Ο ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ $\mathcal{Z}$ ΣΗΜΑΤΩΝ ΔΙΑΚΡΙΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ

Ο ***μονόπλευρος*** μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$: $\mathcal{Z}\{x[kT]\}$ ενός σήματος διακριτού χρόνου $x[kT]$ τον οποίο συμβολίζουμε με

$$X(z) = \mathcal{Z}\{x[kT]\}$$

είναι μια μιγαδική συνάρτηση της μιγαδικής μεταβλητής z η οποία ορίζεται από την σχέση

$$\mathcal{Z}\{x[kT]\} = X(z) = x[0] + x[T]z^{-1} + x[2T]z^{-2} + \ldots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} x[kT]z^{-k}$$

Ο ***μονόπλευρος*** μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$: $\mathcal{Z}\{x[kT]\}$ είναι δυναμοσειρά ως προς z^{-1} με συντελεστές τις τιμές του σήματος κατά τις χρονικές στιγμές $0, T, 2T, 3T, \ldots$

ο z^{-k} είναι «δείκτης χρόνου» που λέει ότι ο συντελεστής $x[kT]$ του z^{-k} είναι η τιμή του σήματος την χρονική στιγμή kT.

Π.χ. αν για το σήμα $x[kT]$ είναι

$$X(z) = \mathcal{Z}\{x[kT]\} = 3.2 + 2.5z^{-1} - 2.0z^{-2} + 7.4z^{-4} + \ldots$$

τότε

$$x[0] = 3.2,\ \ x[T] = 2.5,\ \ x[2T] = -2.0,\ \ x[3T] = 0,\ \ x[4T] = 7.4, \ldots$$

Ο ***μονόπλευρος*** μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$, $X(z) = \{x[kT]\}$ μπορεί να εφαρμοστεί και σε σήματα με

$$x[kT] \neq 0, \;\; \text{για} \;\; k = -1, -2, \ldots$$

αλλά οι τιμές $x[kT] \neq 0, \;\; k = -1, -2, \ldots$ **δεν** μπορούν να ανακτηθούν από τον **μονόπλευρο** $X(z)$.

Ο ***αμφίπλευρος*** μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$: $\mathcal{Z}\{x[kT]\}$ ενός σήματος διακριτού χρόνου $x[kT]$ ορίζεται από την σχέση

$$X(z) = \mathcal{Z}\{x[kT]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[kT] z^{-k}$$

Ο ***αμφίπλευρος*** μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$: $\mathcal{Z}\{x[kT]\}$ είναι δυναμοσειρά ως προς z και z^{-1} με συντελεστές τις τιμές του σήματος κατά τις χρονικές στιγμές

$$\ldots -3T, -2T, -T, 0, T, 2T, 3T, \ldots$$

Αν $x[kT] = 0, \;\; k = -1, -2, \ldots$ ο ***αμφίπλευρος*** μετασχηματισμός **ταυτίζεται** με τον ***μονόπλευρο*** μετασχηματισμό.

ΕΠΙΚΕΝΤΡΩΝΟΥΜΕ ΤΟ ΕΝΔΙΑΦΕΡΟΝ ΜΑΣ ΣΤΟΝ **ΜΟΝΟΠΛΕΥΡΟ** ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟ $\mathcal{Z}$ ΤΟΝ ΟΠΟΙΟ ΑΝΑΦΕΡΟΥΜΕ ΩΣ **ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟ** $\mathcal{Z}$

Αναλόγως της τιμής $z \in \mathbb{C}$, $X(z) \in \mathbb{C}$ ή $X(z) = \infty$

Περιοχή σύγκλησης του μετασχηματισμού $\mathcal{Z}$: $X(z) = \mathcal{Z}\{x[kT]\}$ ενός σήματος διακριτού χρόνου $x[kT]$ είναι το σύνολο των τιμών του $z \in \mathbb{C}$ για τις οποίες

$$|X(z)| < \infty$$

Αν γράψουμε

$$z = re^{j\theta}, \; r = |z|, \;\; \theta = \arg z$$

$$\left|e^{-jk\theta}\right| = \left[\cos^2 k\theta + \sin^2 k\theta\right]^{\frac{1}{2}} = 1$$

τότε

$$|X(z)| = \sum_{k=0}^{\infty}\left|x[kT]z^{-k}\right| = \sum_{k=0}^{\infty}\left|x[kT]\left(re^{j\theta}\right)^{-k}\right| = \sum_{k=0}^{\infty}\left|x[kT]r^{-k}re^{-jk\theta}\right|$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\left|x[kT]r^{-k}\right|\left|e^{-jk\theta}\right| = \sum_{k=0}^{\infty}\left|x[kT]r^{-k}\right|$$

