ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑΣ

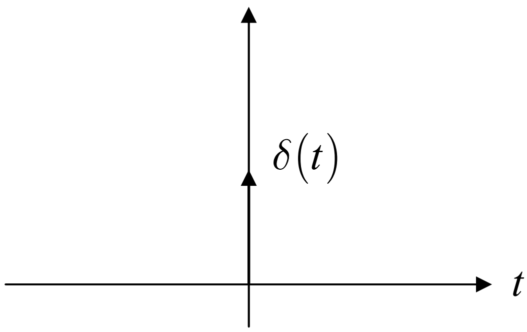
Ξεκινάμε με την **μοναδιαία κρουστική συνάρτηση** $\delta(t)$ του Dirac.

(γενικευμένη συνάρτηση του συνεχούς χρόνου *t* ή «κατανομή» (distribution)

(αντίστοιχη του μοναδιαίο παλμού $\Delta(kT)=1,\ k=0,\ \Delta(kT)=0,\ k\neq 0$)

$$\delta(t)=0 \qquad t\neq 0$$

$$\forall\varepsilon>0: \qquad \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\delta(t)dt=1$$



Ιδιότητες

$$\forall a\in\mathbb{R} \qquad \delta(at)=\frac{1}{|a|}\delta(t)$$

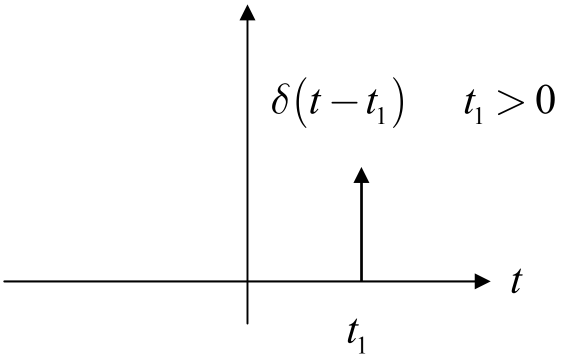
$$\text{για} \quad a=-1 \qquad \delta(-t)=\delta(t) \qquad (1)$$

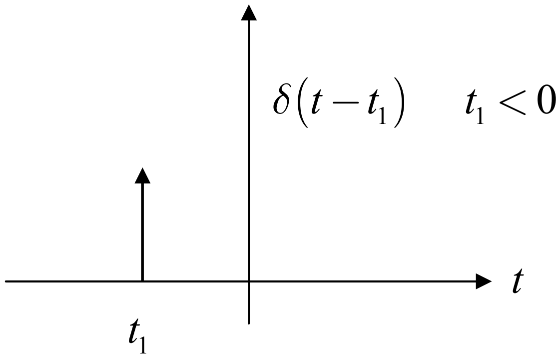
(άρτια συνάρτηση)

Η (1) δίνει: $\forall t_1\in\mathbb{R} \qquad \delta(t-t_1)\overset{(1)}{=}\delta(-(t-t_1))=\delta(t_1-t)$

$\delta(t-t_1)=\delta(t_1-t)$ η μετάθεση της $\delta(t)$ προς τα **δεξιά αν** $t_1>0$

$\delta(t-t_1)=\delta(t_1-t)$ η μετάθεση της $\delta(t)$ προς τα **αριστερά αν** $t_1<0$





Για κάθε συνάρτηση $x(t):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχή στο $t_1\in\mathbb{R}$

