ΙΔΟΤΙΜΕΣ, ΙΔΙΟΑΝΥΣΜΑΤΑ, ΙΔΙΟΚΙΝΗΣΕΙΣ

Έστω το γραμμικό, χρονικά αναλλοίωτο και ελεύθερο (εισόδων) σύστημα του χώρου των καταστάσεων:

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad A \in \mathbb{R}^{n\times n}, x(0) \neq 0$$

Έστω ότι ο $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ έχει n διακριτές πραγματικές ιδιοτιμές

$$\lambda_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1,2,\ldots,n \quad \lambda_i \neq \lambda_j \quad i \neq j$$

Τότε ο A έχει n γραμμικώς ανεξάρτητα (δεξιά) ιδιοανύσματα

$$u_i \in \mathbb{R}^n, \quad i = 1,2,\ldots,n$$

$$Au_i = \lambda_i u_i, \quad i = 1,2,\ldots,n$$

Το ότι τα ιδιοανύσματα $u_i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1,2,\ldots,n$ του A είναι γραμμικώς ανεξάρτητα σημαίνει ότι **δεν υπάρχουν** n μιγαδικοί αριθμοί $c_i \in \mathbb{C}$ με $c_i \neq 0$ για τουλάχιστον ένα $i = 1,2,\ldots,n$ τέτοιοι ώστε

$$u_1c_1 + u_2c_2 + \ldots + u_nc_n = 0$$

ή ισοδύναμα ότι αν

$$U := \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \ldots & u_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

είναι πίνακας με στήλες τα ιδιοανύσματα
$u_i \in \mathbb{R}^n,\ i = 1, 2, ..., n$
τότε η εξίσωση

$$\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

έχει μόνη λύση την

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

ή ισοδύναμα ότι

$\det U \neq 0 \Rightarrow\ U^{-1} =: V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ υπάρχει

Οι εξισώσεις

$$A u_i = \lambda_i u_i, \quad i = 1, 2, ..., n$$

υπό μορφή πινάκων γράφονται

$$A\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

ή

$$AU = U\Lambda$$

όπου

$$\Lambda := \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

$$\Rightarrow U^{-1}AU = \Lambda$$

Έστω αλλαγή συντεταγμένων στο χώρο των καταστάσεων με νέο άνυσμα κατάστασης το

$$z(t) := U^{-1}x(t) = Vx(t)$$

ή

$$x(t) = Uz(t)$$

Άρα

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$
$$U\dot{z}(t) = AUz(t)$$
$$\dot{z}(t) = U^{-1}AUz(t) = \Lambda z(t)$$

$$\dot{z}(t) = \Lambda z(t)$$
$$\dot{z}(t) = \begin{bmatrix} \dot{z}_1(t) \\ \dot{z}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{z}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ \vdots \\ z_n(t) \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$\dot{z}_i(t) = \lambda_i z_i(t) \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$
$$z_i(t) = e^{\lambda_i t} z_i(0) \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

Οι λύσεις $z_i(t), \quad i = 1, 2, \ldots, n$ ονομάζονται ιδιοκινήσεις και εξελίσσονται επί των ιδιοανυσμάτων.

$$\begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ \vdots \\ z_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(0) \\ z_2(0) \\ \vdots \\ z_n(0) \end{bmatrix}$$

Αν

$$e^{\Lambda t} := \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

τότε

$$z(t) = e^{\Lambda t} z(0)$$

είναι λύση της

$$\dot{z}(t) = \Lambda z(t)$$

Από την

$$\begin{aligned} & x(t) = Uz(t) \\ & \Rightarrow z(t) = U^{-1} x(t) \\ & \Rightarrow z(0) = U^{-1} x(0) \end{aligned}$$

Και άρα

$$\begin{aligned} x(t) &= Uz(t) \\ &= Ue^{\Lambda t} z(0) \\ &= Ue^{\Lambda t} U^{-1} x(0) \\ &= e^{At} x(0) \end{aligned}$$

Από την οποία προκύπτει ότι

$$\boxed{e^{At} = Ue^{\Lambda t}U^{-1} = Ue^{\Lambda t}V}$$

Παράδειγμα

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix},$$

$$\psi(s) = \det[sI_2 - A] = \det\begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix} = s(s+3)+2$$

$$= s^2 + 3s + 2 = (s+1)(s+2)$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = -2$$

