ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
΄΄ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ & ΘΕΩΡΙΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΕΛΕΓΧΟΥ΄΄

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΥΨΗΛΗΣ ΤΑΞΗΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ – ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΣΦΑΛΜΑΤΩΝ – ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΜΕ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΑ ΣΕ MATLAB

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ
ΛΑΜΠΡΟΥ Γ. ΧΑΡΙΛΑΟΣ

Επιβλέπουσα: Μ. Γουσίδου – Κουτίτα
Αν. Καθηγήτρια Α.Π.Θ

Θεσσαλονίκη, Ιανουάριος 2011

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
΄΄ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ & ΘΕΩΡΙΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΕΛΕΓΧΟΥ΄΄

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΥΨΗΛΗΣ ΤΑΞΗΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ – ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΣΦΑΛΜΑΤΩΝ – ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΜΕ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΑ ΣΕ MATLAB

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΛΑΜΠΡΟΥ Γ. ΧΑΡΙΛΑΟΣ

Επιβλέπουσα: Μ. Γουσίδου – Κουτίτα
Αν. Καθηγήτρια Α.Π.Θ

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την ………………………………………………...........

…………………………………	…………………………….	…………………………….
Μ. Γουσίδου – Κουτίτα	Ν. Καραμπετάκης	Ραχώνης Γεώργιος
Αν. Καθηγήτρια Α.Π.Θ	Αν. Καθηγητής Α.Π.Θ	Επικ. Καθηγητής Α.Π.Θ

Θεσσαλονίκη, Ιανουάριος 2011

....

Λάμπρου Γ. Χαρίλαος
Πτυχιούχος Μαθηματικός Α.Π.Θ.

Στην αδελφή μου,
Λαμπρινή

Ένα μεγάλο ευχαριστώ οφείλω στην επιβλέπουσα καθηγήτρια μου κα. Γουσίδου – Κουτίτα Μαρία για την υπόδειξη του θέματος, την επιστημονική καθοδήγηση και το διαρκές ενδιαφέρον καθ' όλη την διάρκεια της εκπόνησης της εργασίας.

Ευχαριστώ, τα μέλη της τριμελούς επιτροπής, κ. Καραμπετάκη Νικόλαο και κ. Ραχώνη Γεώργιο για την προσεκτική μελέτη της εργασίας και τις ιδιαίτερα χρήσιμες παρατηρήσεις τους.

Οφείλω να ευχαριστήσω την οικογένεια μου, για την ηθική και υλική βοήθεια που μου προσέφεραν τους μήνες της συγγραφής της εργασίας και γενικά καθ' όλη την διάρκεια των σπουδών μου.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Οι διαφορικές εξισώσεις είναι απαραίτητες για την μοντελοποίηση πολλών φυσικών, βιολογικών, μαθηματικών και άλλων προβλημάτων. Μελετώνται εδώ μερικές μαθηματικές τεχνικές επίλυσης διαφορικών εξισώσεων.

Στην εργασία αυτή παρουσιάζονται ορισμένες αριθμητικές μέθοδοι Runge-Kutta από δεύτερης έως όγδοης τάξης, οι οποίες προσεγγίζουν βήμα-βήμα την λύση μιας διαφορικής εξίσωσης πρώτης τάξης συνοδευόμενη από μία αρχική συνθήκη (πρόβλημα αρχικών τιμών). Στην συνέχεια αναφέρεται ένας γενικός τρόπος για την επέκταση αυτών των διαδικασιών σε συστήματα διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης. Ακόμη εξετάζονται συστήματα διαφορικών εξισώσεων με τάξη υψηλότερη του ένα, η λύση των οποίων επιτυγχάνεται με τη μετατροπή του αρχικού συστήματος σε ένα ευρύτερο σύστημα πρώτης τάξεως διαφορικών εξισώσεων.

Είναι πολύ σημαντική η εκτίμηση της ακρίβειας που επιτυγχάνεται σε κάθε βήμα κατά την αριθμητική επίλυση ενός προβλήματος αρχικών τιμών. Για να επιτευχθεί αυτό, παρουσιάζεται μια διαδικασία όπου κάποιες από τις μεθόδους που έχουν ήδη παρουσιασθεί ενσωματώνονται μέσα σε υψηλότερης τάξης τύπους ή ενσωματώνουν τύπους μικρότερης τάξης. Κατόπιν μέσα από την σύγκριση αυτών των μεθόδων ή απευθείας μέσω τύπων παίρνουμε επιπλέον εκτός της προσέγγισης και μια πολύ ικανοποιητική εκτίμηση του σφάλματος σε κάθε βήμα.

Για κάθε μέθοδο που αναφέρεται σε αυτή την εργασία έχει κατασκευασθεί και ένα πρόγραμμα σε μορφή συνάρτησης στο Matlab. Όλοι οι κώδικες αυτών καθώς και οδηγίες για την χρήση τους μαζί με παραδείγματα αναφέρονται στο παράρτημα της εργασίας. Τέλος παρουσιάζονται εκτεταμένα εφαρμογές και αποτελέσματα των υπορουτίνων αυτών τα οποία βοηθούν στον έλεγχο και την μεταξύ τους σύγκριση, καθώς και συμπεράσματα τα οποία απορρέουν από την συμπεριφορά των διαφορικών εξισώσεων που μελετήσαμε και από στοιχεία που βρήκαμε από δημοσιευμένες έρευνες που αναφέρονται στην βιβλιογραφία.

ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ

Διαφορική Εξίσωση, Σύστημα Διαφορικών εξισώσεων, Αριθμητική Μέθοδος, Αριθμητική Λύση, Πρόβλημα αρχικών τιμών, Μέθοδος Runge-Kutta, Συμπυκνωμένη παράσταση Runge-Kutta, Ενσωματωμένος τύπος, Σφάλμα Αποκοπής, Σφάλμα Στρογγύλευσης, Kutta Τύπος, Gill Τύπος, Nystrom Τύπος, Butcher Τύπος, Fehlberg Τύπος, Shanks Τύπος, Sarafyan Τύπος, Υπορουτίνα.

ABSTRACT

Differential equations are necessary for modeling many physical, biological, mathematical and other problems. Here we study some mathematical techniques for solving differential equations.

In this paper we present some numerical methods Runge-Kutta from second to eighth order, which approach step by step the solution of a first order differential equation, accompanied by an initial condition (initial value problem). Then we mention a general method to extend these procedures to systems of first order differential equations. Furthermore, we examine some systems of higher than one order differential equations, whose solution achieved by converting the initial system to a wider system of first order differential equations.

It’s very important to estimate the accuracy which achieved at each step during the numerical solution of an initial value problem. In order to achieve this, we present a procedure where some of these methods, that we have mentioned, are embedded into higher order formulas or embed lower order formulas. Then, by comparing these methods or directly through formulas, we get except the approach and a very satisfactory estimate of error in each step.

For each method, which we refer here, we have created a program in the form of function in Matlab. All the codes of these and their instructions with examples are mentioned in the annex. Finally, we present extensively the applications and results of these subroutines which help the control and the comparison between them, as well as the conclusions which arising from the behavior of differential equations we studied and from what we found from published research which we refer in the literature.

KEY WORDS

Differential Equation, System of Differential Equations, Numerical Method, Numerical Solution, Initial Value Problem, Runge-Kutta Method, Condensed representation of Runge-Kutta Method, Embedding Form, Truncation error, Round-Off Error, Kutta Form, Gill Form, Nystrom Form, Butcher Form, Fehlberg Form, Shanks Form, Sarafyan Form, Subroutine.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

Κεφάλαιο 1

“Εισαγωγή”

1.1 Διαφορικές Εξισώσεις και Βασικές Έννοιες

Μια **διαφορική εξίσωση** (που θα τη σημειώνουμε στο εξής με δ.ε.) είναι μια εξίσωση που περιέχει μια μεταβλητή x, μια άγνωστη συνάρτηση y(x) και ορισμένες (ή όλες) τις παράγωγους της $y'(x)$, $y''(x)$, ...,$y^{(n)}(x)$. **Τάξη της δ.ε.** ονομάζεται η μεγαλύτερη παράγωγος που εμφανίζεται στη δ.ε. **Λύση (αναλυτική) της δ.ε.** είναι μια συγκεκριμένη συνάρτηση η οποία την ικανοποιεί. Οι δ.ε. τάξης $n \geq 1$ είναι της μορφής :

$$f(\, x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)\,) = 0, \ \ n \geq 1$$

και λύση της παραπάνω δ.ε. είναι μια συνάρτηση $\phi: I \to \mathbb{R}$, με $I \subset \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$f(\, x, \phi(x), \phi'(x), \ldots, \phi^{(n)}(x)\,) = 0, \ x \in I.$$

Παρακάτω δίνονται μερικά παραδείγματα δ.ε. με τις λύσεις τους. Σε κάθε περίπτωση, το x είναι η ανεξάρτητη μεταβλητή και το y είναι η εξαρτημένη. Έτσι, y είναι το όνομα της άγνωστης συνάρτησης ως προς την ανεξάρτητη μεταβλητή x.

ΕΞΙΣΩΣΗ	**ΛΥΣΗ**
$y' - y = e^x$	$y(x) = xe^x + ce^x$
$y'' + 9y = 0$	$y(x) = c_1 \sin 3x + c_2 \cos 3x$
$y' + \frac{1}{2y} = 0$	$y(x) = \sqrt{c - x}$

Στα παραπάνω παραδείγματα, το c είναι μια αυθαίρετη σταθερά. Το γεγονός ότι η εν λόγω σταθερά εμφανίζεται στις λύσεις είναι μια ένδειξη ότι μια δ.ε. δεν έχει μοναδική λύση. Σε ένα επιστημονικό πρόβλημα, συνήθως μια διαφορική εξίσωση συνοδεύεται από βοηθητικές συνθήκες που χρησιμεύουν για να καθοριστεί η άγνωστη συνάρτηση (αναλυτική λύση) με ακρίβεια.

Σαν **αριθμητική λύση** λαμβάνουμε ένα διακριτό σύνολο τιμών της y(x), που συμβολίζονται με $\{y_n\}$ και αντιστοιχούν στα $\{x_n\}$, και είναι μια προσέγγιση στη συνεχή καμπύλη, της λύσης y(x).

Αν και υπάρχουν πολλές μέθοδοι για τη λήψη αναλυτικών λύσεων μιας δ.ε., περιορίζονται κυρίως σε συγκεκριμένες δ.ε. Όταν εφαρμόζονται, παράγουν μια λύση με τη μορφή ενός τύπου, όπως φαίνεται στον παραπάνω πίνακα. Σε πρακτικά προβλήματα, ωστόσο, συχνά μια δ.ε. δεν επιδέχεται λύση με αναλυτικές μεθόδους έτσι πρέπει να αναζητηθεί η αριθμητική λύση της. Ακόμα και όταν μια αναλυτική λύση μπορεί να επιτευχθεί, μια αριθμητική λύση μπορεί να είναι προτιμότερη, ειδικά εάν η αναλυτική λύση είναι πολύπλοκη. Για παράδειγμα η δ.ε.:

$$y' = 3x^2 - 4x^{-1} + (1 + x^2)^{-1}$$

όπου η f δεν περιλαμβάνει το y. Τότε μπορεί να λυθεί με μια άμεση διαδικασία αορίστου ολοκλήρωσης και η λύση της είναι:

$$y(t) = x^3 - 4\ln x + \mathrm{Arctan}x + c$$

Σε ανάλογες περιπτώσεις (όπου η f δεν περιλαμβάνει το y), η αριθμητική λύση μπορεί να εξακολουθεί να είναι προτιμότερη όταν η συνάρτηση f ως προς x μπορεί να μην αποτελείται από στοιχειώδεις συναρτήσεις που είναι «εύκολη» η ολοκλήρωση τους. Ας εξετάσουμε, για παράδειγμα, την δ.ε.:

$$y' = e^{-\sqrt{x^2 - \sin x}} + \ln |\sin x + \tanh x^3|$$

Θεωρητικά η λύση επιτυγχάνεται με τη λήψη του αόριστου ολοκληρώματος. Αυτό όμως δεν μπορεί να γίνει στην πράξη. Με άλλα λόγια, μια συνάρτηση y υπάρχει για τα dy/dx στο δεξί μέλος της , αλλά δεν είναι δυνατόν να βρεθεί η y (x) με χρήση των γνωστών συναρτήσεων.

Αριθμητικές λύσεις επιτυγχάνονται με αριθμητικές μεθόδους. Σαν **αριθμητική μέθοδο** εννοούμε ότι σε μια ακολουθία $\{x_n\}$ τετμημένων $x_n > x_0$ όπου $x \in [a, b]$, ορίζεται μια ακολουθία $\{y_n\}$ που προσεγγίζει τις ακριβείς τιμές $y(x_n)$. Το διάστημα [a, b] χωρίζεται σε υποδιαστήματα με τα σημεία $x_{n+1} = x_n + h_n$ για n = 0, 1,….., N , $x_0 = a$ και $x_n = b$ όπου h_n το **βήμα**. Σε πολλές περιπτώσεις $h_n = h$ και $x_n = x_0 + nh$. Σε επόμενα κεφάλαια θα μελετήσουμε αριθμητικές μεθόδους που επιλύουν δ.ε. και συστήματα δ.ε.

