Η ΣΕΙΡΑ FOURIER ΚΑΙ Ο ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ FOURIER
ΑΝΑΛΥΣΗ ΣΗΜΑΤΩΝ ΩΣ ΠΡΟΣ ΗΜΙΤΟΝΙΚΕΣ ΣΥΝΙΣΤΩΣΕΣ

Θεωρήστε ένα σήμα συνεχούς χρόνου το οποίο είναι άθροισμα συνημιτονικών όρων της μορφής

$$x(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) + \ldots + A_N \cos(\omega_N t + \varphi_N)$$
$$-\infty \le t \le \infty$$

όπου

$$A_i \ge 0, \quad \omega_i > 0, \quad \varphi_i \ge 0, \quad i = 1, 2, \ldots, N$$

A_i «πλάτος» του συνημιτονικού όρου $A_i \cos(\omega_i t + \varphi_i)$

ω_i «κυκλική συχνότητα» του συνημιτονικού όρου $A_i \cos(\omega_i t + \varphi_i)$

φ_i «φάση» του συνημιτονικού όρου $A_i \cos(\omega_i t + \varphi_i)$

Οι πραγματικοί αριθμοί

$$A_1, A_2, \ldots, A_N \qquad \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N \qquad \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_N$$

προσδιορίζουν πλήρως το σήμα $x(t)$

Παράδειγμα

Έστω $N = 3$ και

$$x(t) = A_1 \cos t + A_2 \cos\left(4t + \frac{\pi}{3}\right) + A_3 \cos\left(8t + \frac{\pi}{2}\right) \qquad -\infty \le t \le \infty$$

$$\omega_1 = 1, \qquad \varphi_1 = 0$$

$$\omega_2 = 4, \qquad \varphi_2 = \frac{\pi}{3}$$

$$\omega_3 = 8, \qquad \varphi_3 = \frac{\pi}{2}$$

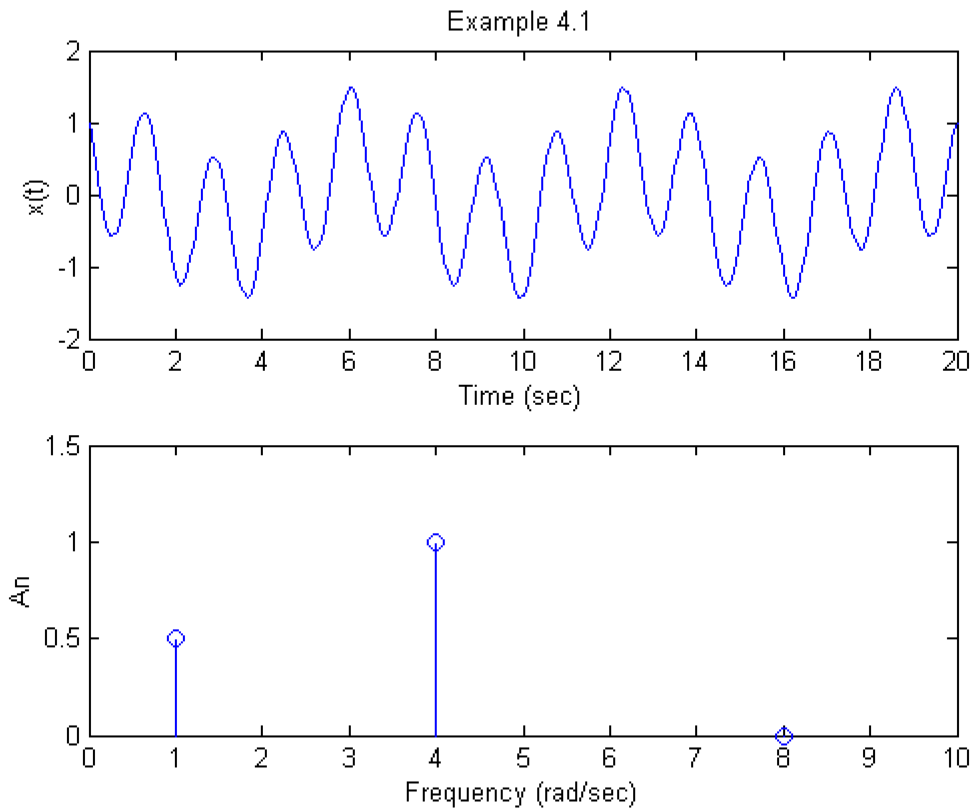
Με το MATLAB ".m" file:

```
% Example 4.1
% gives example of the frequency representation of
% a system
t = 0:20/400:20;
w1 = 1; w2 = 4; w3 = 8;
A1 = input('Input the amplitude A1 for w1 = 1: ');
A2 = input('Input the amplitude A2 for w2 = 4: ');
A3 = input('Input the amplitude A3 for w3 = 8: ');
x = A1*cos(w1*t)+A2*cos(w2*t+pi/3)+A3*cos(w3*t+pi/2);
clf
subplot(211),plot(t,x)
title('Example 4.1')
ylabel('x(t)')
xlabel('Time (sec)')
subplot(212),stem([w1 w2 w3],[A1 A2 A3])
v = [0 10 0 1.5*max([A1,A2,A3])];
axis(v);
ylabel('An')
xlabel('Frequency (rad/sec)')
axis;
subplot(111)
% see the m-file fig4_4.m to get the phase plot
```

