ΕΛΕΓΞΙΜΟΤΗΤΑ
(CONTROLLABILITY)

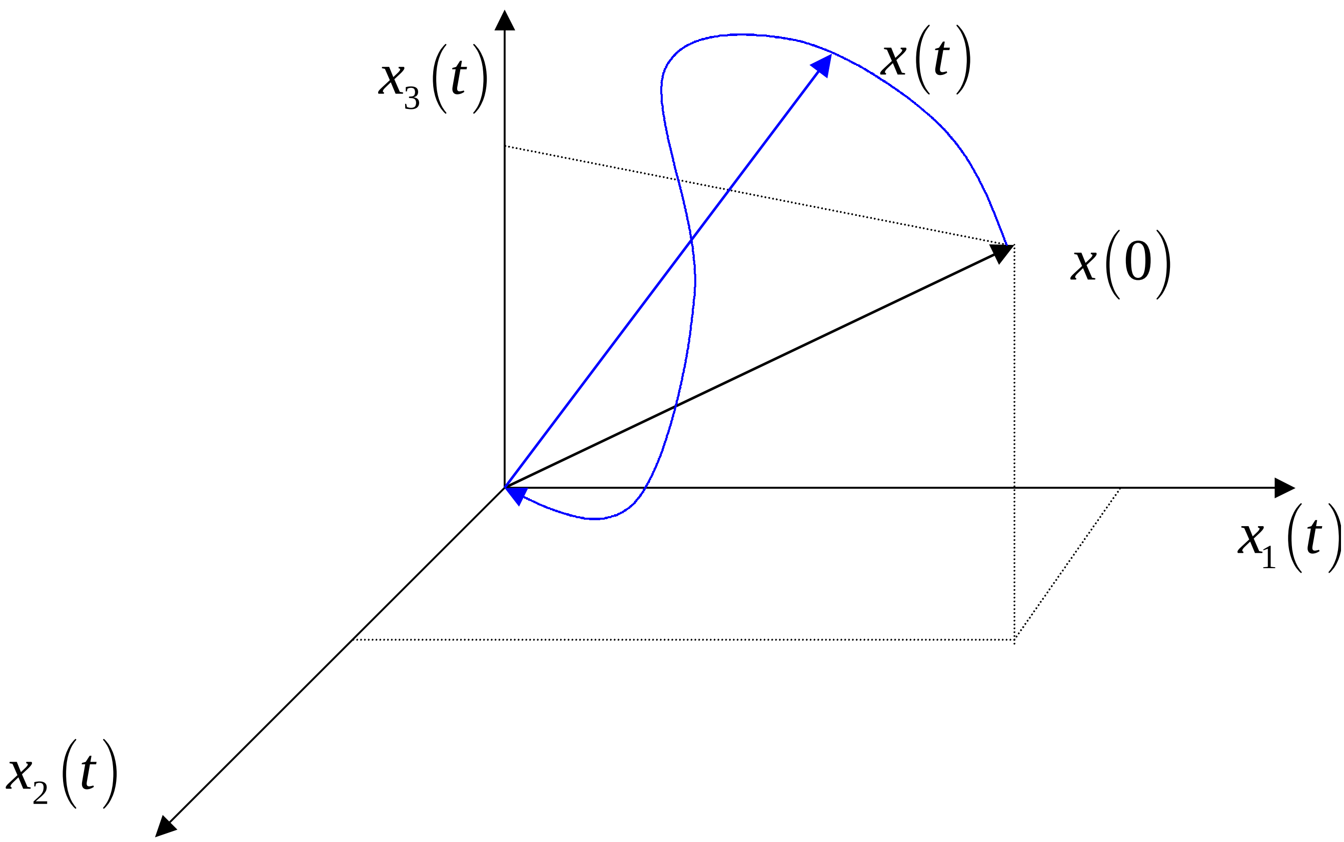
Ορισμός

Το σύστημα

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

(ή το ζεύγος $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times m}$)

ονομάζεται ελέγξιμο (controlable) αν για κάθε αρχική συνθήκη $0 \neq x(0) \in \mathbb{R}^n$ και $t_1 > 0$ υπάρχει είσοδος $u(t),\ t \in [0, t_1]$ τέτοια ώστε η κατάσταση $x(t_1) = 0$



Θεώρημα

Οι επόμενες προτάσεις είναι ισοδύναμες:

1. (A,B) είναι είναι ελέγξιμο.