Σ' αυτή την εργασία θα μας απασχολήσει κυρίως το **πρόβλημα αρχικών τιμών**. Δηλαδή μία δ.ε. και μία βοηθητική συνθήκη της μορφής:

$y' = f(x, y)$, $y(a)=y_0$ (με x = a αρχική τιμή)

ή $\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{dx}} = f(x, y(x))$, $y(a)=y_0$ (με x = a αρχική τιμή)

Όπου θέλουμε να είμαστε σε θέση να μπορούμε να καθορίσουμε την τιμή του y, για κάθε τιμή του x πριν ή μετά το α. Παρακάτω θα παρουσιαστούν μερικά παραδείγματα προβλημάτων αρχικών τιμών, μαζί με τις λύσεις τους.

ΕΞΙΣΩΣΗ	Αρχική Τιμή	Λύση
$y' = y + 1$	$y(0) = 0$	$y = e^x - 1$
$y' = 6x - 1$	$y(1) = 6$	$y = 3x^2 - x + 4$
$y' = \frac{x}{y+1}$	$y(0) = 0$	$y = \sqrt{x^2+1} - 1$

1.2 Μέθοδος Taylor

Έστω το πρόβλημα αρχικών τιμών $y' = f(x, y)$ με αρχική συνθήκη $y(x_0) = y_0$. Η ακριβής λύση της δ.ε. γύρο από το x_0 είναι το ανάπτυγμα Taylor της συνάρτηση y(x):

$$y(x) = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) + y''(x_0)\frac{(x - x0)^2}{2} + \ldots.. \quad (1.1.1)$$

Χρησιμοποιούμε τον παραπάνω τύπο για να εκφράσουμε την λύση της δ.ε. σε διαδοχικά σημεία $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$. Για $x = x_1$ η (1) γίνεται:

$$y(x_1) = y_0 + y'(x_0)h + y''(x_0)\frac{h^2}{2!} + y'''(x_0)\frac{h^3}{3!} + \ldots..$$

όπου $h = x_1 - x_0$.

Αν κρατήσουμε τώρα ορισμένους μόνο όρους από την (1.1.1) θα έχουμε μία προσεγγιστική τιμή της λύσης στο x_1, την y_1. Όμοια αν πάρουμε το ανάπτυγμα Taylor της y(x) γύρο από το x_1 παίρνουμε μία προσεγγιστική τιμή της λύσης στο x_2, την y_2.Γενικότερα αν συμβολίσουμε με $y_{\iota+1}$ την προσεγγιστική τιμή της λύσης στο x_{i+1} και y_i στο x_i αντίστοιχα, δηλαδή την τιμή που προκύπτει από την (1.1.1) κρατώντας μόνο n+1 όρους, τότε για τον υπολογισμό της y_{i+1} σε συνάρτηση με το y_i χρησιμοποιούμε τον επαγωγικό τύπο τάξης n:

$$y(x_{i+1}) = y_\iota + hy_i' + \frac{h^2}{2!}y_i'' + \frac{h^3}{3!}y_i''' + \ldots.. + \frac{h^n}{n!}y_i^{(n)} \quad (1.1.2)$$

Είναι φανερό ότι για τον υπολογισμό της (1.1.2) πρέπει να είναι γνωστές οι παράγωγοι y_i, y_i', y_i'',………., $y_i^{(n)}$. Όπου:

$$y' = f(x,y)$$

$$y'' = f' = f_x + f_y f$$

$$y''' = f'' = f_{xx} + 2ff_{xy} + f^2 f_{yy} + f_y[f_x + f_y f]$$

ή γενικά $f^{(0)} = f$

$$f^{(j+1)} = f_x^{(j)} + f_y^{(j)} f, \quad j = 0, 1, 2, \ldots\ldots\ldots \qquad (1.1.3)$$

που είναι μια αναδρομική σχέση και $f_x = \frac{df}{dx}$, $f_y = \frac{df}{dy}$, $f_{xx} = \frac{d^2f}{dx^2}$, $f_{xy} = \frac{d^2f}{dx\,dy}$.

Είναι φανερό ότι οι ανώτερης τάξης παράγωγοι είναι ακόμη πιο περίπλοκοι από τους τρείς πρώτους που παρουσιάσαμε. Γι' αυτό συνήθως χρησιμοποιούμε μέθοδο Taylor μικρής τάξης n.

1.3 Matlab

Το *Matlab* είναι ένα σύγχρονο ολοκληρωμένο μαθηματικό λογισμικό πακέτο που χρησιμοποιείται σε πανεπιστημιακά μαθήματα αλλά και ερευνητικές και άλλες εφαρμογές με επιστημονικούς υπολογισμούς. Το Matlab είναι ένα διαδραστικό (interactive) πρόγραμμα για αριθμητικούς υπολογισμούς και οπτικοποίηση των δεδομένων με δυνατότητες προγραμματισμού που το καθιστούν ένα ισχυρό και χρήσιμο εργαλείο στις θετικές επιστήμες.

Το Matlab είναι ειδικά σχεδιασμένο για υπολογισμούς με πίνακες, όπως η επίλυση γραμμικών συστημάτων, η αντιστροφή τετραγωνικών πινάκων κλπ. Επιπλέον το πακέτο αυτό είναι εφοδιασμένο με πολλές επιλογές για γραφικά (δηλαδή την κατασκευή γραφικών παραστάσεων) και προγράμματα γραμμένα στην δική του γλώσσα προγραμματισμού για την επίλυση άλλων προβλημάτων όπως η εύρεση των ριζών μη γραμμικής εξίσωσης, η επίλυση μη γραμμικών συστημάτων κα. Η γλώσσα προγραμματισμού του Matlab δίνει την ευχέρεια στον χρήστη να το επεκτείνει με δικά του προγράμματα.

Το Matlab είναι σχεδιασμένο για την αριθμητική επίλυση προβλημάτων σε αριθμητική πεπερασμένης ακρίβειας, δηλαδή δεν βρίσκει την ακριβή αλλά μια προσεγγιστική λύση ενός προβλήματος. Αυτή είναι και η βασική διαφορά του από τα συστήματα συμβολικών υπολογισμών όπως το Mathematica και η Maple.

Το πακέτο είναι εφοδιασμένο με ένα εκτενές σύστημα βοήθειας όπου κάθε εντολή επεξηγείται αναλυτικά και με αντιπροσωπευτικά παραδείγματα. Η πιο σημαντική εντολή του Matlab είναι η **help**. Επίσης, στην επίσημη ιστοσελίδα του Matlab

http://www.mathworks.com

μπορεί κάποιος να βρει μια πληθώρα πληροφοριών τόσο για αρχάριους όσο και για προχωρημένους.

Στο τέλος της εργασίας θα δοθούν υπορουτίνες με την μορφή συναρτήσεων στο Matlab.

Κεφάλαιο 2

"Μέθοδοι Runge-Kutta"

Υπενθυμίζω ότι κατά τη χρήση της μεθόδου Taylor, στο πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y' = f(x,y) \qquad y(x_0) = y_0 \tag{2.1}$$

θα πρέπει να ληφθούν τα y'' ,y''' ,…………, $y^{(n)}$ με διαφόριση της συνάρτησης f. Η απαίτηση αυτή μπορεί να αποτελέσει σοβαρό εμπόδιο για τη χρήση της μεθόδου. Σε αυτή την περίπτωση ο χρήστης πρέπει να κάνει ορισμένες προκαταρκτικές εργασίες αναλυτικής φύσεως πριν την λύση του προβλήματος ή πριν από τη σύνταξη ενός προγράμματος ηλεκτρονικού υπολογιστή. Στην ιδανική περίπτωση, μια μέθοδος για την επίλυση της δ.ε. (2.1) με την χρήση ηλεκτρονικού υπολογιστή δεν θα πρέπει να περιλαμβάνει τίποτε περισσότερο από τη σύνταξη ενός υποπρογράμματος που να εκτιμά τη συνάρτηση f. Η παραπάνω διαδικασία μπορεί να επιτευχθεί με την μέθοδο Runge – Kutta.

Η μέθοδος που πήρε το όνομα της από τους Carl Runge και Wilhelm Kutta έχει σχεδιαστεί έτσι ώστε να μην απαιτείται αναλυτική επίλυση της αρχικής δ.ε. Ακόμη ο Runge ήταν ο πρώτος που παρατήρησε ότι μπορούμε να αποφύγουμε την παραγώγιση των υψηλής τάξης παραγώγων που εμφανίζονται στην μέθοδο Taylor. Η μέθοδος Runge-Kutta είναι μια διαδικασία που προωθεί την λύση βήμα – βήμα. Δηλαδή, ένας τύπος πρέπει να δοθεί για το y(x + h) ως προς γνωστές ποσότητες. Ως παραδείγματα γνωστών ποσοτήτων μπορούμε να αναφέρουμε τα y(x), y(x - h), y(x - 2h),..... εάν η διαδικασία λύσης έχει διανύσει μια σειρά από βήματα. Στην αρχή μόνο το $y(x_0)$ είναι γνωστό. Φυσικά, υποθέτουμε ότι η f (x, y) μπορεί να υπολογιστεί για κάθε σημείο (x, y). Γενικά οι εξισώσεις Runge-Kutta δίνονται από τον τύπο:

$$y_{n+1} = y_n + \sum_{i=1}^{\nu} w_i k_i \tag{2.2}$$

όπου $$k_i = h*f(x_n + c_i h,\ y_n + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_j),\quad c_1 = 0,\ i=1 ,2 ,3………..,\ \nu \tag{2.3}$$

Για να υπολογιστούν οι άγνωστοι παράμετροι w_i (συντελεστές βάρους) στον (2.2) και c_i, και a_{ij} στους (2.3), αναπτύσσουμε την y_{n+1} σε δυνάμεις του h έτσι ώστε να συμφωνεί με τη λύση της δ.ε. σε έναν αριθμό όρων της σειράς Taylor. Δηλαδή αναπτύσσομε την 2.2 μέχρι ν όρους αντικαθιστώντας τα k_i στην παράσταση, αναπτύσσομε και την σειρά Taylor μέχρι τον όρο που περιέχει το h^{ν} και εξισώνοντας τους συντελεστές των ομοβάθμιων όρων, λαμβάνουμε ένα σύστημα το οποίο αν το λύσουμε παίρνουμε τις παραμέτρους που ζητάμε. Οποιαδήποτε ανάλυση των παραπάνω οδηγεί πάντα στις παρακάτω ταυτότητες:

$$\sum_{i=1}^{\nu} w_i = 1$$

Και $$c_i = \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}, \quad i \neq 1, \quad i = 2,3,\ldots\ldots,\nu$$

Για παράδειγμα, εάν εφαρμόσουμε την παραπάνω διαδικασία για ν=2 τότε παίρνουμε το σύστημα:

$$w_1 + w_2 = 1, \quad c_2 w_2 = \frac{1}{2}, \quad c_2 = a_{21}$$

Αν θεωρήσουμε το c_2 σαν ελεύθερη παράμετρο τότε υπολογίζουμε τα w_1 και w_2. Έτσι για $c_2 = \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1$ τα (w_1, w_2) γίνονται $(0, 1)$, $(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ αντίστοιχα. Τότε προκύπτουν αντίστοιχα οι εξισώσεις:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hf_n)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{4}[f(x_n, y_n) + 3f(x_n + \frac{2}{3}h, y_n + \frac{2}{3}hf_n)]$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_n + h, y_n + hf_n)]$$

σαν $2^{ης}$ τάξης τύποι Runge-Kutta. Με κατάλληλη εκλογή του ν και των ελεύθερων παραμέτρων, μπορούμε να λάβουμε έναν μεγάλο αριθμό $2^{ης}$, $3^{ης}$, $4^{ης}$ και υψηλότερης τάξης τύπων Runge-kutta.

Στη συνέχεια θα εισάγουμε μία **συμπυκνωμένη** παράσταση των **Runge-Kutta** μεθόδων όπως αναπτύχθηκε από τον **Butcher**. Θεωρούμε τις κύριες εξισώσεις Runge-Kutta από τους τύπους (2.2) και (2.3) και τοποθετούμε τους συντελεστές σε μορφή πίνακα ως εξής:

$$\begin{array}{c|cccc}
0 & & & & \\
c_2 & a_{21} & & & \\
c_3 & a_{31} & a_{32} & & \\
c_4 & a_{41} & a_{42} & a_{43} & \\
\hline
 & w_1 & w_2 & w_3 & w_4
\end{array}$$

π.χ. για ν = 4 ή γενικά σε μορφή πινάκων:

$$\begin{array}{c|c}
c & A_L \\
\hline
 & W^T
\end{array}$$

Δηλαδή, κατασκευάζουμε έναν κάτω τριγωνικό πίνακα A_L που περιέχει τους πολλαπλασιαστές a_{ij} των k_i στις αυξητικές τιμές των y_n, ένα διάνυσμα c που περιέχει τις αυξήσεις στο x_n και ένα ανάστροφο διάνυσμα w^T, τους ν συντελεστές βάρους.

