ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΔΙΑΚΡΙΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ

Α. Βαρδουλάκης

Νοέμβριος 04

1. Μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ εξισώσεων διαφορών

1.1 Εξίσωση διαφορών πρώτης τάξης

Θεωρήστε ένα γραμμικό, χρονικά αναλλοίωτο και πεπερασμένης διάστασης σύστημα διακριτού χρόνου, του οποίου η σχέση μεταξύ εισόδου $x(kT)$ και εξόδου $y(kT)$ περιγράφεται απο την γραμμική εξίσωση διαφορών εισόδου-εξόδου πρώτης τάξης:

$$y(kT) + ay(kT-T) = b_1 x(kT) + b_0 x(kT-T) \tag{1.1}$$

Θεωρώντας τον μετασχηματισμό $\mathcal{Z}$ των δύο μελών της (1.1) παίρνουμε

$$Y(z) + a\left[z^{-1}Y(z) + y(-T)\right] = b_1 X(z) + b_0\left[z^{-1}X(z) + x(-T)\right] \tag{1.2}$$

όπου $Y(z) = \mathcal{Z}\{y(kT)\}$ και $X(z) = \mathcal{Z}\{x(kT)\}$

Από την (1.2)

$$Y(z) = \frac{-ay(-T) + b_0 x(-T)}{1 + az^{-1}} + \frac{b_1 + b_0 z^{-1}}{1 + az^{-1}} X(z) \tag{1.3}$$

ή

$$Y(z) = \frac{-ay(-T)z + b_0 x(-T)z}{z + a} + \frac{b_1 z + b_0}{z + a} X(z) \tag{1.4}$$

Αν $x(-T) = 0$ η (1.4) γράφεται

$$Y(z) = \frac{-ay(-T)z}{z + a} + \frac{b_1 z + b_0}{z + a} X(z) \tag{1.5}$$

Αν το σύστημα έχει μηδενικές αρχικές συνθήκες $y(-T) = 0$, η (1.5) γράφεται

$$Y(z) = \frac{b_1 z + b_0}{z + a} X(z) \tag{1.6}$$

και η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος είναι

$$H(z) = \frac{b_1 z + b_0}{z + a} \tag{1.7}$$

Διαιρώντας την συνάρτηση μεταφοράς δια του z και γράφοντας το αποτέλεσμα σαν άθροισμα κλασμάτων έχουμε

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{b_0/a}{z} + \frac{b_1 - (b_0/a)}{z+a}$$

ή

$$H(z) = \frac{b_0}{a} + \frac{[b_1 - (b_0/a)]\, z}{z+a}$$

Θεωρώντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό $\mathcal{Z}$ της $H(z)$ παίρνουμε την *μοναδιαία παλμικής απόκριση* $h(kT)$ *του συστήματος*

$$h(kT) = \frac{b_0}{a}\Delta(kT) + \left(b_1 - \frac{b_0}{a}\right)(-a)^k, \quad k = 0, 1, 2, ... \tag{1.8}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Θεωρήστε το σύστημα *μοναδιαίας χρονικής καθυστέρησης (*unit time delay) το οποίο περιγράφεται απο την εξίσωση διαφορών

$$y(kT) = x(kT - T) \tag{1.9}$$

Η (1.9) είναι ειδική περίπτωση της

$$y(kT) + ay(kT - T) = b_1 x(kT) + b_0 x(kT - T)$$

για $a = b_1 = 0$ και $b_0 = 1$.

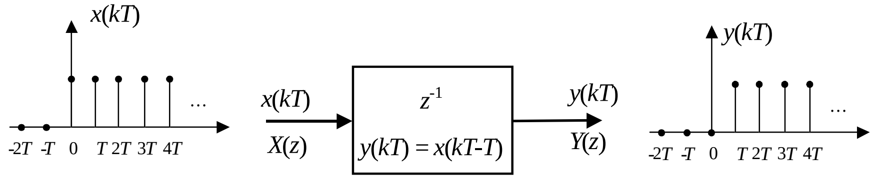
Από την (1.7) η συνάρτηση μεταφοράς της *μοναδιαίας καθυστέρησης* είναι

$$H(z) = \frac{0z+1}{z+0} = \frac{1}{z}$$

Αν $x(kt) = u(kT)$ είναι η *μοναδιαία βηματική συνάρτηση διακριτού χρόνου:*

$$\begin{aligned} u(kT) &= 1 \qquad k = 0, 1, 2, ... \\ u(kT) &= 0 \qquad k = -1, -2, ... \end{aligned}$$

τότε $y(kT) = u(kT - T)$ (βλέπε σχήμα).