Αν

$$u_1 = \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{12} \end{bmatrix},\ \ u_2 = \begin{bmatrix} u_{21} \\ u_{22} \end{bmatrix}$$

$$Au_1 = \lambda_1 u_1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{12} \end{bmatrix} = (-1)\begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{12} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow u_{12} = -u_{11}$$

η οποία για $u_{11} = 1$ δίνει $u_{12} = -1$ και άρα

$$u_1 = \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Με παρόμοιο τρόπο βρίσκουμε ότι

$$u_2 = \begin{bmatrix} u_{21} \\ u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

και άρα

$$U = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

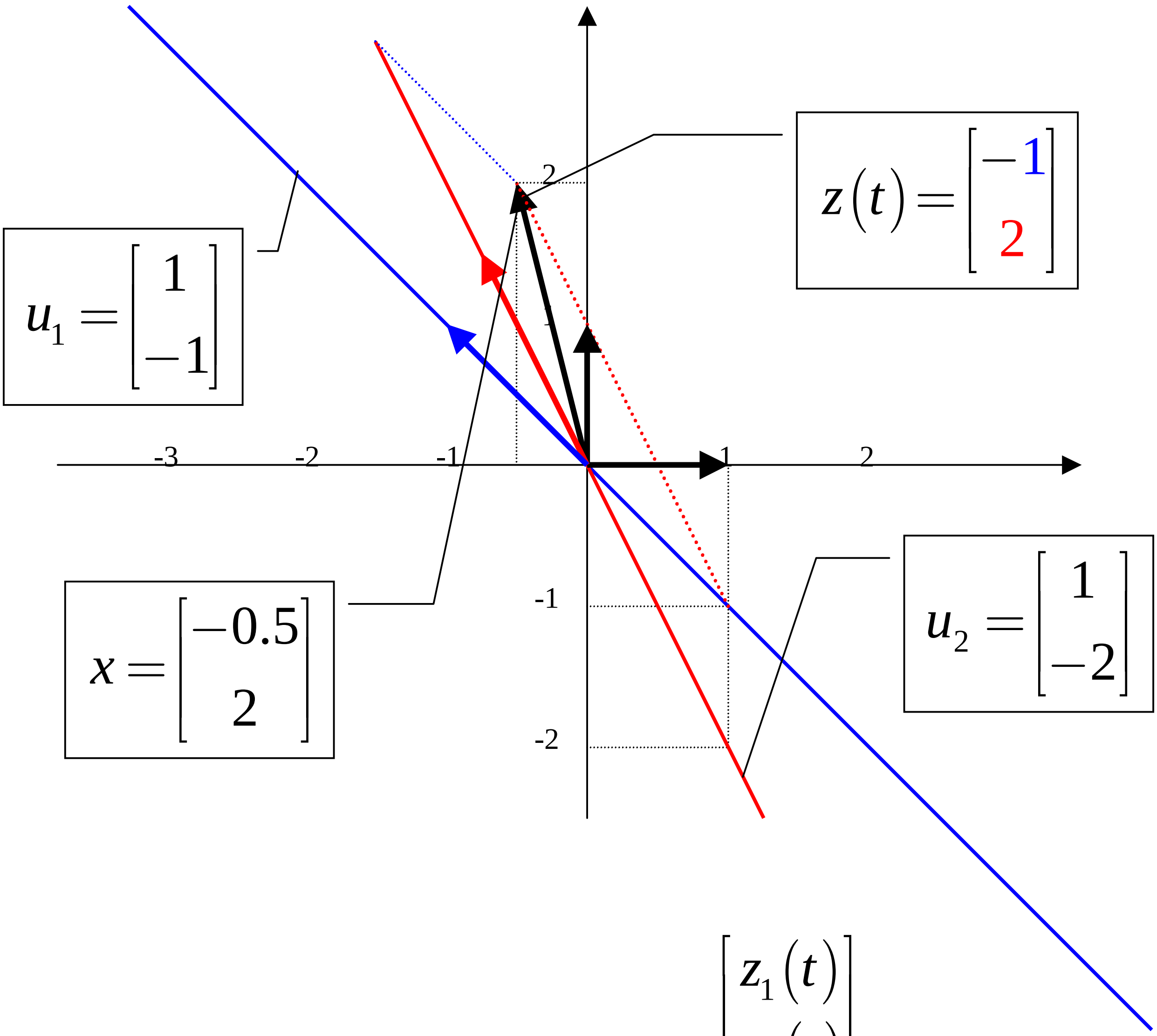
$$U^{-1} = V = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Τελικά