παίρνουμε:

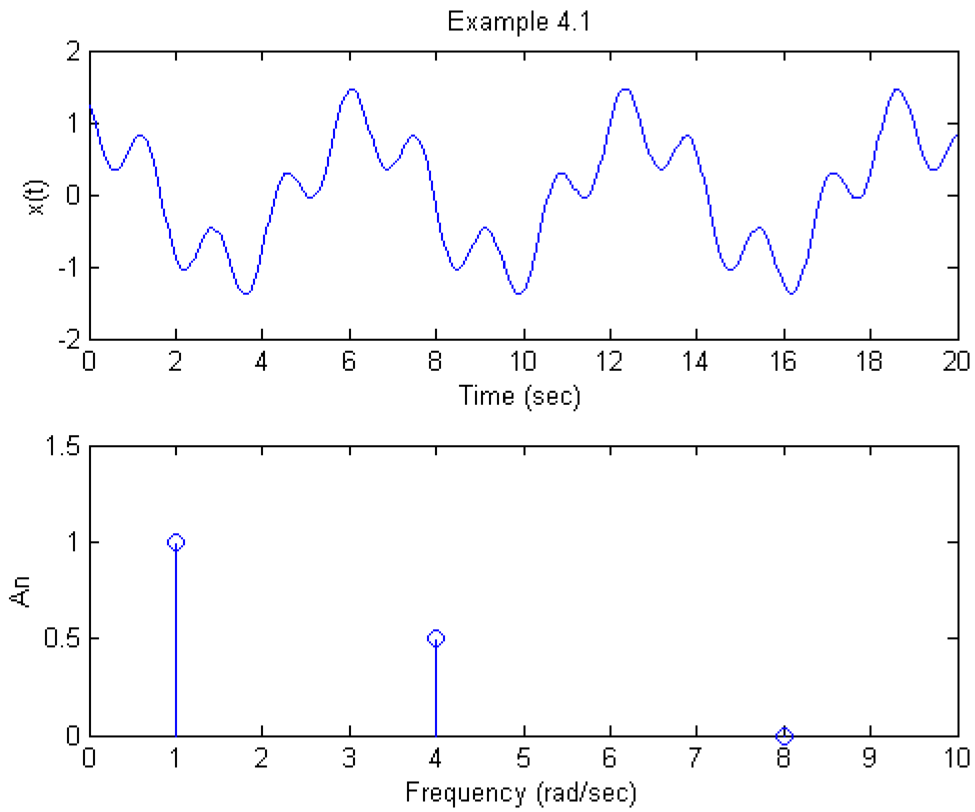
Για $A_1 = .5 \quad A_2 = 1 \qquad A_3 = 0$

$$x(t) = 0.5\cos t + \cos\left(4t + \frac{\pi}{3}\right) \qquad -\infty \le t \le \infty$$



