Γενική λύση της

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{1.1}$$

Έστω

$x(t)$ η γενική λύση της (1.1)

και

$x_\mu(t)$ η μερική λύση της (1.1)

έτσι ώστε

$$\dot{x}_\mu(t) = Ax_\mu(t) + Bu(t) \tag{1.2}$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις (1.1) και (1.2)

$$\left[\dot{x}(t) - \dot{x}_\mu(t)\right] = A\left[x(t) - x_\mu(t)\right]$$

και άρα η

$$\boxed{x_h(t) := x(t) - x_\mu(t)} \tag{1.3}$$

είναι λύση της «ομογενούς»

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$

¨Έστω ότι η μερική λύση της

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

είναι η

$$x_\mu(t) = \Psi(t)\omega(t)$$

όπου $\omega(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ άγνωστη ανυσματική συνάρτηση. Τότε

$$\frac{d}{dt}x_\mu(t) = Ax_\mu(t) + Bu(t)$$

ή

$$\frac{dx_\mu(t)}{dt}=\frac{d}{dt}\Psi(t)\omega(t)+\Psi(t)\frac{d\omega(t)}{dt}$$
$$=A\Psi(t)\omega(t)+Bu(t)$$

ή, λόγω της $\frac{d}{dt}\Psi(t)=A\Psi(t)$

$$\frac{dx_\mu(t)}{dt}=A\Psi(t)\omega(t)+\Psi(t)\frac{d\omega(t)}{dt}=A\Psi(t)\omega(t)+Bu(t)$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{d\omega(t)}{dt}=\Psi(t)^{-1}Bu(t)$$

και ολοκληρώνοντας

$$\omega(t)=\int_0^t\Psi(\tau)^{-1}Bu(\tau)d\tau$$

$$\Rightarrow x_\mu(t)=\Psi(t)\omega(t)=\Psi(t)\int_0^t\Psi(\tau)^{-1}Bu(\tau)d\tau$$

$$=\int_0^t\Psi(t)\Psi(-\tau)Bu(\tau)d\tau$$

$$=\int_0^t\Psi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau$$

$$=\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

Από την (1.3)

$$x_h(t) := x(t) - x_\mu(t)$$

η γενική λύση της (1.1) είναι

$$x(t) = x_h(t) + x_\mu(t)$$

και άρα

$$\boxed{x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau}$$

Αν την χρονική στιγμή $t = t_0 \neq 0$ το άνυσμα κατάστασης είναι το $x(t_0)$ τότε από την

$$x(t_0) = e^{At_0}x(0) \Rightarrow x(0) = e^{-At_0}x(t_0)$$

έχουμε ότι η γενική λύση της $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ είναι η

$$\boxed{x(t) = \underbrace{e^{A(t-t_0)}x(t_0)}_{\text{ελευθερη αποκριση καταστασης}} + \underbrace{\int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau}_{\text{δυναμικη αποκριση καταστασης}}}$$

Από την

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

$$y(t) = \underbrace{Ce^{A(t-t_0)}x(t_0)}_{\text{ελευθερη αποκριση εξοδου}} + \underbrace{\int_{t_0}^{t} Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t)}_{\text{δυναμικη αποκριση εξοδου}}$$

Παράδειγμα

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$u(t) = 1,\ t \geq 0, \quad x(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Psi(t) = e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$$

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

$$= \begin{bmatrix} e^{-t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} e^{-(t-\tau)} & e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)} \\ 0 & e^{-2(t-\tau)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} d\tau$$

$$= \begin{bmatrix} -e^{-t} \\ 0 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)} \\ e^{-2(t-\tau)} \end{bmatrix} d\tau =$$

$$=\begin{bmatrix}-e^{-t}\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{1}{2}-e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-2t}\\\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-2t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}-2e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-2t}\\\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-2t}\end{bmatrix}$$

$$x_1(t)=\frac{1}{2}-2e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-2t}$$

$$x_2(t)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-2t}$$