$$\Psi(t) = e^{At} = Ue^{\Lambda t}U^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$



$$x(t)=Uz(t)=\begin{bmatrix}u_1 & u_2 & \dots & u_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_1(t)\\z_2(t)\\\vdots\\z_n(t)\end{bmatrix}$$

$$=u_1z_1(t)+u_2z_2(t)+\ldots+u_nz_n(t)$$

$$=u_1e^{\lambda_1 t}z_1(0)+u_1e^{\lambda_2 t}z_2(0)+\ldots+u_ne^{\lambda_n t}z_n(0)$$

από την

$$z(0) = U^{-1}x(0) = Vx(0)$$

$$\begin{bmatrix} z_1(0) \\ z_2(0) \\ \vdots \\ z_n(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1^{\tau} \\ v_2^{\tau} \\ \vdots \\ v_n^{\tau} \end{bmatrix} x(0), \quad v_i^{\tau} \in \mathbb{R}^{1\times n}$$

$$\Rightarrow$$

$$z_i(0) = v_i^{\tau} x(0), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$\begin{aligned} x(t) &= u_1 e^{\lambda_1 t} z_1(0) + u_1 e^{\lambda_2 t} z_2(0) + \ldots + u_n e^{\lambda_n t} z_n(0) \\ &= u_1 e^{\lambda_1 t} v_1^{\tau} x(0) + u_2 e^{\lambda_2 t} v_2^{\tau} x(0) + \ldots + u_n e^{\lambda_n t} v_n^{\tau} x(0) \\ &= \left[u_1 e^{\lambda_1 t} v_1^{\tau} + u_2 e^{\lambda_2 t} v_2^{\tau} + \ldots + u_n e^{\lambda_n t} v_n^{\tau} \right] x(0) \\ &= e^{At} x(0) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow$$

$$\boxed{\Psi(t) = e^{At} = \left[u_1 e^{\lambda_1 t} v_1^{\tau} + u_2 e^{\lambda_2 t} v_2^{\tau} + \ldots + u_n e^{\lambda_n t} v_n^{\tau} \right]}$$

Παράδειγμα

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix},$$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix}$$

$$U^{-1} = V = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1^{\tau} \\ v_2^{\tau} \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = u_1 e^{\lambda_1 t} v_1^{\tau} + u_2 e^{\lambda_2 t} v_2^{\tau}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} e^{-t} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \end{bmatrix} e^{-2t}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} e^{-t} + \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} e^{-2t}$$

$$= \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Αριστερά ιδιοανύσματα

Από την

$$A \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$AU = U\Lambda$$

$$U^{-1}A = \Lambda U^{-1}$$

$$VA = \Lambda V$$

όπου

$$V=\begin{bmatrix} v_1^{\tau} \\ v_2^{\tau} \\ \vdots \\ v_n^{\tau} \end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{n\times n}$$

και

$$v_i^{\tau}=\begin{bmatrix} v_{i1} & v_{i2} & \dots & v_{in} \end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{1\times n},\quad i=1,2,\dots,n$$

οι n γραμμές του $V=U^{-1}$.

Άρα

$$VA=\Lambda V$$

$$\begin{bmatrix} v_1^{\tau} \\ v_2^{\tau} \\ \vdots \\ v_n^{\tau} \end{bmatrix}A=\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1^{\tau} \\ v_2^{\tau} \\ \vdots \\ v_n^{\tau} \end{bmatrix}$$

$$v_i^{\tau}A=\lambda_i v_i^{\tau}\qquad i=1,2,\dots,n$$

Τα

$$v_i^{\tau}=\begin{bmatrix} v_{i1} & v_{i2} & \dots & v_{in} \end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{1\times n},\quad i=1,2,\dots,n$$

είναι τα αριστερά ιδιοανύσματα του A.

