n}, E \in \mathbb{R}^{n\times m}, \Gamma \in \mathbb{R}^{p\times n}, D \in \mathbb{R}^{p\times m})$ στις (1.38)-(1.39) και τις (1.46)-(1.47) είναι όμοιες

Αποδείξτε ότι

1. όμοιες περιγραφές έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές και τις ίδιες συναρτήσεις μεταφοράς.
2. η ελεγξιμότητα (η παρατηρησιμότητα) παραμένουν αναλλοίωτες κάτω από μετασχηματισμούς ομοιότητας.

Ελεγξιμότητα – Παρατηρησιμότητα και Συνάρτηση Μεταφοράς Αποσυζευκτικά μηδενικά.

Έστω το γραμμικό, χρονικά αναλλοίωτο σύστημα του χώρου των καταστάσεων διακριτού χρόνου μιας εισόδου και μιας εξόδου $(m = p = 1)$:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \qquad (1.49)$$

$$y(k) = Cx(k) \qquad (1.50)$$

$$A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times 1}, C \in \mathbb{R}^{1\times n}$$

Έστω ότι ο $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ έχει n διακριτές πραγματικές ιδιοτιμές έτσι ώστε η διαγώνια κανονική μορφή του (1.49)-(1.50) να είναι

$$z(k) = \Lambda z(k) + Eu(k) \qquad (1.51)$$
$$y(t) = \Gamma z(t) \qquad (1.52)$$

όπου

$$x(k) = Uz(k) \tag{1.53}$$

και

$$\Lambda := U^{-1}AU = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

$$\mathrm{E} := U^{-1}B \in \mathbb{R}^{n\times 1}$$

$$\Gamma := CU \in \mathbb{R}^{1\times n}$$

Η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος είναι

$$\begin{aligned} G(z) &= C(zI_n - A)^{-1} B = \Gamma U^{-1} = \left(zUU^{-1} - U\Lambda U^{-1}\right)^{-1} UE \\ &= \Gamma U^{-1}\left[U(zI_n - \Lambda)U^{-1}\right]^{-1} UE = \Gamma U^{-1}U(zI_n - \Lambda)^{-1} U^{-1}UE \\ &= \Gamma(zI_n - \Lambda)^{-1} E = \\ &= \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z-\lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & z-\lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & z-\lambda_n \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$
=\begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\frac{1}{z-\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\
0 & \frac{1}{z-\lambda_2} & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & \frac{1}{z-\lambda_n}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix}
$$

$$
=\frac{c_1 e_1}{z-\lambda_1}+\frac{c_2 e_3}{z-\lambda_2}+\cdots+\frac{c_n e_n}{z-\lambda_n}
$$

Θεώρημα

Οι πόλοι της συνάρτησης μεταφοράς ταυτίζονται με τους πόλους του συστήματος αν και μόνο αν το σύστημα είναι ελέγξιμο και παρατηρήσιμο.

Αν στην συνάρτηση μεταφοράς υπάρχει απλοποίηση πόλων και μηδενικών τότε το σύστημα είναι

ή

1. μη ελέγξιμο,

ή

2. μη παρατηρήσιμο

ή

3. μη ελέγξιμο **και** μη παρατηρήσιμο.

Απόδειξη

Από την

$$
G(z)=\frac{c_1 e_1}{z-\lambda_1}+\frac{c_2 e_2}{z-\lambda_2}+\cdots+\frac{c_n e_n}{z-\lambda_n} \qquad (1.54)
$$

αν κατά την δημιουργία της συνάρτηση μεταφοράς ο πόλος λ_i δεν εμφανίζεται στην $G(s)$ τότε στην (1.54) ο όρος

$$\frac{c_i e_i}{z-\lambda_i} = 0 \tag{1.55}$$

Η (1.55) συνεπάγεται ότι:

ή

$$c_i = 0$$

και άρα βάσει της άσκησης (XX) το σύστημα είναι μη παρατηρήσιμο

ή

$$e_i = 0$$

και άρα βάσει της άσκησης (XX) το σύστημα είναι μη ελέγξιμο

ή

$$c_i = 0 \text{ και } e_i = 0$$

και άρα βάσει της άσκησης (XX) το σύστημα είναι μη παρατηρήσιμο και μη ελέγξιμο.

Παράδειγμα

Έστω το γραμμικό και χρονικά αναλλοίωτο σύστημα διακριτού χρόνου του χώρου των καταστάσεων

