ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΔΙΑΚΡΙΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ ΣΤΟΝ ΧΩΡΟ ΤΩΝ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΩΝ

Μία άλλη περιγραφή συστημάτων διακριτού χρόνου είναι η περιγραφή μέσω των εξισώσεων του «χώρου των καταστάσεων» (state space representations) όπου οι εξισώσεις διαφορών που περιγράφουν την χρονική εξέλιξη του συστήματος σε διακριτό χρόνο k έχουν την μορφή:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

$$y(k) = Cx(k) + Du(k)$$

όπου

$$A \in \mathbb{R}^{n\times n},\ B \in \mathbb{R}^{n\times m},\ C \in \mathbb{R}^{p\times n},\ D \in \mathbb{R}^{p\times m}$$

$$x(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$$ «άνυσμα καταστάσεων»

$$u(k) = \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \\ \vdots \\ u_m(k) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times 1}$$ «άνυσμα εισόδων»

$$y(k) = \begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \\ \vdots \\ y_p(k) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{p\times 1}$$ «άνυσμα εξόδων»

Παράδειγμα

Θεωρείστε ένα σύστημα διακριτού χρόνου του οποίου η σχέση εισόδου – εξόδου περιγράφεται από την γραμμική εξίσωση διαφορών με σταθερούς συντελεστές

$$y(k) + a_1 y(k-1) + a_2 y(k-2) = b_0 u(k) \qquad (0.1)$$

Ορίζουμε μεταβλητές $x_1(k)$, $x_2(k)$ τις οποίες ονομάζουμε «καταστάσεις» μέσω των εξισώσεων

$$x_1(k) := y(k-2) \qquad (1.1)$$

$$x_2(k) := y(k-1) \qquad (1.2)$$

Η (1.1) λόγω της (1.2) δίνει την

$$x_1(k+1) = y(k-1) = x_2(k) \qquad (1.3)$$

και η (1.2) λόγω της (0.1) δίνει την

$$\begin{aligned} x_2(k+1) = y(k) &= -a_1 y(k-1) - a_2 y(k-2) + b_0 u(k) \\ &= -a_1 x_2(k) - a_2 x_1(k) + b_0 u(k) \qquad (1.4) \end{aligned}$$

(Παρένθεση. Λαμβάνοντας υπ’όψιν μας ότι ή εξίσωση διαφορών που περιγράφει την μοναδιαία χρονική καθυστέρηση (Unit time delay) είναι η

$$y(k) = x(k-1) \qquad (1.5)$$

η παλμική απόκριση της μοναδιαίας χρονικής καθυστέρησης είναι η

$$h(k) = \Delta(k-1)$$

Στο πεδίο του μετασχηματισμού $\mathcal{Z}$. Αν $X(z) = \mathcal{Z}\{x(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} x(k) z^{-k}$ είναι ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ του σήματος $x(k)$, από την ιδιότητα του μετασχηματισμού $\mathcal{Z}$

$$\mathcal{Z}\{x(k-1)\} = z^{-1} + x(-1)$$

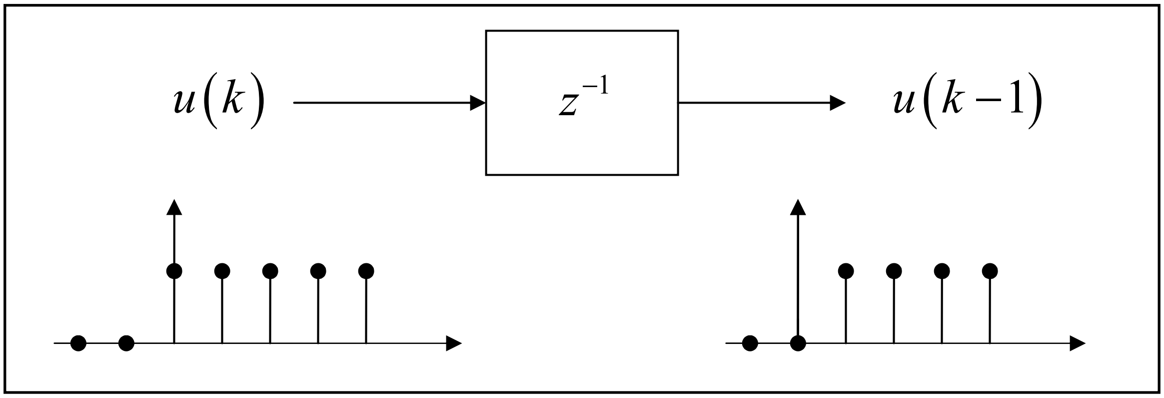
και για $x(-1) = 0$ από την (1.5) έχουμε ότι

