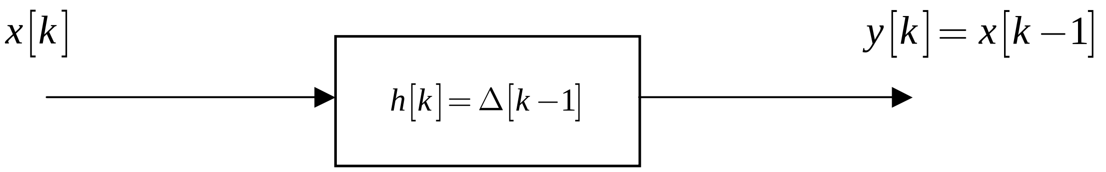
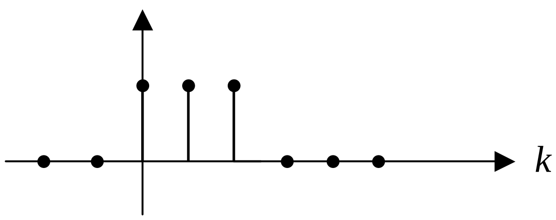
ΠΡΑΓΜΑΤΟΠΟΙΗΣΕΙΣ ΓΕΔΣΣ (Realisations)

Μοναδιαία χρονική καθυστέρηση (Unit time delay)

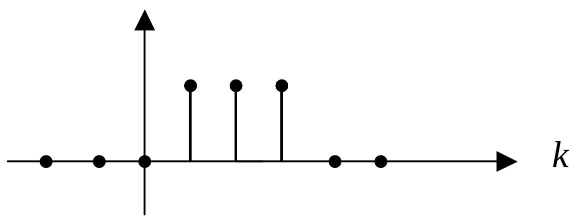
$$y[k] = x[k-1]$$



$x[k] = u[k] - u[k-3]$



$y[k] = x[k-1] = u[k-1] - u[k-4]$



Έστω D ο τελεστής μοναδιαίας χρονικής καθυστέρησης

$$\begin{aligned}
&Dx[k] = x[k-1] \\
&D^2x[k] = DDx[k] = Dx[k-1] = x[k-2] \\
&\vdots \\
&D^n x[k] = x[k-n]
\end{aligned}$$

Θεωρήστε την ΓΕΔΣΣ

$$y[k] + \sum_{i=1}^{n} a_i y[k-i] = \sum_{i=0}^{m} b_i x[k-i]$$

$$\begin{aligned}
&y[k] + a_1 y[k-1] + a_2 y[k-2] + \ldots + a_n y[k-n] \\
&= b_0 x[k] + b_1 x[k-1] + b_2 x[k-2] + \ldots + b_m x[k-m] \qquad (1)
\end{aligned}$$

Κάνοντας χρήση του τελεστή μοναδιαίας χρονικής καθυστέρησης η (1) γράφεται

$$y[k]+a_1Dy[k]+a_2D^2y[k]+...+a_nD^ny[k]$$
$$=b_0x[k]+b_1Dx[k]+b_2D^2x[k]+...+b_mD^mx[k] \qquad (2)$$

ή

$$\left(1+a_1D+a_2D^2+...+a_nD^n\right)y[k]$$
$$=\left(b_0+b_1D+b_2D^2+...+b_mD^m\right)x[k] \qquad (3)$$

Εισάγοντας την νέα μεταβλητή $\beta(k)$ η (3) είναι ισοδύναμη με τις ΓΕΔΣΣ:

$$\left(1+a_1D+a_2D^2+...+a_nD^n\right)\beta[k]=x[k] \qquad (4)$$

$$y[k]=\left(b_0+b_1D+b_2D^2+...+b_mD^m\right)\beta[k] \qquad (5)$$

διότι απαλείφοντας από τις (4) και (5) την μεταβλητή $\beta(k)$ παίρνουμε την (3).