Από την

$$U^{-1}U=VU=I_n$$

$$VU=\begin{bmatrix} v_1^{\tau} \\ v_2^{\tau} \\ \vdots \\ v_n^{\tau} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$$v_i^{\tau}u_j=\begin{bmatrix} v_{i1} & v_{i2} & \dots & v_{in} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_{j1} \\ u_{j2} \\ \vdots \\ u_{jn} \end{bmatrix}=1, \quad i=j$$

$$v_i^{\tau}u_j=\begin{bmatrix} v_{i1} & v_{i2} & \dots & v_{in} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_{j1} \\ u_{j2} \\ \vdots \\ u_{jn} \end{bmatrix}=0, \quad i\neq j$$

ΔΙΑΓΩΝΙΑ ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΜΟΡΦΗ

Έστω το γραμμικό, χρονικά αναλλοίωτο σύστημα του χώρου των καταστάσεων:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times m}, x(0) \neq 0$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t), \quad C \in \mathbb{R}^{p\times n}, D \in \mathbb{R}^{p\times m}$$

Έστω ότι ο $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ έχει n διακριτές πραγματικές ιδιοτιμές

$$\lambda_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1,2,\ldots,n \quad \lambda_i \neq \lambda_j \quad i \neq j$$

$$z(t) := U^{-1}x(t) = Vx(t)$$

ή

$$x(t) = Uz(t)$$

$$U\dot{z}(t) = AUz(t) + Bu(t)$$

$$\dot{z}(t) = U^{-1}AUz(t) + U^{-1}Bu(t)$$

$$\dot{z}(t) = \Lambda z(t) + \mathrm{E}u(t),$$

$$\Lambda := U^{-1}AU = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

$$\mathrm{E} := U^{-1}B \in \mathbb{R}^{n\times m}$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

$$y(t) = CUz(t) + Du(t)$$

$$y(t) = \Gamma z(t) + Du(t), \quad \Gamma := CU \in \mathbb{R}^{p\times n}$$

και οι περιγραφές $(A, B, C, D), (\Lambda, \mathrm{E}, \Gamma, D)$ είναι όμοιες.

Άσκηση.

Αποδείξτε ότι η περιγραφή $(\Lambda, \mathrm{E}, \Gamma, D)$ αποτελεί κανονική μορφή της σχέσης ισοδυναμίας ομοιότητας συστημάτων.

Παράδειγμα

Έστω το γραμμικό και χρονικά αναλλοίωτο σύστημα

$$\dot{z}(t) = \Lambda z(t) + \mathrm{E}u(t)$$

$$y(t) = \Gamma z(t) + Du(t)$$

Έστω $n = 4,\ m = p = 1$ (με μία είσοδο και μια έξοδο) και $D = 0$

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1(t) \\ \dot{z}_2(t) \\ \dot{z}_3(t) \\ \dot{z}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \\ z_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \\ z_4(t) \end{bmatrix}$$