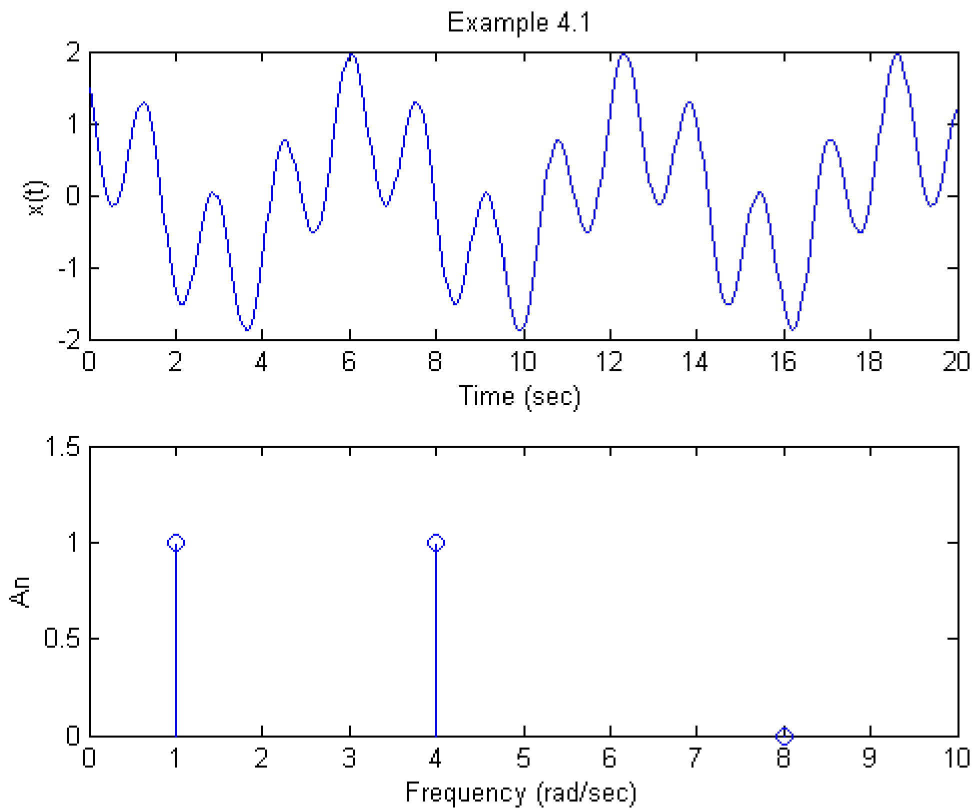
Για $A_1 = 1 \quad A_2 = .5 \quad A_3 = 0$

$$x(t) = \cos t + .5\cos\left(4t + \frac{\pi}{3}\right) \qquad -\infty \le t \le \infty$$