Παράδειγμα

Έστω η ΓΕΔΣΣ

$$y[k]+a_1y[k-1]=b_0x[k]+b_1x[k-1] \qquad (6)$$

$$y[k]+a_1Dy[k]=b_0x[k]+b_1Dx[k]$$

$$\left(1+a_1D\right)y[k]=\left(b_0+b_1D\right)x[k] \qquad (7)$$

Αν εισάγουμε νέα μεταβλητή $\beta[k]$ η ΓΕΔΣΣ (7) περιγράφεται και από τις ΓΕΔΣΣ

$$\left(1+a_1 D\right)\beta\left[k\right]=x\left[k\right] \qquad (8)$$

$$y\left[k\right]=\left(b_0+b_1 D\right)\beta\left[k\right] \qquad (9)$$

Διότι αν, από τις (8) και (9) απαλείψουμε την μεταβλητή $\beta\left(t\right)$, παίρνουμε την (7)

$$y\left[k\right]=\left(b_0+b_1 D\right)\beta\left[k\right]=\left(b_0+b_1 D\right)\frac{1}{\left(1+a_1 D\right)}x\left[k\right]$$

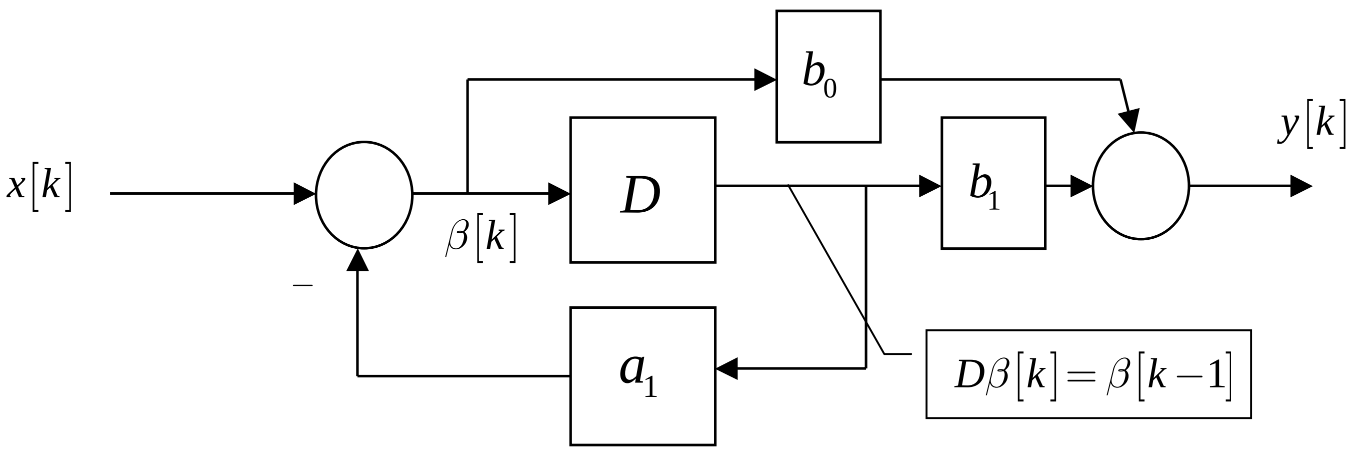
$$\Rightarrow$$

$$\left(1+a_1 D\right)y\left[k\right]=\left(b_0+b_1 D\right)x\left[k\right]$$

Οι (8) και (9) γράφονται

$$\beta\left[k\right]=x\left[k\right]-a_1 D\beta\left[k\right]$$

$$y\left[k\right]=b_0\beta\left[k\right]+b_1 D\beta\left[k\right]$$



Διακριτοποίηση στον χρόνο διαφορικών εξισώσεων (Discretization)

Διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως.
Έστω η γραμμική ΔΕ με σταθερούς συντελεστές

$$\frac{dy(t)}{dt} = -ay(t) + bx(t) \tag{1}$$

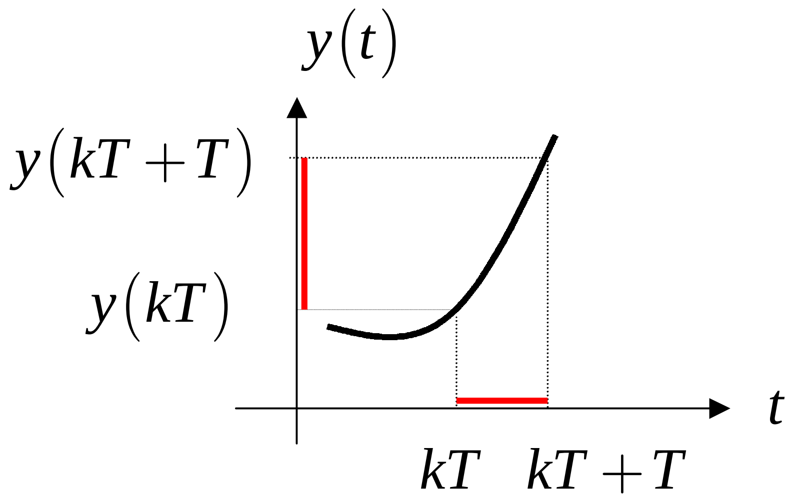
Θέτοντας

$$t = kT, \qquad T > 0$$

$$\left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_{t=kT} = -ay(kT) + bx(kT)$$

