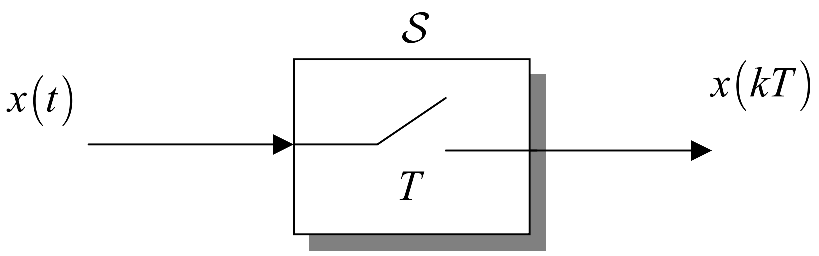
ΜΕΤΑΤΡΟΠΗ ΣΗΜΑΤΟΣ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΧΡΟΝΟΥ ΣΕ ΣΗΜΑ ΔΙΑΚΡΙΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ (ANALOG TO DIGITAL CONVERSION)

Μετασχηματισμός ιδανικής περιοδικής δειγματοληψίας $\mathcal{S}$.



$\mathcal{S}: \{\text{συναρτησεις συνεχους χρονου}\} \rightarrow \mathbb{R}$

$\mathcal{S}x(t) = x(kT) = x(t) \quad \text{αν} \;\; t = kT, \quad k = \ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$

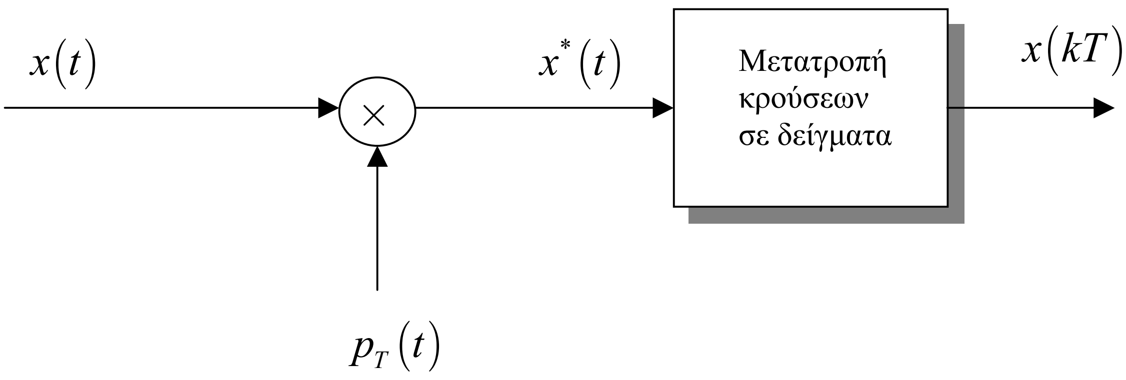
$x(kT)$ ονομάζονται δείγματα

$\mathcal{S}x(t)$ δεν ορίζεται αν $t \neq kT \quad k = \ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$

T χρονική απόσταση μεταξύ διαδοχικών δειγμάτων ονομάζεται περίοδος δειγματοληψίας (sec)

$f = \dfrac{1}{T}$ συχνότητα δειγματοληψίας (δείγματα/sec)

Η διεργασία της δειγματοληψίας περιγράφεται από το διάγραμμα



$$x^*(t) = x(t)\, p_T(t) = x(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-kT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT)\delta(t-kT)$$

όπου $p_T(t)$ η **ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑΣ**

$$p_T(t) = \ldots. + \delta(t+2T) + \delta(t+T) + \delta(t) + \delta(t-T) + \delta(t-2T) + \ldots$$

$$p_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT)$$

Η αναπαράσταση της $p_T(t)$ σαν ΣΕΙΡΑ Fourier είναι

$$p_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t)\, e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T}$$

$$p_T(t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\omega_0 t}$$

Επειδή ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $e^{j\omega_0 t}$ είναι