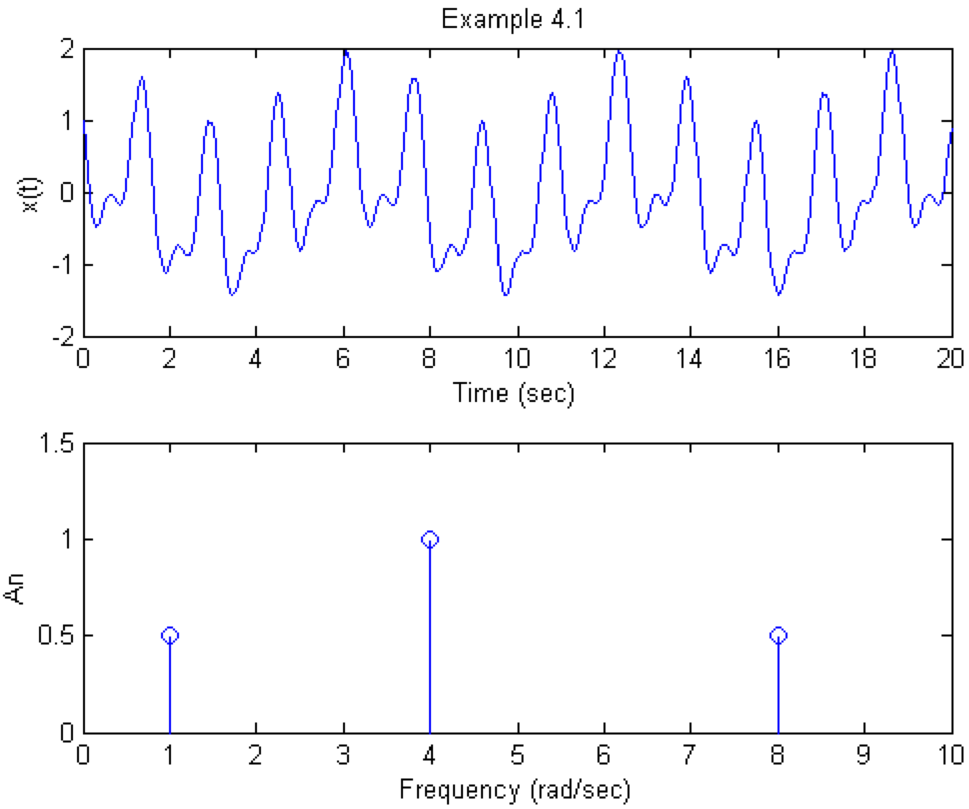
Για $A_1 = 1 \quad A_2 = 1 \qquad A_3 = 0$

$$x(t) = \cos t + \cos\left(4t + \frac{\pi}{3}\right) \qquad -\infty \le t \le \infty$$



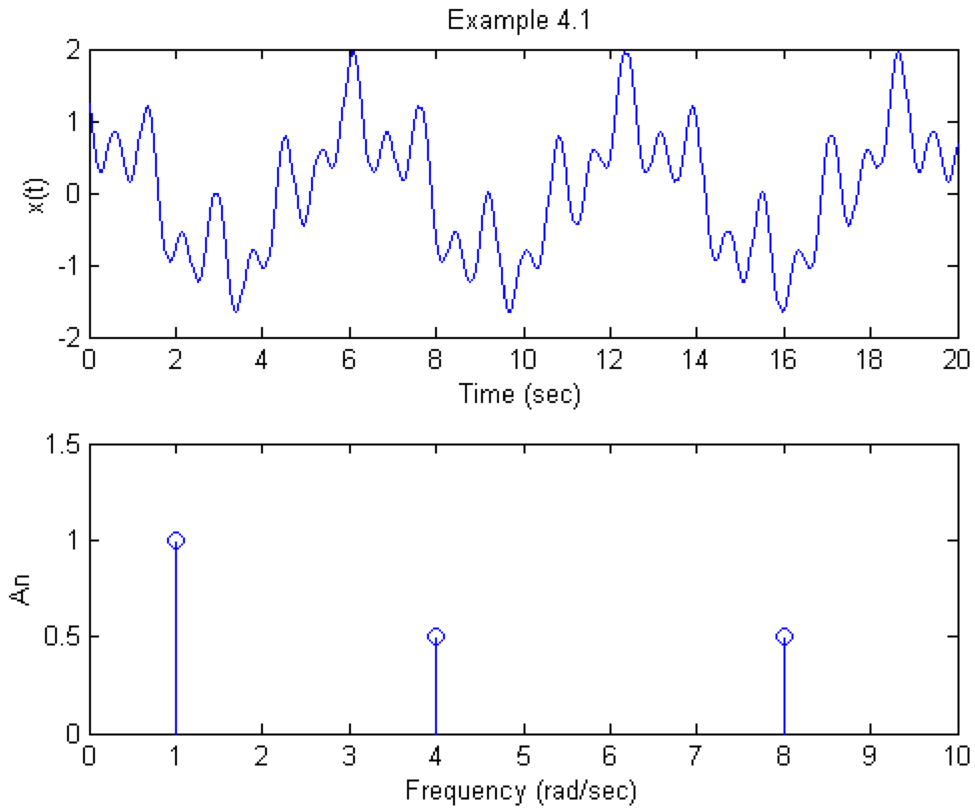
Για $A_1 = .5 \quad A_2 = 1 \qquad A_3 = .5$