$$Y(z) = \mathcal{Z}\{y(k)\} = \mathcal{Z}\{x(k-1\}) = z^{-1} X(z)$$

Και άρα η συνάρτηση μεταφοράς της μοναδιαίας χρονικής καθυστέρησης είναι

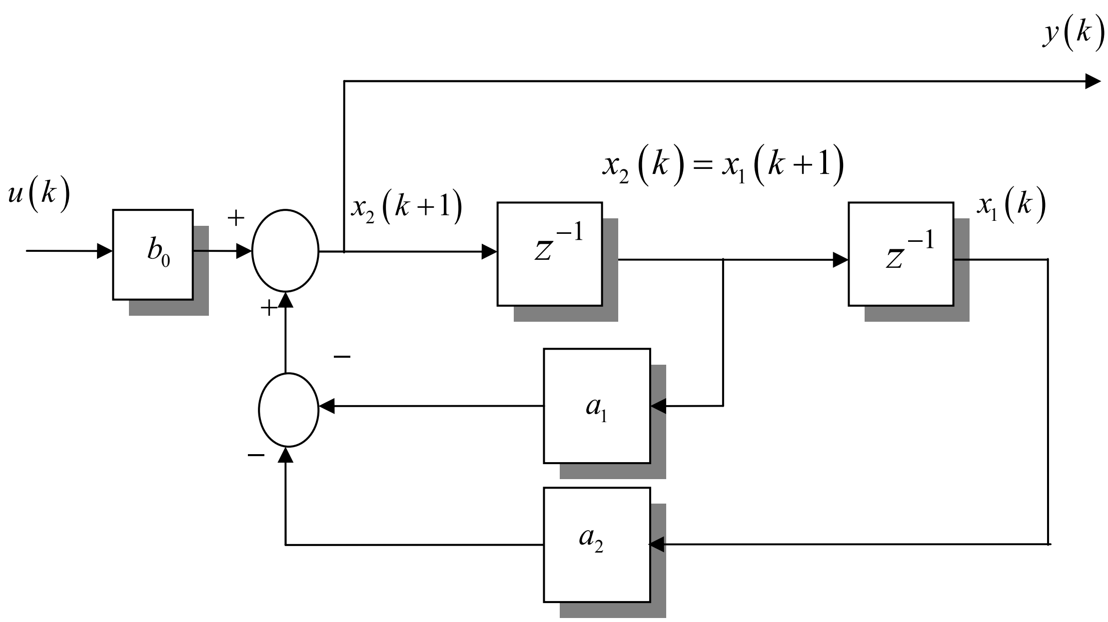
$$H(z) = z^{-1} \quad \leftrightarrow \quad h(t) = \Delta(k-1)$$

Έτσι ώστε η μοναδιαία χρονική καθυστέρηση να περιγράφεται από το διάγραμμα ροής στο σχήμα:



Τέλος της παρένθεσης.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι το διάγραμμα ροής που περιγράφει τις (1.3) και (1.4) είναι το



Γράφοντας τις (1.3) - (1.4)

$$x_1(k+1)=x_2(k) \tag{1.3}$$

$$x_2(k+1)=-a_1x_2(k)-a_2x_1(k)+b_0u(k) \tag{1.4}$$

υπό μορφή πινάκων έχουμε

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b_0 \end{bmatrix} u(k)$$

Η (1.4) επίσης είναι

$$x_2(k+1) = y(k) = -a_1 x_2(k) - a_2 x_1(k) + b_0 u(k)$$

η οποία υπό μορφή πινάκων γράφεται

$$y(k) = \begin{bmatrix} -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_0 \end{bmatrix} u(k)$$

Άρα οι πίνακες των εξισώσεων του χώρου των καταστάσεων για το συγκεκριμένο σύστημα είναι οι

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2},\ B = \begin{bmatrix} 0 \\ b_0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 1},\ C = \begin{bmatrix} -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times 2},\ D = \begin{bmatrix} b_0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}$$

Γενικά

Αν θεωρήσουμε την γραμμική εξίσωση διαφορών με σταθερούς συντελεστές (ΓΕΔΣΣ) τάξης n:

$$y(k) + \sum_{i=1}^{n} a_i y(k-i) = \sum_{i=0}^{m} b_i x(k-i) \qquad (1.6)$$

ή

$$y(k)+a_1y(k-1)+a_2y(k-2)+...+a_ny(k-n)=$$
$$b_0x(k)+b_1x(k-1)+b_2x(k-2)+...+b_mx(k-m) \qquad (1.7)$$