$$x(t)\delta(t-t_1)=x(t_1)\delta(t-t_1)$$

$$\Rightarrow$$

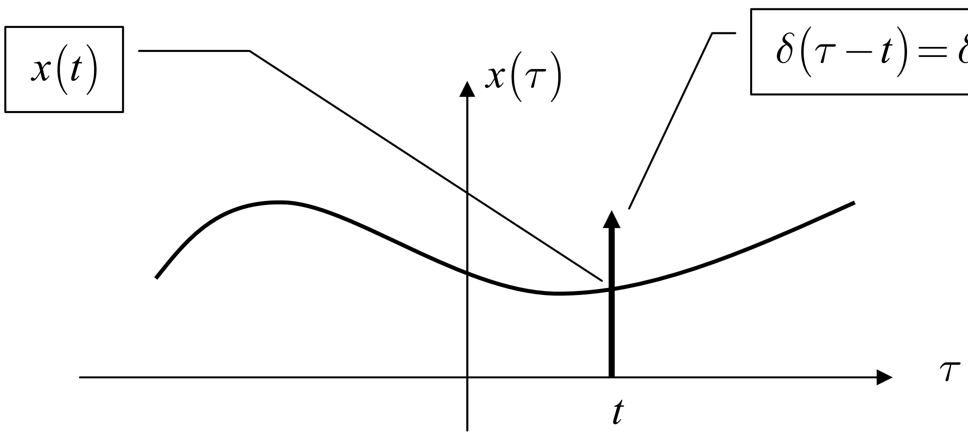
$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-t_1)dt=\int_{-\infty}^{\infty} x(t_1)\delta(t-t_1)dt=x(t_1)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_1)dt=x(t_1) \quad (2)$$

Για $t_1=t$ και $t=\tau$ η (2) γράφεται

$$\boxed{\begin{gathered}\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(\tau-t)d\tau=x(t)\\ \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau=x(t)\end{gathered}} \qquad (3)$$

Η (3) για $t=0$ γράφεται

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(\tau)d\tau=x(0)} \qquad (4)$$



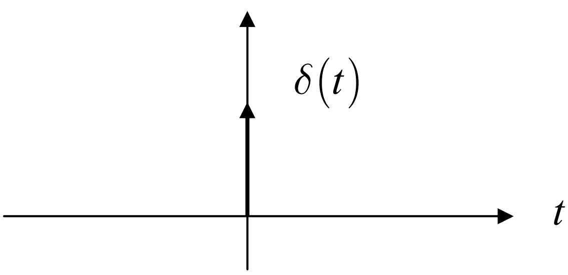
ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ FOURIER ΤΗΣ ΚΡΟΥΣΤΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

$$\mathcal{F}\{\delta(t)\}=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)e^{-j\omega t}dt$$

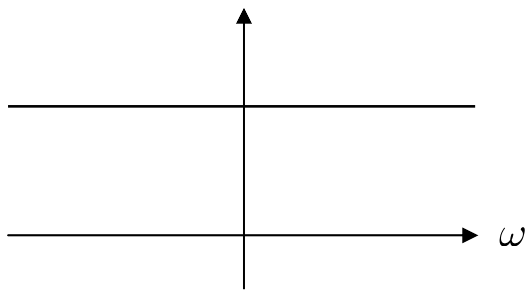
επειδη $\delta(t)=0,\ \forall t\neq 0,$ και για $t=0,\ e^{-j\omega t}=e^{-j\omega 0}=1$

$$\delta(t)e^{-j\omega t}=\delta(t)$$

$$\mathcal{F}\{\delta(t)\}=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=1,\qquad -\infty<\omega<\infty$$



$\mathcal{F}\{\delta(t)\}=X(\omega)=1$



ΙΔΙΟΤΗΤΑ ΤΗΣ ΔΥΑΔΙΚΟΤΗΤΑΣ

Από τον ορισμό του μετασχηματισμού Fourier $X(\omega)$ενός μη περιοδικού σήματος $x(t)$

$$X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt \qquad x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$\Rightarrow 2\pi x(t)=\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$t \leftrightarrow \omega$

$$2\pi x(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} X(t)e^{j\omega t}dt$$

$\omega \rightarrow -\omega$

$$2\pi x(-\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} X(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$x(t)\leftrightarrow X(\omega)\Leftrightarrow X(t)\leftrightarrow 2\pi x(-\omega) \qquad \text{(D)}$$

