ΕΛΕΓΞΙΜΟΤΗΤΑ, ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Έστω το σύστημα

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

με $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ δηλαδή με $n = 2,\ m = 1$

(το σύστημα έχει μία είσοδο)

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b_1 \\ 2b_2 \end{bmatrix}$$

και ο πίνακας ελεγξιμότητας

$$\underbrace{\begin{bmatrix} B, & AB, & ,\ldots, & A^{n-1}B \end{bmatrix}}_{n\times(nm)}$$

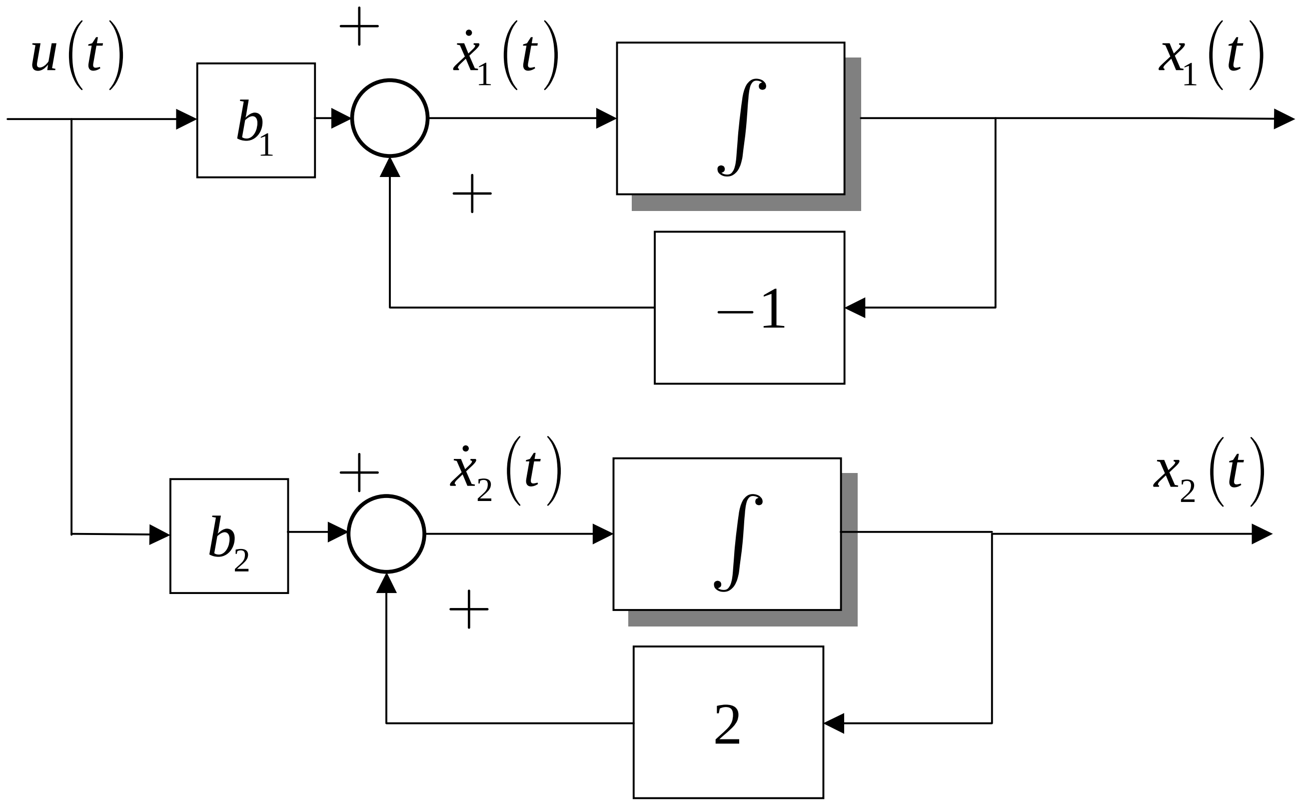
στην περίπτωση αυτή είναι

$$\begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & -b_1 \\ b_2 & 2b_2 \end{bmatrix},$$

$$rank\begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = rank\begin{bmatrix} b_1 & -b_1 \\ b_2 & 2b_2 \end{bmatrix} = 2$$

δηλαδή το σύστημα είναι ελέγξιμο αν και μόνο αν

$$\det\begin{bmatrix} b_1 & -b_1 \\ b_2 & 2b_2 \end{bmatrix} = 3b_1b_2 \neq 0 \Leftrightarrow b_1 \neq 0 \text{ και } b_2 \neq 0$$



