ΙΣΟΔΥΝΑΜΕΣ ΠΕΡΙΓΡΑΦΕΣ

Έστω γραμμικό και χρονικά αμετάβλητο πολυμεταβλητό σύστημα S με μαθηματικό πρότυπο της μορφής του χώρου των καταστάσεων:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$
$$A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times m}, C \in \mathbb{R}^{p\times n}, D \in \mathbb{R}^{p\times m}$$
$$x(t) \in \mathcal{X} \sim \mathbb{R}^{n}$$

Ορισμός Η τετράδα πινάκων
$A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times m}, C \in \mathbb{R}^{p\times n}, D \in \mathbb{R}^{p\times m}$
ονομάζεται περιγραφή του S της μορφής του χώρου των καταστάσεων.

Αν $e_1, e_2, \ldots, e_n$ είναι η ορθοκανονική βάση του χώρου των καταστάσεων $\mathcal{X}$ με

$$e_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow i\text{-στη γραμμή}$$

τότε

$$
\begin{aligned}
x(t) &= e_1 x_1(t) + e_2 x_2(t) + \ldots + e_n x_n(t) \\
&= \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & \cdots & e_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{2.1}
$$

και το άνυσμα στήλης

$$
x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \ \forall t \in \mathbb{R}
$$

ονομάζεται περιγραφή του ανύσματος κατάστασης του S ως προς την βάση $e_1, e_2, ..., e_n$ του $\mathcal{X} \sim \mathbb{R}^n$. Έστω $\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n$ μια άλλη βάση του $\mathcal{X} \sim \mathbb{R}^n$. Τότε

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \overline{e}_1 \overline{x}_1(t) + \overline{e}_2 \overline{x}_2(t) + \ldots + \overline{e}_n \overline{x}_n(t) \\
&= \begin{bmatrix} \overline{e}_1 & \overline{e}_2 & \cdots & \overline{e}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{x}_1(t) \\ \overline{x}_2(t) \\ \vdots \\ \overline{x}_n(t) \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{2.2}
$$

και το άνυσμα στήλης

$$\overline{x}(t)=\begin{bmatrix}\overline{x}_1(t)\\ \overline{x}_2(t)\\ \vdots\\ \overline{x}_n(t)\end{bmatrix}\in\mathcal{X}\sim\mathbb{R}^n$$

ονομάζεται περιγραφή του ανύσματος κατάστασης ως προς την βάση $\overline{e}_1,\overline{e}_2,...,\overline{e}_n$ του $\mathcal{X}\sim\mathbb{R}^n$.
Έστω

$$e_i=[\overline{e}_1,\overline{e}_2,...,\overline{e}_2]\begin{bmatrix}p_{1i}\\ p_{2i}\\ \vdots\\ p_{ni}\end{bmatrix}=\overline{E}p_i,\quad i=1,2,...,n$$

η περιγραφή του ανύσματος e_i ως προς την βάση $[\overline{e}_1,\overline{e}_2,...,\overline{e}_2]=:\overline{E}\in\mathbb{R}^{n\times n}$.
Για $i=1,2,...,n$

$$\begin{bmatrix}e_1 & e_2 & \dots & e_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\overline{E}p_1 & \overline{E}p_2 & \dots & \overline{E}p_2\end{bmatrix}$$

$$=\overline{E}\begin{bmatrix}p_1 & p_2 & \dots & p_n\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\overline{e}_1 & \overline{e}_2 & \dots & \overline{e}_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n}\\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn}\end{bmatrix}$$

$$=\overline{E}P$$

Όπου $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ εχει στήλη i την περιγραφή του e_i ως προς την βάση $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n$

$$\begin{bmatrix} e_1 & e_2 & \cdots & e_n \end{bmatrix} = E = \begin{bmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \cdots & \bar{e}_n \end{bmatrix} P = \bar{E}P$$

$$\begin{aligned} x(t) &= \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & \cdots & e_n \end{bmatrix} x(t) \\ &= \begin{bmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \cdots & \bar{e}_n \end{bmatrix} P x(t) \\ &= \begin{bmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \cdots & \bar{e}_n \end{bmatrix} \bar{x}(t) \end{aligned}$$