2. $rank_{\mathbb{R}}\left[\lambda I_n - A, \quad B\right] = n \;\; \forall\lambda\in\mathbb{C}$

3. Το ζεύγος (A,B) **δεν** είναι όμοιο με ζεύγος της μορφής

$$\left(\begin{bmatrix} A_1 & A_{12} \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$$

4. $rank_{\mathbb{R}}\underbrace{\left[B, \quad AB, \quad ,\ldots, \quad A^{n-1}B\right]}_{n\times(nm)} = n$

5. αν $\xi^{\tau}\left(sI_n - A\right)^{-1}B = 0$ για κάθε $s\in\mathbb{C}$ τότε $\xi^{\tau} = 0$.
Ισοδύναμα οι n γραμμές του
$$\left(sI_n - A\right)^{-1}B \in \mathbb{R}\left[s\right]^{n\times m}$$
είναι γραμμικά ανεξάρτητες για κάθε $s\in\mathbb{C}$.

6. Αν $\xi^{\tau}e^{At}B = 0$ για $t\in\left[0,t_1\right]$ και αυθαίρετο t_1, τότε $\xi^{\tau} = 0$. Ισοδύναμα οι n γραμμές του $e^{At}B\in\mathbb{R}^{n\times m}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες για κάθε $t\in\left[0,t_1\right]$

Απόδειξη

$(1 \Rightarrow 2)$ Έστω ότι

$$\exists \lambda_1 \in \mathbb{C}: \quad rank\left[\lambda_1 I_n - A, \quad B\right] < n$$

$\Rightarrow$

$$\exists \qquad \xi^{\tau} = \left[\xi_1 \quad \xi_2 \quad \ldots \quad \xi_n\right] \neq 0:$$

$$\xi^{\tau}\left[\lambda_1 I_n - A, \quad B\right] = 0$$

$$\Rightarrow$$

$$\xi^{\tau} A = \lambda_1 \xi^{\tau}, \quad \text{και} \ \ \xi^{\tau} B = 0 \qquad (1)$$

Από την (1) και την

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \qquad (2)$$

$$\Rightarrow \xi^{\tau} \dot{x}(t) = \xi^{\tau} A x(t) + \xi^{\tau} B u(t)$$

$$= \xi^{\tau} \lambda_1 x(t)$$

$$\left[\xi_1 \quad \xi_2 \quad \ldots \quad \xi_n\right]\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} = \xi_1 x_1(t) + \xi_2 x_2(t) + \ldots + \xi_n x_n(t) = z(t)$$

$$\dot{z}(t) = \lambda_1 z(t) \Rightarrow z(t) = e^{\lambda_1 t} z(0)$$

$$z(t) = \xi^{\tau} x(t) = e^{\lambda_1 t} \xi^{\tau} x(0) \qquad (3)$$

Αν το ξ^{τ} : $\xi^{\tau} x(0) \neq 0$ τότε η (3)

$\Rightarrow \quad \xi^{\tau} x(t) \neq 0 \quad \forall \quad t \geq 0$

$\Rightarrow x(t) \neq 0 \quad \forall \ u(t)$

$\Rightarrow (A, B)$ δεν είναι ελέγξιμο.

$(2 \Rightarrow 3)$

Έστω ότι υπάρχει μετασχηματισμός ομοιότητας $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ τέτοιος ώστε

$$TAT^{-1} = \begin{bmatrix} A_1 & A_{12} \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}, \quad TB = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Έστω λ ιδιοτιμή του A^{τ} και ξ_2 το αντίστοιχο ιδιοάνυσμα:

$$A_2^{\tau} \xi_2 = \lambda \xi_2 \Rightarrow \quad \xi_2^{\tau} (\lambda I_n - A) = 0$$

Είναι

$$\begin{bmatrix} 0 & \xi_2{}^{\tau} \end{bmatrix} T [\lambda I_n - A, B] \begin{bmatrix} T^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \xi_2{}^{\tau} \end{bmatrix} [T(\lambda I_n - A), TB] \begin{bmatrix} T^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0 & \xi_2^\tau\end{bmatrix}\left[T\left(\lambda I_n - A\right)T^{-1}, TB\right]$$

$$=\begin{bmatrix}0 & \xi_2^\tau\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda I_n - A_1 & -A_{12} & B_1 \\ 0 & \lambda I_n - A_2 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

η οποία αντιβαίνει στην 2. Άρα $(2 \Rightarrow 3)$.

