ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΕΛΕΓΞΙΜΟΤΗΤΑΣ

(Συστήματα μιάς εισόδου και μιάς εξόδου)

Έστω το σύστημα

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

Αν το σύστημα είναι ελέγξιμο τότε υπάρχει μετασχηματισμός ομοιότητας

$$x(t) = T\tilde{x}(t)$$

έτσι ώστε οι πίνακες που περιγράφουν το σύστημα με άνυσμα κατάστασης το

$$\tilde{x}(t) = T^{-1}x(t)$$

$$\frac{d}{dt}\tilde{x}(t) = \tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{B}u(t)$$

$$\tilde{A} = T^{-1}AT, \qquad \tilde{B} = T^{-1}B$$

να έχουν την μορφή

$$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad \widetilde{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$$

όπου $a_i \in \mathbb{R},\ i = 0,1,2,...,n-1$ είναι οι συντελεστές του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του A :

$$\det\left(sI_n - A\right) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + ... + a_1 s + a_0$$

Αντίστροφα, αν υπάρχει μετασχηματισμός ομοιότητας $\tilde{x}\left(t\right) = T^{-1}x\left(t\right)$ έτσι ώστε οι πίνακες $\tilde{A} = T^{-1}AT, \qquad \widetilde{B} = T^{-1}B$ να έχουν την παραπάνω μορφή, τότε το σύστημα είναι ελέγξιμο.

Για απλούστευση του συμβολισμού της απόδειξης έστω $n = 3$ έτσι ώστε $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}, B \in \mathbb{R}^{3\times 1}$

Από το Θεώρμα Caley-Hamilton

$$A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \ldots + a_1 A + a_0 I_n = 0_{n,n}$$

$$\Rightarrow n = 3$$

$$A^3 + a_2 A^2 + a_1 A + a_0 I_n = 0_{3,3}$$

$$\Rightarrow$$

$$A^3 = -a_2 A^2 - a_1 A - a_0 I_n \Rightarrow A^3 B = -a_2 A^2 B - a_1 AB - a_0 B$$

Έστω

$$T := \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ a_2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = PS$$

Εξ υποθέσεως $rank\begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} = 3$ και λόγω της μορφής του S, $rankS = 3$, άρα $rankT = 3$ και

$$AT = A\begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ a_2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} AB & A^2B & A^3B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ a_2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & -a_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ a_2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -a_0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ a_2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a \end{bmatrix}$$

$$= PS\widetilde{A} = T\widetilde{A}$$

$$AT = T\widetilde{A} \Rightarrow \widetilde{A} = T^{-1}AT$$

Επίσης

$$T\widetilde{B}=\begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ a_2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}=B$$

Άσκηση
Αποδείξτε το αντίστροφο.

Ελέγξιμη πραγμάτωση κανονικής ρητής συνάρτησης

Έστω η κανονική ρητή συνάρτηση

$$G(s)=\frac{n(s)}{d(s)}+D=\frac{c_q s^q + c_{q-1}s^{q-1}+...+c_1 s + c_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1}+...+a_1 s + a_0}+D, q\le n-$$

Πρόταση Η τετράδα πινάκων

$$\widetilde{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}\in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad \widetilde{B}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}\in \mathbb{R}^{n\times 1} \qquad (2)$$

$$\widetilde{C}=\begin{bmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_q & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}\in \mathbb{R}^{1\times n}, \quad D\in \mathbb{R}$$

αποτελεί μια ελέγξιμη πραγμάτωση της $G(s)$ η οποία είναι παρατηρήσημη αν και μόνο αν τα πολυώνυμα

$$d(s)=s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\ldots+a_1s+a_0$$

και

$$n(s)=c_qs^q+c_{q-1}s^{q-1}+\ldots+c_1s+c_0$$

είναι πρώτα μεταξύ τους.