Για να είναι το παραπάνω άθροισμα πεπερασμένο θα πρέπει να υπάρχουν

$$0 < M \in \mathbb{R} \text{ και } 0 < R \in \mathbb{R}$$

τέτοια ώστε

$$\text{για } k \geq 0 : \;\; \left|x[kT]\right| \leq MR^k$$

Σε τέτοια περίπτωση

$$|X(z)| = \sum_{k=0}^{\infty}\left|x[kT]z^{-k}\right| = \sum_{k=0}^{\infty}\left|x[kT]r^{-k}\right| \leq M\sum_{k=0}^{\infty}R^k r^{-k} = M\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{R}{r}\right)^k$$

Για να είναι το παραπάνω άθροισμα πεπερασμένο θα πρέπει το μέτρο r του z να ικανοποιεί την

$$\frac{R}{r} < 1 \quad \Rightarrow \quad r > R$$

Με άλλα λόγια ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$: $X(z) = \mathcal{Z}\{x[kT]\}$ ενός σήματος διακριτού χρόνου $x[kT]$ υπάρχει, ή ισοδύναμα ο $X(z) = \mathcal{Z}\{x[kT]\}$ συγκλίνει απολύτως για κάθε z **εκτός** του κύκλου ακτίνας R

Η περιοχή

$$r = |z| > R$$

ονομάζεται **περιοχή σύγκλησης** του μετασχηματισμού $\mathcal{Z}$:

$X(z) = \mathcal{Z}\{x[kT]\}$.

Η περιοχή

$$r = |z| < R$$

ονομάζεται **περιοχή απόκλισης** του μετασχηματισμού $\mathcal{Z}$:

$X(z) = \mathcal{Z}\{x[kT]\}$.

Παράδειγμα
Μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$: του μοναδιαίου παλμού :

$$\Delta[kT]=1 \qquad k=0$$

$$\Delta[kT]=0 \qquad k\neq 0$$

$$\mathcal{Z}\{\Delta[kT]\}=\Delta(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\Delta[kT]z^{-k}=\Delta[0]z^{-0}=1$$

$$\Delta[kT]\leftrightarrow 1$$

και εφόσον

$$\sum_{k=0}^{\infty}\Delta[kT]\rho^{-k}=\Delta[0]\rho^{-0}+\Delta[T]\rho^{-1}+\Delta[2T]\rho^{-2}+....$$

$$=1+0+0+...=1<\infty \qquad \forall\rho>0$$

η περιοχή σύγκλησης του $\Delta(z)=\mathcal{Z}\{\Delta[kT]\}$ είναι το σύνολο των μιγαδικών αριθμών z οι οποίοι ικανοποιούν την

$$|z|>0$$

Παράδειγμα

Μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$: του μοναδιαίου παλμού $\Delta[kT-nT]$ κατά την χρονική στιγμή $k=nT, \qquad n=0,1,2,...$

$$\Delta[kT-nT]=1 \qquad k=n$$

$$\Delta[kT-nT]=0 \qquad k\neq n$$

$$\mathcal{Z}\{\Delta[kT-nT]\}=\Delta(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\Delta[kT-nT]z^{-k}=$$
$$=\Delta[-nT]z^{-0}+\Delta[T-nT]z^{-1}+\Delta[2T-nT]z^{-2}+\ldots+\Delta[nT-nT]z^{-n}+\Delta[(n+1)T-nT]z^{-(n+1)}+$$
$$=0\cdot z^{-0}+0\cdot z^{-1}+0\cdot z^{-2}+\ldots+\Delta[0]z^{-n}+0\cdot z^{-(n+1)}+\ldots$$
$$=\Delta[0]z^{-n}=1\cdot z^{-n}=\frac{1}{z^n}$$

$$\Delta[kT-nT]\leftrightarrow\frac{1}{z^n}, \qquad n=0,1,2,\ldots$$

όπως και στην περίπτωση του $\Delta(z)=\mathcal{Z}\{\Delta[kT]\}$ **η περιοχή σύγκλησης** του $\Delta(z)=\mathcal{Z}\{\Delta[kT-nT]\}$, $n=0,1,2,\ldots$ είναι το σύνολο των μιγαδικών αριθμών z οι οποίοι ικανοποιούν την

$$|z|>0$$

Παράδειγμα
Μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$: του σήματος διακριτού χρόνου

$$x(kT)=a^k, \quad k=0,1,2,.... \ a\in\mathbb{C}$$
$$x(kT)=0, \quad k=-1,-2,...$$