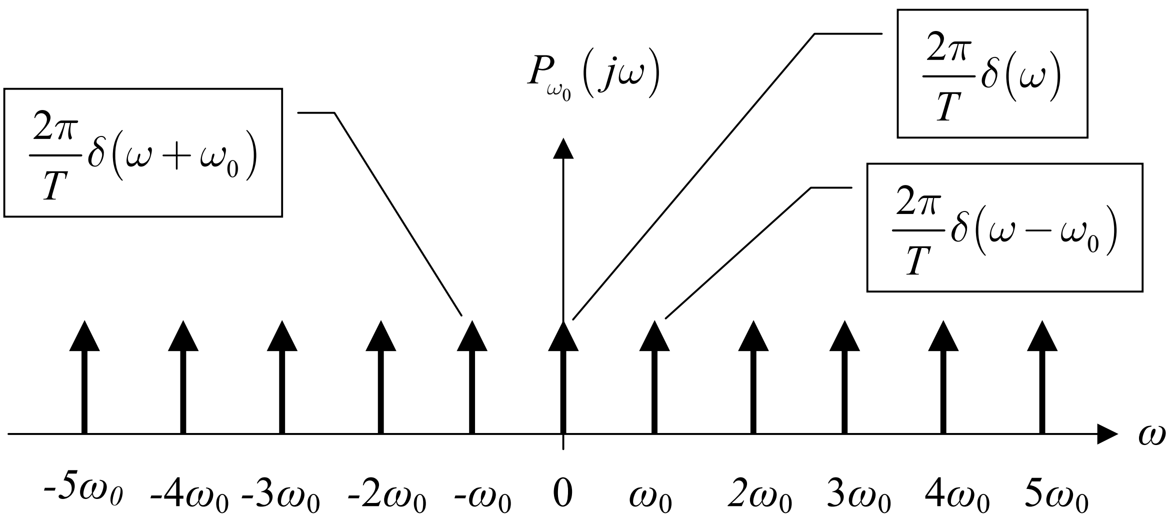
$$\mathcal{F}\left\{e^{j\omega_0 t}\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j(\omega_0 - \omega)t} dt = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $p_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$ είναι

$$\mathcal{F}\{p_T(t)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} \mathcal{F}\{e^{jk\omega_0 t}\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{T} \delta(\omega - k\omega_0) =: P_{\omega_0}(j\omega)$$