Τότε αν D είναι ο τελεστής μοναδιαίας καθυστέρησης:

$$Dx(k)=x(k-1)$$
$$D^2x(k)=DDx(k)=Dx(k-1)=x(k-2)$$
$$\vdots$$
$$D^nx(k)=x(k-n)$$

η (1.7) γράφεται

$$y(k)+a_1Dy(k)+a_2D^2y(k)+...+a_nD^ny(k)=$$
$$b_0x(k)+b_1Dx(k)+b_2D^2x(k)+...+b_mD^mx(k) \qquad (1.8)$$

ή

$$\left[1+a_1D+a_2D^2+...+a_nD^n\right]y(k)=$$
$$\left[b_0+b_1D+b_2D^2+...+b_mD^m\right]x(k) \qquad (1.9)$$

Εισάγοντας την νέα μεταβλητή $\beta(k)$ η παραπάνω ΓΕΔΣΣ είναι ισοδύναμη με τις ΓΕΔΣΣ:

$$\left(1+a_1D+a_2D^2+\ldots+a_nD^n\right)\beta(k)=x(k) \qquad (1.10)$$

$$y(k)=\left(b_0+b_1D+b_2D^2+\ldots+b_mD^m\right)\beta(k) \qquad (1.11)$$

(διότι απαλείφοντας από τις (1.10) και (1.11) την μεταβλητή $\beta(k)$ παίρνουμε την (1.9))

Οι (1.10) (1.1) γράφονται

$$\beta(k)+a_1\beta(k-1)+a_2\beta(k-2)+\ldots+a_n\beta(k-n)=x(k)(1.12)$$

$$y(k)=b_0\beta(k)+b_1\beta(k-1)+b_2\beta(k-2)+\ldots+b_m\beta(k-m)(1.13)$$

Ορίζουμε μεταβλητές τις οποίες ονομάζουμε «καταστάσεις» μέσω των

$$x_1(k):=\beta(k-n)$$

$$x_2(k):=\beta\big(k-(n-1)\big)=\beta(k-n+1)$$

$$\vdots$$

$$x_{n-1}(k)=\beta(k-2)$$

$$x_n(k)=\beta(k-1)$$

Οι οποίες, λόγω των παραπάνω και την (1.12) δίνουν τις n ΓΕΔΣΣ :

$$x_1(k+1):=\beta(k-n+1)=x_2(k)$$

$$x_2(k+1)=\beta(k-n+2)=x_3(k)$$

$$\vdots$$

$$x_{n-1}(k+1)=\beta(k-2+1)=\beta(k-1)=x_n(k)$$

$$\begin{aligned} x_n(k+1)=\beta(k)&=-a_1\beta(k-1)-a_2\beta(k-2)-\ldots-a_n\beta(k-n)+x(k)\\ &=-a_1x_n(k)-a_2x_{n-1}(k)-\ldots-a_nx_1(k)+x(k)\end{aligned}$$

Οι παραπάνω υπό μορφή πινάκων γράφονται

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1)\\ x_2(k+1)\\ \vdots\\ x_{n-1}(k+1)\\ x_n(k+1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(k)\\ x_2(k)\\ \vdots\\ x_{n-1}(k)\\ x_n(k)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\ \vdots\\0\\1\end{bmatrix}x(k)$$

Επίσης η ΓΕΔΣΣ

$$y(k)=b_0\beta(k)+b_1\beta(k-1)+b_2\beta(k-2)+\ldots+b_m\beta(k-m)$$

Γράφεται

$$\begin{aligned} y(k)&=b_0\beta(k)+b_1\beta(k-1)+b_2\beta(k-2)+\ldots+b_m\beta(k-m)\\ &=b_0\left[-a_1x_n(k)-a_2x_{n-1}(k)-\ldots-a_nx_1(k)+x(k)\right]\\ &+b_1x_n(k)+b_2x_{n-1}(k)+\ldots+b_mx_{n-m+1}\end{aligned}$$

$$= -a_1 b_0 x_n(k) - a_2 b_0 x_{n-1}(k) - \dots - a_n b_0 x_1(k) + b_0 x(k)$$
$$+ b_1 x_n(k) + b_2 x_{n-1}(k) + \dots + b_m x_{n-m+1}(k)$$

$$= (b_1 - a_1 b_0) x_n(k) + (b_2 - a_2 b_0) x_{n-1}(k) + \dots + (b_m - a_m b_0) x_{n-m+1}(k)$$
$$- a_{m+1} b_0 x_{n-m}(k) - \dots - a_n b_0 x_1(k) + b_0 x(k)$$

και υπό μορφή πίνακα ως

$$y(k) = \begin{bmatrix} -a_n b_0 & \cdots & -a_{m+1} b_0 & \dots & (b_2 - a_2 b_0) & (b_1 - a_1 b_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix} + [b_0] x(k)$$

