ΠΙΝΑΚΑΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ

Έστω γραμμικό και χρονικά αμετάβλητο πολυμεταβλητό σύστημα S με μαθηματικό πρότυπο της μορφής του χώρου των καταστάσεων:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

$$A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times m}, C \in \mathbb{R}^{p\times n}, D \in \mathbb{R}^{p\times m}$$

$$x(t) \in \mathcal{X} \sim \mathbb{R}^{n}$$

Έστω

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$$

$$U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$$

$$Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$$

Μετασχηματίζοντας κατά Laplace

$$sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s)$$

$$Y(s) = CX(s) + DU(s)$$

$$(sI_n - A)X(s) = x(0) + BU(s)$$

$$X(s) = (sI_n - A)^{-1}x(0) + (sI_n - A)^{-1}BU(s)$$

$$Y(s) = C(sI_n - A)^{-1}x(0) + C(sI_n - A)^{-1}BU(s) + DU(s)$$

Αν $x(0) = 0$

$$Y(s) = \left[C(sI_n - A)^{-1}B + D\right]U(s)$$

ΟΡΙΣΜΟΣ

Ο πίνακας

$$G(s) = \left[C(sI_n - A)^{-1}B + D\right] \in \mathbb{R}_{pr}(s)^{p \times m}$$

ονομάζεται ***πίνακας συναρτήσεων μεταφοράς*** του συστήματος.

Ο πίνακας $G(s)$ γράφεται

$$G(s) = \left[C(sI_n - A)^{-1}B + D\right] = \frac{C\,adj(sI_n - A)B}{\det(sI_n - A)} + D$$

Ορισμός

Το πολυώνυμο

$$\psi(s) = \det(sI_n - A) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0 \in \mathbb{R}[s]$$

ονομάζεται ***χαρακτηριστικό πολυώνυμο*** ή ***πολυώνυμο πόλων*** του συστήματος..

Άσκηση
Αποδείξτε ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο αποτελεί ***αναλλοίωτη* ομοιότητας** περιγραφών μορφής του χώρου των καταστάσεων.

Θεώρημα (Cayley-Hamilton theorem)
Κάθε πινακας $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ικανοποιεί το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο.

Δηλαδή αν

$$\psi(s) = \det(sI_n - A) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0$$

τότε

$$\psi(A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \ldots + a_1 A + a_0 I_n = 0$$

Θεώρημα
Ο αντίστροφος του πίνακα $sI_n - A$ δίδεται από τον τύπο

$$\begin{aligned}(sI_n - A)^{-1} = \frac{1}{\psi(s)}\Big[&\left(s^{n-1} + a_{n-1}s^{n-2} + \ldots + a_1\right)I_n + \\ &+\left(s^{n-2} + a_{n-1}s^{n-3} + \ldots + a_2\right)A \\ &+\ldots+\left(s + a_{n-1}\right)A^{n-2} + A^{n-1}\Big]\end{aligned}$$

Απόδειξη Άσκηση

Πρόταση

Αν $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ και $\lambda_i \in \mathbb{R}, \ u_i \in \mathbb{R}^n, \ i = 1, 2, ..., n$ είναι οι ιδιοτιμές και τα αντίστοιχα ιδιοανύσματα του A

$$Au_i = \lambda_i u_i, \quad i = 1, 2, ..., n$$

τότε από την

$$\left(I_n - A\right)u_i = u_i - Au_i = u_i - \lambda_i u_i = \left(1 - \lambda_i\right)u_i$$

προκύπτει ότι $1 - \lambda_i, \quad u_i, \quad i = 1, 2, ..., n$, είναι οι ιδιοτιμές και τα αντίστοιχα ιδιοανύσματα του πίνακα $I_n - A$.