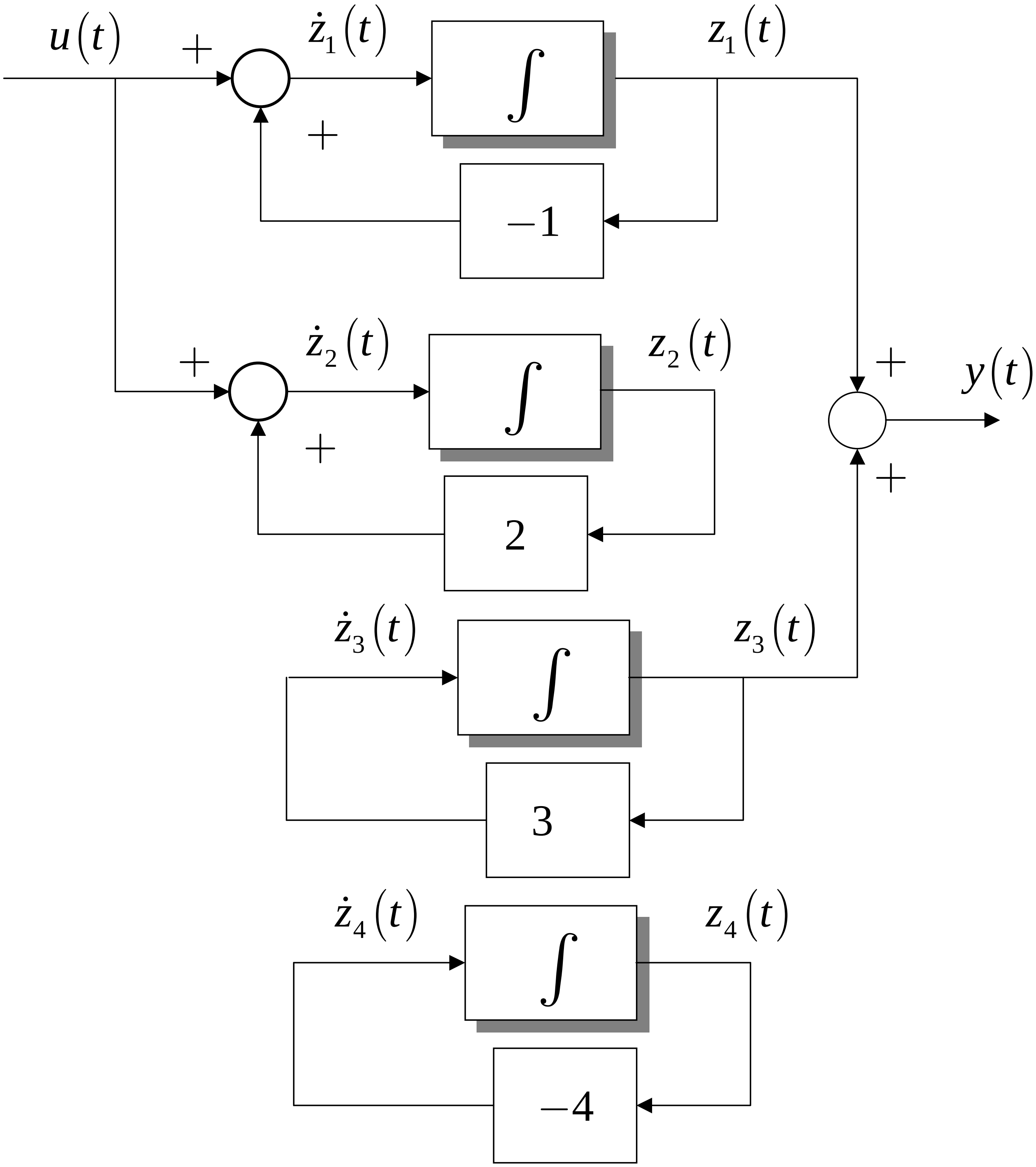
$$\dot{z}_1(t) = (-1) z_1(t) + u(t)$$

$$\dot{z}_2(t) = 2z_2(t) + u(t)$$

$$\dot{z}_3(t) = 3z_3(t)$$

$$\dot{z}_4(t) = (-4) z_4(t)$$

$$y(t) = z_1(t) + z_2(t)$$



$u(t)$
$+$
$\dot{z}_1(t)$
$\int$
$z_1(t)$
$+$
-1
$+$
$\dot{z}_2(t)$
$\int$
$z_2(t)$
$+$
2
$+$
$y(t)$
$+$
$\dot{z}_3(t)$
$\int$
$z_3(t)$
3
$\dot{z}_4(t)$
$\int$
$z_4(t)$
-4

Παρατηρείστε ότι
η είσοδος $u(t)$ δεν επηρεάζει τις καταστάσεις $z_3(t), z_4(t)$
και ότι
ή έξοδος $y(t)$ δεν επηρεάζεται από τις καταστάσεις
$z_2(t), z_4(t)$

$$sI_4 - \Lambda = \begin{bmatrix} s+1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s-2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s-3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s+4 \end{bmatrix}$$

$$(sI_4 - \Lambda)^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s+1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{s-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{s-3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{1}{s+4} \end{bmatrix}$$

$$\left(sI_4-\Lambda\right)^{-1}\mathrm{E}=\begin{bmatrix}\frac{1}{s+1} & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{s-2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{s-3} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{s+4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{s+1}\\ \frac{1}{s-2}\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

$$G\left(s\right)=\Gamma\left(sI_4-\Lambda\right)^{-1}\mathrm{E}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{s+1}\\ \frac{1}{s-2}\\ 0\\ 0\end{bmatrix}=\frac{1}{s+1}$$

Μια άλλη περιγραφή με συνάρτηση μεταφοράς την

$$G\left(s\right)=\frac{1}{s+1}$$

είναι η

$$A=\left[-1\right],B=1,C=1,D=0$$

$$G(s)=C(s-A)^{-1}B=1(s+1)^{-1}1=\frac{1}{s+1}$$