$$X(z)=\sum_{k=0}^{\infty}x[kT]z^{-k}=\sum_{k=0}^{\infty}a^k z^{-k}=1+az^{-1}+a^2z^{-2}+a^3z^{-3}...$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της (1) επί $(z-a)$, παίρνουμε:

$$(z-a)X(z)=(z-a)\left(1+az^{-1}+a^2z^{-2}+a^2z^{-3}...\right)$$

$$\begin{aligned}(z-a)X(z)&=z+a+a^2z^{-1}+a^3z^{-2}+a^4z^{-3}+...\\ &\quad -a-a^2z^{-1}-a^3z^{-2}-a^4z^{-3}...\\ &=z\end{aligned}$$

$$\Rightarrow$$

$$X(z)=\frac{z}{z-a}$$

$$a^k\leftrightarrow\frac{z}{z-a}$$

Παρατήρηση. Αν $a=1$ τότε $x(kT)=u(kT)$ και

$$u(kT) \leftrightarrow \frac{z}{z-1}$$

είναι ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ της μοναδιαίας συναρτησης βαθμίδος διακριτού χρόνου.

$$u[kT] = 1, \quad k = 0,1,2,...$$

$$u[kT] = 0, \quad k = -1,-2,...$$

Η περιοχή σύγκλησης του μετασχηματισμού $\mathcal{Z}$ της

$$x(kT) = a^k, \quad k = 0,1,2,.... \;\; a \in \mathbb{C}$$
$$x(kT) = 0, \quad k = -1,-2,...$$

$$X(z) = \mathcal{Z}\{x(kT)\} = \frac{z}{z-a}$$

Θεωρούμε το άθροισμα $X_N(z)$ των $N+1$ όρων της γεωμετρικής προόδου

$$a^k z^{-k}: \qquad k = 0,1,2,...$$

$$0, \frac{a}{z}, \frac{a^2}{z^2}, \frac{a^3}{z^3}, ...$$

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k z^{-k} = 1 + az^{-1} + a^2 z^{-2} + a^3 z^{-3} ...$$

$$X_N(z) = \sum_{k=0}^{N+1} a^k z^{-k} = 1 + az^{-1} + a^2 z^{-2} + ... + a^{N+1} z^{-(N+1)}$$

$$= \frac{1-\left(az^{-1}\right)^N}{1-\left(az^{-1}\right)}$$

Τον μιγαδικό αριθμό $az^{-1} = \frac{a}{z}$ γράφουμε υπό πολική μορφή

$$az^{-1} = \left|az^{-1}\right| e^{j\theta}$$

όπου θ το όρισμα του μιγαδικού αριθμού $az^{-1} = \frac{a}{z}$.

και άρα

$$\left(az^{-1}\right)^N = \left|az^{-1}\right|^N e^{jN\theta}$$

Για τιμές του z τέτοιες ώστε $\left|az^{-1}\right| = \left|\frac{a}{z}\right| < 1$ ή ισοδύναμα τιμές του z τέτοιες ώστε

$$|a| < |z|$$

έχουμε ότι

$$\lim_{N\to\infty} \left|\frac{a}{z}\right|^N = 0$$

και άρα

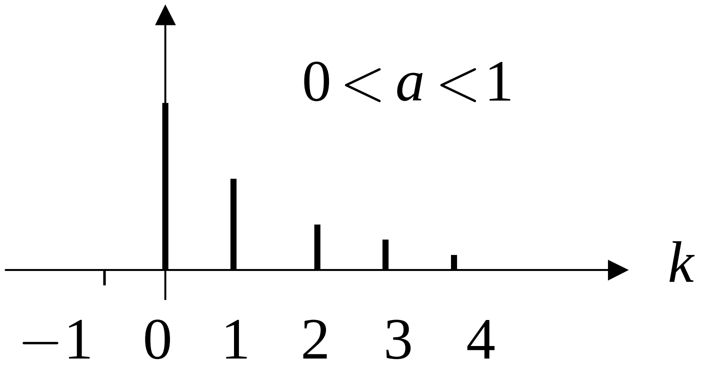
$$X(z) = \lim_{N\to\infty} X_N(z) = \lim_{N\to\infty} \frac{1-\left(\frac{a}{z}\right)^N}{1-\left(\frac{a}{z}\right)}$$