Στο ίδιο αποτέλεσμα φτάνουμε θεωρώντας τον μετασχηματισμό $\mathcal{Z}: U(z) = \frac{z}{z-1}$ της $u(kT)$, και άρα

$$
\begin{aligned}
Y(z) &= H(z)\,U(z) = \frac{1}{z}\left(\frac{z}{z-1}\right) = \frac{1}{z-1} \qquad (1.10)\\
&= z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + ...
\end{aligned}
$$

και αν

$$
Y(z) = y(0) + y(T)\,z^{-1} + y(2T)\,z^{-2} + +y(3T)\,z^{-3} + \ldots \qquad (1.11)
$$

τότε, συγκρίνωντας τις (1.10) και (1.11) εχουμε ότι

$$
y(0) = 0, y(T) = 1, y(2T) = 1, y(3T) = 1, ...
$$

Δηλαδή η έξοδος $y(kT)$ είναι η μετάθεση της εισόδου $u(kT)$ κατά μια χρονική μονάδα.

1.2 Εξίσωση διαφορών δεύτερης τάξης

Θεωρήστε το σύστημα διακριτού χρόνου, που περιγράφεται απο την γραμμική εξίσωση διαφορών εισόδου-εξόδου δεύτερης τάξης:

$$
\begin{gathered}
y(kT) + a_1 y(kT-T) + a_0 y(kT-2T) = \\
b_2 x(kT) + b_1 x(kT-T) + b_0 x(kT-2T)
\end{gathered} \qquad (1.12)
$$

Υποθέτουμε ότι $x(-T) = x(-2T) = 0$.

Θεωρώντας τον μετασχηματισμό $\mathcal{Z}$ των δύο μελών της (1.12) πέρνουμε

$$
\begin{aligned}
Y(z) + a_1\left[z^{-1}Y(z) + y(-T)\right] + a_0\left[z^{-2}Y(z) + z^{-1}y(-T) + y(-2T)\right] && (1.13)\\
= b_2 X(z) + b_1 z^{-1} X(z) + b_0 z^{-2} X(z) && (1.14)
\end{aligned}
$$

Από την (1.14) έχουμε

$$
\begin{aligned}
Y(z) &= \frac{[-a_1 y(-T) - a_0 y(-2T)] - a_0 y(-T)\,z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1} + a_0 z^{-2}}\\
&\quad + \frac{b_2 + b_1 z^{-1} + b_0 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_0 z^{-2}} X(z)
\end{aligned}
$$

ή

$$
\begin{aligned}
Y(z) &= \frac{[-a_1 y(-T) - a_0 y(-2T)]\,z^2 - a_0 y(-T)\,z}{z^2 + a_1 z + a_0}\\
&\quad + \frac{b_2 z^2 + b_1 z + b_0}{z^2 + a_1 z + a_0} X(z)
\end{aligned}
$$

Αν $x(-2T) = x(-T) = 0$ το σύστημα δεν έχει αρχική ενέργεια κατα την χρονική στιγμή $kT = 0$ αν και μόνο αν $y(-T) = y(-2T) = 0$, οπότε η (1.5) γράφεται

$$
Y(z) = \frac{b_2 z^2 + b_1 z + b_0}{z^2 + a_1 z + a_0} X(z)
$$

και άρα η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος διακριτού χρόνου (1.12) είναι

$$H(z) = \frac{b_2 z^2 + b_1 z + b_0}{z^2 + a_1 z + a_0} \tag{1.15}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Θεωρείστε το σύστημα διακριτού χρόνου το οποίο περιγράφεται απο την εξίσωση διαφορών με $T = 1$

$$y(k) + y(k-1) = x(k-1) - x(k-2)$$

Απο την (1.15) και για $a_1 = 1, a_0 = 0, b_2 = 0, b_1 = 1, b_0 = -1$ η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος είναι

$$H(z) = \frac{z-1}{z^2+z}$$

Υπολογίζουμε την έξοδο $y(k)$ όταν η είσοδος $x(k)$ είναι η *μοναδιαία βηματική συνάρτησης διακριτού χρόνου:*

$$\begin{aligned} u(k) &= 1 \qquad k = 0, 1, 2, ... \\ u(k) &= 0 \qquad k = -1, -2, ... \end{aligned}$$