$(3 \Rightarrow 4)$

Έστω ότι

$$rank_{\mathbb{R}}\underbrace{\left[B, \quad AB, \quad ,\ldots, \quad A^{n-1}B\right]}_{n\times(nm)} < n$$

$$\Rightarrow \exists \ \ \xi^\tau \neq 0 :$$

$$\xi^\tau\left[B, \quad AB, \quad ,\ldots, \quad A^{n-1}B\right] = 0$$

$$\Rightarrow$$

$$\xi^\tau B = 0, \ \ \xi^\tau AB = 0, \ldots, \xi^\tau A^{n-1}B = 0$$

Έστω k ο μέγιστος φυσικός αριθμός τέτοιος ώστε τα k ανύσματα

$$\xi, \ A^\tau \xi, \ \ldots, \left(A^\tau\right)^{k-1}\xi$$

είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, και έστω

$$T_2 := \begin{bmatrix} \xi^\tau \\ \xi^\tau A \\ \vdots \\ \xi^\tau A^{k-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{k\times n}$$

Προφανώς $k < n$ και άρα υπάρχουν σταθερές $a_1, a_2, \ldots, a_k$ τέτοιες ώστε

$$\xi^\tau A^k = a_1\xi^\tau + a_2\xi^\tau A + \ldots + a_k\xi^\tau A^{k-1}$$

Είναι

$$T_2 A = \begin{bmatrix} \xi^\tau \\ \xi^\tau A \\ \vdots \\ \xi^\tau A^{k-1} \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} \xi^\tau A \\ \xi^\tau A^2 \\ \vdots \\ \xi^\tau A^{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi^\tau \\ \xi^\tau A \\ \vdots \\ \xi^\tau A^{k-1} \end{bmatrix} = A_2 T$$

όπου

$$A_2 := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_k \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{k\times k}$$

Έστω $T_1 \in \mathbb{R}^{(n-k)\times n}$: έτσι ώστε

$$T := \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$ είναι ομαλός ($|T| \neq 0$)

και χωρίστε τον $(n-k)\times n$ πίνακα $T_1 A$ ώς

$$T_1 A = \begin{bmatrix} A_1 & A_{12} \end{bmatrix}$$

Εφόσον

$$T_2 B = \begin{bmatrix} \xi^\tau \\ \xi^\tau A \\ \vdots \\ \xi^\tau A^{k-1} \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} \xi^\tau B \\ \xi^\tau AB \\ \vdots \\ \xi^\tau A^{k-1} B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

είναι

$$TA = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} T_1 A \\ T_2 A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1 A \\ A_2 T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & A_{12} \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & A_{12} \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} T$$

(5)

και

$$TB = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} T_1 B \\ T_2 B \end{bmatrix} =: \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (6)$$

Οι (5) και (6) αντιβαίνουν την 3.

$(4 \Rightarrow 5)$

Είναι

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\left(sI_n - A\right)^{-1}\right\} = e^{At} = I_n + \frac{1}{1!}At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \frac{1}{3!}A^3t^3 + \ldots$$

$$\Rightarrow$$

$$\left(sI_n - A\right)^{-1} = \frac{1}{s}I_n + \frac{1}{s^2}A + \frac{1}{s^3}A^2 + \ldots$$

Έστω

$$\xi^{\tau} \neq 0 : \ \xi^{\tau}\left(sI_n - A\right)^{-1}B = 0 \ \ \forall\, s \in \mathbb{C}$$

Τότε

$$\xi^{\tau}\left(sI_n - A\right)^{-1}B = \left(\xi^{\tau}\frac{1}{s}I_n + \xi^{\tau}\frac{1}{s^2}A + \xi^{\tau}\frac{1}{s^3}A^2 + \ldots\right)B = 0 \quad \forall\, s \in \mathbb{C}$$

η οποία συνεπάγεται ότι για κάθε k

$$\begin{aligned} &\xi^{\tau}B = 0 \\ &\xi^{\tau}AB = 0 \\ &\vdots \\ &\xi^{\tau}A^kB = 0 \end{aligned}$$

ή

$$\xi^{\tau}\left[B, \quad AB, \quad \ldots \quad A^{n-1}B\right] = 0$$

$$\Rightarrow$$

$$rank_{\mathbb{R}}\left[B, \quad AB, \quad \ldots \quad A^{n-1}B\right] < n$$

η οποία αντιβαίνει στην 4.