Αν $\rho(A) := \max_i \left\{\left|\lambda_i\right|\right\} < 1$ τότε $\left|I_n - A\right| \neq 0$ και άρα ο $I_n - A$ είναι **ομαλός** (non-singular). Επίσης

$$\lim_{n\to\infty} A^n = 0 \text{ αν και μόνο αν } \rho(A) = \max_i \left\{\left|\lambda_i\right|\right\} < 1 \quad (1.1)$$

Θεώρημα

Αν $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ και $\rho(A) < 1$ τότε η γεωμετρική σειρά

$$I_n + A + A^2 + A^3 + ...$$

συγκλίνει στο όριο $\left(I_n - A\right)^{-1}$

Απόδειξη (κάνουμε χρήση του γεγονότος ότι:

Έστω

$$S_n = I + A + A^2 + \ldots + A^n$$

$$S_n\left(I_n - A\right) = \left(I_n + A + A^2 + \ldots + A^n\right)\left(I_n - A\right)$$

$$= I_n + A + A^2 + \ldots + A^n$$

$$- A - A^2 - \ldots - A^n - A^{n+1}$$

$$= I_n - A^{n+1}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n\left(I_n - A\right) = I_n \quad (\lambda o \gamma \omega \ \tau \eta \varsigma \ (1.1))$$

$$\Rightarrow$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} S_n = \left(I_n - A\right)^{-1}}$$

$$\boxed{I_n + A + A^2 + A^3 + \ldots = \left(I_n - A\right)^{-1}}$$

Αντικαθιστώντας όπου $A \to \frac{1}{s} A$ παίρνουμε

$$I_n + \frac{1}{s}A + \frac{1}{s^2}A^2 + \frac{1}{s^3}A^3 + \ldots = \left(I_n - \frac{1}{s}A\right)^{-1}$$

$$= \left[\frac{1}{s}\left(sI_n - A\right)\right]^{-1} = s\left(sI_n - A\right)^{-1}$$

$$\Rightarrow \boxed{\left(sI_n - A\right)^{-1} = \frac{1}{s}I_n + \frac{1}{s^2}A + \frac{1}{s^3}A^2 + \ldots}$$

(Σειρά Laurent η οποία συγκλίνει για $|s| > \max\limits_{i=1,2,..,n} |\lambda_i|$)

Θεώρημα

Ο πίνακας συναρτήσεων μεταφοράς αναπτύσσεται σαν σειρά Laurent ως

$$G(s) = C\left(sI_n - A\right)^{-1}B + D$$

$$= D + \frac{1}{s}CB + \frac{1}{s^2}CAB + \frac{1}{s^3}CA^2B + \ldots$$

$$= D + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{s^{i+1}} CA^iB$$

Οι πίνακες $CA^iB \in \mathbb{R}^{p\times m}, \quad i=0,1,2,\ldots$ ονομάζονται **παράμετροι Markov** του συστήματος.

Θεώρημα

Αν οι περιγραφές $(A,B,C,D),(\bar{A},\bar{B},\bar{C},\bar{D})$ είναι **όμοιες** τότε έχουν τις ίδιες συναρτήσεις μεταφοράς και τις ίδιες παραμέτρους Markov.

Αλλιώς

Αν

$\bar{A} := RAR^{-1}, \quad \bar{B} := RB, \quad \bar{C} := CR^{-1}, \quad \bar{D} := D$ Η

τότε

$$G(s) = C(sI_n - A)^{-2}B + D$$
$$= \bar{C}(sI_n - \bar{A})^{-2}\bar{B} + \bar{D}$$

και

$$CA^iB = \overline{C}\,\overline{A}^{\,i}\,\overline{B}, \quad i = 0,1,2,3,\ldots$$

Αλλιώς

Η συνάρτηση μεταφοράς και οι παράμετροι Markov μιας περιγραφής του χώρου των καταστάσεων αποτελούν ***αναλλοίωτες*** κάθε κλάσης ισοδυναμίας **ομοιότητας**

Απόδειξη Άσκηση.