Είναι δηλαδή ένας συρμός κρουστικών συναρτήσεων

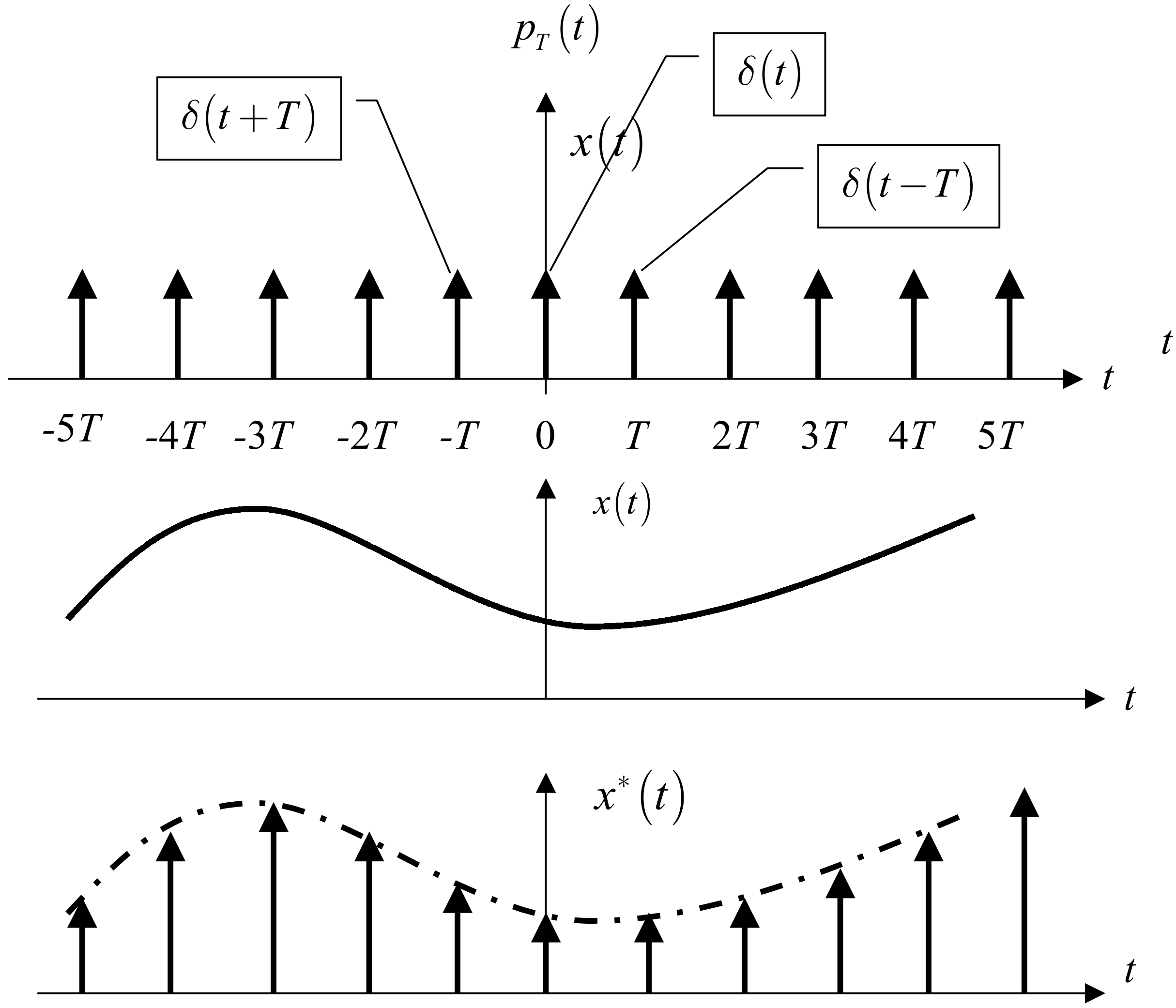
$$\frac{2\pi}{T}\delta(\omega - k\omega_0), \qquad k = \ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$$



Το επόμενο σχήμα δίνει μια γραφική παράσταση της δημιουργίας του «διαμορφωμένου συρμού κρουστικών συναρτήσεων»

$$x^*(t) = x(t)p_T(t) = x(t)\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - kT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT)\delta(t - kT)$$



Από την αναπαράσταση της συνάρτησης δειγματοληψίας

$$p_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$$

σαν σειράς Fourier

$$p_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} e^{jk\omega_0 t}$$

έχουμε ότι

$$x^*(t) = x(t)\,p_T(t) = x(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} e^{jk\omega_0 t}$$

Από την ιδιότητα του μετασχηματισμού Fourier:

$$x(t) \leftrightarrow X(\omega)$$

$$x(t)e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow X(\omega-\omega_0)$$

Ο παραπάνω τύπος δίνει την αντιστοιχία

$$x(t)\frac{1}{T}e^{jk\omega_0 t} \leftrightarrow \frac{1}{T}X(\omega-k\omega_0)$$

και άρα ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $x^*(t)$ είναι

$$X^*(\omega)=\mathcal{F}\left\{x^*(t)\right\}=\mathcal{F}\left\{x(t)p_T(t)\right\}=\mathcal{F}\left\{x(t)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{T}e^{jk\omega_0 t}\right\}$$