Άρα οι δύο περιγραφές συνδέονται μέσω της

$$\boxed{\bar{x}(t) = P x(t)}$$

Ομοίως

$$\boxed{x(t) = Q \bar{x}(t)}$$

Όπου $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ εχει στήλη i την περιγραφή του $\bar{e}_i$ ως προς την βάση $e_1, e_2, \ldots, e_n$

$$\bar{E} = EQ$$

$$\begin{aligned} &\bar{x}(t) = P x(t) = P Q \bar{x}(t) \\ &\Rightarrow PQ = I_n \Rightarrow P = Q^{-1} \end{aligned}$$

και P, Q ομαλοί πίνακες (non-singular)

Άρα αν $x(t)$ είναι η περιγραφή του ανύσματος κατάστασης του S ως προς κάποια βάση του χώρου των καταστάσεων $\mathcal{X} \sim \mathbb{R}^n$
και αν $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ και $|R| \neq 0 \Leftrightarrow R$ είναι ομαλός
τότε η εξίσωση

$$\boxed{Rx(t) =: \overline{x}(t)}$$

ορίζει μία **νέα** περιγραφή $\overline{x}(t)$ του ανύσματος κατάστασης $x(t)$ ως προς μια άλλη βάση του $\mathcal{X} \sim \mathbb{R}^n$.

Έστω η περιγραφή του S

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$
$$A \in \mathbb{R}^{n \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times m}, C \in \mathbb{R}^{p \times n}, D \in \mathbb{R}^{p \times m}$$
$$x(t) \in \mathcal{X} \sim \mathbb{R}^n$$

$$Rx(t) =: \overline{x}(t)$$
$$x(t) = R^{-1}\overline{x}(t)$$
$$\dot{x}(t) = R^{-1}\dot{\overline{x}}(t)$$

$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) = R^{-1}\dot{\overline{x}}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\
&= AR^{-1}\overline{x}(t) + Bu(t)
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \dot{\overline{x}}(t) = RAR^{-1}\overline{x}(t) + RBu(t)
$$

Αν

$$
\overline{A} := RAR^{-1}, \quad \overline{B} := RB, \quad \overline{C} := CR^{-1}, \quad \overline{D} := D
$$

τότε έχουμε την περιγραφή του S

$$
\begin{aligned}
\dot{\overline{x}}(t) &= \overline{A}\overline{x}(t) + \overline{B}u(t) \\
y(t) &= \overline{C}\overline{x}(t) + \overline{D}u(t)
\end{aligned}
$$

και οι περιγραφές

$(A, B, C, D), (\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \overline{D})$ ονομάζονται **όμοιες** (similar) περιγραφές του S

Παράδειγμα

$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\
y(t) &= Cx(t) + Du(t)
\end{aligned}
$$

$$
A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

έστω

$$\overline{x}(t) = Rx(t)$$

$$R = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \ |R| = 3 \neq 0$$

$$x(t) = R^{-1}\overline{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\overline{A} := RAR^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\overline{B} := RB = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\overline{C} := CR^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\overline{D} := D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Οι δύο περιγραφές

$$A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times m}, C \in \mathbb{R}^{p\times n}, D \in \mathbb{R}^{p\times m}$$

και

$$\overline{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}, \overline{B} \in \mathbb{R}^{n\times m}, \overline{C} \in \mathbb{R}^{p\times n}, \overline{D} \in \mathbb{R}^{p\times m}$$