Ελάχιστο πολυώνυμο (minimal polynomial)

Θεώρημα Cayley-Hamilton

$$\psi(s) = \det(sI_n - A) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + ... + a_1 s + a_0$$

τότε

$$\psi(A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + ... + a_1 A + a_0 I_n = 0$$

Μπορεί να υπάρχει πολυώνυμο

$$p(s), \ \deg p(s) < n: \ p(A) = 0$$

Το πολυώνυμο $m(s)$ **ελάχιστου** βαθμού τ.ω.

$m(A) = 0$ ονομάζεται **ελάχιστο πολυώνυμο.**

(για ένα ποιο αυστηρό ορισμό του ελαχίστου πολυωνύμου ενός πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ βλέπε Κεφάλαιο 8 , Σημειώσεις Μαθηματικής Θεωρίας Συστημάτων στο http://control.math.auth.gr/)

Το **ελάχιστο πολυώνυμο** $m(s)$ διαιρεί το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\psi(s)$

$$\psi(s) = q(s)m(s), \quad q(s) \in \mathbb{R}[s]$$

Θεωρείστε τον αντίστροφο του χαρακτηριστικού πίνακα $(sI_n - A)$

$$\left(sI_n - A\right)^{-1} = \frac{1}{\psi(s)} adj\left(sI_n - A\right)$$

$$\Rightarrow adj\left(sI_n - A\right) = \psi(s)\left(sI_n - A\right)^{-1} \in \mathbb{R}[s]^{n\times n}$$

Μπορεί να δειχτεί το πολυώνυμο $q(s)$ είναι ο μεγιστος κοινός διαιρέτης των στοιχείων $\alpha_{ij}(s) \in \mathbb{R}[s]$ του $adj\left(sI_n - A\right)$. (**ΔΕΙΞΤΕ ΤΟ**)

Αρα

$$adj\left(sI_n - A\right) = q(s)\Gamma(s)$$

όπου $\Gamma(s) \in \mathbb{R}[s]^{n\times n}$ έχει στοιχεία χωρίς πολυωνυμικούς κοινούς όρους. Άρα

$$\left(sI_n - A\right)^{-1} = \frac{1}{\psi(s)} adj\left(sI_n - A\right) =$$

$$= \frac{1}{\psi(s)} q(s)\Gamma(s)$$

$$= \frac{1}{m(s)}\Gamma(s)$$

$$\Rightarrow$$

$$G(s) = C(sI_n - A)^{-1}B = \frac{1}{m(s)}C\Gamma(s)B$$

Αν και τα στοιχεία του $\Gamma(s)$ δεν έχουν κοινούς πολυωνυμικούς όρους με το ελάχιστο πολυώνυμο $m(s)$ τα στοιχεία του $C\Gamma(s)B$ μπορεί να έχουν κοινούς πολυωνυμικούς όρους.

Παράδειγμα υπολογισμού του πίνακα συναρτήσεων μεταφοράς.

Έστω το σύστημα

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$sI_2 - A = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix},$$
$$\det(sI_2 - A) = s^2 + 3s + 2 = (s+1)(s+2) = \psi(s)$$
$$(sI_2 - A)^{-1} = \frac{1}{(s+1)(s+2)}\begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \dfrac{s+3}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \dfrac{-2}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{s}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}$$

$$C(sI_2-A)^{-1}=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dfrac{s+3}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \dfrac{-2}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{s}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \dfrac{-(s+3)}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{-1}{(s+1)(s+2)} \\ \dfrac{1}{(s+2)} & \dfrac{1}{(s+2)} \end{bmatrix}$$

$$G(s)=C(sI_2-A)^{-1}B+D$$

$$=\begin{bmatrix} \dfrac{-(s+3)}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{-1}{(s+1)(s+2)} \\ \dfrac{1}{(s+2)} & \dfrac{1}{(s+2)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{1}{(s+2)} & \dfrac{1}{(s+1)} \\ \dfrac{1}{(s+2)} & 0 \end{bmatrix}$$