Άσκηση

Για το παραπάνω σύστημα αποδείξτε ότι αν $m > 1$ τότε το σύστημα είναι ελέγξιμο αν και μόνο αν κάθε γραμμή $b_i^{\tau} = \begin{bmatrix} b_{i1} & b_{12} & \dots & b_{im} \end{bmatrix} \quad i = 1, 2, \dots, m$ του B είναι διάφορη το μηδενικού ανύσματος, δηλαδή αν και μόνο αν

$$b_i^{\tau} = \begin{bmatrix} b_{i1} & b_{12} & \dots & b_{im} \end{bmatrix} \neq 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, m$$

Για το παραπάνω σύστημα έστω $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Μία είσοδος $u(t)$ η οποία «φέρνει» το άνυσμα κατάστασης από την αρχική κατάσταση $x(0)$ στην τελική κατάσταση $x(1)=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ την χρονική στιγμή $t_1=1$ δίδεται από την

$$u(t):=-B^{\tau}e^{-A^{\tau}t}M(t_1)^{-1}x(0)$$

$$e^{At}=e^{A^{\tau}t}=\begin{bmatrix}e^{-t} & 0\\ 0 & e^{2t}\end{bmatrix}$$

$$M(t_1):=\int_0^{t_1}e^{-At}BB^{\tau}e^{-A^{\tau}t}dt$$

$$=\int_0^1\begin{bmatrix}e^{t} & 0\\ 0 & e^{-2t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{t} & 0\\ 0 & e^{-2t}\end{bmatrix}dt$$

$$=\int_0^1\begin{bmatrix}e^{t} & 0\\ 0 & e^{-2t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{t} & 0\\ 0 & e^{-2t}\end{bmatrix}dt=\begin{bmatrix}\frac{e}{2}-\frac{1}{2} & 1-e^{-1}\\ 1-e^{-1} & \frac{1}{4}-\frac{e^{-4}}{4}\end{bmatrix}$$

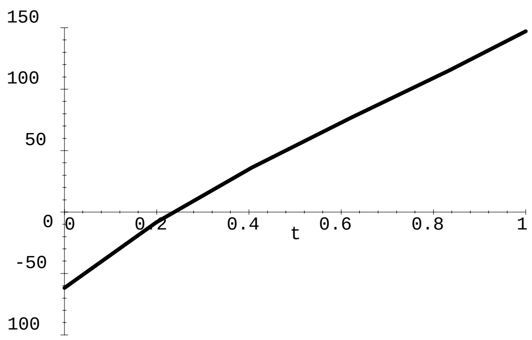
$$=\begin{bmatrix}0.859 & 0.432\\ 0.432 & 0.246\end{bmatrix}$$

$$u(t) := -B^{\tau} e^{-A^{\tau} t} M(t_1)^{-1} x(0)$$

$$= -\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.859 & 0.432 \\ 0.432 & 0.246 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$= -\begin{bmatrix} e^{t} & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9.9635 & -17.497 \\ -17.497 & 34.791 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