Η παράγωγος στην (1) μπορεί να προσεγγιστεί από την

$$\left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_{t=kT} = \frac{y(kT+T) - y(kT)}{T}$$



(καλή ακρίβεια αν $y(t)$ συνεχής και T αρκούντως μικρό)

και άρα

$$\frac{y(kT+T)-y(kT)}{T}=-ay(kT)+bx(kT) \qquad (2)$$

Για $T=1$ αντικαθιστώντας το k απο το $k-1$, η (2) γράφεται

$$y[k]-y[k-1]=-aTy[k-1]+bTx[k-1] \qquad (3)$$

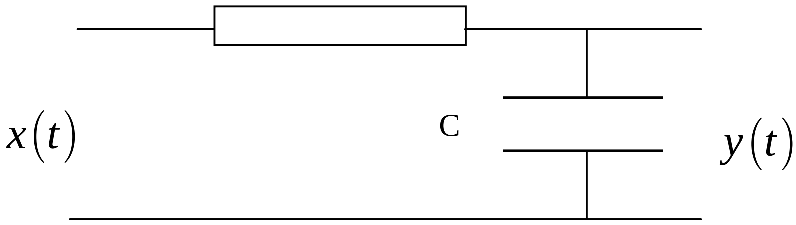
$$y[k]=(1-aT)y(k-1)+bTx[k-1]$$

$$y[k]+a_1y(k-1)=b_1x[k-1]$$

όπου

$$a_1=-(1-aT) \text{ και } b_1=bT$$

ΦΙΛΤΡΟ RC (ηλεκτρικό κύκλωμα)



Διαφορική εξίσωση φίλτρου

$$RC\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=x(t)$$
$$RC\frac{y[kT+T]-y[kT]}{T}+y[kT]=x[kT]$$
$$y[k+1]-y[k]+\frac{T}{RC}y[k]=\frac{T}{RC}x[k]$$
$$k\rightarrow k-1$$
$$y[k]-y[k-1]+\frac{T}{RC}y[k-1]=\frac{T}{RC}x[k-1]$$
$$y[k]=\left(1-\frac{T}{RC}\right)y[k-1]+\frac{T}{RC}x[k-1]$$