Παράδειγμα
Θεωρήστε την γραμμική εξίσωση διαφορών με σταθερούς συντελεστές (ΓΕΔΣΣ) 3ης τάξης:

$$y(k) + a_1 y(k-1) + a_2 y(k-2) + a_3 y(k-3) = b_0 x(k) + b_1 x(k-1) + b_2 x(k-2)$$

Η οποία μέσω του τελεστή μοναδιαίας καθυστέρησης D γράφεται

$$y(k) + a_1 D y(k) + a_2 D^2 y(k) + a_3 D^3 y(k) = b_0 x(k) + b_1 D x(k) + b_2 D^2 x(k)$$

ή

$$\left[1 + a_1 D + a_2 D^2 + a_3 D^3\right] y(k) = \left[b_0 + b_1 D + b_2 D^2\right] x(k)$$

Εισάγοντας την νέα μεταβλητή $\beta(k)$ η παραπάνω ΓΕΔΣΣ είναι ισοδύναμη με τις ΓΕΔΣΣ:

$$\left(1+a_1D+a_2D^2+a_3D^3\right)\beta(k)=x(k)$$

$$y(k)=\left(b_0+b_1D+b_2D^2\right)\beta(k)$$

Οι παραπάνω γράφονται και ως

$$\beta(k)+a_1\beta(k-1)+a_2\beta(k-2)+a_3\beta(k-3)=x(k)\quad(1.14)$$

$$y(k)=b_0\beta(k)+b_1\beta(k-1)+b_2\beta(k-2)\qquad(1.15)$$

Ορίζουμε «καταστάσεις» $x_1(k),x_2(k),x_3(k)$ μέσω των

$$x_1(k):=\beta(k-3)$$
$$x_2(k):=\beta(k-2)$$
$$x_3(k):=\beta(k-1)$$

Οι οποίες, λόγω της (1.14) δίνουν τις 3 ΓΕΔΣΣ πρώτης τάξης:

$$x_1(k+1):=\beta(k-3+1)=\beta(k-2)=x_2(k)$$
$$x_2(k+1):=\beta(k-2+1)=\beta(k-1)=x_3(k)$$
$$x_3(k+1)=\beta(k-1+1)=\beta(k)=-a_1\beta(k-1)-a_2\beta(k-2)-a_3\beta(k-3)+x(k)$$
$$=-a_1x_3(k)-a_2x_2(k)-a_3x_1(k)+x(k)$$

Οι οποίες με την βοήθεια πινάκων γράφονται ως

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x(k)$$

Η εξίσωση (1.15) γράφεται

$$\begin{aligned} y(k) &= b_0\beta(k) + b_1\beta(k-1) + b_2\beta(k-2) \\ &= b_0\left[-a_1\beta(k-1) - a_2\beta(k-2) - a_3\beta(k-3) + x(k)\right] \\ &\quad + b_1\beta(k-1) + b_2\beta(k-2) \\ &= -b_0a_1\beta(k-1) - b_0a_2\beta(k-2) - b_0a_3\beta(k-3) + b_0x(k) + b_1\beta(k-1) + b_2\beta(k-2) \\ &= (b_1 - b_0a_1)\beta(k-1) + (b_2 - b_0a_2)\beta(k-2) - b_0a_3\beta(k-3) + b_0x(k) \\ &= (b_1 - b_0a_1)x_3(k) + (b_2 - b_0a_2)x_2(k) - b_0a_3x_1(k) + b_0x(k) \end{aligned}$$

Και υπό μορφή πίνακα

$$y(k) = \begin{bmatrix} -b_0a_3 & (b_2 - b_0a_2) & (b_1 - b_0a_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + [b_0]x(k)$$

(σχεδιάστε το διάγραμμα ροής του παραπάνω συστήματος)

Λύση των εξισώσεων του χώρου των καταστάσεων

Αρχικά ξεκινάμε με την λύση της ομογενούς

$$x(k+1) = Ax(k)$$

Έστω $x(k_0)$ το άνυσμα κατάστασης την αρχική χρονική στιγμή k_0.

$$x(k_0+1) = Ax(k_0)$$
$$x(k_0+2) = Ax(k_0+1) = AAx(k_0) = A^2x(k_0)$$
$$x(k_0+) = Ax(k_0+2) = AA^2x(k_0) = A^3x(k_0)$$
$$\vdots$$
$$x(k_0+n) = A^n x(k_0)$$