Για παράδειγμα, οι συντελεστές του προηγούμενου παραδείγματος για c_2=1 δίνονται στον παρακάτω πίνακα:

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 1 & 1 & \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

όπου ο τύπος που προκύπτει είναι:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$

$$k_1 = hf(x_n, y_n) \qquad \text{ή} \qquad y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_n + h, y_n + hf_n)]$$

$$k_2 = hf(x_n + h, y_n + k_1)$$

Στην συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε τον συμβολισμό (p, ν) ζεύγους για τους διάφορους τύπους Runge-Kutta. Το p παριστάνει την τάξη τους και το ν το πλήθος των σταδίων τους. Εάν N(ν) είναι η μεγαλύτερη τιμή του p για μία μέθοδο με ν στάδια, τότε

$$N(\nu) = \nu \quad \text{για} \quad 1 \leq \nu \leq 4$$

και $\qquad N(5) = 4,\ N(6) = 5,\ N(7) = 6,\ N(8) = 6,\ N(9) = 7$

Για τους σκοπούς αυτής της εργασίας, θα παρουσιαστεί αναλυτικά ο τρόπος εύρεσης των συντελεστών των τύπων της μεθόδου Runge – Kutta 2ης τάξης. Αργότερα θα δοθούν μόνο οι τύποι μέχρι 8ης τάξης με την μορφή πίνακα όπως περιγράψαμε πιο πάνω, δεδομένου ότι η λογική του τρόπου εύρεσης των παραμέτρων των τύπων κάθε τάξης είναι ίδια. Βέβαια οι εξισώσεις και τα συστήματα γίνονται πολύ πιο πολύπλοκα όσο αυξάνεται η τάξη των μεθόδων Runge-Kutta.

2.1 Runge-Kutta 2^{ης} Τάξης (2, 2)

Πριν εξηγήσουμε την μέθοδο Runge-Kutta 2^{ης} τάξης, ας κάνουμε μια ανασκόπηση της σειράς Taylor για δύο μεταβλητές. Η άπειρη σειρά είναι:

$$f(x + h , y + k) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \left(h \frac{d}{dx} + k \frac{d}{dy} \right)^{i} f(x , y) \tag{2.1.1}$$

Οι άγνωστοι όροι που ψάχνουμε ερμηνεύονται ως εξής:

$$\left(h \frac{d}{dx} + k \frac{d}{dy} \right)^{0} f(x , y) = f$$

$$\left(h \frac{d}{dx} + k \frac{d}{dy} \right)^{1} f(x , y) = h \frac{df}{dx} + k \frac{df}{dy}$$

$$\left(h \frac{d}{dx} + k \frac{d}{dy} \right)^{2} f(x , y) = h^2 \frac{d^2 f}{dx^2} + 2hk \frac{d^2 f}{dx\, dy} + k^2 \frac{d^2 f}{dy^2}$$

.

.

.

όπου η f και όλες οι μερικές παράγωγοι υπολογίζονται στο σημείο (x, y). Όπως και στην περίπτωση της μιας μεταβλητής, αν η σειρά Taylor περικόπτεται, ένας όρος σφάλματος ή όρος υπόλοιπο είναι απαραίτητος για την αποκατάσταση της ισότητας.

f(x + h , y + k) =

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{i!} \left(h \frac{d}{dx} + k \frac{d}{dy} \right)^{i} f(x , y) + \frac{1}{n!} \left(h \frac{d}{dx} + k \frac{d}{dy} \right)^{n} f(x' , y') \tag{2.1.2}$$

Εδώ το σημείο (x ', y') βρίσκεται στο τμήμα της γραμμής που ενώνει το (x, y) με το (x + h, y + h) στο επίπεδο.

Κατά την εφαρμογή της σειράς Taylor, οι δείκτες χρησιμοποιούνται για να υποδηλώσουν μερικές παραγώγους. Έτσι, για παράδειγμα:

$$f_y = \frac{\mathrm{df}}{\mathrm{dy}}, \qquad f_x = \frac{\mathrm{df}}{\mathrm{dx}}, \qquad f_{xx} = \frac{d^2\mathrm{f}}{dx^2}, \qquad f_{yx} = \frac{d^2\mathrm{f}}{dx\,\mathrm{dy}} \tag{2.1.3}$$

Έχουμε να κάνουμε με συναρτήσεις για τις οποίες η διάταξη των εν λόγω δεικτών είναι άνευ σημασίας , για παράδειγμα $f_{xy} = f_{yx}$. Έτσι έχουμε:

$$\begin{aligned} f(x + h , y + k) = {} & f + hf_x + kf_y \\ & + \frac{1}{2!}(h^2f_{xx} + 2hkf_{xy} + k^2f_{yy}) \\ & + \frac{1}{3!}(h^3f_{xxx} + 3h^2kf_{xxy} + 3hk^2f_{xyy} + k^3f_{yyy}) \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Ως ειδικές περιπτώσεις, παρατηρούμε ότι:

$$f(x + h , y) = f + hf_x + \frac{\mathrm{h}^2}{2!} f_{xx} + \frac{\mathrm{h}^3}{3!}f_{xxx} + \ldots\ldots$$

$$f(x , y + k) = f + kf_y + \frac{\mathrm{k}^2}{2!} f_{yy} + \frac{\mathrm{k}^3}{3!}f_{yyy} + \ldots\ldots$$

Ο τύπος της μεθόδου Runge-Kutta $2^{ης}$ τάξης περιέχει δύο συναρτήσεις εκτίμησης της μορφής:

$$\begin{cases} k_1 = hf(x\,, y) \\ k_2 = hf(x + c_2h\,,\ y + a_{21}k_1) \end{cases}$$

Και ένας γραμμικός συνδυασμός προστίθεται στην τιμή του y(x) για να λάβει την τιμή y(x + h) δίνεται από τον τύπο:

$$y(x + h) = y(x) + w_1k_1 + w_2k_2$$

ή, ισοδύναμα:

$$y(x + h) = y(x) + w_1hf(x\,, y)+ w_2hf(x + c_2h\,,\ y + a_{21}hf(x\,, y)) \tag{2.1.4}$$

Ο στόχος είναι να καθοριστούν οι σταθερές w_1, w_2 , c_2 , a_{21}, έτσι ώστε οι τιμές της (2.1.4) να είναι όσο το δυνατόν ακριβέστερες. Σαφώς, θέλουμε να αναπαραχθούν όσο το δυνατόν περισσότεροι όροι της σειράς Taylor:

$$y(x + h) = y(x) + hy'(x) + \frac{1}{2}h^2y''(x) + \frac{1}{3!}h^3y'''(x) + \ldots\ldots \tag{2.1.5}$$

Στη συνέχεια θα συγκρίνουμε τις εξισώσεις (2.1.4) και (2.1.5). Ένας τρόπος για να συμφωνεί η (2.1.4) με την (2.1.5) μέχρι τον όρο που περιέχει το h είναι να θέσουμε $w_1 = 1$ και $w_2 = 0$, δεδομένου ότι x '= f. Ωστόσο, η συμφωνία μέχρι τον όρο που περιέχει το h^2 είναι δυνατή με μια πιο επιδέξια επιλογή των παραμέτρων. Για να δούμε πώς, εφαρμόζεται ο τύπος των σειρών Taylor για δύο μεταβλητές στον τελικό όρο της εξίσωσης (2.1.4) δεχόμαστε τα x, c_2h, y, a_{21}hf να παίζουν το ρόλο των x, h, y, k, αντίστοιχα που χρησιμοποιούνται στους τρεις πρώτους όρους (n = 2) της σειράς Taylor για δύο μεταβλητές που δίνονται στον τύπο (2.1.2).

$$f(x + c_2h\ ,\ y + a_{21}hf) = f + c_2hf_x + a_{21}hff_y + \frac{1}{2}\left(c_2h\frac{d}{dx} + a_{21}hf\frac{d}{dy}\right)^2 f(x'\ ,\ y')$$

Το αποτέλεσμα είναι ένας νέος τύπος για την εξίσωση (2.1.4):

$$y(x + h) = y(x) + (w_1 + w_2)hf + c_2w_2h^2f_x + a_{21}w_2h^2ff_y + o(h^3) \qquad (2.1.6)$$

Η εξίσωση (2.1.5) δίνεται επίσης από ένα νέο τύπο, χρησιμοποιώντας την διαφορική εξίσωση (2.1). Επειδή y′ = f, ισχύει:

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{df(x\ ,\ y)}{dx} = \left(\frac{df}{dx}\right)\left(\frac{dx}{dx}\right) + \left(\frac{df}{dy}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right) = f_x + f_yf$$

Οπότε η εξίσωση (2.1.5) συνεπάγεται:

$$y(x + h) = y + hf + \frac{1}{2}h^2f_x + \frac{1}{2}h^2ff_y + o(h^3) \qquad (2.1.7)$$

Συμφωνία μεταξύ των εξισώσεων (2.1.6) και (2.1.7) επιτυγχάνεται ορίζοντας τις παρακάτω εξισώσεις:

$$w_1 + w_2 = 1, \qquad c_2w_2 = \frac{1}{2}, \qquad a_{21}w_2 = \frac{1}{2} \qquad (2.1.8)$$

Μια βολική λύση των εξισώσεων αυτών είναι:

$$c_2 = 1, \qquad a_{21} = 1, \qquad w_1 = \frac{1}{2}, \qquad w_2 = \frac{1}{2}$$

Ο τύπος Runge-Kutta που προκύπτει στη συνέχεια, από την εξίσωση (2.1.4) , είναι:

$$y(x + h) = y(x) + \frac{h}{2}f(x\ ,\ y) + \frac{h}{2}f(x + h\ ,\ y + hf(x\ ,\ y)) \qquad (2.1.9)$$

ή ισοδύναμα

$$y(x + h) = y(x) + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$

όπου

$$\begin{cases} k_1 = hf(x\,,\ y) \\ k_2 = hf(x+h\,,\ y\ +\ k_1) \end{cases}$$

Όπως φαίνεται, η λύση στο x + h υπολογίζεται συναρτήσει των αξιολογήσεων k_1 και k_2 της συνάρτησης f.

Παρατηρούμε ότι υπάρχουν και άλλες λύσεις στο σύστημα γραμμικών εξισώσεων (2.1.8). Έτσι αν πάρουμε το c_2 ως ελεύθερη παράμετρο, ισχύει:

$$a_{21} = c_2, \qquad w_1 = 1 - \frac{1}{2c_2}, \qquad w_2 = \frac{1}{2c_2}$$

ή

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ c_2 & c_2 & \\ \hline & 1-\frac{1}{2c_2} & \frac{1}{2c_2} \end{array}$$

Με τοπικό σφάλμα αποκοπής:

$$T(x, h) = h^3[\tfrac{1}{6} - (c_2/4)](f_{xx} + 2f_{xy}f + f_{yy}f^2) + (h^3/6)(f_xf_y + ff_y)$$

ή χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (1.1.3) και την $Df = f' = f_x + ff_y$

$$T(x, h) = h^3[\tfrac{1}{6} - (c_2/4)]D^2f + (h^3/6)f_yDf =$$

$$T(x, h) = h^3[\tfrac{1}{6} - (c_2/4)]f'' + (h^3/4)c_2f_y \qquad (2.1.10)$$

Για $c_2 = \frac{1}{2}, \frac{2}{3}$ και 1 παίρνουμε αντίστοιχα τους παρακάτω τύπους:

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \\ \hline & 0 & 1 \end{array}$$

(2.1.11)
Για $c_2 = \frac{1}{2}$

<u>Hewn τύπος (2, 2)</u>

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \\ \hline & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{array}$$

(2.1.12)
Για $c_2 = \frac{2}{3}$

<u>Βελτιωμένη Euler (2, 2)</u>

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 1 & 1 & \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

(2.1.13)
Για $c_2 = 1$

(Γίνεται ο κανόνας του τραπεζίου όταν f(x, y) = f(x)).

Ωστόσο, καμία από τις μεθόδους Runge-Kutta 2^{ης} τάξης δεν χρησιμοποιείται ευρέως, δεδομένου ότι το σφάλμα είναι $O(h^3)$.

2.2 Runge-Kutta 3^{ης} Τάξης (3, 3)

Σε αυτήν την περίπτωση υπάρχουν δύο ελεύθερες παράμετροι c_2 και c_3 από τους οκτώ αγνώστους των έξι εξισώσεων του συστήματος. Αυτό προκύπτει εξισώνοντας τους ομοβάθμιους όρους του τύπου Runge-Kutta 3^{ης} τάξης και της σειράς Taylor μέχρι τον όρο που περιέχει το h^3. Παρακάτω θα παρουσιαστούν τρείς αντιπροσωπευτικοί τύποι Runge-Kutta (3, 3).

Κλασικός Τύπος (3, 3)

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & \\ 1 & -1 & 2 & \\ \hline & \frac{3}{8} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{array} \qquad (2.2.1)$$

Για $c_2 = \frac{1}{2}$, $c_3 = 1$

Ο παραπάνω τύπος γίνεται ο κανόνας του Simpson όταν $f(x,y) = f(x)$.