$$x(t) = .5\cos t + \cos\left(4t + \frac{\pi}{3}\right) + .5\cos\left(8t + \frac{\pi}{2}\right) \qquad -\infty \le t \le \infty$$



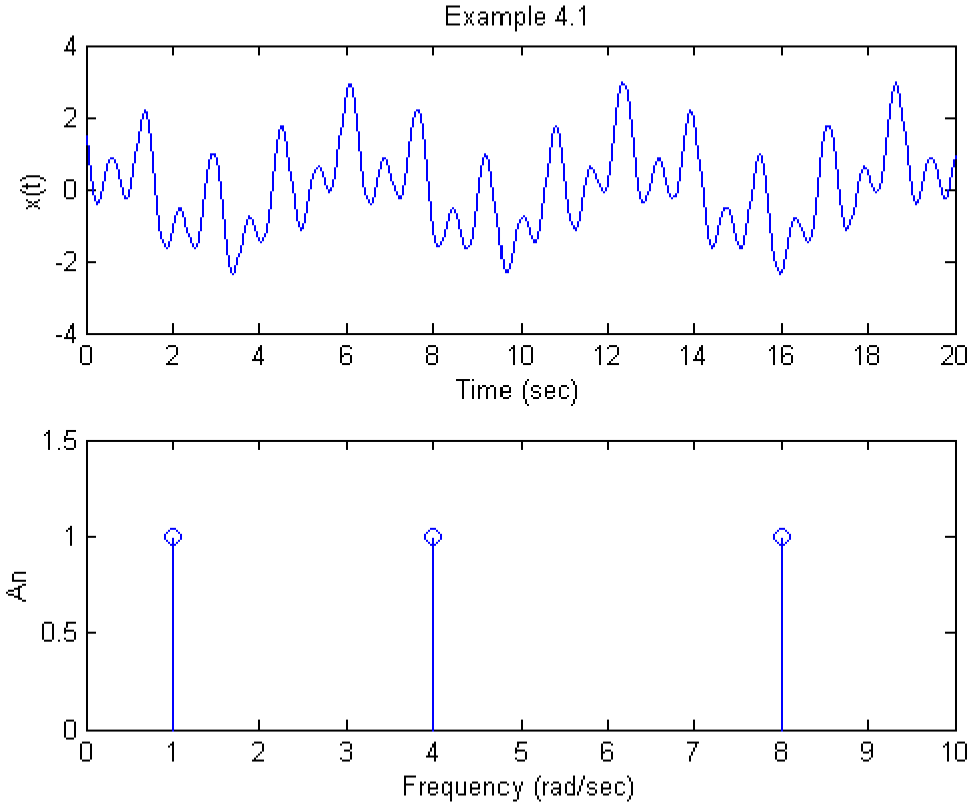
Για $A_1 = 1 \quad A_2 = .5 \qquad A_3 = .5$

$$x(t) = \cos t + .5\cos\left(4t + \frac{\pi}{3}\right) + .5\cos\left(8t + \frac{\pi}{2}\right) \qquad -\infty \le t \le \infty$$