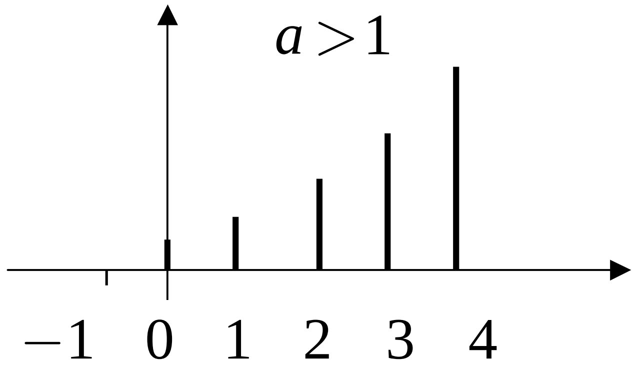
$$= \frac{1}{1-\frac{a}{z}} = \frac{z}{z-a}$$

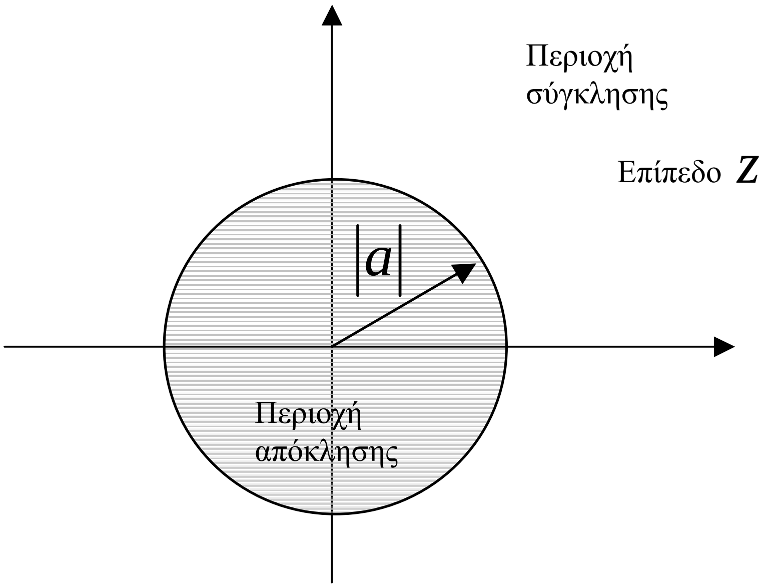
Άρα η περιοχή σύγκλησης του μετασχηματισμού $\mathcal{Z}$ της

$$x(kT) = a^k, \quad k = 0,1,2,\ldots. \quad a \in \mathbb{C}$$
$$x(kT) = 0, \quad k = -1,-2,\ldots$$

είναι η περιοχή του μιγαδικού $z-$επιπέδου με $|a| < |z|$ (βλέπε σχήμα)







Σχέση μεταξύ μετασχηματισμών Fourier και μετασχηματισμού $\mathcal{Z}$

Δεδομένου ενός σήματος **διακριτού** χρόνου $x[k]:\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ ο μετασχηματισμός Fourier $X(\omega)$ του σήματος $x[k]$ **(DTFT)** ορίζεται από την σχέση

$$X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\, e^{-j\omega k}$$

αν το σήμα $x[k]=0,\ k=-1,-2,\ldots$ τότε

$$X(\omega)=\sum_{k=0}^{\infty} x[k]\, e^{-j\omega k} \qquad (2)$$

Ο μετασχηματισμός Fourier $X(\omega)$ **(DTFT)** υπάρχει (δηλαδή η (2) συγκλίνει) αν το άθροισμα

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left|x[k]\right| < 0$$

(ικανή συνθήκη).

Ο ***μονόπλευρος*** μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$: $\mathcal{Z}\{x[kT]\}$ ενός σήματος διακριτού χρόνου $x[kT]$ είναι

$$\mathcal{Z}\{x[kT]\}=X(z)=\sum_{k=0}^{\infty} x[kT] z^{-k}$$

Παρατηρούμε τώρα ότι αν γράψουμε τον μιγαδικό αριθμό z υπό πολική μορφή

$$z=re^{i\theta}$$

όπου $r=|z|$ και θ είναι το όρισμα του z , τότε ο ***μονόπλευρος*** μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$: $X(z)$ γράφεται

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x[kT] z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(x[kT] r^{-k} \right) e^{-jk\theta}$$

δηλαδή, ο ο ***μονόπλευρος*** μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$: $X(z)$ είναι ένας μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου του σήματος διακριτού χρόνου $x[kT]r^{-k}$ και συνεπώς η περιοχή συγκλίσεως του μετασχηματισμού $\mathcal{Z}\{x[kT]\} = X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x[kT] z^{-k}$ προσδιορίζεται από την συνθήκη

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left| x[kT] \right| r^{-k} < \infty$$