Nystrom Τύπος (3, 3)

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & & \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} & \\ \hline & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} \end{array} \qquad (2.2.2)$$

Για $c_2 = c_3 = \frac{2}{3}$

Hewn Τύπος (3, 3)

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & & \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} & \\ \hline & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \end{array} \qquad (2.2.3)$$

Για $c_2 = \frac{1}{3}$, $c_3 = \frac{2}{3}$

Το τοπικό σφάλμα αποκοπής αυτής της μεθόδου δίνεται από:

$$T(x, h) = (h^4/4)\{[1 - 4(c_2^3w_2 + c_3^3w_3)]D^3f + (1 - 12c_2^2a_{32}w_3)f_yD^2f + (3 - 24c_2c_3w_3)DfDf_y + f_y^2Df\} \qquad (2.2.4)$$

2.3 Runge-Kutta 4^{ης} Τάξης (4, 4)

Εδώ έχουμε πάλι δύο ελεύθερες παραμέτρους που προκύπτουν από δεκατρείς αγνώστους με έντεκα εξισώσεις, τις c_2 και c_3. Τύποι ειδικού ενδιαφέροντος είναι:

Κλασικός Τύπος (4, 4)

$$\begin{array}{c|cccc}
0 & & & & \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\
\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & & \\
1 & 0 & 0 & 1 & \\
\hline
 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6}
\end{array}$$

(2.3.1)

Για $c_2 = c_3 = \frac{1}{2}$

Kutta Τύπος (4, 4)

$$\begin{array}{c|cccc}
0 & & & & \\
\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & & & \\
\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 1 & & \\
1 & 1 & -1 & 1 & \\
\hline
 & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8}
\end{array}$$

(2.3.2)

Για $c_2 = \frac{1}{3}$, $c_3 = \frac{2}{3}$

<u>Gill Τύπος (4, 4)</u>

$$\begin{array}{c|cccc}
0 & & & & \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\
\frac{1}{2} & \frac{(\sqrt{2}-1)}{2} & \frac{(2-\sqrt{2})}{2} & & \\
1 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 1+\frac{\sqrt{2}}{2} & \\
\hline
 & \frac{1}{6} & \frac{(2-\sqrt{2})}{6} & \frac{(2+\sqrt{2})}{6} & \frac{1}{6}
\end{array} \qquad (2.3.3)$$

Για $c_2 = c_3 = \frac{1}{2}$

Το τοπικό σφάλμα αποκοπής αυτής της μεθόδου δίνεται από:

$$\begin{aligned}
T(x, h) = h^5\{&[\frac{1}{120} - \frac{w_2c_2^4+w_3c_3^4+w_4c_4^4}{24}]D^4f + \\
&+ [\frac{1}{20} - \frac{w_3c_2c_3^2a_{32}+w_4c_4^2(c_2a_{42}+c_3a_{43})}{2}]D^2f_yDf \\
&+ [\frac{1}{30} - \frac{w_3a_{32}c_2^2c_3+w_4c_4(a_{42}c_2^2+a_{43}c_3^2)}{2}]Df_yD^2f \qquad (2.3.4) \\
&+ [\frac{1}{120} - \frac{w_4a_{43}a_{32}c_2^2}{2}]f_y^2D^2f \\
&+ [\frac{1}{40} - \frac{w_3a_{32}^2c_2^2+w_4(a_{43}c_3+a_{42}c_2)^2}{2}]f_{yy}D^2f \\
&+ [\frac{1}{120} - \frac{w_3a_{32}c_2^3+w_4c_4(a_{43}c_3^3+a_{42}c_2^3)}{6}]f_yD^3f \\
&+ [\frac{7}{120} - w_4a_{23}a_{32}c_2(c_3+c_4)]f_yDf_yDf + \frac{1}{120}f_y^3Df\}
\end{aligned}$$

Είναι φανερό ότι το T(x, h) είναι ήδη πολύπλοκο που δεν θα προσπαθήσουμε να το ξαναγράψουμε για υψηλότερης τάξης περιπτώσεις.

Ο τύπος του Gill (2.3.3) ελαχιστοποιεί το σφάλμα στρογγύλευσης. Ο Fyfe έχει επεκτείνει την διαδικασία του Gill και σε άλλες 4^{ης} τάξης περιπτώσεις. Μια ποικιλία άλλων τύπων μπορούν να βρεθούν για $w_i = 0$, αλλά δεν θα παρουσιαστούν εδώ. Ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να συμβουλευτεί το “Numerical analysis”(1955, 1961) του Kopal.

2.4 Runge-Kutta 5^{ης} Τάξης (5, 5) και (5, 6)

Καθώς αυξάνεται η τάξη p της δ.ε. για p≥5, η πολυπλοκότητα των αλγεβρικών εξισώσεων και η ευχέρεια στην επιλογή των ελεύθερων παραμέτρων οδηγεί σε ένα ευρύ σύνολο τύπων Runge-Kutta. Για p=5, υπάρχουν 16 εξισώσεις με 21 αγνώστους και έτσι λαμβάνονται 5 ελεύθεροι παράμετροι. Είναι φανερό ότι οι λύσεις του παραπάνω συστήματος είναι πάρα πολλές. Οι πιο γνωστοί (5, 6) τύποι είναι:
Nystrom Τύπος (5, 6)

$$\begin{array}{c|cccccc}
0 & & & & & & \\
1/3 & 1/3 & & & & & \\
2/5 & 4/25 & 6/25 & & & & \\
1 & 1/4 & -12/4 & 15/4 & & & \\
2/3 & 6/81 & 90/81 & -50/81 & 8/81 & & \\
4/5 & 6/75 & 36/75 & 10/75 & 8/75 & 0 & \\
\hline
 & \frac{23}{192} & 0 & \frac{125}{192} & 0 & -\frac{81}{192} & \frac{125}{192}
\end{array} \qquad (2.4.1)$$

Butcher Τύποι (5, 6)

$$\begin{array}{c|cccccc}
0 & & & & & & \\
1/8 & 1/8 & & & & & \\
1/4 & 0 & 1/4 & & & & \\
1/2 & 1/2 & -1 & 1 & & & \\
3/4 & 3/16 & 0 & 0 & 9/16 & & \\
1 & -5/7 & 4/7 & 12/7 & -12/7 & 8/7 & \\
\hline
 & \frac{7}{90} & 0 & \frac{32}{90} & \frac{12}{90} & \frac{32}{90} & \frac{7}{90}
\end{array} \qquad (2.4.2)$$

$$
\begin{array}{c|cccccc}
0 & & & & & & \\
1/4 & 1/4 & & & & & \\
1/4 & 1/8 & 1/8 & & & & \\
1/2 & 0 & -1/2 & 1 & & & \\
3/4 & 3/16 & 0 & 0 & 9/16 & & \\
1 & -3/7 & 2/7 & 12/7 & -12/7 & 8/7 & \\
\hline
 & \frac{7}{90} & 0 & \frac{32}{90} & \frac{12}{90} & \frac{32}{90} & \frac{7}{90}
\end{array}
\tag{2.4.3}
$$

$$
\begin{array}{c|cccccc}
0 & & & & & & \\
-1/2 & -1/2 & & & & & \\
1/4 & 5/16 & -1/16 & & & & \\
1/2 & -3/4 & 1/4 & 1 & & & \\
3/4 & 3/16 & 0 & 0 & 9/16 & & \\
1 & 0 & -1/7 & 12/7 & -12/7 & 8/7 & \\
\hline
 & \frac{7}{90} & 0 & \frac{32}{90} & \frac{12}{90} & \frac{32}{90} & \frac{7}{90}
\end{array}
\tag{2.4.4}
$$

$$
\begin{array}{c|cccccc}
0 & & & & & & \\
1/5 & 1/5 & & & & & \\
2/5 & 0 & 2/5 & & & & \\
1/3 & 7/36 & 0 & 5/36 & & & \\
4/5 & 0 & 0 & 4/5 & 0 & & \\
1 & 1/4 & 0 & -35/4 & 54/7 & 25/14 & \\
\hline
 & \frac{5}{48} & 0 & 0 & \frac{27}{56} & \frac{125}{336} & \frac{1}{24}
\end{array}
\tag{2.4.5}
$$

$$
\begin{array}{c|cccccc}
0 & & & & & & \\
-1/5 & -1/5 & & & & & \\
2/5 & 4/5 & -2/5 & & & & \\
1/3 & 7/36 & 0 & 5/36 & & & \\
4/5 & 0 & 0 & 4/5 & 0 & & \\
1 & 1/4 & 0 & -35/4 & 54/7 & 25/14 & \\
\hline
 & \frac{5}{48} & 0 & 0 & \frac{27}{56} & \frac{125}{336} & \frac{1}{24}
\end{array}
\tag{2.4.6}
$$

Fehlberg Τύπος (5, 6)

$$
\begin{array}{c|cccccc}
0 & & & & & & \\
1/6 & 1/6 & & & & & \\
4/15 & 4/75 & 16/75 & & & & \\
2/3 & 5/6 & -8/3 & 5/2 & & & \\
4/5 & -8/5 & 144/25 & -4 & 16/25 & & \\
1 & 361/320 & -18/5 & 407/128 & -11/80 & 55/128 & \\
\hline
 & \frac{31}{384} & 0 & \frac{1125}{2816} & \frac{9}{32} & \frac{125}{768} & \frac{5}{66}
\end{array}
\qquad (2.4.7)
$$

Ο τύπος του Fehlberg μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για ανάλυση του σφάλματος αποκοπής.

Shanks Τύπος (5, 5)

$$
\begin{array}{c|ccccc}
0 & & & & & \\
1/9000 & 1/9000 & & & & \\
3/10 & -4047/10 & 4050/10 & & & \\
3/4 & 20241/8 & -20250/8 & 15/8 & & \\
1 & -931041/81 & 931500/81 & -490/81 & 112/81 & \\
\hline
 & \frac{105}{1134} & 0 & \frac{500}{1134} & \frac{448}{1134} & \frac{81}{1134}
\end{array}
\qquad (2.4.8)
$$

Lawson Τύπος (5, 6)

$$
\begin{array}{c|cccccc}
0 & & & & & & \\
1/2 & 1/2 & & & & & \\
1/4 & 3/16 & 1/16 & & & & \\
1/2 & 0 & 0 & 1/2 & & & \\
3/4 & 0 & -3/16 & 6/16 & 9/16 & & \\
1 & 1/7 & 4/7 & 6/7 & -12/7 & 8/7 & \\
\hline
 & \frac{7}{90} & 0 & \frac{32}{90} & \frac{12}{90} & \frac{32}{90} & \frac{7}{90}
\end{array}
\qquad (2.4.9)
$$

Sarafyan Τύπος (5, 6)

$$
\begin{array}{c|cccccc}
0 & & & & & & \\
1/2 & 1/2 & & & & & \\
1/2 & 1/4 & 1/4 & & & & \\
1 & 0 & -1 & 2 & & & \\
2/3 & 2/27 & 10/27 & 0 & 1/27 & & \\
2/10 & 68/625 & -125/625 & 546/625 & 54/625 & -378/625 & \\
\hline
 & \frac{14}{336} & 0 & 0 & \frac{35}{336} & \frac{162}{336} & \frac{125}{336}
\end{array}
\qquad (2.4.10)
$$

2.5 Runge-Kutta $6^{ης}$ Τάξης (6, 6), (6, 7) και (6, 8)

Οι πιο χρήσιμοι τύποι έκτης τάξης είναι αυτοί που λαμβάνονται από επτά (6,7) και οκτώ (6,8) στάδια και οφείλονται στον Butcher, στον Luther και στον Fehlberg. Ο Shanks παρουσίασε μία (6, 6) μέθοδο. Παρακάτω θα δοθούν ορισμένες από αυτές:

Butcher Τύπος (6, 7)

$$
\begin{array}{c|ccccccc}
0 & & & & & & & \\
1/3 & 1/3 & & & & & & \\
2/3 & 0 & 2/3 & & & & & \\
1/3 & 1/12 & 1/3 & -1/12 & & & & \\
1/2 & -1/16 & 9/8 & -3/16 & -3/8 & & & \\
1/2 & 0 & 9/8 & -3/8 & -3/4 & 1/2 & & \\
1 & 9/44 & -9/8 & 63/44 & 18/11 & 0 & -16/11 & \\
\hline
 & \frac{11}{120} & 0 & \frac{27}{40} & \frac{27}{40} & -\frac{4}{15} & -\frac{4}{15} & \frac{11}{120}
\end{array}
\qquad (2.5.1)
$$

Shanks Τύπος (6, 6)

$$
\begin{array}{c|cccccc}
0 & & & & & & \\
1/300 & 1/300 & & & & & \\
1/5 & -29/5 & 30/5 & & & & \\
3/5 & 323/5 & -330/5 & 10/5 & & & \\
14/15 & -510104/810 & 521640/810 & -12705/810 & 1925/810 & & \\
1 & -417923/77 & 427350/77 & -10605/77 & 1309/77 & -54/77 & \\
\hline
 & \frac{198}{3696} & 0 & \frac{1225}{3696} & \frac{1540}{3696} & \frac{810}{3696} & -\frac{77}{3696}
\end{array}
\qquad (2.5.2)
$$

Στην συνέχεια θα παρουσιαστεί ένας ενδιαφέρον τύπος από τον Fehlberg:

Fehlberg τύπος (6, 8)

0							
2/33	2/33						
4/33	0	4/33					
2/11	1/22	0	3/22				
1/2	43/64	0	-165/64	77/32			
2/3	-2383/486	0	1067/54	-26312/1701	2176/1701		
6/7	10077/4802	0	-5643/686	116259/16807	-6240/16807	1053/2401	
1	-733/176	0	141/8	-335763/23296	216/77	-4617/2816	7203/9152

(2.5.3)

$$\frac{77}{1440} \quad 0 \quad 0 \quad \frac{1771561}{6289920} \quad \frac{32}{105} \quad \frac{243}{2560} \quad \frac{16807}{74880} \quad \frac{11}{270}$$

2.6 Runge-Kutta 7^{ης} Τάξης (7, 7), (7, 9) και (7, 11)

Σε αυτή την ενότητα θα παρουσιαστούν, όπως έχουν ορισθεί από τον Shanks και τον Fehlberg, από ένας τύπος για κάθε περίπτωση.