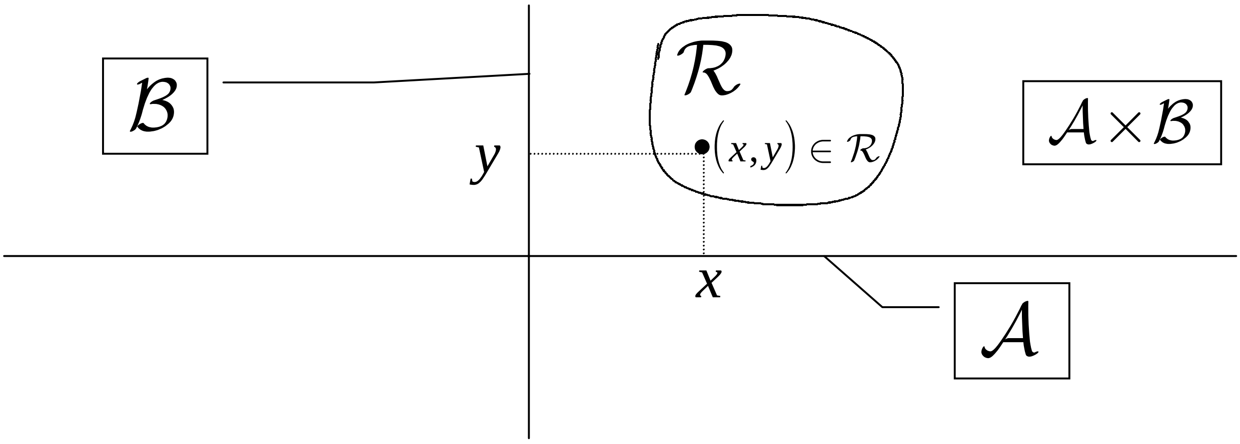
είναι **όμοιες**.

ΣΧΕΣΕΙΣ ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑΣ (Equivalence relations)

Ορισμός.

Σχέση. Έστω $\mathcal{A},\mathcal{B}$ δύο αυθαίρετα σύνολα.

Ένα υποσύνολο $\mathcal{R}$ του καρτεσιανού γινομένου $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$ ονομάζεται **σχέση** από το $\mathcal{A}$ στο $\mathcal{B}$.



Αν $\mathcal{A}=\mathcal{B}$ τότε το $\mathcal{R}$ ονομάζεται **σχέση** επάνω στο $\mathcal{A}$.

Αν $x\in\mathcal{A},\ y\in\mathcal{B}$ και $(x,y)\in\mathcal{R}$ τότε λέμε ότι:

το x ***σχετίζεται με το*** y μέσω του $\mathcal{R}$ ή ότι

$\mathcal{R}$ ***είναι η σχέση μεταξύ*** $x\in\mathcal{A}$ ***και*** $y\in\mathcal{B}$ ή ότι

το $x\in\mathcal{A}$ **είναι ισοδύναμο με το** $y\in\mathcal{B}$ **μέσω της** $\mathcal{R}$

Το *πεδίο ορισμού* του $\mathcal{R}$ είναι το σύνολο

$$\{x\in\mathcal{A} \mid (x,y)\in\mathcal{R}\}$$

Το *πεδίο τιμών* του $\mathcal{R}$ είναι το σύνολο

$$\{y \in \mathcal{B} \mid (x,y) \in \mathcal{R}\} =: \mathcal{R}x$$

Μια **σχέση** $\mathcal{R}$ επάνω σε ένα σύνολο $\mathcal{A}$ δηλαδή ένα υποσύνολο $\mathcal{R}$ του $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ ονομάζεται **σχέση ισοδυναμίας επάνω στο** $\mathcal{A}$ αν

- $(x,x) \in \mathcal{R}$ για κάθε $x \in \mathcal{A}$

(διάβαζε: κάθε $x \in \mathcal{A}$ είναι ισοδύναμο με τον «εαυτό» του) (*ανακλαστική ιδιότητα*)