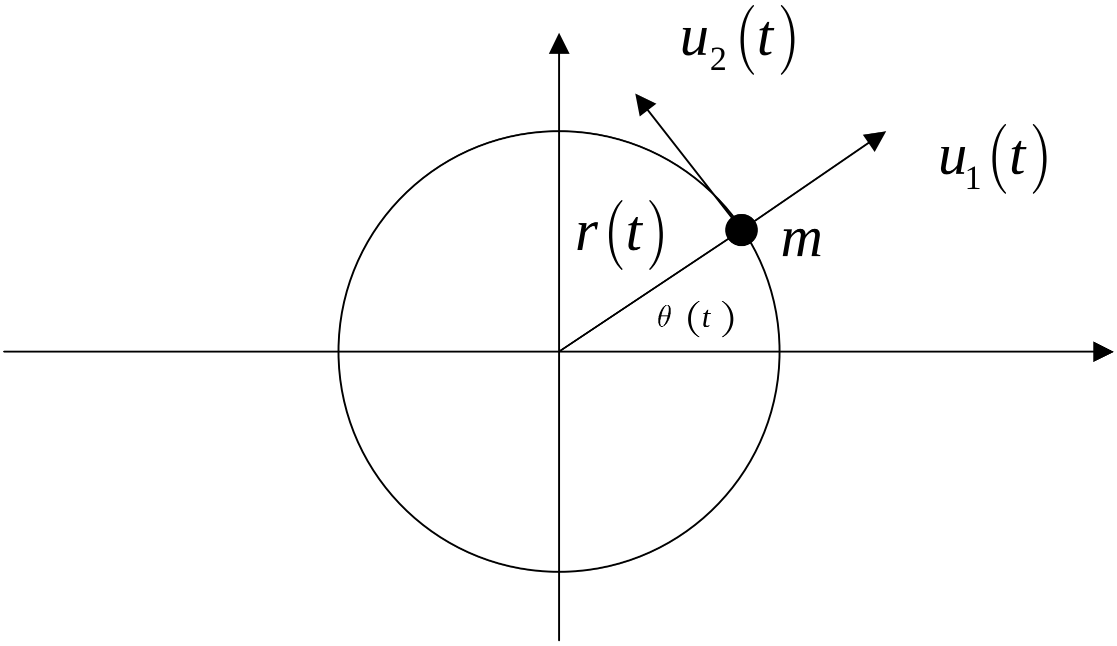
$$= 60.025 e^{t} - 121.67 e^{-2t}$$



Γραφική παράσταση της εισόδου $u(t)$ για $t \in [0,1]$

Έλεγχος της θέσης δορυφόρου.

Θεωρείστε μοναδιαία μάζα $m = 1$(δορυφόρο) σε τροχιά ακτίνας $r(t)$ περί κέντρο μάζας (γη) έτσι ώστε να βρίσκετε κάτω από την επίδραση δύναμης Newton η οποία είναι ανάλογη του αντιστρόφου του τετραγώνου της απόστασης $r(t)$ από την μάζα (γή). Υποθέτουμε ότι ο δορυφόρος διαθέτει δύο εισόδους ελέγχου $u_1(t), u_2(t)$ οι οποίες πραγματοποιούνται μέσω ακροφυσίων (jets).   Η είσοδος ελέγχου $u_1(t)$ αντιπροσωπεύει ώθηση του δορυφόρου κατά την διεύθυνση της ακτίνας $r(t)$ και η είσοδος ελέγχου $u_2(t)$ ώθηση κατά την διεύθυνση της εφαπτομένης της τροχιάς.



Μπορεί να αποδειχτεί ότι οι εξισώσεις που διέπουν την συμπεριφορά του συστήματος είναι οι μη γραμμικές δ.ε.

$$\begin{aligned} \ddot{r}(t) &= r(t)\theta(t)^2 - \frac{k}{r(t)^2} + u_1(t) \\ \ddot{\theta}(t) &= -\frac{2\dot{\theta}(t)\dot{r}(t)}{r(t)} + \frac{1}{r(t)}u_2(t) \end{aligned} \qquad (1)$$

Αν $u_1(t)=u_2(t)=0$ οι (1) ικανοποιούνται από

$$r(t)=\sigma\in\mathbb{R}$$

$$\theta(t)=\omega t,\quad \omega\in\mathbb{R}$$

όπου $\sigma^3\omega^2=k$. Άρα κυκλικές τροχιές είναι δυνατές.

Αν

$$x_1(t):=r(t)-\sigma$$

$$x_2(t):=\dot r(t)$$

$$x_3(t):=\sigma\left(\theta(t)-\omega t\right)$$

$$x_4(t):=\sigma\left(\dot\theta(t)-\omega\right)$$

και $\sigma=1$ τότε εύκολα αποδεικνύεται ότι οι γραμμικοποιημένες εξισώσεις κινήσεως περί την παραπάνω λύση είναι οι

$$\begin{bmatrix}\dot x_1(t)\\ \dot x_2(t)\\ \dot x_3(t)\\ \dot x_4(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 3\omega^2 & 0 & 0 & 2\omega\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & -2\omega & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\\ x_4(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1(t)\\ u_2(t)\end{bmatrix}$$

Άσκηση

Εξετάστε την ελεγξιμότητα του παραπάνω συστήματος μέσω των εισόδων $u_1(t)$ και $u_2(t)$, και $u_1(t)$ ή $u_2(t)$.

Εφόσον $n=4\Rightarrow n-1=3$ η ελεγξιμότητα του παραπάνω συστήματος μέσω των εισόδων $u_1(t)$ και $u_2(t)$ δίδεται από τον πίνακα ελεγξιμότητας

$$Q=\left[B \quad AB \quad A^2B \quad A^3B\right]=$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2\omega & -\omega & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2\omega & -\omega^2 & 0 & 0 & -2\omega^3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2\omega^2 & 0 & 0 & -4\omega^2 \\ 0 & 1 & -2\omega & 0 & 0 & -4\omega^2 & 2\omega^3 & 0 \end{bmatrix}$$

και εφόσον $rankQ=4$ το σύστημα είναι ελέγξιμο μέσω των $u_1(t)$ και $u_2(t)$.