Απόδειξη

Θεωρείστε τον χαρακτηριστικό πίνακα του $\widetilde{A}$:

$$sI_n-\widetilde{A}=\begin{bmatrix} s & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & s & -1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & s & -1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & s+a_{n-1} \end{bmatrix}$$

και έστω

$$S(s):=\begin{bmatrix} 1 \\ s \\ s^2 \\ \vdots \\ s^{n-1} \end{bmatrix}$$

Τότε έχουμε την ταυτότητα

$$\left(sI_n-\widetilde{A}\right)S(s)=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\\vdots\\d(s)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix}d(s)$$

$$\Rightarrow$$

$$\left(sI_n-\widetilde{A}\right)^{-1}\widetilde{B}=\frac{1}{d(s)}S(s)$$

$$\Rightarrow\widetilde{C}\left(sI_n-\widetilde{A}\right)^{-1}\widetilde{B}=\frac{1}{d(s)}\begin{bmatrix}c_0 & c_1 & \dots & c_q & 0 & 0 & \dots & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\s\\s^2\\\vdots\\s^{n-1}\end{bmatrix}$$

$$=\frac{n(s)}{d(s)}$$

και άρα οι πίνακες στην (2) αποτελούν πραγμάτωση η οποία είναι ελέγξιμη λόγω του παραπάνω.

Η πραγμάτωση (2) είναι παρατηρήσημη ανν

$$rank\begin{bmatrix}sI_n-\widetilde{A}\\\widetilde{C}\end{bmatrix}=n\ \forall s\in sp\left\{\widetilde{A}\right\}=\left\{\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n\right\}$$

όπου $sp\left\{\widetilde{A}\right\}=\{\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n\}$ είναι το σύνολο των ιδιοτιμών του $\widetilde{A}$ (τις οποίες για απλούστευση θεωρούμε ότι έχουν όλες πολαπλότητα 1.)

Δηλαδή

$$\widetilde{A}u_i=\lambda_i u_i, \qquad i=1,2,...,n$$

Προφανώς αν λ_i είναι ιδιοτιμή του $\widetilde{A}$ από την

$$\left(sI_n-\widetilde{A}\right)S(s)=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\\vdots\\d(s)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix}d(s)$$

για $s=\lambda_i$

$$\left(\lambda_i I_n - \widetilde{A}\right) S\left(\lambda_i\right) = \begin{bmatrix} \lambda_i & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_i & -1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & \lambda + a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_i \\ \lambda_i^2 \\ \vdots \\ \lambda_i^{n-1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ d\left(\lambda_i\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left(\lambda_i I_n - \widetilde{A}\right) S\left(\lambda_i\right) = 0$$

$$\widetilde{A} S\left(\lambda_i\right) = \lambda_i S\left(\lambda_i\right)$$

και άρα το

$$u_i = S\left(\lambda_i\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_i \\ \lambda_i^2 \\ \vdots \\ \lambda_i^{n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

είναι το αντίστοιχο ιδιοάνυσμα.
Η πραγμάτωση (2) είναι παρατηρήσημη ανν

$$rank\begin{bmatrix}\lambda_i I_n - \widetilde{A} \\ \widetilde{C}\end{bmatrix} = n \ \forall \lambda_i \in sp\left\{\widetilde{A}\right\} = \{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\}$$

ισοδύναμα η πραγμάτωση (2) είναι παρατηρήσημη ανν

$$\begin{bmatrix}\lambda_i I_n - \widetilde{A} \\ \widetilde{C}\end{bmatrix} S(\lambda_i) = \begin{bmatrix}\lambda_i I_n - \widetilde{A} \\ \widetilde{C}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 \\ \lambda_i \\ \lambda_i^2 \\ \vdots \\ \lambda_i^{n-1}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ d(\lambda_i) \\ c(\lambda_i)\end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix}0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0\end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow$$

$d(s), c(s)$ δεν έχουν κοινές ρίσες, δηλαδή είναι πρώτα μεταξύ τους.

Άσκηση Διατυπώστε και αποδείξτε τα αντίστοιχα με τα παραπάνω για μια κανονική μορφή παρατηρησημότητας

$$\widehat{A}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & \dots & -a_0\\ 1 & 0 & 0 & \dots & -a_1\\ 0 & 1 & 0 & \dots & -a_2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & -a_{n-1}\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{n\times n},\quad \widehat{B}=\begin{bmatrix}c_0\\ c_1\\ \vdots\\ c_q\\ 0\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{n\times 1}$$

$$\widehat{C}=\begin{bmatrix}0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{1\times n},\quad D\in\mathbb{R}$$