$$z(k+1) = \Lambda z(k) + \mathrm{E} u(k)$$

$$y(k) = \Gamma z(k) + D u(k)$$

Έστω $n = 4,\ m = p = 1$ (με μία είσοδο και μια έξοδο) και $D = 0$

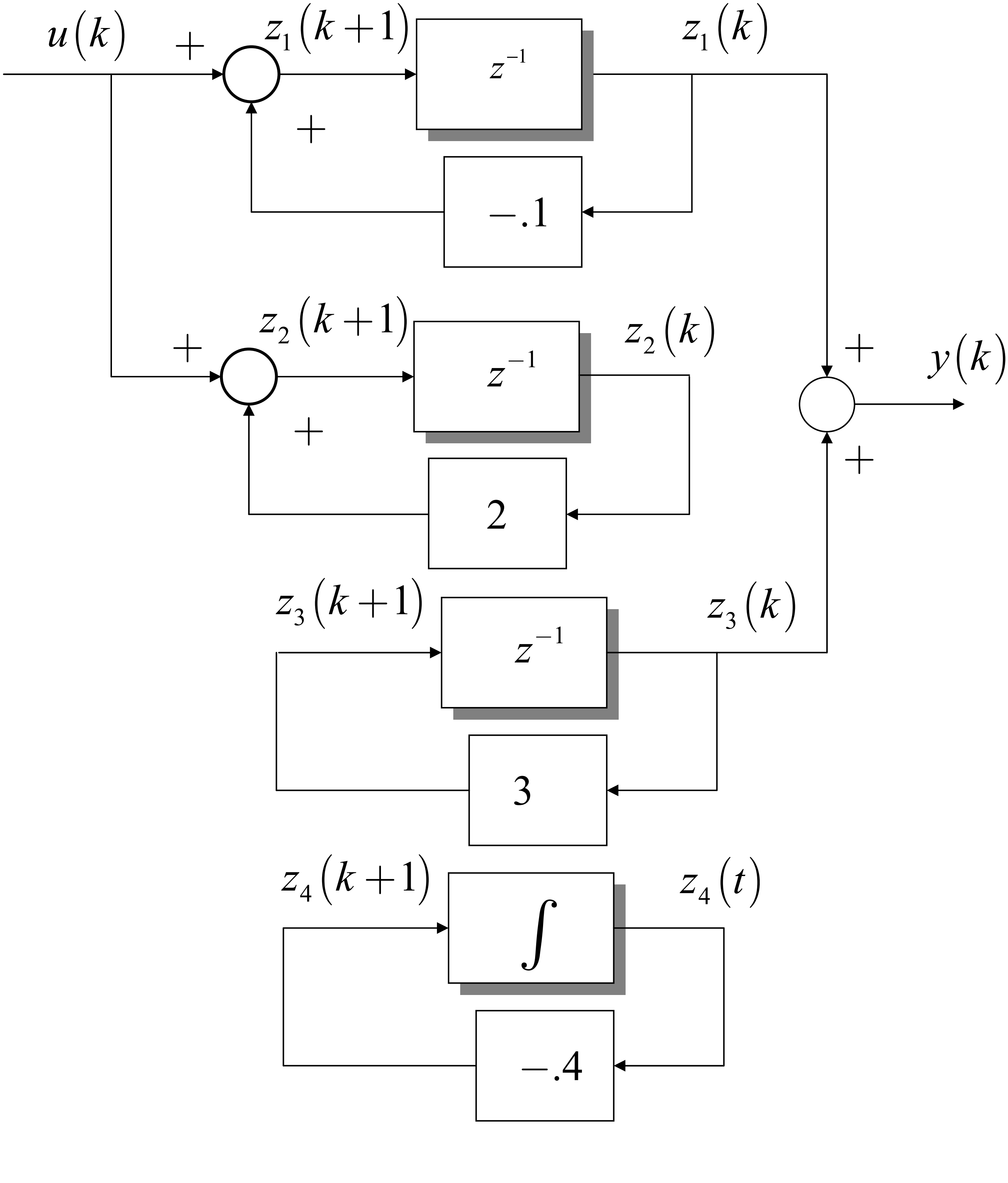
$$\begin{bmatrix} z_1(k+1) \\ z_2(k+1) \\ z_3(k+1) \\ z_4(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(k) \\ z_2(k) \\ z_3(k) \\ z_4(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(k) \\ z_2(k) \\ z_3(k) \\ z_4(k) \end{bmatrix}$$

Άρα βάσει της άσκησης XX το σύστημα είναι μη ελέγξιμο και μη παρατηρήσιμο.

$$z_1(k+1) = (-.1)z_1(k) + u(k)$$
$$z_2(k) = 2z_2(k) + u(k)$$
$$z_3(k) = 3z_3(k)$$
$$z_4(k) = (-.4)z_4(k)$$

$$y(k) = z_1(k) + z_2(k)$$



$u(k)$
$+$
$z_1(k+1)$
z^{-1}
$z_1(k)$
$+$
$-.1$
$z_2(k+1)$
$z_2(k)$
$+$
z^{-1}
$+$
$y(k)$
2
$+$
$z_3(k+1)$
z^{-1}
$z_3(k)$
3
$z_4(k+1)$
$\int$
$z_4(t)$
$-.4$

Παρατηρείστε ότι
η είσοδος $u(k)$ δεν επηρεάζει τις καταστάσεις $z_3(k), z_4(k)$ και ότι
ή έξοδος $y(k)$ δεν επηρεάζεται από τις καταστάσεις $z_2(k), z_4(k)$.

$$zI_4 - \Lambda = \begin{bmatrix} z+.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z-2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z-3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z+.4 \end{bmatrix}$$

$$(zI_4 - \Lambda)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{z+.1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{z-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{z-3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{z+.4} \end{bmatrix}$$

$$\left(zI_4-\Lambda\right)^{-1}\mathrm{E}=\begin{bmatrix}\frac{1}{z+.1} & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{z-2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{z-3} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{z+.4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{z+1}\\ \frac{1}{z-2}\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

$$G\left(z\right)=\Gamma\left(zI_4-\Lambda\right)^{-1}\mathrm{E}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{z+.1}\\ \frac{1}{z-2}\\ 0\\ 0\end{bmatrix}=\frac{1}{z+.1}$$

Μια άλλη περιγραφή με συνάρτηση μεταφοράς την

$$G\left(z\right)=\frac{1}{z+.1}$$

είναι η

$$A=\left[-.1\right],B=1,C=1,D=0$$

$$G(z)=C(z-A)^{-1}B=1(z+1)^{-1}1=\frac{1}{z+.1}$$

Δημιουργήθηκε την 12/12/2004 12:40:00 AMCreated by A. Vardulakis