Αν

$$u_2(t)=0,\ B\rightarrow B_1=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Q=\left[B_1 \quad AB_1 \quad A^2B_1 \quad A^3B_1\right]=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -\omega^2 \\ 1 & 0 & -\omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & -2\omega^2 & 0 \\ 0 & -2\omega & 0 & 2\omega^3 \end{bmatrix}$$

$$rankQ=3$$

και άρα το σύστημα δεν είναι ελέγξιμο μέσω της εισόδου $u_1(t)$.

Αποδείξτε ότι το σύστημα είναι ελέγξιμο μέσω της εισόδου $u_2(t)$

Παρατηρησιμότητα (observability)

Δυϊκή προς την έννοια της ελεγξιμότητας είναι η έννοια της παρατηρησιμότητας (observability).

Ορισμός

Το σύστημα

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \qquad (1)$$

(ή το ζεύγος $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, C \in \mathbb{R}^{p\times n}$)

ονομάζεται παρατηρήσημο (observable) αν οι τιμές $\{y(t); t \in [0, t_2]\}$ της εξόδου $y(t)$ σε ένα **αυθαίρετο** χρονικό διάστημα $0 \le t \le t_1$, προσδιορίζουν κατά **μοναδικό τρόπο** την αρχική κατάσταση $x(0)$ του συστήματος.

Ένα τυπικό παράδειγμα ενός μη παρατηρήσημου συστήματος είναι ένα σύστημα το οποίο περιγράφεται από την

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ A_{21} & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

Είναι προφανές ότι το $x_2(t)$ μέρος της του ανύσματος κατάστασης $\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$ δεν επηρεάζει την έξοδο $y(t)$ και άρα δεν μπορεί να προσδιοριστεί από παρατήρηση της $y(t)$ για οποιοδήποτε χρονικό διάστημα $0 \leq t \leq t_1$.

Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι η παρατηρησημότητα χαρακτηρίζεται κατά τρόπο τελείως ανάλογο με αυτόν της ελεγξιμότητας. Έχουμε το

Θεώρημα
Οι επόμενες προτάσεις είναι ισοδύναμες:

1. (A,C) είναι είναι παρατηρήσημο.

2. $rank_{\mathbb{R}} \begin{bmatrix} \lambda I_n - A \\ C \end{bmatrix} = n \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$

3. Το ζεύγος (A, C) **δεν** είναι όμοιο με ζεύγος της μορφής

$$\left(\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ A_{12} & A_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} C_1 & 0 \end{bmatrix}\right)$$

4. $$rank_{\mathbb{R}} \underbrace{\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}}_{(np)\times n} = n$$

1. Αν $\eta \in \mathbb{R}^n$ είναι τέτοιο έτσι ώστε $C(sI_n - A)^{-1}\eta = 0$ για κάθε $s \in \mathbb{C}$ τότε $\eta = 0$. Ισοδύναμα οι n στήλες του

$$C(sI_n - A)^{-1} \in \mathbb{R}[s]^{p\times n}$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητες για κάθε $s \in \mathbb{C}$.

2. Αν $\eta \in \mathbb{R}^n$ είναι τέτοιο έτσι ώστε $Ce^{At}\eta = 0$ για $t \in [0, t_1]$ και αυθαίρετο t_1, τότε $\eta = 0$. Ισοδύναμα οι n στήλες του $Ce^{At} \in \mathbb{R}^{p\times n}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες για κάθε $t \in [0, t_1]$

Η απόδειξη είναι ανάλογη με αυτήν του θεωρήματος της ελεγξιμότητας.

Ορισμός

Αν το σύστημα

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times m}, C \in \mathbb{R}^{p\times n}, D \in \mathbb{R}^{p\times m}$ **είναι ελέγξιμο και παρατηρήσημο** τότε ονομάζεται ελάχιστο (minimal) ή μη αναγώγιμο (irreducible).

Ορισμός

Δεδομένου ενός $p \times m$ πίνακα $G(s)$ **κανονικών** ρητών συναρτήσεων $g_{ij}(s)$:

$$G(s) = \begin{bmatrix} g_{11}(s) & g_{12}(s) & \cdots & g_{1m}(s) \\ g_{21}(s) & g_{22}(s) & \cdots & g_{2m}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{p1}(s) & g_{p2}(s) & \cdots & g_{pm}(s) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_{pr}(s)^{p\times m}$$

$$g_{ij}(s) = \frac{n(s)}{d(s)} \in \mathbb{R}_{pr}(s) \Leftrightarrow \deg d_{ij}(s) \geq \deg n_{ij}(s)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{s\to\infty} g_{ij}(s) = d_{ij} \geq 0$$

τότε μια τετράδα πινάκων

$$A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times m}, C \in \mathbb{R}^{p\times n}, D \in \mathbb{R}^{p\times m}$$

ονομάζεται μια πραγμάτωση του $G(s)$.