- $(x,y) \in \mathcal{R} \Rightarrow (y,x) \in \mathcal{R}$

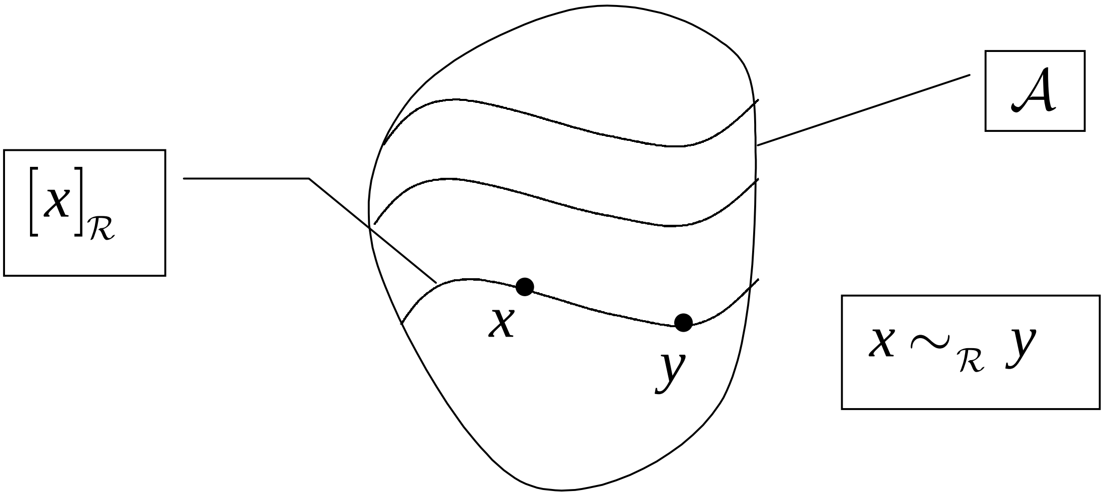
(διάβαζε: το x είναι ισοδύναμο με το y συνεπάγεται ότι το y είναι ισοδύναμο με το x) (*συμμετρική ιδιότητα*)

- $(x,y) \in \mathcal{R}$ και $(y,z) \in \mathcal{R} \Rightarrow (x,z) \in \mathcal{R}$

(διάβαζε: το x είναι ισοδύναμο με το y, και το το y είναι ισοδύναμο με το z συνεπάγεται ότι το x είναι ισοδύναμο με το z)
(*μεταβατική ιδιότητα*)

Πολλές φορές αντί $(x,y)\in\mathcal{R}$ γράφουμε $x\sim_{\mathcal{R}} y$

Αν $\mathcal{R}$ είναι σχέση ισοδυναμίας επάνω στο $\mathcal{A}$ τότε η $\mathcal{R}$ διαμελίζει το $\mathcal{A}$ σε ξεχωριστές κλάσεις ή $\mathcal{R}$- κλάσεις ισοδυναμίας



Για κάθε $x\in\mathcal{A}$ η $\mathcal{R}$- κλάση ισοδυναμίας του x είναι το σύνολο

$$[x]_{\mathcal{R}} = \{x\in\mathcal{A} \mid (x,y)\in\mathcal{R}\} = \{x\in\mathcal{A} \mid x\sim_{\mathcal{R}} y\} \subset \mathcal{A}$$

ΔΗΛΑΔΗ

Αν $x\in\mathcal{A}$, τότε η $\mathcal{R}$- κλάση ισοδυναμίας του x στην οποία το x ανήκει αποτελείτε από όλα τα στοιχεία $y\in\mathcal{A}$ με τα οποία το x είναι ισοδύναμο μέσω της $\mathcal{R}$.

Για κάθε σχέση ισοδυναμίας $\mathcal{R}$ επάνω σε ένα σύνολο $\mathcal{A}$ είναι:

$[x]_{\mathcal{R}} \equiv [y]_{\mathcal{R}}$ αν και μόνο αν $x \sim_{\mathcal{R}} y$

και

$[x]_{\mathcal{R}} \cap [y]_{\mathcal{R}} = \varnothing$ αν και μόνο αν $x \nsim_{\mathcal{R}} y$

ΤΟ ΠΗΛΙΚΟ ΤΟΥ $\mathcal{A}$ ΔΙΑ $\mathcal{R}$

Συμβολίζεται με $\mathcal{A}/\mathcal{R}$ και είναι το σύνολο όλων των κλάσεων ισοδυναμίας $[x]_{\mathcal{R}}$ όταν τα x διατρέχει όλες τις τιμές στο $\mathcal{A}$

ΑΝΑΛΛΟΙΩΤΕΣ της $\mathcal{R}$

Αν $\mathcal{T}$ κάποιο σύνολο τότε μια απεικόνιση $f : \mathcal{A} \to \mathcal{T}$ ονομάζεται αναλλοίωτη της $\mathcal{R}$ αν

$$x \sim_{\mathcal{R}} y \Rightarrow f(x) = f(y)$$

(διάβαζε: η απεικόνιση $f : \mathcal{A} \to \mathcal{T}$ είναι αναλλοίωτη της $\mathcal{R}$ αν όλα τα y στην κλάση ισοδυναμίας $[x]_{\mathcal{R}}$ έχουν την ίδια εικόνα κάτω από την f, αν δηλαδή $f(x) = f(y)$)

Οι εικόνες $f(x) = f(y)$ ονομάζονται αναλλοίωτες της $\mathcal{R}$.