Αν

$$k_0+n=k \qquad \Rightarrow \qquad n=k-k_0$$

$$x(k) = A^{k-k_0}x(k_0)$$

Και για $k_0 = 0$

$$x(k) = A^k x(0)$$

Λύση της

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

Για $k = k_0$

$$x(k_0+1)=Ax(k_0)+Bu(k_0)$$

$$x(k_0+2)=Ax(k_0+1)+Bu(k_0+1)=A\left[Ax(k_0)+Bu(k_0)\right]+Bu(k_0+1)$$

$$=A^2x(k_0)+ABu(k_0)+Bu(k_0+1)$$

$$x(k_0+3)=Ax(k_0+2)+Bu(k_0+2)=A\left[A^2x(k_0)+ABu(k_0)+Bu(k_0+1)\right]$$

$$+Bu(k_0+2)$$

$$=A^3x(k_0)+A^2Bu(k_0)+ABu(k_0+1)+Bu(k_0+2)$$

$$\vdots$$

$$x(k_0+n)=A^nx(k_0)+\sum_{i=k_0}^{k_0+n-1}A^{k_0+n-i-1}Bu(i)$$

Για $k_0+n=k$

$$x(k)=A^{k-k_0}x(k_0)+\sum_{i=k_0}^{k-1}A^{k-i-1}Bu(i) \qquad (1.16)$$

και αν $k_0=0$

$$x(k)=A^kx(0)+\sum_{i=0}^{k-1}A^{k-i-1}Bu(i) \qquad (1.17)$$

Από την (1.16) ή έξοδος είναι

$$y(k)=Cx(k)+Du(k)$$

$$=C\left[A^{k-k_0}x(k_0)+\sum_{i=k_0}^{k-1}A^{k-i-1}Bu(i)\right]+Du(k)$$

$$=CA^{k-k_0}x(k_0)+\sum_{i=k_0}^{k-1}CA^{k-i-1}Bu(i)+Du(k)$$

Για $k_0 = 0$

$$y(k) = CA^k x(0) + \sum_{i=0}^{k-1} CA^{k-i-1} Bu(i) + Du(k) \quad (1.18)$$

Αν το άνυσμα της αρχικής κατάστασης $x(0)$ είναι η μηδενική κατάσταση

$$x(0) = 0$$

και η είσοδος $u(k)$ είναι ο μοναδιαίος παλμός

$$\Delta(k) = 1, \;\; k = 1, \qquad \Delta(k) = 0, \;\; k \neq 0$$

η έξοδος (εξ ορισμού) ταυτίζεται με την μοναδιαία παλμική απόκριση $h(k)$ του συστήματος

$$h(k) = \sum_{i=0}^{k-1} CA^{k-i-1} B\Delta(i) + D\Delta(k)$$

Άρα

$$h(0) = D$$

$$\begin{aligned} h(k) &= \sum_{i=0}^{k-1} CA^{k-i-1} B\Delta(i) + D\Delta(k) \\ &= CA^{k-1} B\Delta(0) + CA^{k-2} B\Delta(1) + \ldots + CAB\Delta(k-2) + CB\Delta(k-1) \\ &= CA^{k-1} B\Delta(0) \\ &= CA^{k-1} B \end{aligned}$$

δηλαδή

$$h(k) = CA^k B \qquad k = 1, 2, ...$$

$$h(k) = 0 \qquad\qquad k < 0$$

Λύση της $x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$ μέσω του μετασχηματισμού Z

Ξεκινάμε πρώτα από την ιδιότητα του μετασχηματισμού $\mathcal{Z}$.
Αν

$$\mathcal{Z}\{x(k)\} = X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k) z^{-k}$$

Τότε

$$\mathcal{Z}\{x(k+1)\} = zX(z) - zx(0) \qquad (1.19)$$

Απόδειξη της (1.17) .

$$\mathcal{Z}\{x(k+1)\} = \sum_{k=0}^{\infty} x(k+1) z^{-k} \underset{k+1=\bar{k}}{=} \sum_{\bar{k}=1}^{\infty} x(\bar{k}) z^{-(\bar{k}-1)} = x(1)z^0 + x(2)z^{-1} + x(3)z^{-2} + \ldots$$

$$= z\left[x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + x(3)z^{-3} + \ldots\right]$$
$$= z\left[-x(0)z^0 + x(0)z^0 + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + x(3)z^{-3} + \ldots\right]$$
$$= z\left[-x(0)z^0 + \sum_{k=0}^{\infty} x(k) z^{-k}\right]$$
$$= zX(z) - zx(0)$$

Θεωρώντας τον μετασχηματισμό $\mathcal{Z}$ της

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

έχουμε:

$$\mathcal{Z}\{x(k+1)\} = zX(z) - zx(0) = AX(z) + BU(z)$$

ή

$$zX(z) - AX(z) = zx(0) + BU(z)$$
$$(zI_n - A)X(z) = zx(0) + BU(z)$$

$$X(z) = z(zI_n - A)^{-1} x(0) + (zI_n - A)^{-1} BU(z) \quad (1.20)$$

Συγκρίνοντας την (1.20) με την (1.17):

$$x(k) = A^k x(0) + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1} Bu(i) \qquad (1.17)$$