Έχουμε δει ότι η συνάρτηση μεταφοράς

$$G(s) = C(sI_n - A)^{-1}B + D$$

ενός συστήματος

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

παραμένει αναλλοίωτη κάτω από μετασχηματισμούς ομοιότητας, δηλαδή αν

$$\widetilde{A} := QAQ^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n},$$

$$\widetilde{B} := QB \in \mathbb{R}^{n\times m},$$

$$\widetilde{C} := CQ^{-1} \in \mathbb{R}^{p\times n}$$

$$\widetilde{D} := D \in \mathbb{R}^{p\times m}$$

όπου $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ αυθαίρετος και ομαλός (,$|Q| \neq 0$) πίνακας τότε

$$\widetilde{G}(s) = \widetilde{C}\left(sI_n - \widetilde{A}\right)^{-1}\widetilde{B} + \widetilde{D}$$

$$= CQ^{-1}\left(sI_n - QAQ^{-1}\right)^{-1}QB + D = G(s)$$

Δηλαδή αν

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times m}, C \in \mathbb{R}^{p \times n}, D \in \mathbb{R}^{p \times m}$$

είναι μια πραγμάτωση του πίνακα κανονικών ρητών συναρτήσεων $G(s) \in \mathbb{R}_{pr}(s)^{p \times m}$ τότε όλα τα μέλη της κλάσης ισοδυναμίας ομοιότητας που δίνονται από τετράδες πινάκων

$$\widetilde{A} := QAQ^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n},$$
$$\widetilde{B} := QB \in \mathbb{R}^{n \times m},$$
$$\widetilde{C} := CQ^{-1} \in \mathbb{R}^{p \times n}$$
$$\widetilde{D} := D \in \mathbb{R}^{p \times m}$$

(όπου $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ αυθαίρετος και ομαλός (,$|Q| \neq 0$) πίνακας) αποτελούν πραγματώσεις του $G(s)$.

Το παρακάτω θεώρημα αποτελεί το αντίστροφο της παραπάνω πρότασης και είναι ένα από τα πλέον βασικά θεωρήματα της Μαθηματικής Θεωρίας Συστημάτων.

Θεώρημα
Αν δύο πραγματώσεις

$$A_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}, B_1 \in \mathbb{R}^{n\times m}, C_1 \in \mathbb{R}^{p\times n}, D_1 \in \mathbb{R}^{p\times m}$$
$$A_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}, B_2 \in \mathbb{R}^{n\times m}, C_2 \in \mathbb{R}^{p\times n}, D_2 \in \mathbb{R}^{p\times m}$$

ενός πίνακα πραγματικών ρητών συναρτήσεων

$$G(s) = C_1(sI_n - A_1)^{-1} B_1 + D_1 = C_1(sI_n - A_2)^{-1} B_2 + D_2$$

είναι ελάχιστες τότε είναι όμοιες, υπάρχει δηλαδή $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ και ομαλός τέτοιος ώστε

$$\widetilde{A} := QAQ^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n},$$
$$\widetilde{B} := QB \in \mathbb{R}^{n\times m},$$
$$\widetilde{C} := CQ^{-1} \in \mathbb{R}^{p\times n}$$
$$\widetilde{D} := D \in \mathbb{R}^{p\times m}$$

Απόδειξη

Έστω

$$M_i = \begin{bmatrix} B_i & A_i B_i & \dots & A_i^{n-1} B_i \end{bmatrix} \quad i = 1,2$$

$$W_i = \begin{bmatrix} C_i \\ C_i A_i \\ \vdots \\ C_i A_i^{n-1} \end{bmatrix} \quad i = 1,2$$

από την

$$G(s) = C_1(sI_n - A_1)^{-1} B_1 + D_1 = C_1(sI_n - A_2)^{-1} B_2 + D_2$$

έχουμε ότι

$$D_1 = D_2$$

$$C_1 A_1^k B_1 = C_2 A_2^k B_2 \quad k = 0,1,2,3,\ldots$$

ή ισοδύναμα

$$\begin{bmatrix} C_1 \\ C_1 A_1 \\ \vdots \\ C_1 A_1^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 & A_1 B_1 & \ldots & A_1^{n-1} B_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_2 \\ C_2 A_2 \\ \vdots \\ C_2 A_2^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_2 & A_2 B_2 & \ldots & A_2^{n-1} B \end{bmatrix}$$

$$W_1 M_1 = W_2 M_2$$

Εφόσον οι πραγματώσεις είναι ελάχιστες

$$rank\left[M_1 M_1^\tau\right] = n \text{ και } rank\left[W_1^\tau W_1\right] = n$$