Shanks Τύπος (7, 7)

0							
1/192	1/192						
1/6	-15/6	16/6					
1/2	4867/186	-5072/186	298/186				
1	-19995/31	20896/31	-1025/31	155/31			
5/6	-469805/5022	490960/5022	-22736/5022	5580/5022	186/5022		
1	914314/2604	-955136/2604	47983/2604	-6510/2604	-558/2604	2511/2604	
	$\frac{14}{300}$	0	$\frac{81}{300}$	$\frac{110}{300}$	0	$\frac{81}{300}$	$\frac{14}{300}$

(2.6.1)

Fehlberg Τύπος (7, 11)

0											
2/27	2/27										
1/9	1/36	1/12									
1/6	1/24	0	1/8								
5/12	5/12	0	-25/16	25/16							
1/2	1/20	0	0	1/4	1/5						
5/6	-25/108	0	0	125/108	-65/27	125/54					
1/6	31/300	0	0	0	61/225	-2/9	13/900				
2/3	2	0	0	-53/6	704/45	-107/9	67/90	3			
1/3	-91/108	0	0	23/108	-976/135	311/54	-19/60	17/6	-1/12		
1	2383/4100	0	0	-341/164	4496/1025	-301/82	2133/4100	45/82	45/164	18/41	
	$\frac{41}{840}$	0	0	0	0	$\frac{34}{105}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{9}{280}$	$\frac{9}{280}$	$\frac{41}{840}$

(2.6.2)

Στον παραπάνω τύπο επιλέξαμε για τις παραμέτρους c_5 και c_7 τον συνδυασμό

c_5 = 5/12 και c_7 = 5/6

όπου οδηγεί σε σχετικά μικρές τιμές του σφάλματος.

Οι παράμετροι των τύπων που θα παρουσιαστούν από εδώ και πέρα, θα δίνονται αναλυτικά και όχι με την μορφή πίνακα λόγο του μεγάλου πλήθους τους.

Shanks Τύπος (7, 9)

c2=2/9, c3=1/3 , c4=1/2, c5=1/6, c6=8/9, c7=1/9, c8=5/6, c9=1

a21=2/9

a31=1/12, a32=3/12 (2.6.3)

a41=1/8, a42=0, a43=3/8

a51=23/216, a52=0, a53=21/216, a54=-8/216

a61=-4136/729, a62=0, a63=-13584/729, a64=5264/729, a65=13104/729

a71=105131/151632, a72=0, a73=302016/151632, a74=-107744/151632
a75=-284256/151632, a76=1701/151632

a81=-775229/1375920, a82=0, a83=-2770950/1375920, a84=1735136/1375920
a85=2547216/1375920, a86=81891/1375920, a87=328536/1375920

a91=23569/251888, a92=0, a93=-122304/251888, a94=-20384/251888
a95=695520/251888, a96=-99873/251888, a97=-466560/251888
a98=241920/251888

w1=110201/2140320, w2=0, w3=0, w4=767936/2140320, w5=635040/2140320
w6=-59049/2140320, w7=-59049/2140320, w8=635040/2140320
w9=110201/2140320

2.7 Runge-Kutta 8ης Τάξης (8, 10), (8, 12) Και (8, 15)

Όπως και στην προηγούμενη ενότητα έτσι και εδώ, θα αναφέρουμε τύπους ανώτερης τάξης (8ης στην περίπτωσή μας) που έχουν αναπτυχθεί από τους Fehlberg και Shanks. Επίσης, θα ξαναδώσουμε από ένα τύπο για κάθε περίπτωση:

Στον τύπο του Fehlberg όγδοης τάξης (8, 15) που θα παρουσιαστεί παρακάτω οι παράμετροι που δεν περιλαμβάνονται είναι ίσοι με μηδέν. Οι ελεύθεροι παράμετροι c_5, c_7, c_{11} και c_{13}, έχουν επιλεχθεί με τέτοιο τρόπο ώστε να κάνουν τους συντελεστές του κορυφαίου όρου του σφάλματος του συγκεκριμένου τύπου Runge-Kutta όσο το δυνατόν μικρότερο.

Fehlberg Τύπος (8, 15)

$c_2 = 0.4436\ 8940\ 3764\ 9818\ 3109\ 5994\ 0428\ 1370$

$c_3 = 0.6655\ 3410\ 5647\ 4727\ 4664\ 3991\ 0642\ 2055$

$c_4 = 0.9983\ 0115\ 8471\ 2091\ 1996\ 5986\ 5963\ 3083$

$c_5 = 0.3155\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000$ (2.7.1)

$c_6 = 0.5054\ 4100\ 9481\ 6906\ 8626\ 5161\ 2673\ 7384$

$c_7 = 0.1714\ 2857\ 1428\ 5714\ 2857\ 1428\ 5714\ 2857$

$c_8 = 0.8285\ 7142\ 8571\ 4285\ 7142\ 8571\ 4285\ 7143$

$c_9 = 0.6654\ 3966\ 1210\ 1156\ 2534\ 9537\ 6925\ 5586$

$c_{10} = 0.2487\ 8317\ 9680\ 6265\ 2069\ 7222\ 7456\ 0771$

$c_{11} = 0.1090\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000$

$c_{12} = 0.8910\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000$

$c_{13} = 0.3995\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000$

$c_{14} = 0.6005\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000$

$c_{15} = 1$

a_{21} = 0.4436 8940 3764 9818 3109 5994 0428 1370

a_{31} = 0.1663 8352 6411 8681 8666 0997 7660 5514

a_{32} = 0.4991 5057 9235 6045 5998 2993 2981 6541

a_{41} = 0.2495 7528 9617 8022 7999 1496 6490 8271

a_{43} = 0.7487 2586 8853 4068 3997 4489 9472 4812

a_{51} = 0.2066 1891 1634 0060 2426 5567 1039 3185

a_{53} = 0.1770 7880 3779 8634 7040 3809 9728 8319

a_{54} =-0.6819 7715 4138 6949 4669 3770 7681 5048 * 10^{-1}

a_{61} = 0.1092 7823 1526 6640 8227 9038 9092 6157

a_{64} = 0.4021 5962 6423 6799 5421 9905 6369 0087 * 10^{-2}

a_{65} = 0.3921 4118 1690 7898 0444 3923 3017 4325

a_{71} = 0.9889 9281 4091 6466 5304 8447 6543 4355 * 10^{-1}

a_{74} = 0.3513 8370 2279 6396 6951 2044 8735 6703 * 10^{-2}

a_{75} = 0.1247 6099 9831 6001 6621 5206 2587 2489

a_{76} =-0.5574 5546 8349 8979 9643 7429 0146 6348 * 10^{-1}

a_{81} =-0.3680 6865 2862 4220 3724 1531 0108 0691

a_{85} =-0.2227 3897 4694 7600 7645 0240 2094 4166 * 10^{+1}

a_{86} = 0.1374 2908 2567 0291 0729 5656 9124 5744 * 10^{+1}

a_{87} = 0.2049 7390 0271 1160 3002 1593 5409 2206 * 10^{+1}

a_{91} = 0.4546 7962 6413 4715 0077 3519 5060 3349 * 10^{-1}

a_{96} = 0.3254 2131 7015 8914 7114 6774 6964 8853

a_{97} = 0.2847 6660 1385 2790 8888 1824 2057 3687

a_{98} = 0.9783 7801 6759 7915 2435 8683 9727 1099 * 10^{-2}

a_{101} = 0.6084 2071 0626 2205 7051 0941 4520 5182 * 10^{-1}

a_{106} =-0.2118 4565 7440 3700 7526 3252 7525 1206 * 10^{-1}

a_{107} = 0.1959 6557 2661 7083 1957 4644 9066 2983

a_{108} =-0.4274 2640 3648 1760 3675 1448 3534 2899 * 10^{-2}

a_{109} = 0.1743 4365 7368 1491 1965 3234 5255 8189 * 10^{-1}

a_{111} = 0.5405 9783 2969 3191 7365 7857 2411 1182 * 10^{-1}

a_{117} = 0.1102 9825 5978 2892 6530 2831 2764 8228

a_{118} =-0.1256 5008 5200 7255 6414 1477 6378 2250 * 10^{-2}

a_{119} = 0.3679 0043 4775 8146 0136 3840 4356 6339 * 10^{-2}

a_{1110} =-0.5778 0542 7709 7207 3040 8406 2857 1866 * 10^{-1}

a_{121} = 0.1273 2477 0686 6711 4646 6451 8179 9160

a_{128} = 0.1144 8805 0063 9610 5323 6588 7572 1817

a_{129} = 0.2877 3020 7096 9799 2776 2022 0184 9198

a_{1210} = 0.5094 5379 4596 1136 3153 7358 8507 9465

a_{1211} =-0.1479 9682 2443 7257 5900 2421 4444 9640

a_{131} =-0.3652 6793 8766 1674 0535 8485 4439 4333 * 10^{-2}

a_{136} = 0.8162 9896 0123 1891 9777 8194 2124 7030 * 10^{-1}

a_{137} =-0.3860 7735 6356 9350 6490 5176 9434 3215

a_{138} = 0.3086 2242 9246 0510 6450 4741 6602 5206 * 10^{-1}

a_{139} =-0.5807 7254 5283 2060 2815 8293 7473 3518 * 10^{-1}

a_{1310} = 0.3359 8659 3288 8497 1493 1434 5136 2322

a_{1311} = 0.4106 6880 4019 4995 8613 5496 2278 6417

a_{1312} =-0.1184 0245 9723 5598 5520 6331 5615 4536 * 10^{-1}

a_{141} =-0.1237 5357 9212 4514 3254 9790 9613 5669 * 10^{+1}

a_{146} =-0.2443 0768 5513 5478 5358 7348 6136 6763 * 10^{+2}

a_{147} = 0.5477 9568 9327 7865 6050 4365 2899 1173

a_{148} =-0.4441 3863 5334 1324 6374 9598 9656 9346 * 10^{+1}

a_{149} = 0.1001 3104 8137 1326 6094 7926 1785 1022 * 10^{+2}

a_{1410} =-0.1499 5773 1020 5175 8447 1709 8507 3142 * 10^{+2}

a_{1411} = 0.5894 6948 5232 1701 3620 8245 3965 1427 * 10^{+1}

a_{1412} = 0.1738 0377 5034 2898 4877 6168 5744 0542 * 10^{+1}

a_{1413} = 0.2751 2330 6931 6673 0263 7586 2286 0276 * 10^{+2}

a_{151} =-0. 3526 0859 3883 3452 2700 5029 5887 5588

a_{156} =-0.1839 6103 1448 4827 0375 0441 9898 8231

a_{157} =-0.6557 0189 4497 4164 5138 0068 7998 5251

a_{158} =-0.3908 6144 8804 3986 3435 0255 2024 1310

a_{159} = 0.2679 4646 7128 5002 2936 5844 2327 1209

a_{1510} =-0.1038 3022 9913 8249 0865 7698 5850 7427 * 10^{+1}

a_{1511} = 0.1667 2327 3242 5867 1664 7273 4616 8501 * 10^{+1}

a_{1512} = 0.4955 1925 8553 1597 7067 7329 6707 1441

a_{1513} = 0.1139 4001 1323 9706 3228 5867 3814 1784 * 10^{+1}

a_{1514} = 0.5133 6696 4246 5861 3688 1990 9719 1534 * 10^{-1}

w_1 = 0.3225 6083 5002 1624 9913 6129 0096 0247 * 10^{-1}

w_9 = 0.2598 3725 2837 1540 3018 8870 2317 1963

w_{10} = 0.9284 7805 9965 7702 7788 0637 1430 2190 * 10^{-1}

w_{11} = 0.1645 2339 5147 6434 2891 6477 3184 2800

w_{12} = 0.1766 5951 6378 6007 4367 0842 9839 7547

w_{13} = 0.2392 0102 3203 5275 9374 1089 3332 0941

w_{14} = 0.3948 4274 6042 0285 3746 7521 1882 9325 * 10^{-2}

w_{15} = 0.3072 6495 4758 6064 0406 3683 0552 2124 * 10^{-1}

Shanks Τύπος (8, 10)