$\left(5 \Rightarrow 6\right)$

Υποθέστε ότι η 6. δεν ισχύει. Υποθέστε δηλαδή ότι υπάρχει

$$\xi^{\tau} \neq 0: \quad \xi^{\tau} e^{At} B = 0 \quad t \in [0, t_1]$$

Τότε η σχέση

$$\frac{d^k}{dt^k}\left(\xi^{\tau} e^{At} B\right) = \xi^{\tau} A^k e^{At} B = 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

για $t = 0$ συνεπάγεται την

$$\xi^{\tau} A^k B = 0, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

η οποία συνεπάγεται την

$$\xi^{\tau} \left(sI_n - A\right)^{-1} B = 0 \qquad \forall\ s \in \mathbb{C}$$

η οποία αντιβαίνει στην 5.

$$\xi^{\tau} \left(sI_n - A\right)^{-1} B = \xi^{\tau} \left[\frac{1}{s} I_n + \frac{1}{s^2} A + \frac{1}{s^3} A^2 + \ldots\right] B$$

(

$$= \frac{1}{s} \xi^{\tau} B + \frac{1}{s^2} \xi^{\tau} AB + \ldots)$$

$(6 \Rightarrow 1)$

Έστω

$$M\left(t_1\right) := \int_0^{t_1} e^{-At} BB^{\tau} e^{-A^{\tau} t} dt \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

Αν η 6. ισχύει, αν δηλαδή οι γραμμές του $e^{At}B$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες για κάθε $t \in [0, t_1]$, τότε ο $M(t_1)$ είναι ομαλός για κάθε $t_1 > 0$ ($|M(t_1)| \neq 0$).

Πράγματι, έστω ότι ο $M(t_1)$ ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΟΜΑΛΟΣ.

Τότε θα υπάρχει

$$\xi = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} \neq 0$$

$$M(t_1)\xi = 0$$

$$\Rightarrow$$

$$\xi^{\tau} M(t_1)\xi = \int_0^{t_1} \left\| \xi^{\tau} e^{-At} B \right\|^2 dt = 0 \qquad (7)$$

Σημείωση

Αν

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

$$x^{\tau}x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix} = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$$

η Ευκλείδια νόρμα $\|x\|$ του x είναι

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} = \sqrt{x^{\tau}x}$$

άρα

$$\|x\|^2 = x^{\tau}x$$

Βάσει των παραπάνω η

$$\xi^{\tau}M(t_1)\xi = \int_0^{t_1} \left\|\xi^{\tau}e^{-At}B\right\|^2 dt = 0 \qquad (7)$$

δίνει

$$\xi^{\tau}e^{-At}B = 0 \ \text{ για } t \in [0, t_1] \qquad (8)$$

και εφόσον ο $e^{-At}B$ έχει γραμμικώς ανεξάρτητες γραμμές για $t \in [0, t_1]$ η (8) συνεπάγεται την

$$\xi^{\tau} = 0 \qquad (9)$$

αλλά η (9) αντιβαίνει στην υπόθεση ότι $\xi^{\tau} \neq 0$.

Άρα ο πίνακας

$$M(t_1) := \int_0^{t_1} e^{-At} B B^\tau e^{-A^\tau t} dt \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$M(t_1)$ **είναι** **ομαλός** για κάθε $t_1 > 0$ ($|M(t_1)| \neq 0$).

Έστω τώρα η είσοδος

$$u(t) := -B^\tau e^{-A^\tau t} M(t_1)^{-1} x(0)$$

Πρόταση

Η είσοδος $u(t)$ «φέρνει» την κατάσταση $x(t)$ από το $x(0) \neq 0$ στο $0 \in \mathbb{R}^n$ σε χρόνο $t = t_1$

Πράγματι

$$x(t_1) = e^{At_1}x(0) + \int_0^{t_1} e^{A(t_1-t)}Bu(t)\,dt$$

$$= e^{At_1}x(0) + e^{At_1}\int_0^{t_1} e^{-At_1}e^{A(t_1-t)}B\underbrace{\left(-B^{\tau}e^{-A^{\tau}t}M(t_1)^{-1}x(0)\right)}_{u(t)}dt$$

$$= e^{At_1}x(0) - e^{At_1}\underbrace{\left[\int_0^{t_1} e^{-At}BB^{\tau}e^{-A^{\tau}t}dt\right]}_{M(t_1)}M(t_1)^{-1}x(0)$$

$$= e^{At_1}\left[x(0) - M(t_1)M(t_1)^{-1}x(0)\right]$$

$$= e^{At_1}\left[x(0) - x(0)\right] = 0$$