Ορίζουμε

$$Q_1 = M_2 M_1^\tau \left[M_1 M_1^\tau\right]^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

$$Q_2 = \left[W_1^\tau W_1\right]^{-1} W_1^\tau W_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

$$Q_2 Q_1 = \left[W_1^\tau W_1\right]^{-1} W_1^\tau W_2 M_2 M_1^\tau \left[M_1 M_1^\tau\right]^{-1}$$

$$= \left[W_1^\tau W_1\right]^{-1} W_1^\tau W_1 M_1 M_1^\tau \left[M_1 M_1^\tau\right]^{-1} = I_n$$

$$\Rightarrow Q_2 = Q_1^{-1}$$

$$Q_2 M_2 = \left[W_1^{\tau} W_1 \right]^{-1} W_1^{\tau} \underleftrightarrow{W_2 M_2} = \left[W_1^{\tau} W_1 \right]^{-1} W_1^{\tau} \underleftrightarrow{W_1 M_1} = M_1$$

$$\Rightarrow$$

$$Q_2 M_2 = M_1$$

$$\Rightarrow$$

$$Q_2 \begin{bmatrix} B_2 & A_2 B_2 & \cdots & A_2^{n-1} B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 & A_1 B_1 & \cdots & A_1^{n-1} B_1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow Q_2 B_2 = B_1$$

Ομοίως μπορούμε να δείξουμε ότι

$$C_2 Q_2^{-1} = C_1$$

άσκηση Δείξτε την παραπάνω σχέση.

Εφόσον

$$\begin{bmatrix} C_1 \\ C_1A_1 \\ \vdots \\ C_1A_1^{n-1} \end{bmatrix} A_1 \begin{bmatrix} B_1 & A_1B_1 & \cdots & A_1^{n-1}B_1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} C_2 \\ C_2A_2 \\ \vdots \\ C_2A_2^{n-1} \end{bmatrix} A_2 \begin{bmatrix} B_2 & A_2B_2 & \cdots & A_2^{n-1}B_2 \end{bmatrix}$$

$$W_1A_1M_1 = W_2A_2M_2 = W_1Q_1^{-1}A_2Q_1M_1$$

$$\Rightarrow A_1 = Q_1^{-1}A_2Q_1$$

$$W_1Q^{-1} = W_1\left[M_2M_1^{\tau}\left[M_1M_1^{\tau}\right]^{-1}\right]^{-1} = W_1M_1M_1^{\tau}\left[M_2M_1^{\tau}\right]^{-1}$$

$$= W_2M_2$$

Θεώρημα

Κάθε σύστημα του χώρου των καταστάσεων είναι όμοιο με ένα σύστημα της μορφής

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_a(t) \\ x_b(t) \\ x_c(t) \\ x_d(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{aa} & A_{ab} & A_{ac} & A_{ad} \\ 0 & A_{bb} & 0 & A_{bd} \\ 0 & 0 & A_{cc} & A_{cd} \\ 0 & 0 & 0 & A_{dd} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_a(t) \\ x_b(t) \\ x_c(t) \\ x_d(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_a \\ B_b \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & C_b & 0 & C_d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_a(t) \\ x_b(t) \\ x_c(t) \\ x_d(t) \end{bmatrix} + Du(t)$$

και

$$G(s) = C_b\left(sI - A_{bb}\right)^{-1} B_b + D$$

Παράδειγμα

Έστω το γραμμικό και χρονικά αναλλοίωτο σύστημα

$$\dot{z}(t) = \Lambda z(t) + \mathrm{E}u(t)$$

$$y(t) = \Gamma z(t) + Du(t)$$

Έστω $n = 4,\ m = p = 1$ (με μία είσοδο και μια έξοδο) και $D = 0$

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1(t) \\ \dot{z}_2(t) \\ \dot{z}_3(t) \\ \dot{z}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \\ z_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \\ z_4(t) \end{bmatrix}$$