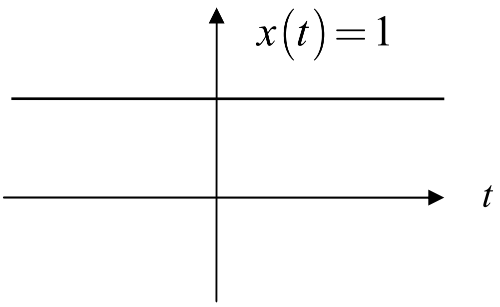
Η (D) λέει ότι η συνάρτηση του χρόνου t, $X(t)$ είναι ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier της **συνάρτησης συχνότητας** ω, $2\pi x(-\omega)$

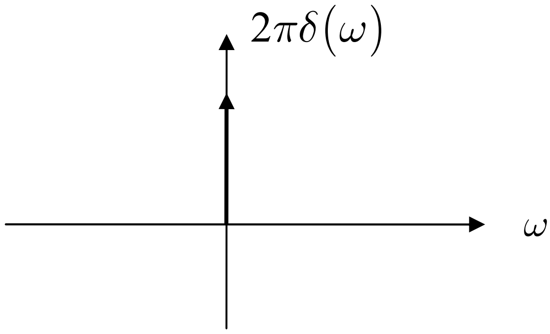
Από την

$$\mathcal{F}\left\{\delta(t)\right\} = 1 = 1(\omega) = X(\omega), \qquad -\infty < \omega < \infty$$

$$X(t) = 1, \quad -\infty < t < \infty \;\Leftrightarrow 2\pi\delta(-\omega) = 2\pi\delta(\omega)$$

$$x(t) = 1, \qquad -\infty < t < \infty \quad \Leftrightarrow 2\pi\delta(-\omega) = 2\pi\delta(\omega)$$





Θεωρήστε το σήμα

$$\cos\omega_0 t, \qquad \omega_0 \in \mathbb{R}, \qquad -\infty < t < \infty$$

Από τις ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier: Αν

$x(t) \leftrightarrow X(\omega)$

$$x(t)\sin\omega_0 t \leftrightarrow \frac{j}{2}\left[X(\omega+\omega_0) - X(\omega-\omega_0)\right] \qquad (5)$$

$$x(t)\cos\omega_0 t \leftrightarrow \frac{1}{2}\left[X(\omega+\omega_0) + X(\omega-\omega_0)\right] \qquad (6)$$

και

$$x(t) = 1, \;\; -\infty < t < \infty \quad \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega) = X(\omega)$$

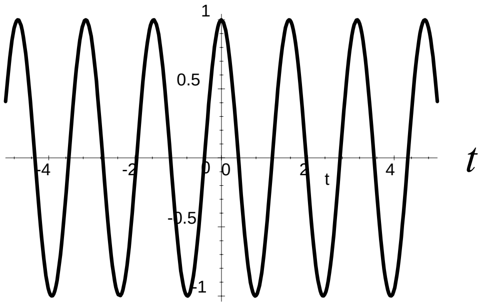
η (5) δίνει

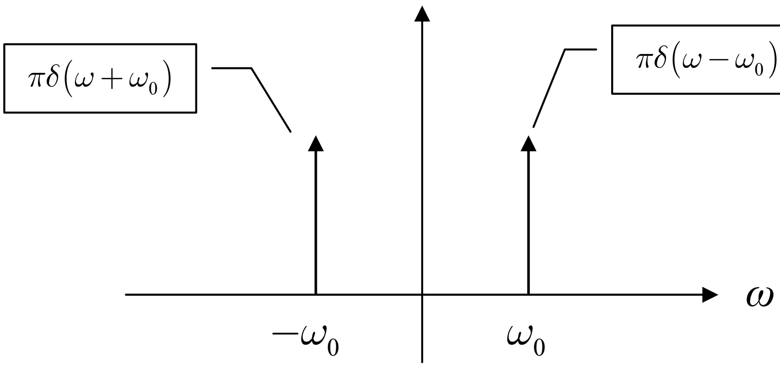
$$\sin \omega_0 t \leftrightarrow \frac{2\pi j}{2}\left[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)\right]=\pi j\left[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)\right]$$

$$\cos \omega_0 t \leftrightarrow \frac{2\pi}{2}\left[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)\right]=\pi\left[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)\right]$$

$$\mathcal{F}\{\cos \omega_0 t\}=\pi\left[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)\right]$$