με μετασχηματισμό $\mathcal{Z}$: $U(z) = \mathcal{Z}\{u(k)\} = \frac{z}{z-1}$. Αν $Y(z) = \mathcal{Z}\{y(k)\}$ τότε

$$Y(z) = H(z)U(z) = \left(\frac{z-1}{z^2+z}\right)\left(\frac{z}{z-1}\right) = \frac{1}{z+1} \tag{1.16}$$

Από την $\mathcal{Z}\left\{(-a)^k\right\} = \frac{z}{z+a}$

$$\frac{a}{z+a} = 1 - \frac{z}{z+a}$$

και άρα

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{a}{z+a}\right\} &= \mathcal{Z}^{-1}\{1\} - \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z+a}\right\} \\ &= \Delta(k) - (-a)^k \end{aligned} \tag{1.17}$$

Η (1.16) βάσει της (1.17) για $a = 1$ δίνει

$$y(k) = \mathcal{Z}^{-1}\{Y(z)\} = \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1}{z+1}\right\} = \Delta(k) - (-1)^k, \quad k = 0, 1, 2, ...$$

1.3 Εξίσωση διαφορών τάξης n

Θεωρήστε γραμμικό, χρονικά αναλλοίωτο και πεπερασμένης διάστασης σύστημα διακριτού χρόνου, του οποίου η σχέση μεταξύ εισόδου $x(kT)$ και εξόδου $y(kT)$ περιγράφεται απο την γραμμική εξίσωση διαφορών εισόδου-εξόδου n τάξης:

$$y(kT) + \sum_{i=0}^{n-1} a_i y(kT + iT - nT) = \sum_{i=0}^{m} b_i x(kT + iT - nT), \quad n \geq m \tag{1.18}$$

όπου $x(kT) = 0$ για $k = -1, -2, ..., -n$. Π.χ. για$T = 1$, $n = 3, m = 3$ έχουμε την

εξίσωση διαφορών

$$y(k) + \sum_{i=0}^{2} a_i y(k + i - 3) = \sum_{i=0}^{3} b_i x(k + i - n)$$

$$\begin{aligned} & y(k) + a_0 y(k-3) + a_1 y(k-2) + a_2 y(k-1) \\ = & \; b_0 x(k-3) + b_1 x(k-2) + b_2 x(k-1) + b_3 x(k) \end{aligned} \tag{1.19}$$

Από την ιδιότητα του μετασχηματισμού $\mathcal{Z}$:

$$\mathcal{Z}\{x(k-q)\} = z^{-q} X(z) + x(-q) + z^{-1} x(-q+1) + ... + z^{-q+1} x(-1)$$

και αν $x(k) = 0$ γιά $k = -1, -2, ..., -q$ έχουμε

$$\mathcal{Z}\{x(k-q)\} = z^{-q} X(z)$$

και αν $\mathcal{Z}\{y(k)\} = Y(z), \mathcal{Z}\{x(k)\} = X(z)$ η (1.19) γράφεται

$$\begin{aligned} & Y(z) + a_0 z^{-3} Y(z) + a_1 z^{-2} Y(z) + a_2 z^{-1} Y(z) \\ = & \; b_0 z^{-3} X(z) + b_1 z^{-2} X(z) + b_2 z^{-1} X(z) + b_3 X(z) \end{aligned}$$

ή

$$\left(1 + a_0 z^{-3} + a_1 z^{-2} + a_2 z^{-1}\right) Y(z) = \left(b_0 z^{-3} + b_1 z^{-2} + b_2 z^{-1} + b_3\right) X(z)$$

και άρα η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος είναι

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 z^{-3} + b_1 z^{-2} + b_2 z^{-1} + b_3}{1 + a_0 z^{-3} + a_1 z^{-2} + a_2 z^{-1}}$$