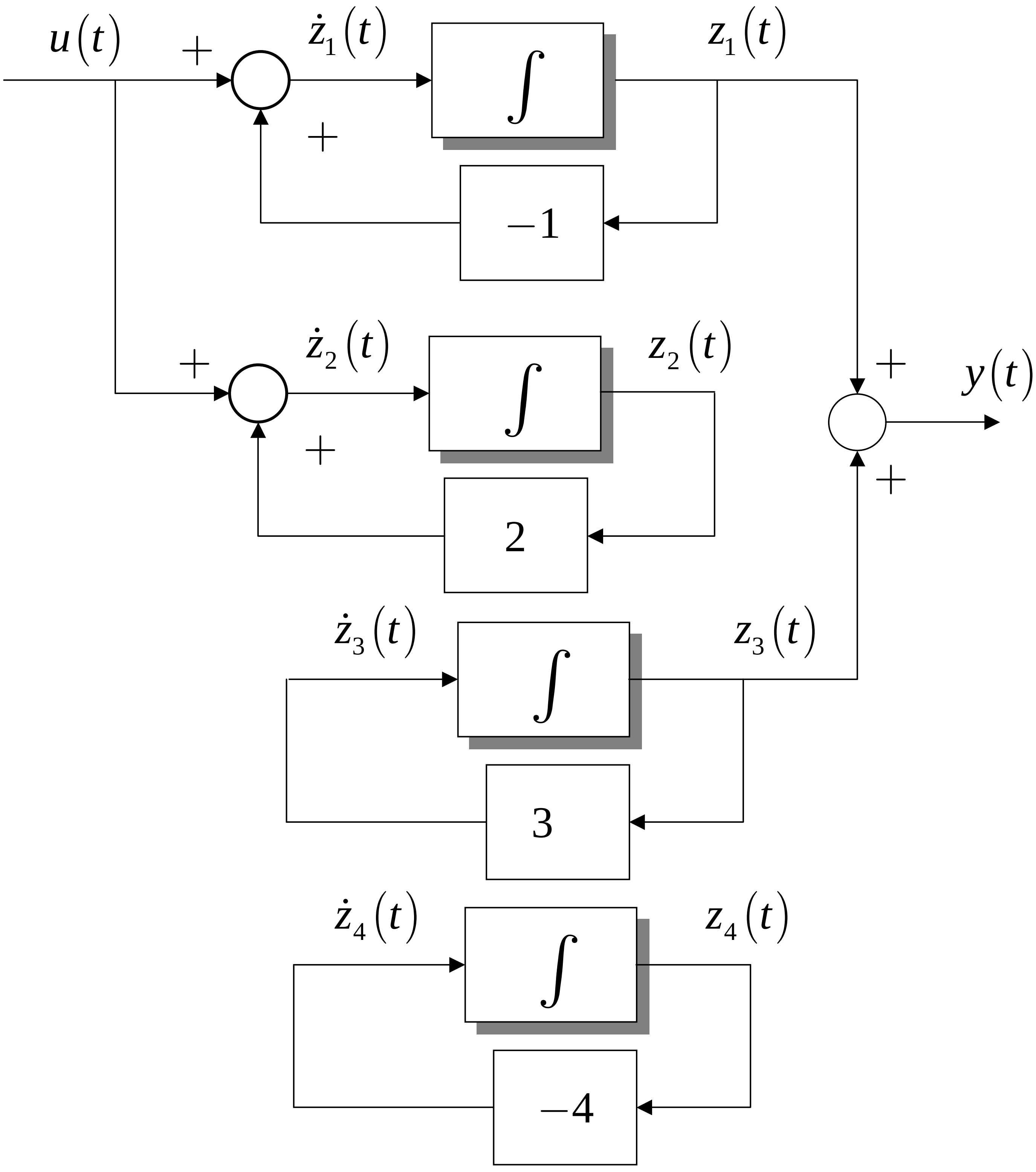
$$\dot{z}_1(t) = (-1)z_1(t) + u(t)$$

$$\dot{z}_2(t) = 2z_2(t) + u(t)$$

$$\dot{z}_3(t) = 3z_3(t)$$

$$\dot{z}_4(t) = (-4)z_4(t)$$

$$y(t) = z_1(t) + z_3(t)$$



Παρατηρείστε ότι
η είσοδος $u(t)$ δεν επηρεάζει τις καταστάσεις
$z_3(t), z_4(t)$ και ότι
ή έξοδος $y(t)$ δεν επηρεάζεται από τις καταστάσεις
$z_2(t), z_4(t)$

$$sI_4 - \Lambda = \begin{bmatrix} s+1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s-2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s-3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s+4 \end{bmatrix}$$

$$(sI_4 - \Lambda)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{s-3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{s+4} \end{bmatrix}$$

$$\left(sI_4-\Lambda\right)^{-1}\mathrm{E}=\begin{bmatrix}\frac{1}{s+1} & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{s-2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{s-3} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{s+4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{s+1}\\ \frac{1}{s-2}\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

$$G\left(s\right)=\Gamma\left(sI_4-\Lambda\right)^{-1}\mathrm{E}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{s+1}\\ \frac{1}{s-2}\\ 0\\ 0\end{bmatrix}=\frac{1}{s+1}$$