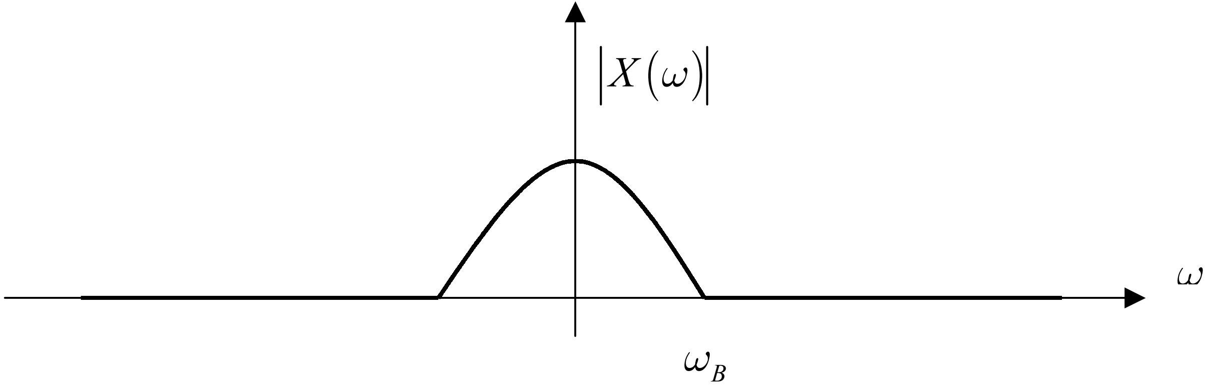
$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\mathcal{F}\left\{x(t)\frac{1}{T}e^{jk\omega_0 t}\right\}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{T}X(\omega-k\omega_0)$$

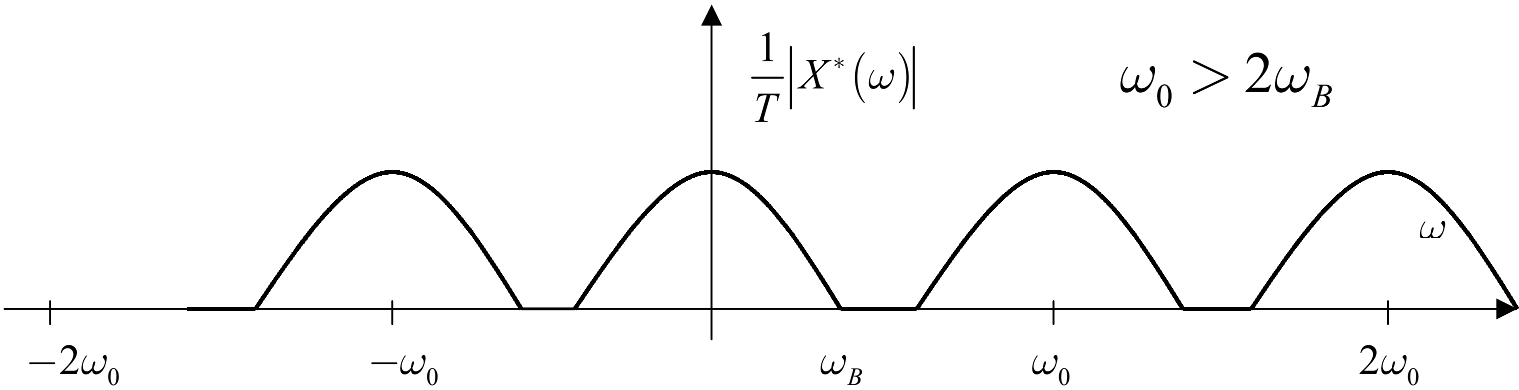
Άρα ο μετασχηματισμός Fourier του διαμορφωμένου συρμού κρουστικών συναρτήσεων $x^*(t)=x(t)p_T(t)$ είναι