έχουμε

$$\mathcal{Z}^{-1}\{z(zI_n - A)^{-1}\} = A^k$$
$$\mathcal{Z}^{-1}\{(zI_n - A)^{-1} BU(z)\} = \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1} Bu(i)$$

Θεωρώντας τον μετασχηματισμό $\mathcal{Z}$ της

$$y(k) = Cx(k) + Du(k)$$

έχουμε:

$$Y(z) = CX(z) + DU(z) \qquad (1.21)$$

όπου

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} y(k) z^{-k}, \quad U(z) = \sum_{k=0}^{\infty} u(k) z^{-k}$$

Συνδυάζοντας τις (1.21)(1.20)

$$
\begin{aligned}
Y(z) &= C\left[z(zI_n - A)^{-1}x(0) + (zI_n - A)^{-1}BU(z)\right] + DU(z) \\
&= Cz(zI_n - A)^{-1}x(0) + \left[C(zI_n - A)^{-1}B + D\right]U(z)
\end{aligned}
$$

Αν $x(0) = 0$

$$
Y(s) = \left[C(zI_n - A)^{-1}B + D\right]U(z) \qquad (1.22)
$$

Άρα η συνάρτηση μεταφοράς $G(z): U(z) \to Y(z)$ του συστήματος είναι

$$
G(z) = C(zI_n - A)^{-1}B + D \qquad (1.23)
$$

Παράδειγμα

Με

$$
A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2},\ B = \begin{bmatrix} 0 \\ b_0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 1},\ C = \begin{bmatrix} -a_2 & a_1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times 2},\ D = \begin{bmatrix} b_0 \end{bmatrix}
$$

$$
zI_2 - A = z\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z & -1 \\ a_2 & z + a_1 \end{bmatrix}
$$

$$
(zI_2 - A)^{-1} = \begin{bmatrix} z & -1 \\ a_2 & z + a_1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{z^2 + za_1 + a_2}\begin{bmatrix} z + a_1 & 1 \\ -a_2 & z \end{bmatrix}
$$

$$G(z) = C\left(zI_n - A\right)^{-1} B + D = \begin{bmatrix} -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{z + a_1}{z^2 + za_1 + a_2} & \dfrac{1}{z^2 + za_1 + a_2} \\ \dfrac{-a_2}{z^2 + za_1 + a_2} & \dfrac{z}{z^2 + za_1 + a_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ b_0 \end{bmatrix} + b_0$$

$$= \frac{-\left(a_2 + a_1 z\right)}{z^2 + za_1 + a_2} + b_0$$

ΕΛΕΓΞΙΜΟΤΗΤΑ (Controllability)

Θεωρείστε το σύστημα του χώρου των καταστάσεων

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \tag{1.24}$$

$$y(k) = Cx(k) + Du(k) \tag{1.25}$$

όπου

$$A \in \mathbb{R}^{n\times n},\ B \in \mathbb{R}^{n\times m},\ C \in \mathbb{R}^{p\times n},\ D \in \mathbb{R}^{p\times m}$$

$$x(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$$ «άνυσμα καταστάσεων»

$$u(k) = \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \\ \vdots \\ u_m(k) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times 1}$$ «άνυσμα εισόδων»

$$y(k) = \begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \\ \vdots \\ y_p(k) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{p\times 1}$$ «άνυσμα εξόδων»

Ορισμός. Το σύστημα (1.24) ονομάζεται ελέγξιμο (controllable) αν και μόνο αν, για κάθε αρχική κατάσταση $x(0)\in\mathbb{R}^n$ υπάρχει είσοδος $u(k),\ k=0,1,...,N-1$ τέτοια ώστε, σε χρόνο N, να μεταφέρει την *αρχική* κατάσταση $x(0)\in\mathbb{R}^n$ σε κάθε *τελική* κατάσταση $x(N)\in\mathbb{R}^n$.

Από την λύση (1.16) της εξίσωσης καταστάσεων:

$$x(k)=A^{k-k_0}x(k_0)+\sum_{i=k_0}^{k-1}A^{k-i-1}Bu(i)$$

για $k_0=0$ και $k=N$ έχουμε

$$x(N)=A^{N}x(0)+\sum_{i=0}^{N-1}A^{k-i-1}Bu(i)$$

ή

$$x(N)-A^{N}x(0)=\sum_{i=0}^{N-1}A^{k-i-1}Bu(i) \qquad (1.26)$$

Έστω ότι

$$X(N):=x(N)-A^{N}x(0)\in\mathbb{R}^n$$

Τότε η (1.26) γράφεται

$$X(N)=\sum_{i=0}^{N-1} A^{N-i-1}Bu(i)$$

$$= A^{N-1}Bu(0)+A^{N-2}Bu(1)+\ldots+ABu(N-2)+Bu(N-1)$$

$$=\begin{bmatrix} A^{N-1}B & A^{N-2}B & \ldots & AB & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u(0) \\ u(1) \\ \vdots \\ u(N-2) \\ u(N-1) \end{bmatrix} = SU \qquad (1.27)$$