Μια άλλη περιγραφή με συνάρτηση μεταφοράς την

$$G\left(s\right)=\frac{1}{s+1}$$

είναι η

$$A=\left[-1\right],B=1,C=1,D=0$$

$$G(s)=C(s-A)^{-1}B=1(s+1)^{-1}1=\frac{1}{s+1}$$

Το παραπάνω αποτελεί παράδειγμα για το

Θεώρημα

Αν στον πίνακας των συναρτήσεων μεταφοράς $H(s)$ ενός συστήματος δεν εμφανίζονται σαν πόλοι του $H(s)$ όλοι οι πόλοι του συστήματος δηλαδή όλα τα μηδενικά του $sI_n - A$ τότε το σύστημα είναι

A) ή μη ελέγξιμο
B) ή μη παρατηρήσημο
Γ) ή μη ελέγξιμο **και** μη παρατηρήσιμο.

Απόδειξη

Θεωρείστε ένα σύστημα στην κανονική διαγώνια μορφή

$$\dot{z}(t) = \Lambda z(t) + Bu(t) \qquad (1)$$

$$y(t) = \Gamma z(t) + Du(t) \qquad (2)$$

$$B = \begin{bmatrix} B_1^{\tau} \\ B_2^{\tau} \\ \vdots \\ B_n^{\tau} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times m}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} \Gamma_1 & \Gamma_2 & \dots & \Gamma_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{p\times n}$$

όπου $B_i^{\tau} \in \mathbb{R}^{1\times m}, \quad i = 1, 2, \dots, n$ οι γραμμές του $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ και $\Gamma_i \in \mathbb{R}^{p\times 1}, \quad i = 1, 2, \dots, n$ οι στήλες του $\Gamma \in \mathbb{R}^{p\times n}$

Μετασχηματίζοντας κατά Laplace τις (1) έχουμε

$$sz_i(s) = \lambda_i z_i(s) + B_i^\tau u(s) \quad i = 1, 2, ..., n$$

$$z_i(s) = \frac{1}{(s-\lambda_i)} B_i^\tau u(t) \quad i = 1, 2, ..., n$$

$$y(s) = \Gamma z(s) = \begin{bmatrix} \Gamma_1 & \Gamma_2 & \dots & \Gamma_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(s) \\ z_2(s) \\ \vdots \\ z_n(s) \end{bmatrix} =$$

$$= \Gamma_1 z_1(s) + \Gamma_2 z_2(s) + ... + \Gamma_n z_n(s)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \Gamma_i B_i^\tau \frac{1}{(s-\lambda_i)} u(t)$$

Άρα ο πίνακας των συναρτήσεων μεταφοράς του συστήματος θα δίνεται από την

$$H(s) = \sum_{i=1}^{n} \Gamma_i B_i^\tau \frac{1}{(s-\lambda_i)} = \sum_{i=1}^{n} H_i \frac{1}{(s-\lambda_i)}$$

όπου

$$H_i := \Gamma_i B_i^\tau \in \mathbb{R}^{p\times m}, \quad rank H_i = 1, \quad i = 1, 2, ..., n$$

Αν στην έκφραση του $H(s)$ δεν εμφανίζεται σαν πόλος του $H(s)$ η ιδιοτιμή λ_i του A (μηδενικό του $sI_n - A$: πόλος του συστήματος) θα πρέπει

$$H_i := \Gamma_i B_i^{\tau} = 0_{p,m}$$

ή ισοδύναμα θα πρέπει

$$rank H_i = rank \Gamma_i B_i^{\tau} = 0$$

η οποία ικανοποιείτε αν και μόνο αν

α) $B_i^{\tau} = 0 \in \mathbb{R}^{1\times m} \Leftrightarrow$ το σύστημα είναι μη ελέγξιμο
ή
β) $\Gamma_i = 0 \in \mathbb{R}^{p\times 1} \Leftrightarrow$ το σύστημα είναι μη παρατηρήσιμο
ή
γ) $B_i^{\tau} = 0 \in \mathbb{R}^{1\times m}$ ΚΑΙ $\Gamma_i = 0 \in \mathbb{R}^{p\times 1} \Leftrightarrow$ το σύστημα είναι μη ελέγξιμο **ΚΑΙ** μη παρατηρήσιμο