$c2=4/27$, $c3=2/9$, $c4=1/3$, $c5=1/2$, $c6=2/3$, $c7=1/6$, $c8=1$, $c9=5/6$, $c10=1$

$a21=4/27$,

$a31=1/18$, $a32=3/18$

$a41=1/12$, $a42=0$, $a43=3/12$, (2.7.2)

$a51=1/8$, $a52=0$, $a53=0$, $a54=3/8$

$a61=13/54$, $a62=0$, $a63=-27/54$, $a64=42/54$, $a65=8/54$

$a71=389/4320$, $a72=0$, $a73=-54/4320$, $a74=966/4320$, $a75=-824/4320$, $a76=243/4320$

$a81=-231/20$, $a82=0$, $a83=81/20$, $a84=-1164/20$, $a85=656/20$, $a86=-122/20$, $a87=800/20$

$a91=-127/288$, $a92=0$, $a93=18/288$, $a94=-678/288$, $a95=456/288$, $a96=-9/288$, $a97=576/288$, $a98=4/288$

$a101=1481/820$, $a102=0$, $a103=-81/820$, $a104=7104/820$, $a105=-3376/820$, $a106=72/820$, $a107=-5040/820$, $a108=-60/820$, $a109=720/820$

$w1=41/840$, $w2=0$, $w3=0$, $w4=27/840$, $w5=272/840$, $w6=27/840$ $w7=216/840$, $w8=0$, $w9=216/840$, $w10=41/840$

Shanks Τύπος (8, 12)

$c2=1/9$, $c3=1/6$, $c4=1/4$, $c5=1/10$, $c6=1/6$, $c7=1/2$, $c8=2/3$, $c9=1/3$, $c10=5/6$, $c11=5/6$, $c12=1$

$a21=1/9$,

$a31=1/24$, $a32=3/24$ (2.7.3)

$a41=1/16$, $a42=0$, $a43=3/16$,

a51=29/500, a52=0, a53=33/500, a54=-12/500

a61=33/972, a62=0, a63=0, a64=4/972, a65=125/972

a71=-21/36, a72=0, a73=0, a74=76/36, a75=125/36, a76=-162/36

a81=-30/243, a82=0, a83=0, a84=-32/243, a85=125/243, a86=0, a87=99/243

a91=1175/324, a92=0, a93=0, a94=-3456/324, a95=-6250/324, a96=8424/324, a97=242/324, a98=-27/324

a101=293/324, a102=0, a103=0, a104=-852/324, a105=-1375/324, a106=1836/324, a107=-118/324, a108=162/324, a109=1

a111=1303/1620, a112=0, a113=0, a114=-4260/1620, a115=-6875/1620, a116=9990/1620, a117=1030/1620, a118=0, a119=0, a1110=162/1620

a121=-8595/4428, a122=0, a123=0, a124=30720/4428, a125=48750/4428, a126=-66096/4428, a127=378/4428, a128=-729/4428, a129=-1944/4428, a1210=-1296/4428, a1211=3240/4428

w1=41/840, w2=0, w3=0, w4=0, w5=0, w6=216/840, w7=272/840, w8=27/840, w9=27/840, w10=36/840, w11=180/840, w12=41/840

Κεφάλαιο 3

“ Επέκταση Μεθόδων Runge-Kutta Για Την Λύση Συστημάτων Συνήθων Διαφορικών Εξισώσεων ”

Στο δεύτερο κεφάλαιο, εξετάστηκαν συνήθεις διαφορικές εξισώσεις (σ.δ.ε.) με τον απλούστερο τρόπο. Δηλαδή, περιορίσαμε την προσοχή μας σε μία μόνο δ.ε. πρώτης τάξης με μια συνοδευτική βοηθητική συνθήκη. Ωστόσο, επιστημονικά και τεχνολογικά προβλήματα συχνά οδηγούν σε πιο πολύπλοκες καταστάσεις. Το επόμενο στάδιο πολυπλοκότητας εμφανίζεται με συστήματα πολλών δ.ε. πρώτης τάξης.

Για παράδειγμα, ο ήλιος και οι εννέα πλανήτες σχηματίζουν ένα σύστημα «σωματιδίων» που κινούνται υπό τη δικαιοδοσία του νόμου της βαρύτητας του Νεύτωνα. Τα διανύσματα θέσης των πλανητών αποτελούν ένα σύστημα από 27 συναρτήσεις, και οι νευτώνειοι νόμοι της κίνησης μπορούν να γραφτούν σαν ένα σύστημα 54 πρώτης τάξης σ.δ.ε. Τότε, οι παρελθοντικές και οι μελλοντικές θέσεις των πλανητών μπορούν να ληφθούν με την επίλυση αυτών των εξισώσεων αριθμητικά.

Παίρνοντας ένα πιο απλό παράδειγμα, θεωρούμε δύο δ.ε. με δύο βοηθητικές συνθήκες. Έστω y = y(x) και z = z(x) είναι δύο συναρτήσεις που περιλαμβάνονται στο σύστημα

$$\begin{cases} y'(x) = y(x) - z(x) + 2x - x^2 - x^3 \\ z'(x) = y(x) + z(x) - 4x^2 + x^3 \end{cases} \tag{3.1}$$

με αρχικές συνθήκες

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ z(0) = 0 \end{cases}$$

Αυτό είναι ένα παράδειγμα ενός προβλήματος αρχικών τιμών που περιλαμβάνει ένα σύστημα δύο δ.ε. πρώτης τάξης. Ο αναγνώστης καλείται να επαληθεύσει ότι η αναλυτική λύση είναι:

$$\begin{cases} y(x) = e^x \cos(x) + x^2 \\ z(x) = e^x \sin(x) - x^3 \end{cases}$$

Αν συμβολίσουμε με Y ένα διάνυσμα του οποίου οι δύο συνιστώσες είναι οι y και z, τότε το σύστημά μας έχει την μορφή:

$$\begin{bmatrix} y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y - z + 2x - x^2 - x^3 \\ y + z - 4x^2 + x^3 \end{bmatrix}$$

ή χρησιμοποιώντας το συμβολισμό του παραπάνω διανύσματος

$$\begin{cases} Y' = F(x, Y) \\ Y(x_0) \ (\nu\alpha\ \delta\acute{\iota}\nu\varepsilon\tau\alpha\iota) \end{cases}$$

όπου Y = $(y,z)^T$, Y' = $(y',z')^T$, x_0 = 0 και F είναι το διάνυσμα του οποίου τα δύο στοιχεία έχουν δοθεί από τη δεξιά πλευρά στην εξίσωση (3.1). Δεδομένου ότι η F εξαρτάται από το x και το Y, γράφουμε F (x, Y).

Να σημειωθεί ότι στο παραπάνω παράδειγμα, δεν είναι δυνατόν να λυθεί μια από τις δύο δ.ε. από μόνη της, η πρώτη εξίσωση που διέπει το y' περιλαμβάνει την άγνωστη συνάρτηση z, ενώ η δεύτερη εξίσωση που διέπει το z' περιλαμβάνει την άγνωστη συνάρτηση y. Στην περίπτωση αυτή, λέμε ότι οι δύο δ.ε. είναι **συζευγμένες**.

Ας δούμε ένα άλλο παράδειγμα που είναι επιφανειακά παρόμοιο με το πρώτο αλλά είναι πράγματι απλούστερο:

$$\begin{cases} y'(x) = y(x) + 2x - x^2 - x^3 \\ z'(x) = z(x) - 4x^2 + x^3 \end{cases} \tag{3.2}$$

με

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ z(0) = 0 \end{cases}$$

Οι δύο αυτές εξισώσεις δεν είναι συζευγμένες και μπορεί να επιλυθούν χωριστά ως δύο ανεξάρτητα προβλήματα αρχικών τιμών (χρησιμοποιώντας, για παράδειγμα, τις μεθόδους του κεφαλαίου 2).

Φυσικά, εδώ μας απασχολούν συστήματα τα οποία είναι συζευγμένα, αν και οι μέθοδοι που επιλύουν συζευγμένα συστήματα μπορούν επίσης να επιλύσουν αυτά που δεν είναι. Οι διαδικασίες που εξετάζονται στο κεφάλαιο 2 θα επεκταθούν στο κεφάλαιο αυτό σε συστήματα συζευγμένα ή μη συζευγμένα. Στην συνέχεια θα εξετάσουμε το πρόβλημα αρχικών τιμών για σ.δ.ε. με τάξη υψηλότερη του ένα, το οποίο μπορεί να λυθεί αριθμητικά με τη μετατροπή του σε ένα σύστημα πρώτης τάξης δ.ε.

3.1 Μέθοδοι Runge-Kutta Για Συστήματα Πρώτης Τάξης

Έχουμε είδη αναφέρει πάρα πολλές μεθόδους Runge-Kutta απλού βήματος για την λύση μιας δ.ε. 1ης τάξης. Στην συνέχεια θα παρουσιάσουμε ένα γενικό τρόπο για την επέκταση αυτών των διαδικασιών σε συστήματα δ.ε 1ης τάξης. Θεωρούμε το σύστημα δύο δ.ε.:

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ z' = g(x,z) \end{cases} \tag{3.1.1}$$

με αρχικές συνθήκες

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ z(x_0) = z_0 \end{cases}$$

Έστω Y ένα διάνυσμα του οποίου οι δύο συνιστώσες είναι οι y και z, τότε το παραπάνω σύστημα γίνεται:

$$Y = \binom{y}{z},\ F(x, Y) = \binom{f(x,y)}{g(x,z)} \text{ και } Y_0 = \binom{y_0}{z_0} \tag{3.1.2}$$

έτσι ώστε να ισχύουν $Y' = F(x, Y)$ και $Y(x_0) = Y_0$.

Ο (3.1.2) είναι ο διανυσματικός τύπος για δύο ταυτόχρονες δ.ε. και οποιαδήποτε από τις μεθόδους του δευτέρου κεφαλαίου μπορεί να χρησιμοποιηθεί ευθέως σε αυτόν. Για παράδειγμα η μέθοδος Runge-Kutta τέταρτης τάξης για το σύστημα (3.1.2) χρησιμοποιεί τους παρακάτω τύπους:

$$Y(x + h) = Y(x) + \frac{1}{6}[K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4] \tag{3.1.3}$$

$$\begin{cases} K_1 = hF(x, Y) \\ K_2 = hF(x + \frac{h}{2}, Y + \frac{1}{2}K_1) \\ K_3 = hF(x + \frac{h}{2}, Y + \frac{1}{2}K_2) \\ K_4 = hF(x + h, Y + K_3) \end{cases} \tag{3.1.4}$$

Όλες οι ποσότητες εδώ, εκτός από το x και το h, είναι διανύσματα με δύο στοιχεία. Συγκεκριμένα $Y = \binom{y}{z}$, $F(x, Y) = \binom{f(x,y)}{g(x,z)}$ και $K_i = \binom{k_i}{li}$ για i = 1, 2, 3, 4. Δηλαδή αναλυτικά οι (3.1.3) και (3.1.4) γίνονται:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4]$$

$$z_{n+1} = z_n + \frac{1}{6}[l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4]$$

όπου

$$\begin{cases} k_1 = hf(x_n, y_n, z_n) \\ k_2 = hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{1}{2}k_{1,}\ z_n + \frac{1}{2}l_1\ ) \\ k_3 = hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{1}{2}k_2,\ z_n + \frac{1}{2}l_2) \\ k_4 = hf(x_n + h, y_n + k_3,\ z_n + l_3) \end{cases}$$

και

$$\begin{cases} l_1 = hg(x_n, y_n, z_n) \\ l_2 = hg(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{1}{2}k_1, z_n + \frac{1}{2}l_1) \\ l_3 = hg(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{1}{2}k_2, z_n + \frac{1}{2}l_2) \\ l_4 = hg(x_n + h, y_n + k_3, z_n + l_3) \end{cases}$$

Είναι φανερό ότι μπορούμε να επεκτείνουμε οποιαδήποτε από τις μεθόδους του κεφαλαίου 2 για συστήματα m δ.ε. 1ης τάξης, εφαρμόζοντας την παραπάνω διαδικασία ως εξής:

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, y_2, \ldots\ldots\ldots, y_m) \\ y_2' &= f_2(x, y_1, y_2, \ldots\ldots\ldots, y_m) \\ &\;\;. \\ &\;\;. \\ &\;\;. \\ y_m' &= f_m(x, y_1, y_2, \ldots\ldots\ldots, y_m) \end{aligned} \qquad (3.1.5)$$

όπου $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$, $F(x, Y) = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}$.