όπου

$$S := \begin{bmatrix} A^{N-1}B & A^{N-2}B & \ldots & AB & B \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times mN}$$

$$U := \begin{bmatrix} u(0) \\ u(1) \\ \vdots \\ u(N-2) \\ u(N-1) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{mN\times 1}$$

Θεώρημα

Το σύστημα (1.24) είναι ελέγξιμο αν και μόνο αν ο $n\times mN$ πίνακας «*ελεγξιμότητας*»:

$$S := \begin{bmatrix} A^{N-1}B & A^{N-2}B & \ldots & AB & B \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times mN}$$

έχει βαθμίδα n. (Ισοδύναμα οι n γραμμές του είναι γραμμικά ανεξάρτητες ή τουλάχιστον μία $n \times n$ υπό-ορίζουσα του S είναι διάφορη του μηδενός)

Αποδειξη. Η (1.27) είναι

$$X\left(N\right) = SU \qquad (1.28)$$

Έστω ότι $m = 1$ (δηλαδή το σύστημα έχει μια είσοδο) τότε $S \in \mathbb{R}^{n \times N}$. Αν $rankS = n$ και επιλέξουμε τον αριθμό των βημάτων N μέσα στον οποίο επιθυμούμε να γίνει η μετάβαση από την αρχική κατάσταση $x\left(0\right)$ στην τελική κατάσταση $x\left(N\right)$) να είναι ίσος με n, αν δηλαδή επιλέξουμε

$$N = n$$

τότε $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ και η $rankS = n$ συνεπάγεται το ότι ο S^{-1} υπάρχει και άρα η είσοδος $u\left(k\right)$, $k = 0,1,\ldots,N-1$ πού επιτελεί την μεταφορά από την αρχική κατάσταση $x\left(0\right) \in \mathbb{R}^{n}$ στην τελική κατάσταση $x\left(N\right) \in \mathbb{R}^{n}$ δίνεται από την λύση της (1.28)

$$U = \begin{bmatrix} u\left(0\right) \\ u\left(1\right) \\ \vdots \\ u\left(N-2\right) \\ u\left(N-1\right) \end{bmatrix} = S^{-1}X\left(N\right) = S^{-1}\left[x\left(N\right) - A^{N}x\left(0\right)\right]$$

Και η μετάβαση από την αρχική κατάσταση $x(0) \in \mathbb{R}^n$ στην τελική κατάσταση $x(N) = x(n) \in \mathbb{R}^n$ μπορεί να γίνει σε όχι περισσότερα από $N = n$ βήματα.

Αν $m > 1$ τότε

$$S := \begin{bmatrix} A^{N-1}B & A^{N-2}B & \dots & AB & B \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times mN}$$

και άρα

$$S^\tau \in \mathbb{R}^{mN \times n}, \qquad SS^\tau \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

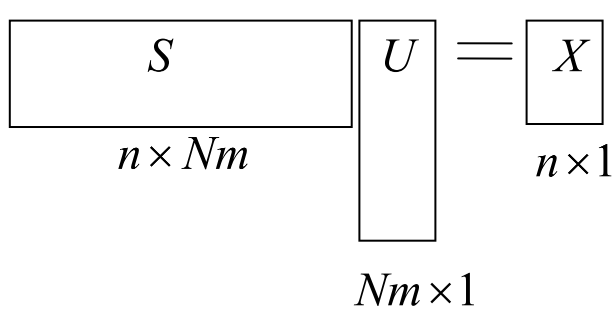
και

$$rankS = n \;\; \Rightarrow \;\; rankSS^\tau = n \;\; \Rightarrow \;\; \left[SS^\tau \right]^{-1} \text{ υπάρχει}$$

Σε αυτή την περίπτωση ($m > 1$) η (1.28) περιγράφει ένα γραμμικό σύστημα n εξισώσεων με Nm αγνώστους:

$$u(0) \in \mathbb{R}^m, u(1) \in \mathbb{R}^m, \dots, u(N-2) \in \mathbb{R}^m, u(N-1) \in \mathbb{R}^m$$

όπως στο σχήμα:



Έστω ότι υπάρχει πίνακας $S^\dagger \in \mathbb{R}^{Nm \times n}$ τέτοιος ώστε

$$SS^{\dagger}S = S \tag{1.29}$$

Ένας τέτοιος πίνακας (αν υπάρχει) ονομάζεται ψευδό-αντίστροφος του S.
Για την λύση ενός γραμμικού συστήματος n γραμμικών εξισώσεων με Nm αγνώστους και $n < Nm$ έχουμε το