ΠΛΗΡΕΙΣ ΑΝΑΛΛΟΙΩΤΕΣ της $\mathcal{R}$

Αν $\mathcal{T}$ κάποιο σύνολο τότε μια απεικόνιση $f : \mathcal{A} \to \mathcal{T}$ ονομάζεται πλήρης αναλλοίωτη της $\mathcal{R}$ αν

$$x \sim_{\mathcal{R}} y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$$

(παρατηρείστε το «διπλό» βέλος)

(Οι εικόνες $f(x) = f(y)$ ονομάζονται πλήρης αναλλοίωτες της $\mathcal{R}$.)

Θεωρείστε το σύνολο $\mathcal{A} = \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{n\times m} \times \mathbb{R}^{p\times n} \times \mathbb{R}^{p\times m}$. Κάθε σημείο $x \in \mathcal{A}$ είναι μια τετράδα πινάκων $x = \left(A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times m}, C \in \mathbb{R}^{p\times n}, D \in \mathbb{R}^{p\times m}\right)$ την οποία ταυτίζουμε με μια περιγραφή S ενός πολυμεταβλητού συστήματος της μορφής του χώρου των καταστάσεων.

Θεώρημα Η ομοιότητα περιγραφών μορφής του χώρου των καταστάσεων αποτελεί σχέση ισοδυναμίας επάνω στο σύνολο

$$\mathcal{A} = \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{n\times m} \times \mathbb{R}^{p\times n} \times \mathbb{R}^{p\times m}$$

των περιγραφών συστημάτων

$$S = \left(A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times m}, C \in \mathbb{R}^{p\times n}, D \in \mathbb{R}^{p\times m}\right) \subset \mathcal{A}$$

Η απόδειξη **άσκηση**.
Αποδείξτε τις τρεις ιδιότητες της σχέσης ισοδυναμίας.
Ορίστε τις κλάσεις ισοδυναμίας.
Αποδείξτε ότι οι ιδιοτιμές του πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ αποτελούν ***αναλλοίωτες*** κάθε κλάσης ισοδυναμίας.

Κανονικές απεικονίσεις και κανονικές μορφές

Μια απεικόνιση

$$g : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$$

ονομάζεται *κανονική απεικόνιση* για μια σχέση ισοδυναμίας $\mathcal{R}$ επάνω στο σύνολο $\mathcal{A}$ όταν

1. $x \sim_{\mathcal{R}} g(x) \quad \forall x \in \mathcal{A}$

2. $x \sim_{\mathcal{R}} y \Leftrightarrow g(x) = g(y)$

Αν $\mathcal{R}$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας επάνω σε ένα σύνολο $\mathcal{A}$ και $g:\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ είναι μια *κανονική απεικόνιση*, τότε την εικόνα $g(x)\in\mathcal{A}$ ενός στοιχείου $x\in\mathcal{A}$ ονομάζουμε κανονική μορφή του $x\in\mathcal{A}$. Το σύνολο των εικόνων $g(x)$ για κάθε $x\in\mathcal{A}$, τον οποίο συμβολίζουμε με $\operatorname{Im} g$, ονομάζουμε σύνολο *κανονικών μορφών* της $\mathcal{R}$ επάνω στο σύνολο $\mathcal{A}$ ή σύνολο $\mathcal{R}$-κανονικών μορφών.

Άσκηση

Αποδείξτε ότι η μορφή Jordan $J\in\mathbb{R}^{n\times n}$ ενός πίνακα $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ αποτελεί ***κανονική μορφή*** της **ομοιότητας** περιγραφών συστημάτων της μορφής του χώρου των καταστάσεων.

(για τον ορισμό της μορφής Jordan $J\in\mathbb{R}^{n\times n}$ ενός πίνακα $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ βλέπε Κεφάλαιο 8 , Σημειώσεις Μαθηματικής Θεωρίας Συστημάτων στο http://control.math.auth.gr/)