$$y[k]=-ay[k-1]+bx[k-1]$$

$$y[k]+Dy[k]=bDx[k]$$
$$(1+D)\,y[k]=bDx[k] \qquad (4)$$

Αν εισάγουμε νέα μεταβλητή $\beta[k]$ η ΓΕΔΣΣ (7) περιγράφεται και από τις ΓΕΔΣΣ

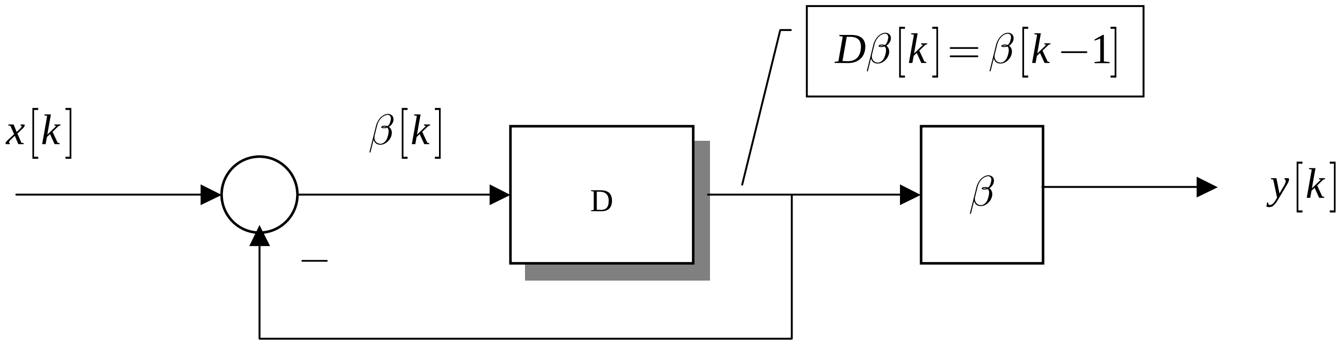
$$(1+D)\beta[k]=x[k] \tag{5}$$

$$y[k]=bD\beta[k] \tag{6}$$

Η (5) γράφεται

$$\beta[k]=-D\beta[k]+x[k]$$

και η (6) είναι $$y[k]=bD\beta[k]$$



Διάγραμα ροής ΓΕΔΣΣ πρώτης τάξης

$$y[k]=-ay[k-1]+bx[k-1]$$

Έστω διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές δεύτερης τάξης (Φίλτρο - ηλεκτρικό κύκλωμα LRC)

$$\frac{d^2y(y)}{dt^2}+a_1\frac{dy(t)}{dt}+a_0y(t)=b_1\frac{dx(t)}{dt}+b_0x(t)$$

$$\left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_{t=kT}=\frac{dy(kT)}{dt}=\frac{y(kT+T)-y(kT)}{T} \quad (7)$$

$$\left.\frac{d^2y(t)}{dt^2}\right|_{t=kT}=\frac{d^2y(kT)}{dt}=\frac{\frac{dy(kT+T)}{dt}-\frac{dy(kT)}{dt}}{T} \quad (8)$$

συνδυάζοντας τις (7) και (8) έχουμε την παρακάτω προσέγγιση για την δεύτερη παράγωγο

$$\left.\frac{d^2y(t)}{dt^2}\right|_{y=kT}=\frac{d^2y(kT)}{dt^2}\approx\frac{y(kT+2T)-2y(kT+T)+y(kT)}{T^2}$$

Η παραπάνω ονομάζεται προσέγγιση Euler της δεύτερης παραγώγου.

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω εκφράσεις στην δ.ε. έχουμε

$$\frac{y(kT+2T)-2y(kT+T)+y(kT)}{T^2}+a_1\frac{y(kT+T)-y(kT)}{T}+a_0y(kT$$

$$=b_1\frac{x(kT+T)-x(kT)}{T}+b_0x(kT)$$

ή

$$y(kT+2T)+(a_1T-2)y(kT+T)+\left(1-a_1T+a_0T^2\right)y(kT)$$

$$=b_1Tx(kT+T)+\left(b_0T^2-b_1T\right)x(kT)$$

ή

$$y(kT+2T)+\alpha_1 y(kT+T)+\alpha_2 y(kT)$$
$$=\beta_1 x(kT+T)+b_2x(kT) \tag{9}$$

όπου

$$\alpha_1=(a_1T-2),\qquad \alpha_2=\left(1-a_1T+a_0T^2\right)$$
$$\beta_1=b_1T,\qquad \beta_2=\left(b_0T^2-b_1T\right)$$

Για $T=1$

$$y(k+2)+\alpha_1 y(k+1)+\alpha_2 y(k)$$

$$=\beta_1 x(k+1)+b_2 x(k)$$

και αντικαθιστώντας το

$$\begin{aligned}&k \text{ απο το } k-2\\&k+1 \text{ απο το } k-1\\&k+2 \text{ απο το } k\end{aligned}$$

η (9) γράφεται

$$y(k)+\alpha_1 y(k-1)+\alpha_2 y(k-2)=\beta_1 x(k-1)+\beta_2 x(k-2)$$

$$y[k]+\sum_{i=1}^{2}\alpha_i y[k-i]=\sum_{i=0}^{2}\beta_i x[k-i]$$

Βάσει των

$$\begin{aligned}&Dx[k]=x[k-1]\\&D^2x[k]=DDx[k]=Dx[k-1]=x[k-2]\\&\vdots\\&D^n x[k]=x[k-n]\end{aligned}$$