Θεώρημα (*)
Το σύστημα n εξισώσεων

$$SU = X = X(U) \tag{1.30}$$

με Nm αγνώστους
$u(0) \in \mathbb{R}^m, u(1) \in \mathbb{R}^m, \ldots, u(N-2) \in \mathbb{R}^m, u(N-1) \in \mathbb{R}^m$

έχει λύση $U \in \mathbb{R}^{Nm}$ αν και μόνο αν, για κάποιο ψευδό-αντίστροφο $S^{\dagger}$ του S ισχύει ή σχέση

$$SS^{\dagger}X = X \tag{1.31}$$

Αν η (1.31) ισχύει τότε μία λύση της (1.30) είναι η

$$U = S^{\dagger}X \tag{1.32}$$

και η γενική λύση είναι η

$$U = S^{\dagger}X + \left(I_{Nm} - S^{\dagger}S\right)Z \tag{1.33}$$

όπου $Z \in \mathbb{R}^{Nm}$ αυθαίρετο άνυσμα.

Απόδειξη. Αν υπάρχει πίνακας $S^{\dagger} \in \mathbb{R}^{Nm \times n}$ τέτοιος ώστε

$SS^{\dagger}S = S$ τότε υπάρχει $U \in \mathbb{R}^{Nm}$ το οποίο να ικανοποιεί την (1.30) αν και μόνο αν

$$SU = SS^{\dagger}SU \underset{(1.30)}{=} SS^{\dagger}X = X \qquad (1.34)$$

Προφανώς αν η (1.34) ικανοποιείτε τότε μία λύση δίνεται από την (1.32).
Αντικαθιστώντας την (1.33) στην (1.30) έχουμε

$$SU = S\left[S^{\dagger}X + \left(I_{Nm} - S^{\dagger}S\right)Z\right] = SS^{\dagger}X + SZ - SS^{\dagger}SZ =$$
$$= SS^{\dagger}X + SZ - SZ = SS^{\dagger}X = X$$

(τέλος της απόδειξης του θεωρήματος (*))

Γυρνώντας στο θεώρημα της ελεγξιμότητας και στην περίπτωση που $m > 1$ η

$$rankS = n \;\Rightarrow\; rankSS^{\tau} = n \;\Rightarrow\; \left[SS^{\tau}\right]^{-1} \text{ υπάρχει}$$

συνεπάγεται την

$$SS^{\tau}\left[SS^{\tau}\right]^{-1} = I_n \qquad (1.35)$$

Και άρα αν $rankS = n$, ένας ψευδό αντίστροφος του S είναι ο

$$S^{\dagger} = S^{\tau}\left[SS^{\tau}\right]^{-1} \qquad (1.36)$$

Από το Θεώρημα (*) η (1.36) σημαίνει ότι το σύστημα n εξισώσεων

$$SU = X = X(U) \qquad (1.37)$$

με τους Nm αγνώστους
$u(0)\in\mathbb{R}^m, u(1)\in\mathbb{R}^m, ..., u(N-2)\in\mathbb{R}^m, u(N-1)\in\mathbb{R}^m$ έχει λύση

$$U=\begin{bmatrix} u(0) \\ u(1) \\ \vdots \\ u(N-2) \\ u(N-1) \end{bmatrix}$$

και άρα η είσοδος $u(k),\ k=0,1,...,N-1$ πού επιτελεί την μεταφορά από την αρχική κατάσταση $x(0)\in\mathbb{R}^n$ στην τελική κατάσταση $x(N)\in\mathbb{R}^n$ δίνεται από την λύση της (1.30)

$$U=S^{\dagger}X+\left(I_{Nm}-S^{\dagger}S\right)Z=S^{\tau}\left[SS^{\tau}\right]^{-1}X+\left(I_{Nm}-S^{\tau}\left[SS^{\tau}\right]^{-1}S\right)Z \quad (1.38)$$

Είναι προφανές ότι και στην περίπτωση αυτή ($m>1$) μπορούμε να επιλέξουμε τον αριθμό των βημάτων N μέσα στον οποίο επιθυμούμε να γίνει η μετάβαση από την αρχική κατάσταση $x(0)$ στην τελική κατάσταση $x(N)$) να είναι ίσος με n, δηλαδή να επιλέξουμε

$$N=n$$

Άρα $rankS=n$ συνεπάγεται και το ότι η μετάβαση από την αρχική κατάσταση $x(0)\in\mathbb{R}^n$ στην τελική κατάσταση $x(N)=x(n)\in\mathbb{R}^n$ μπορεί να γίνει σε όχι περισσότερα από $N=n$ βήματα.