Γενικώς θεωρώντας τον μετασχηματισμό $\mathcal{Z}$ των δύο μελών της (1.18) παίρνουμε

$$Y(z) = \frac{C(z)}{D(z)} + \frac{N(z)}{D(z)} X(z) \tag{1.20}$$

όπου

$$N(z) = b_0 z^{-m} + b_1 z^{-m+1} + ... + b_{m-1} z^{-1} + b_m$$
$$D(z) = 1 + a_0 z^{-n} + a_1 z^{-n+1} + ... + a_{n-1} z^{-1} + a_n$$

και $C(z)$ ειναι πολυώνυμο ως πρός z του οποίου οι συντελεστές προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες $y(-T), y(-2T), ..., y(-nT)$. Αν $x(-kT) = 0$ για $k = -1, -2, ..., -n$ το σύστημα (1.18) δεν έχει αρχική ενέργεια κατα την χρονική στιγμή $kT = 0$ αν και μόνο αν εχει μηδενικές αρχικές συνθήκες: $y(-T) = y(-2T) = ... = y(-nT) = 0$ και άρα είναι $C(z) = 0$, οπότε η (1.20) γράφεται

$$Y(z) = \frac{N(z)}{D(z)} X(z) \tag{1.21}$$

και άρα η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος διακριτού χρόνου (1.18) είναι

$$H(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{b_0 z^{-m} + b_1 z^{-m+1} + ... + b_{m-1} z^{-1} + b_m}{1 + a_0 z^{-n} + a_1 z^{-n+1} + ... + a_{n-1} z^{-1} + a_n} \tag{1.22}$$

2. Ευστάθεια συστημάτων διακριτού χρόνου

Αν $x(kT) = 0$ για $k = 0, 1, 2, ...$ τότε $X(z) = 0$ και απο την

$$Y(z) = \frac{C(z)}{D(z)} + \frac{N(z)}{D(z)} X(z)$$

$$Y(z) = \frac{C(z)}{D(z)}$$

Έστω

$$y_{zi}(kT) = \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{C(z)}{D(z)}\right\}$$

η απόκριση στην έξοδο η οποία οφείλεται σε **μηδενική είισοδο** ($zi = \text{zero input}$)

$x(kT) = 0,\ k = 0, 1, 2, ... \Leftrightarrow X(z) = \mathcal{Z}\{x(kT)\} = 0$ και σε **μη** μηδενικές αρχικές συνθήκες $y(-T), y(-2T), ..., y(-nT)$.

Η $y_{zi}(kT)$ ονομάζεται "ελεύθερη απόκριση" του συστήματος.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Ένα σύστημα διακριτού χρόνου του οποίου η σχέση μεταξύ εισόδου $x(kT)$ και εξόδου $y(kT)$ περιγράφεται απο την εξίσωση διαφορών εισόδου-εξόδου n τάξης (1.18) ονομάζεται *ασυμπτωτικά ευσταθές,* αν για κάθε σύνολο αρχικών συνθηκών $y(-T), y(-2T), ..., y(-nT)$ η ελεύθερη απόκριση

$$y_{zi}(kT) \to 0 \quad \text{καθώς το } k \to \infty$$

Το σύστημα ονομάζεται *ευσταθές σε κύκλο* αν για κάθε σύνολο αρχικών συνθηκών $y(-T), y(-2T), ..., y(-nT)$ υπάρχει $0 < M \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

$$|y_{zi}(kT)| \leq M \quad \text{για } k = 0, 1, 2, ...$$

Το σύστημα ονομάζεται *ασταθές* αν για κάποιο σύνολο αρχικών συνθηκών $y(-T), y(-2T), ..., y(-nT)$ $|y_{zi}(kT)| \to \infty$ καθώς το $k = 0, 1, 2, ...$

2.1 Κριτήρια ευστάθειας συστημάτων διακριτού χρόνου

Έστω $p_1, p_2, ..., p_r$ οι r διακεκριμένοι πόλοι της συνάρτησης μεταφοράς (1.22) έτσι ώστε η $H(z)$ να γράφεται

$$H(z) = \frac{N(z)}{(z-p_1)^{m_1}(z-p_2)^{m_2}\cdots(z-p_r)^{m_r}}$$

όπου m_i η πολλαπλότητα του πόλου p_i, $i = 1, 2, ..., r$.