Για $A_1 = 1 \quad A_2 = 1 \qquad A_3 = 1$

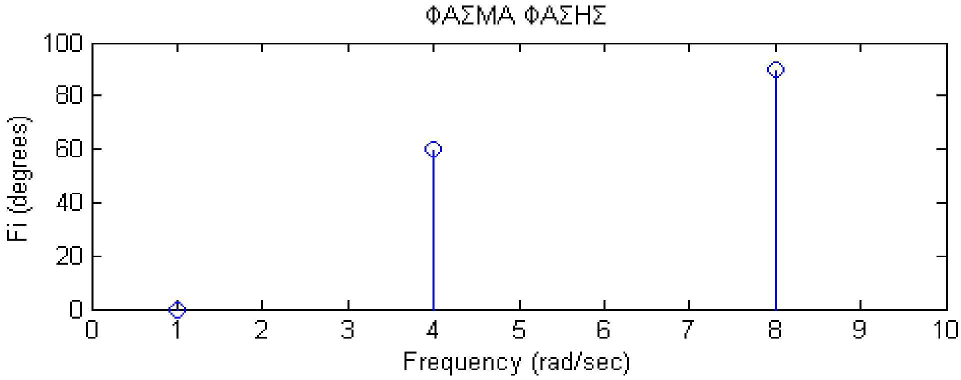
$$x(t) = \cos t + \cos\left(4t + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(8t + \frac{\pi}{2}\right) \qquad -\infty \le t \le \infty$$



Το φάσμα των φάσεων της

$$x(t) = A_1 \cos t + A_2 \cos\left(4t + \frac{\pi}{3}\right) + A_3 \cos\left(8t + \frac{\pi}{2}\right) \qquad -\infty \leq t \leq \infty$$

Είναι



Κάθε σήμα ημιτονικής ή συνημιτονικής μορφής :

$$x(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) + \ldots + A_N \cos(\omega_N t + \varphi_N)$$
$$-\infty \leq t \leq \infty$$

χαρακτηρίζεται από τα φάσματα των πλατών και των φάσεων

φάσμα των πλατών είναι η γραφική παράσταση των πλατών A_k των ημιτονικών/συνημιτονικών όρων του σήματος $x(t)$ σαν συνάρτηση των κυκλικών συχνοτήτων ω_k $\quad k = 1, 2, \ldots, N$

φάσμα των φάσεων είναι η γραφική παράσταση των φάσεων φ_k των ημιτονικών/συνημιτονικών όρων του σήματος $x(t)$ σαν συνάρτηση των κυκλικών συχνοτήτων ω_k $\quad k = 1, 2, \ldots, N$

ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΗΜΙΤΟΝΙΚΩΝ ΣΗΜΑΤΩΝ

Το σήμα

$$x(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) + \ldots + A_N \cos(\omega_N t + \varphi_N)$$
$$-\infty \le t \le \infty$$

μπορεί να εκφραστεί σε μιγαδική εκθετική μορφή

Θεωρείστε το σήμα

$$A_k e^{j(\omega_k t + \varphi_k)}$$

το οποίο γράφεται

$$A_k e^{j(\omega_k t + \varphi_k)} = A_k \cos(\omega_k t + \varphi_k) + jA_k \sin(\omega_k t + \varphi_k)$$

Άρα το $A_k \cos(\omega_k t + \varphi_k)$ γράφεται ως

$$A_k \cos(\omega_k t + \varphi_k) = \mathrm{Re}\left[A_k e^{j(\omega_k t + \varphi_k)}\right]$$

και το σήμα

$$x(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) + \ldots + A_N \cos(\omega_N t + \varphi_N)$$
$$-\infty \le t \le \infty$$

γράφεται σαν άθροισμα πραγματικών μερών μιγαδικών εκθετικών σημάτων

$$x(t) = \sum_{k=1}^{N} \mathrm{Re}\left[A_k e^{j(\omega_k t + \varphi_k)}\right]$$

Θεωρώντας το συζυγές $A_k e^{-j(\omega_k t + \varphi_k)}$ του $A_k e^{j(\omega_k t + \varphi_k)}$ το παραπάνω σήμα γράφεται[1] ώς