η

$$y(k)+\alpha_1 y(k-1)+\alpha_2 y(k-2)=\beta_1 x(k-1)+\beta_2 x(k-2)$$

γράφεται

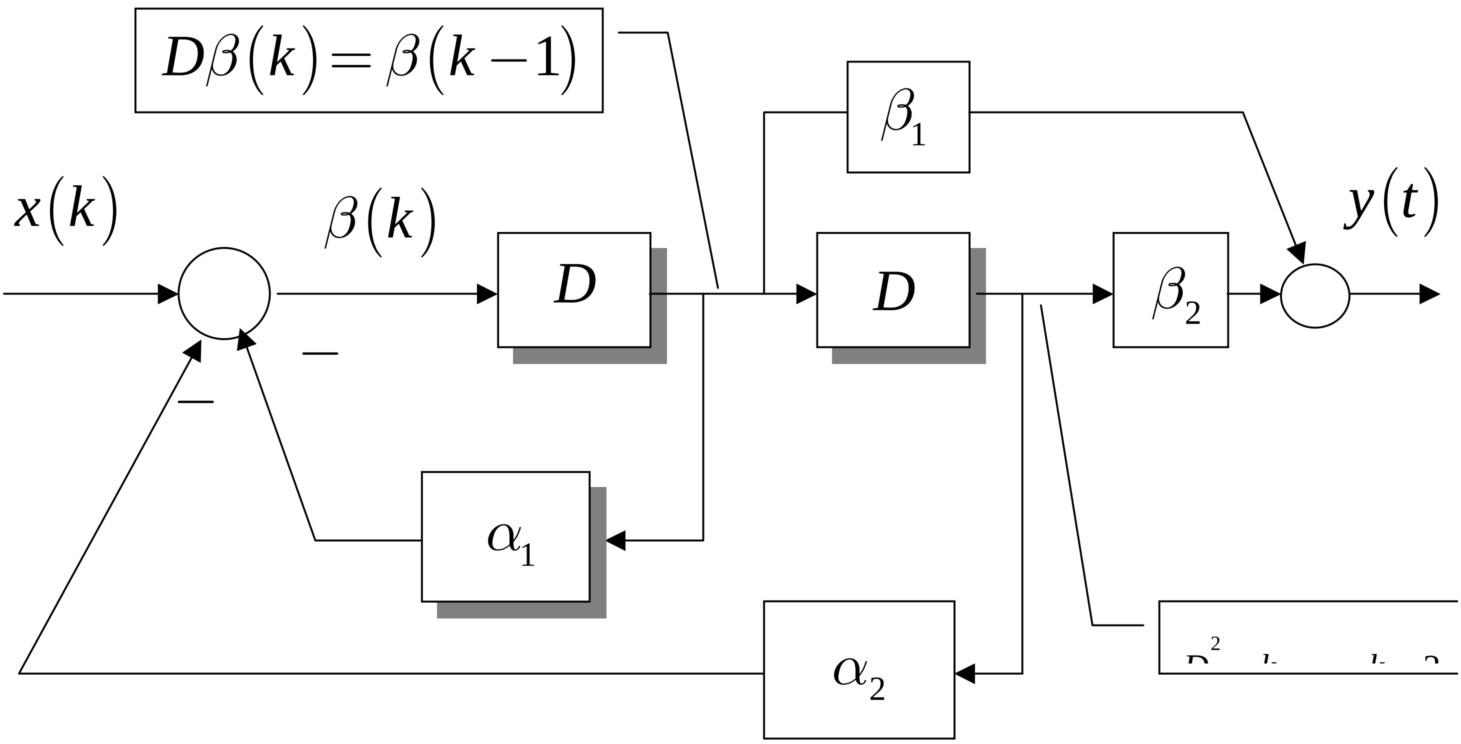
$$y(k)+\alpha_1 D y(k)+\alpha_2 D^2 y(k)=\beta_1 D x(k)+\beta_2 D^2 x(k)$$

$$\left(1+\alpha_1 D+\alpha_2 D^2\right)y(k)=\left(\beta_1 D+\beta_2 D^2\right)x(k)$$

$$\left(1+\alpha_1 D+\alpha_2 D^2\right)\beta(k)=x(k)$$

$$y(k)=\left(\beta_1 D+\beta_2 D^2\right)\beta(k)$$

$$\beta(k)+\alpha_1 D\beta(k)+\alpha_2 D^2\beta(k)=x(k)$$
$$y(k)=\beta_1 D\beta(k)+\beta_2 D^2\beta(k)$$



ΓΕΔΣΣ δεύτερης τάξης

$$y[k] = a_0 x[k] + b_1 y[k-1] + b_2 y[k-2]$$