$\cos \omega_0 t$





Από την ιδιότητα του μετασχηματισμού Fourier:

$$x(t) \leftrightarrow X(\omega)$$

$$x(t)e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow X(\omega-\omega_0)$$

και την

$$x(t)=1, \quad -\infty<t<\infty \quad \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)=X(\omega)$$

προκύπτει ότι

$$e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega-\omega_0) \qquad (7)$$

Μέσω της (7) μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε τον μετασχηματισμό Fourier ενός οποιουδήποτε περιοδικού σήματος $x(t)$.

Αν το $x(t)$ είναι περιοδικό με περίοδο T: $\quad x(t)=x(t+T)$ τότε γράφεται υπό μορφή σειράς Fourier

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \quad \text{με} \quad \omega_0=\frac{2\pi}{T} \qquad (8)$$

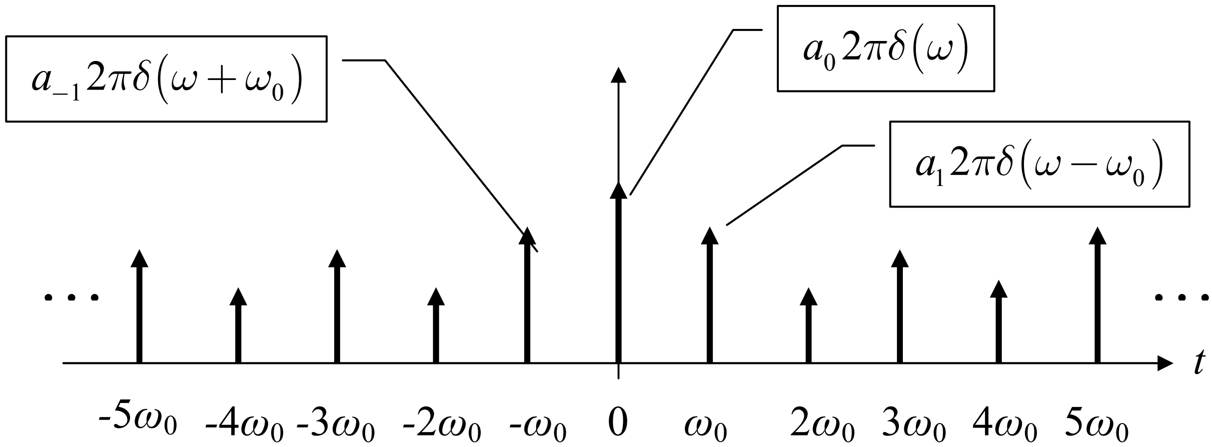
και άρα λόγω της γραμμικότητας του μετασχηματισμού Fourier

$$\mathcal{F}\{x(t)\}=\mathcal{F}\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}\right\}=\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \mathcal{F}\left\{e^{jk\omega_0 t}\right\}=\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k 2\pi\delta(\omega-k\omega_0)$$

Η παραπάνω σχέση λέει ότι ο μετασχηματισμός Fourier ενός περιοδικού σήματος με περίοδο T: $\quad (x(t)=x(t+T))$ είναι ένας συρμός κρουστικών συναρτήσεων

$$a_k 2\pi\delta(\omega-\omega_0), \quad k=\ldots-2,-1,0,1,2,\ldots$$

$$\mathcal{F}\{x(t)\}=\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k 2\pi\delta(\omega-k\omega_0)$$



Γραμμικό φάσμα (μετασχηματισμός Fourier) ενός περιοδικού σήματος $x(t)$ με περίοδο T και σειρά Fourier