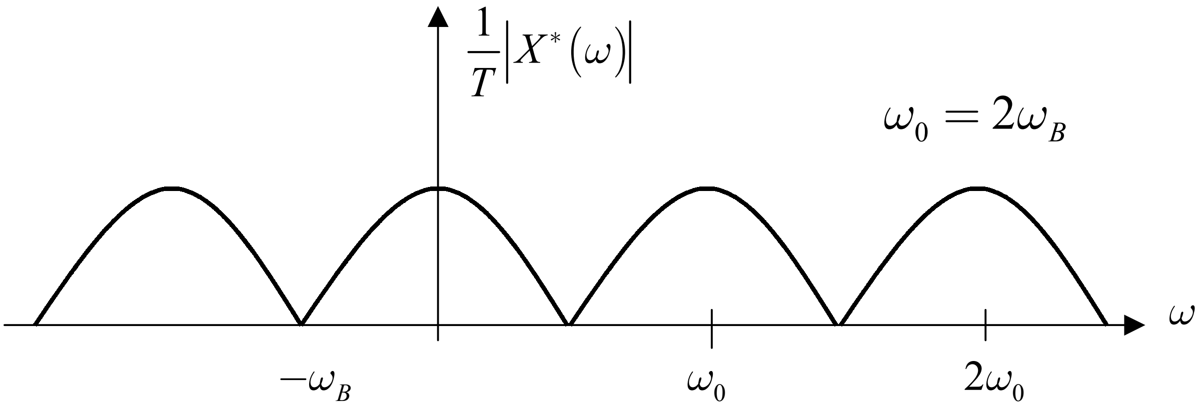
$$\boxed{X^*(\omega)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{T}X(\omega-k\omega_0) \qquad (10)}$$

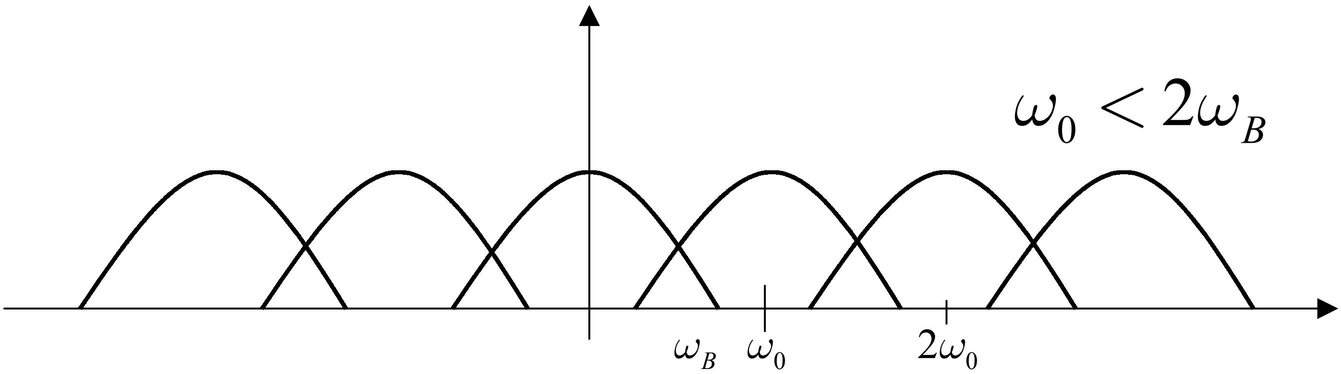
όπου $x(t) \leftrightarrow X(\omega)$.

Από την (10) βλέπουμε ότι η $X^*(\omega)$ αποτελείτε από άθροισμα απείρων όρων της μορφής $\frac{1}{T}X(\omega-k\omega_0)$ για $k=\ldots-2,-1,0,1,2,\ldots$









δηλαδή αντιγράφων του μετασχηματισμού Fourier $X(\omega)$ του σήματος συνεχούς χρόνου $x(t)$ επί $\frac{1}{T}$

Έστω $|X(\omega)| = 0, \quad \omega > \omega_B$

Τότε τα φάσματα συχνοτήτων $\left|X(\omega)\right|$ του σήματος $x(t)$ και $\frac{1}{T}\left|X^*(\omega)\right|$ του $x^*(t)$ θα έχουν την μορφή του σχήματος παρακάτω και αναλόγως της σχέσης της κυκλικής συχνότητας δειγματοληψίας $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ με την συχνότητα μηδενισμού ω_B του φάσματος συχνοτήτων $\left|X(\omega)\right|$ του σήματος συνεχούς χρόνου $x(t)$.

Δημιουργήθηκε από A. Vardulakis 17-12-2003

ω