1. Το σύστημα διακριτού χρόνου είναι *ασυμπτωτικά ευσταθές αν και μόνο αν*$|p_i| < 1 \quad i = 1, 2, ..., r$.

2. Το σύστημα είναι *ευσταθές σε κύκλο* αν και μόνο αν $|p_i| \leq 1$ για κάθε πόλο p_i με πολλαπλότητα $m_i = 1$ και $|p_i| < 1$ *για κάθε* πόλο με πολλαπλότητα $m_i \geq 2$.

3. Το σύστημα είναι *ασταθές αν*

   $|p_i| > 1$ *για κάποιο* $i = 1, 2, ..., r$ ή
   $|p_i| = 1$ *για ένα τουλάχιστον πόλο* p_i με πολλαπλότητα $m_i \geq 2$.

   Αν θεωρήσουμε τα σύνολα
   $\{$κλειστός μοναδιαίος δίσκος $\} = \{z \in \mathbb{C},\ |z| \leq 1\}$
   $\{$ανοιχτός μοναδιαίος δίσκος$\} = \{z \in \mathbb{C},\ |z| < 1\}$
   $\{$μοναδιαίος κύκλος$\} = \{z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\}$
   Το σύστημα είναι

Γραμμή	z^0	z^1	z^2	$\ldots$	z^{n-2}	z^{n-1}	z^n
1	a_0	a_1	a_2	$\ldots$	a_{n-2}	a_{n-1}	a_n
2	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\ldots$	a_2	a_1	a_0
3	b_0	b_1	b_2	$\ldots$	b_{n-2}	b_{n-1}	
4	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	$\ldots$	b_1	b_0	
5	c_0	c_1	c_2	$\ldots$	c_{n-2}		
6	c_{n-2}	c_{n-3}	c_{n-4}	$\ldots$	c_0		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots\vdots$	
$2n-5$	d_0	d_1	d_2	d_3			
$2n-4$	d_3	d_2	d_1	d_0			
$2n-3$	e_0	e_1	e_2				

όπου

$$b_i = a_0 a_1 - a_{n-1} a_n \qquad i = 0, 1, 2, ..., n-1$$

$$c_i = b_0 b_1 - b_{n--i-1} b_{n-1} \qquad i = 0, 1, 2, ..., n-2$$

κτλ κτλ

Η διαδικασία συνεχίζεται μέχρι την γραμμή $(2n-3)$ της οποίας το τελευταίο στοιχείο e_2 είναι

$$e_2 = d_0 d_2 - d_1 d_3$$

Κριτήριο JURY

Το σύστημα είναι ασυμπτωτικά ευσταθές αν και μόνο αν

$$\begin{aligned} D(1) &> 0 \text{ και } (-1)^n D(-1) > 0 \\ a_n &> |a_0| \\ |b_0| &> |b_{n-1}| \\ |c_0| &> |c_{n-2}| \\ &\vdots \\ |e_0| &> |e_2| \end{aligned}$$

Η απόδειξη κάνει χρήση μαθηματικών εργαλείων πέραν των προσφερομένων στο μάθημα αυτό)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Έστω ότι

$$D(z) = z^2 + a_1 z + a_0$$

Ο Πίνακας Jury είναι

Γραμμή	z^0	z^1	z^2
1	a_0	a_1	1

$$D(1) = 1 + a_1 + a_0 > 0$$

$$(-1)^2 D(-1) = 1 - a_1 + a_0 > 0$$

$$1 > |a_0|$$

οι δύο πρώτες συνθήκες είναι ισοδύναμες με τις συνθήκες

$$-a_1 < 1 + a_0 kai a_1 < 1 + a_0$$

οι οποίες γράφονται

$$|a_1| < 1 + a_0$$

Άρα οι ρίζες της $D(z) = z^2 + a_1 z + a_0 = 0$ είναι εντός του ανοικτού μοναδιαίου δίσκου αν και μόνο αν

$$|a_i| < 1 + a_0$$

και

$$|a_0| < 1$$