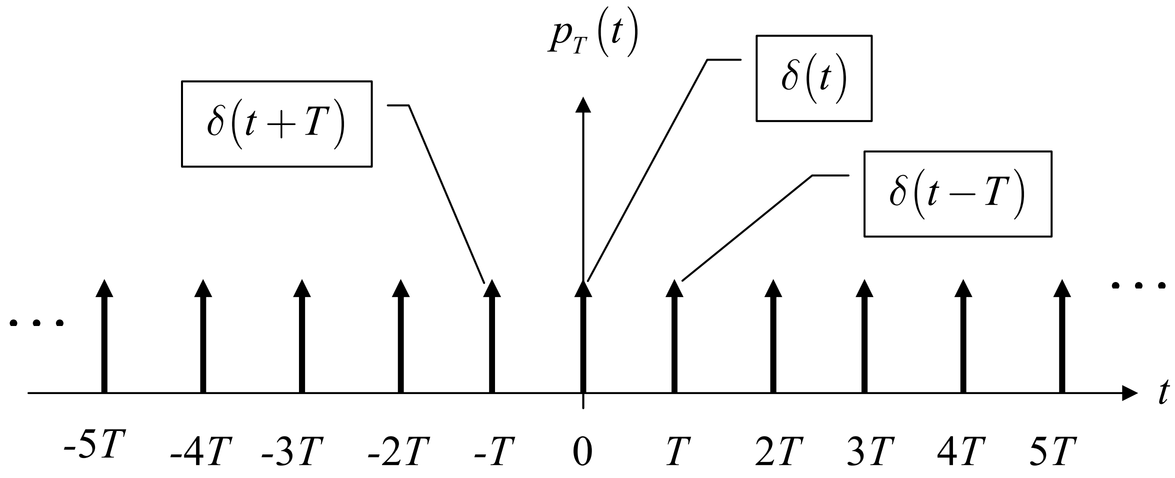
$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \quad , \quad \omega_0=\frac{2\pi}{T}$$

Θεωρείστε τον συρμό (απείρων όρων) κρουστικών συναρτήσεων με περίοδο *T*

$$p_T(t) = ... + \delta(t+2T) + \delta(t+T) + \delta(t) + \delta(t-T) + \delta(t-2T) + ...$$

$$p_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT)$$

Ο συρμός $p_T(t)$ ονομάζεται **συνάρτηση δειγματοληψίας** ή «χτένι» (comp function)



Προφανώς η $p_T(t)$ είναι περιοδική συνάρτηση με περίοδο *T*.

Ο μετασχηματισμός Fourier της $p_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT)$ βρίσκεται ως εξής.

Η $p_T(t)$ σαν περιοδική συνάρτηση με περίοδο *T* αναπαριστάτε από μια σειρά Fourier

$$p_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

Οι συντελεστές a_k, $k = ... -2, -1, 0, 1, 2, ...$ υπολογίζονται ως εξής

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} p_T(t) e^{-jk\omega_0 t}\,dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\delta(t) e^{-jk\omega_0 t}\,dt$$
$$= \frac{1}{T}\left[e^{-jk\omega_0 t}\right]_{t=0} = \frac{1}{T}, \quad k = \ldots -2.-1,0,1,2,\ldots$$

Και άρα

$$p_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} e^{jk\omega_0 t}$$

Από την (7) προκύπτει ότι ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $p_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT)$ είναι

$$\mathcal{F}\{p_T(t)\} = \mathcal{F}\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT)\right\} = \mathcal{F}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_o t}\right]$$
$$= \mathcal{F}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} e^{jk\omega_o t}\right] = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\left[e^{jk\omega_o t}\right]$$
$$= \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - k\omega_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{T}\delta(\omega - k\omega_0)$$

Είναι δηλαδή ένας συρμός κρουστικών συναρτήσεων

$$\frac{2\pi}{T}\delta(\omega - k\omega_0), \quad k = \ldots -2,-1,0,1,2,\ldots$$

Δημιουργήθηκε από A. Vardulakis 11-11-04