---

[1] Αν $s = a + bj, \overline{s} = a - bj$ τοτε $a = \dfrac{s + \overline{s}}{2}$

$$x(t)=\sum_{k=1}^{N}\mathrm{Re}\left[A_k e^{j(\omega_k t+\varphi_k)}\right]=\sum_{k=1}^{N}\left[\frac{A_k}{2}e^{j(\omega_k t+\varphi_k)}+\frac{A_k}{2}e^{-j(\omega_k t+\varphi_k)}\right]$$

$$c_k=\frac{A_k}{2}e^{j\varphi_k},\qquad k=1,2,\ldots,N\qquad \text{(A)}$$

$$c_{-k}=\frac{A_k}{2}e^{-j\varphi_k},\qquad k=1,2,\ldots,N\qquad \text{(B)}$$

$$x(t)=\sum_{k=1}^{N}\left[c_k e^{j\omega_k t}+c_{-k}e^{-j\omega_k t}\right]$$

$$x(t)=\sum_{k=1}^{N}\left[c_k e^{j\omega_k t}+c_{-k}e^{j(-\omega_k)t}\right]$$

$$x(t)=\sum_{k=1}^{N}c_k e^{j\omega_k t}+\sum_{k=1}^{N}c_{-k}e^{j(-\omega_k)t}$$

$$x(t)=\sum_{k=1}^{N}c_k e^{j\omega_k t}+\sum_{k=-N}^{-1}c_k e^{j\omega_k t}$$

$$x(t)=\sum_{\substack{k=-N\\ k\neq 0}}^{N}c_k e^{j\omega_k t}$$

Η (1) είναι η μιγαδική εκθετική μορφή της

$$x(t)=A_1\cos(\omega_1 t+\varphi_1)+A_2\cos(\omega_2 t+\varphi_2)+\ldots+A_N\cos(\omega_N t+\varphi_N)$$
$$-\infty\le t\le\infty$$

όπου οι συντελεστές

$$c_k = \frac{A_k}{2} e^{j\varphi_k} = \frac{A_k}{2} [\cos\varphi_k + j\sin\varphi_k], \qquad k = 1,2,\ldots,N$$

$$c_{-k} = \frac{A_k}{2} e^{-j\varphi_k} = \frac{A_k}{2} [\cos\varphi_k - j\sin\varphi_k], \qquad k = 1,2,\ldots,N$$

γενικώς μιγαδικοί αριθμοί.

Οι συντελεστές $c_k \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad \sin\varphi_k = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi_k = n\pi$

ΛΟΓΩ ΤΗΣ μιγαδικής εκθετικής μορφής $x(t) = \sum_{\substack{k=-N \\ k\neq 0}}^{N} c_k e^{j\omega_k t}$ και του

γεγονότος ότι

$$|c_k| = |c_{-k}| = |A_k| \qquad k = 1,2,\ldots$$

το φάσμα των πλατών είναι συμμετρική ως προς $\omega_k = 0$ συνάρτηση της κυκλικής συχνότητας ω_k.

Επίσης λόγω της

$$\varphi_{-k} = -\varphi_k$$

το φάσμα των φάσεων είναι περιττή προς $\omega_k = 0$ συνάρτηση της κυκλικής συχνότητας ω_k.

Παράδειγμα

Έστω το σήμα

$$x(t) = \cos t + 0.5\cos\left(4t + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(8t + \frac{\pi}{2}\right) \qquad -\infty \leq t \leq \infty$$

Μέσω των (A) και (B)

$$c_1 = \frac{1}{2} = 0.5, \quad c_2 = \frac{0.5}{2} e^{j\frac{\pi}{3}} = 0.25\angle 60^\circ, \quad c_3 = \frac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{2}} = 0.5\angle 90^\circ$$

$$c_{-1} = \frac{1}{2} = 0.5, \quad c_{-2} = \frac{0.5}{2} e^{-j\frac{\pi}{3}} = 0.25\angle -60^\circ, \quad c_3 = \frac{1}{2} e^{-j\frac{\pi}{2}} = 0.5\angle -90^\circ$$