3.2 Ανώτερης Τάξης Εξισώσεις Και Συστήματα

Θα εξετάσουμε στη συνέχεια το πρόβλημα αρχικών τιμών για σ.δ.ε. με τάξη υψηλότερη του ένα. Μια δ.ε. της τάξης n συνήθως συνοδεύεται από n βοηθητικές συνθήκες. Αυτές οι πολλές αρχικές συνθήκες είναι απαραίτητες για να προσδιορίσουν τη λύση της διαφορικής εξίσωσης με ακρίβεια. Πάρτε, για παράδειγμα, ένα συγκεκριμένο πρόβλημα αρχικών τιμών 2ης τάξης:

$$\begin{cases} y''(x) = -3cos^2(x) + 2 \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \end{cases} \qquad (3.2.1)$$

Χωρίς τις βοηθητικές συνθήκες η γενική αναλυτική λύση της παραπάνω δ.ε. είναι η $y(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{8}\cos(2x) + c_1 t + c_2$, όπου c_1 και c_2 είναι αυθαίρετες σταθερές. Για να πάρουμε μία συγκεκριμένη λύση, πρέπει να καθοριστούν τα c_1 και c_2 και για να γίνει αυτό δυνατό θα πρέπει να υπάρχουν δύο αρχικές συνθήκες. Όντως, η $y(0) = 0$ μας δίνει $c_2 = -\frac{3}{8}$ και η $y'(0) = 0$ μας δίνει $c_1 = 0$.

Γενικά, ανώτερης τάξης δ.ε. μπορεί να είναι πολύ πιο περίπλοκες από αυτό το απλό παράδειγμα. Το σύστημα (3.2.1) έχει την ιδιαίτερη ιδιότητα ότι η συνάρτηση στη δεξιά πλευρά της δ.ε. δεν περιλαμβάνει το y. Η πιο γενική μορφή μιας δ.ε. με αρχικές συνθήκες θεωρούμε ότι είναι:

$$\begin{cases} y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots\ldots, y^{(n-1)}) \\ \mu\varepsilon\ y(x_0),\ y'(x_0), y''(x_0), \ldots\ldots, y^{(n-1)}(x_0) \quad \delta\varepsilon\delta o\mu\acute{\varepsilon}\nu\alpha \end{cases} \tag{3.2.2}$$

η οποία μπορεί να λυθεί αριθμητικά, με τη μετατροπή της σε ένα σ.δ.ε. πρώτης τάξης. Για να γίνει αυτό, ορίζουμε νέες μεταβλητές $y_1, y_2, y_3, \ldots\ldots, y_n$ ως εξής:

$$y_1 = y,\quad y_2 = y',\quad y_3 = y'',\quad y_4 = y''',\quad y_5 = y^{(4)},\ \ldots,\ y_{n-1} = y^{(n-2)},\ y_n = y^{(n-1)}$$

Κατά συνέπεια, το πρωτότυπο πρόβλημα αρχικών τιμών (3.2.2) είναι ισοδύναμο με:

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ y_3' = y_4 \\ y_4' = y_5 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ y_{n-1}' = y_n \\ y_n' = f(x, y_1, y_2, y_3, \ldots\ldots, y_n) \\ y_1(x_0), y_2(x_0),\ y_3(x_0),\ \ldots\ldots, y_n(x_0) \qquad \delta\varepsilon\delta o\mu\acute{\varepsilon}\nu\alpha \end{cases}$$

ή με τη διανυσματική σημειογραφία

$$\begin{cases} Y' = F(x, Y) \\ Y(x_0) \quad \delta\varepsilon\delta o\mu\acute{\varepsilon}\nu\alpha \end{cases}$$

Όπου $Y = (y_1, y_2, y_3, \ldots\ldots, y_n)^T$, $Y' = (y'_1, y'_2, y'_3, \ldots\ldots, y'_n)^T$, και $F = (y_2, y_3, y_4, \ldots., y_n, f)^T$.

Συνιστάται, κάθε φορά που ένα πρόβλημα πρέπει να μετατραπεί στην παραπάνω μορφή με την εισαγωγή νέων μεταβλητών, να καταγράφεται σε ένα "λεξικό" η σχέση μεταξύ των νέων και των παλαιών μεταβλητών. Την ίδια στιγμή οι πληροφορίες αυτές, μαζί με τις δ.ε. και τις αρχικές τιμές, μπορούν να εμφανιστούν σε ένα πίνακα. Μια τέτοια συστηματική καταγραφή της διαδικασίας μπορεί να είναι χρήσιμη σε μια περίπλοκη κατάσταση.

Για να φανεί η χρησιμότητα της καταγραφής αυτής, ας μετατρέψουμε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{cases} y''' = \cos y + \sin y' - e^{y''} + x^2 \\ y(0) = 3, \quad y'(0) = 7, \quad y''(0) = 13 \end{cases}$$

σε μορφή κατάλληλη για τη λύση του μέσω μιας διαδικασίας Runge-Kutta. Ένας πίνακας που συνοψίζει το πρόβλημα της μετατροπής έχει ως εξής:

Παλιά Μεταβλητή	Νέα Μεταβλητή	Αρχική Τιμή	Διαφορική Εξίσωση
y	y_1	3	$y_1' = y_2$
y'	y_2	7	$y_2' = y_3$
y''	y_3	13	$y_3' = \cos y_1 + \sin y_2 - e^{y_3} + x^2$

Έτσι, το αντίστοιχο σύστημα πρώτης τάξης είναι:

$$Y' = \begin{bmatrix} y_2 \\ y_3 \\ \cos y_1 + \sin y_2 - e^{y_3} + x^2 \end{bmatrix}$$

και $Y = (3, 7, 13)^T$ στο $x_0 = 0$.

Με τη συστηματική εισαγωγή νέων μεταβλητών όπως παραπάνω, ένα σύστημα δ.ε. διαφόρων τάξεων μπορεί να μετατραπεί σε ένα ευρύτερο σύστημα πρώτης τάξεως δ.ε. Για παράδειγμα, το σύστημα:

$$\begin{cases} y'' = y - z - (3y')^2 + (z')^3 + 6z'' + 2x \\ z''' = z'' - y' + e^{y} - x \\ y(1) = 2, \quad y'(1) = -4, \quad z(1) = -2, \quad z'(1) = 7, \quad z''(1) = 6 \end{cases}$$

μπορεί να λυθεί με τη διαδικασία Runge-Kutta, εάν πρώτα το μετατρέψουμε σύμφωνα με τον ακόλουθο πίνακα:

Παλιά Μεταβλητή	Νέα Μεταβλητή	Αρχική Τιμή	Διαφορική Εξίσωση
y	y_1	2	$y_1' = y_2$
y'	y_2	-4	$y_2' = y_1 - y_3 - 9y_2^2 + y_4^3 + 6y_5 + 2x$
z	y_3	-2	$y_3' = y_4$
z'	y_4	7	$y_4' = y_5$
z''	y_5	6	$y_5' = y_5 - y_2 + e^{y_1} - x$

Έτσι, σύμφωνα με την διαδικασία που μόλις περιγράψαμε και με τρόπο που παρουσιάσαμε στην ενότητα 3.1, μπορούμε να λύσουμε οποιοδήποτε σύστημα δ.ε. με εξισώσεις οποιασδήποτε τάξης με τις μεθόδους Runge-Kutta.

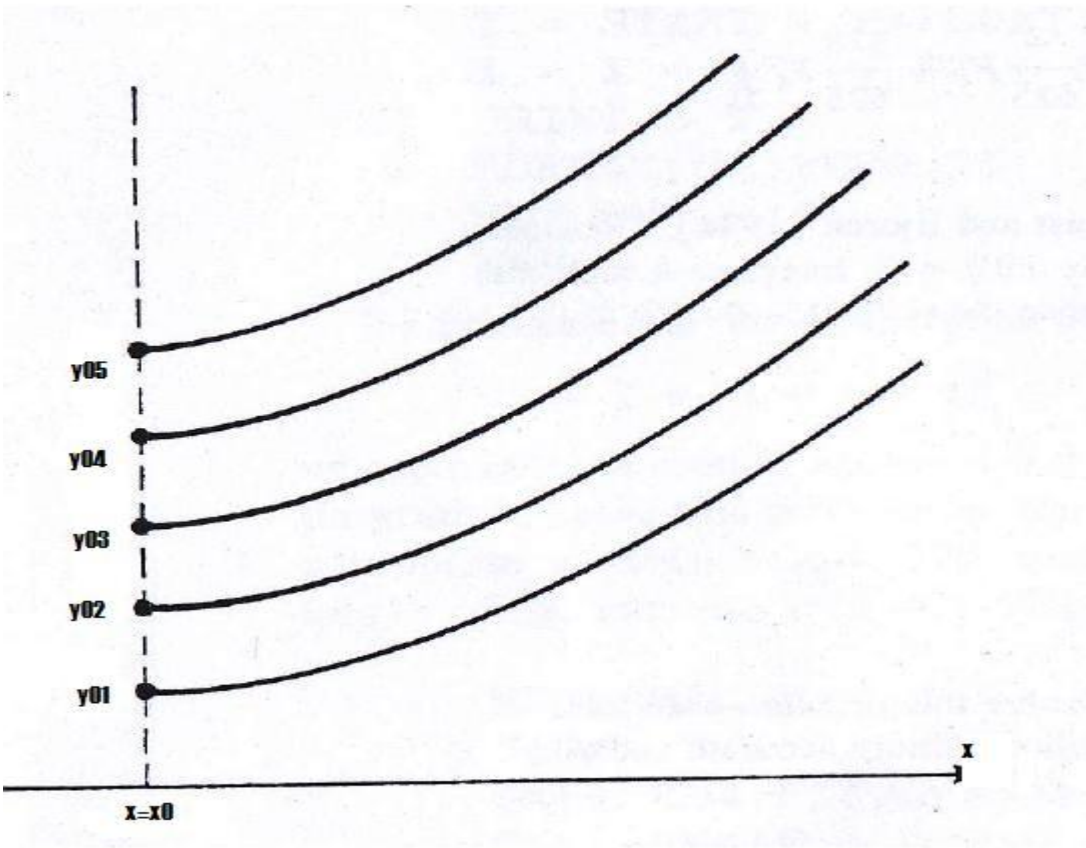
Κεφάλαιο 4

“ Ενσωματωμένοι Τύποι Και Σφάλματα ”

Ας αρχίσει τώρα η συζήτηση για τα σφάλματα που αναπόφευκτα εμφανίζονται στην αριθμητική επίλυση ενός προβλήματος αρχικών τιμών:

$$y' = f(x, y) \qquad y(x_0) = y_0. \tag{4.1}$$

Η ακριβής λύση είναι μια συνάρτηση y(x). Αυτή εξαρτάται από την αρχική τιμή y_0, και προκειμένου να το δείξουμε αυτό, γράφουμε $y(x,y_0)$. Η λύση της δ.ε. συνεπάγεται, ως εκ τούτου, σε μια οικογένεια καμπυλών, όπου κάθε μια από αυτές αντιστοιχεί σε μία τιμή της παραμέτρου y_0. Για παράδειγμα, η λύση της δ.ε. $y' = y$ δημιουργεί την οικογένεια των καμπυλών $y = y_0 e^{x-x_0}$ που διαφέρουν στην αρχική τους τιμή $y(x_0) = y_0$. Μερικές τέτοιες καμπύλες φαίνονται στο σχήμα 4.1:

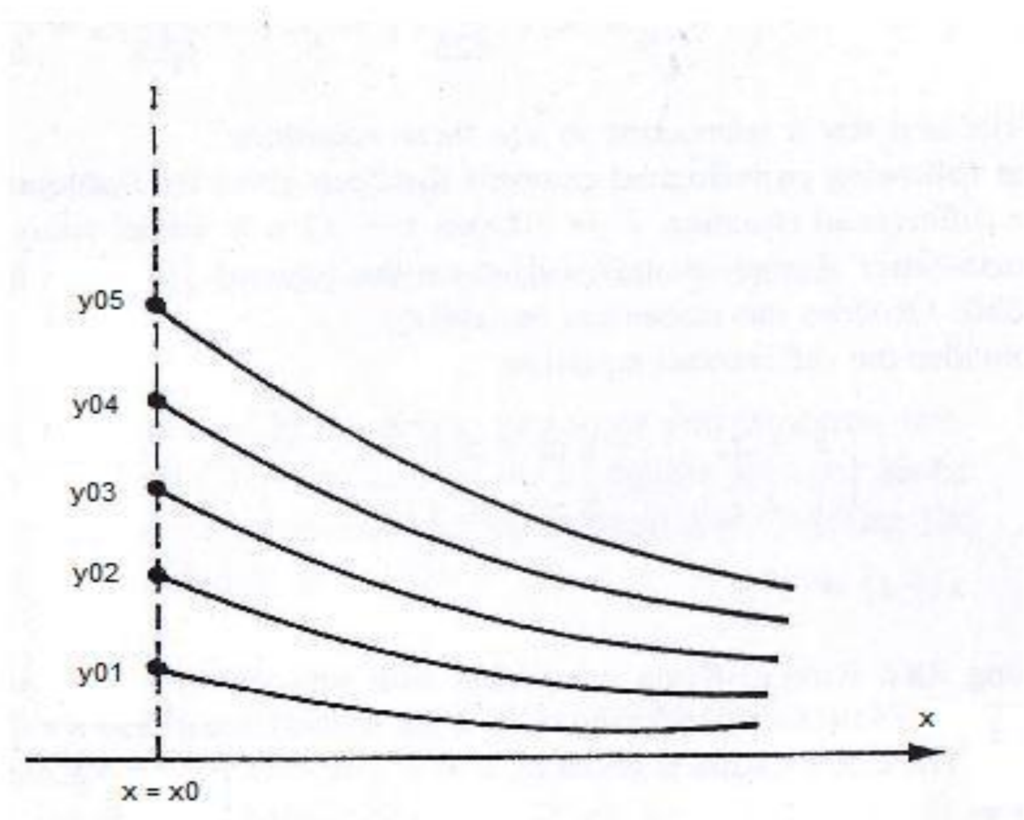


Σχήμα 4.1

Καμπύλες της λύσης της δ.ε. $y' = y$, $y(x_0) = y_0$

Το γεγονός ότι οι καμπύλες, στο παραπάνω σχήμα, διαφέρουν μεταξύ τους καθώς το x αυξάνεται, έχει σημαντική αριθμητική σημασία. Ας υποθέσουμε, για παράδειγμα, ότι η αρχική τιμή y_0 διαβάζεται στον υπολογιστή με κάποιο roundoff σφάλμα. (Roundoff σφάλμα είναι η διαφορά μεταξύ μιας προσέγγισης ενός αριθμού που χρησιμοποιείται σε κάποιο υπολογισμό και της ακριβής του τιμής.) Στη συνέχεια, ακόμη και αν όλοι οι επόμενοι υπολογισμοί είναι ακριβείς και δεν υπάρχει σφάλμα αποκοπής, η υπολογιζόμενη λύση θα είναι λάθος. Ένα σφάλμα που έγινε στην αρχή έχει ως αποτέλεσμα την επιλογή λάθους καμπύλης από την οικογένεια του συνόλου των καμπυλών της λύσης. Επειδή αυτές οι καμπύλες αποκλίνουν μεταξύ τους, το πρακτικό σφάλμα που έγινε στην αρχή είναι υπεύθυνο για την ενδεχόμενη πλήρη απώλεια της ακρίβειας. Το φαινόμενο αυτό δεν περιορίζεται μόνο στα λάθη που έγιναν κατά το πρώτο βήμα, κάθε σημείο, με την αριθμητική επίλυση, μπορεί να ερμηνευθεί ως αρχική τιμή για τα επόμενα σημεία.

Η δυσκολία αυτή δεν τίθεται πάντα. Στη συνέχεια δίνεται ένα παράδειγμα, όπου θεωρούμε την $y' = -y$ με $y(x_0) = y_0$. Οι λύσεις της είναι οι $y = y_0 e^{-(x-x_0)}$. Καθώς το x αυξάνεται, οι καμπύλες της λύσης έρχονται πιο κοντά, όπως στο σχήμα 4.2.



Σχήμα 4.2

Καμπύλες της λύσης της δ.ε. $y' = -y$, $y(x_0) = y_0$

Έτσι σφάλματα που έγιναν στην αριθμητική επίλυση εξακολουθούν να έχουν ως αποτέλεσμα την λάθος επιλογή καμπύλης, αλλά το γεγονός αυτό δεν είναι τόσο σοβαρό, δεδομένου ότι οι καμπύλες συγκλίνουν η μία στην άλλη.

Για τη γενική δ.ε. (4.1), οι δύο τρόποι συμπεριφοράς που μόλις συζητήσαμε μπορούν να διακριθούν ως έξης:

Αν $f_y > \delta > 0$ τότε οι καμπύλες αποκλίνουν η μία από την άλλη

Αν $f_y < \delta < 0$ τότε οι καμπύλες συγκλίνουν η μία στην άλλη

Για παράδειγμα, θα εξετάσουμε τη δ.ε. $y' = x + \tan(y)$. Δεδομένου ότι η μερική παράγωγος $f_y (x , y) = \sec^2 (y) > 1$, οι καμπύλες της λύσης αποκλίνουν η μία από την άλλη όταν το $x \to \infty$.

Για τους ανωτέρω λόγους, υπάρχει πάντοτε η ανάγκη για την εκτίμηση της ακρίβειας που επιτυγχάνεται σε κάθε βήμα κατά την αριθμητική επίλυση ενός προβλήματος αρχικών τιμών. Έτσι, διάφορες μέθοδοι έχουν αναπτυχθεί για την απευθείας εκτίμηση του σφάλματος αποκοπής από ένα τύπο ή του σφάλματος που προκύπτει από την σύγκριση δύο μεθόδων που είναι ενσωματωμένοι σε ένα τύπο. Αντιπροσωπευτικοί μέθοδοι κάθε περίπτωσης θα αναφερθούν παρακάτω για μεθόδους απλού βήματος.

Ακόμη αυτές μπορούν να αναπτυχθούν σε αλγορίθμους όπου επιτυγχάνεται αυτόματη προσαρμογή του βήματος. Η εκτίμηση του σφάλματος μπορεί να μας πει πότε να προσαρμοστεί το βήμα σε ένα στάδιο. Συνήθως μια ανοχή είναι προκαθορισμένη, και η αριθμητική λύση δεν πρέπει να αποκλίνει από την πραγματική λύση πέραν της ανοχής αυτής. Ακόμη και αν λάβουμε υπόψη μας μόνο το τοπικό σφάλμα αποκοπής, ο προσδιορισμός ενός κατάλληλου βήματος μπορεί να είναι δύσκολος. Επιπλέον, συχνά ένα μικρό βήμα είναι απαραίτητο σε ένα τμήμα της καμπύλης της λύσης, ενώ ένα μεγαλύτερο μπορεί να αρκεί στην υπόλοιπη.

Έχουν αναπτυχθεί μέθοδοι που απαιτούν δύο ή περισσότερα βήματα για τον υπολογισμό του σφάλματος $T(x, h)$. Τέτοιες μέθοδοι δεν θα αναφερθούν σε αυτή την εργασία. Στο τέλος θα αναφερθούμε στο σφάλμα στρογγύλευσης και θα προταθούν τρόποι για την ελαχιστοποίηση του. Για περεταίρω μελέτη πάνω στα σφάλματα των μεθόδων Runge-Kutta ο αναγνώστης μπορεί να συμβουλευτεί το "Numerical Solution of Ordinary Differential Equations" των Lapidus και Seinfeld.

4.1 Τοπικό σφάλμα αποκοπής σε μεθόδους απλού βήματος

Οποιαδήποτε προσπάθεια για τον ρητό υπολογισμό του σφάλματος αποκοπής των τύπων Runge-Kutta από τις εξισώσεις που έχουν ήδη δοθεί στο Κεφάλαιο 2 ((2.1.10), (2.2.4) και (2.3.4)) είναι εξαιρετικά δύσκολη. Ο υπολογισμός του σφάλματος αποκοπής T(x, h) χρειάζεται για να μας προμηθεύει με μια τιμή του h που χρησιμοποιείται σε έναν υπολογισμό απλού βήματος.

Επειδή το παραπάνω χαρακτηριστικό είναι σημαντικό, θα εξετάσουμε στην συνέχεια τις διαθέσιμες μεθόδους για την εκτίμηση του σφάλματος αποκοπής T(x,h) ή την ακρίβεια μιας απλού βήματος μεθόδου σε έναν υπολογισμό. Δηλαδή θα εξετάσουμε μερικές μεθόδους που μπορούν να χρησιμοποιηθούν σαν υπολογιστικές διαδικασίες από το x_n στο x_{n+1}.

4.1.1 Τύποι Merson και Scraton

Η πρώτη σημαντική προσπάθεια για τον υπολογισμό του σφάλματος αποκοπής T(x, h) έγινε από τον Merson ο οποίος χρησιμοποίησε τον τύπο:

<u>Merson Τύπος</u>

$$\begin{array}{c|ccccc}
0 & & & & & \\
1/3 & 1/3 & & & & \\
1/3 & 1/6 & 1/6 & & & \\
1/2 & 1/8 & 0 & 3/8 & & \\
\hdashline
1 & 1/2 & 0 & -3/2 & 2 & \\
\hline
 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{6}
\end{array} \qquad v = 5,\ p = 4 \qquad (4.1.1.1)$$

Αυτή η μέθοδος είναι $4^{ης}$ τάξης και 5 σταδίων (4, 5). Δηλαδή έχει ενσωματωμένο έναν επιπλέον βαθμό ελευθερίας. Ας αποκαλέσουμε ως $\breve{Y}_{n+1}$ το αποτέλεσμα του υπολογισμού με χρήση του c_i και a_{ij} πάνω από τη διακεκομμένη γραμμή και η w_i ακριβώς κάτω από τη διακεκομμένη γραμμή. Επίσης, ας αποκαλέσουμε y_{n+1} το αποτέλεσμα από τον πλήρη υπολογισμό της (4.1.1.1). Ο Merson έδειξε ότι αν η δ.ε. είναι γραμμική ή αν το h είναι αρκετά μικρό για να προσεγγίσει την f(x, y) με μια γραμμική συνάρτηση, μια καλή εκτίμηση του σφάλματος αποκοπής στο y_{n+1} είναι:

$$T(x, h) = (1/30)[2k_1 - 9k_3 + 8k_4 - k_5] \qquad (4.1.1.2)$$

Είναι σημαντικό να τονιστεί ότι αυτή η μέθοδος είναι έγκυρη μόνο όταν η f(x, y) είναι γραμμική. Στην περίπτωση που η f(x, y) είναι μη γραμμική οι τύποι θα πρέπει να χρησιμοποιούνται μόνο σαν ένας πρόχειρος οδηγός. Παρόλα αυτά, η παραπάνω μέθοδος δίνει μια εκτίμηση του τοπικού σφάλματος αποκοπής ενός απλού βήματος υπολογισμού. Το τίμημα είναι φυσικά ότι ένας ακόμη υπολογισμός απαιτείται λόγω της πέμπτης αντικατάστασης σε σύγκριση με τέσσερις αντικαταστάσεις στην τυποποιημένη μέθοδο Runge-Kutta $4^{ης}$ τάξης.

Ο Scraton επίσης πρότεινε μια άλλη $4^{ης}$ τάξης διαδικασία χρησιμοποιώντας 5 στάδια (4, 5). Ο τύπος δίνεται από τον πίνακα:

Scraton Τύπος

$$\begin{array}{c|ccccc}
0 & & & & & \\
2/9 & 2/9 & & & & \\
1/3 & 1/12 & 1/4 & & & \\
3/4 & 69/128 & 243/128 & 270/128 & & \\
\hdashline
9/10 & -345 & 2025 & -1224 & 544 & (\bullet \frac{9}{10000}) \\
\hline
 & \frac{17}{162} & 0 & \frac{81}{170} & \frac{32}{135} & \frac{250}{1377}
\end{array} \qquad v = 5,\ p = 4 \qquad (4.1.1.3)$$

και το τοπικό σφάλμα αποκοπής είναι:

$$T(x, h) = -(k_4 - k_1)^{-1}\left(-\frac{1}{18}k_1 + \frac{27}{170}k_3 - \frac{4}{15}k_4 + \frac{25}{153}k_5\right)\bullet$$
$$\bullet\left(\frac{19}{24}k_1 - \frac{27}{8}k_2 + \frac{57}{20}k_3 - \frac{4}{15}k_4\right) \qquad (4.1.1.4)$$

4.1.2 Ενσωματωμένοι τύποι Sarafyan

Επειδή η προηγούμενη μέθοδος εξαρτάται από την χρήση ενός γραμμικού συστήματος, θα παρουσιάσουμε την δουλειά του Sarafyan, η οποία όπως και του Merson, περιλαμβάνει ενσωματωματομένους τύπους Runge-Kutta. Ταυτόχρονα, όμως, η μέθοδος αυτή, σε αντίθεση με την προηγούμενη, ισχύει για κάθε δ.ε. και προτείνεται από τους συγγραφείς ως η πιο ελπιδοφόρα διαδικασία για τον έλεγχο του βήματος h.

Η αρχή της ενσωμάτωσης είναι απλή στην κατανόηση. Ας συμβολίσουμε με $y_{v,\, n+1}$ την τιμή y_{n+1} υπολογισμένη με μια διαδικασία v-σταδίων, τότε προσπαθεί κανείς να δημιουργήσει την ακολουθία $y_{1,n+1}$, $y_{2,n+1}$,..........., $y_{6,n+1}$, χρησιμοποιώντας το αντίστοιχο σύνολο των k_i. Έτσι, το $y_{1,\, n+1}$ ένα ειδικό k_1, το $y_{2,\, n+1}$ ένα ειδικό k_2, ..., το $y_{6,n+1}$ χρησιμοποιεί το ίδιο k_1, k_2, k_3, k_4 και ένα ειδικό k_5 και k_6. Περαιτέρω το $y_{1,n+1}$ είναι αποτέλεσμα μιας 1ης τάξης p=1 μεθόδου, το $y_{2\, n+1}$ μιας p=2 μεθόδου,......, το $y_{4,n+1}$ μιας p=4 και το $y_{6\, n+1}$ μιας p=5 μεθόδου. Έτσι μιας 5ης τάξης Runge-Kutta μέθοδος με 6 στάδια (5. 6) έχει ενσωματωμένη μέσα στον τύπο της κάποια μικρότερης τάξης και λιγότερων σταδίων μέθοδο. Αν για παράδειγμα το $y_{4,n+1}$ και το $y_{6,n+1}$ συμφωνούν σε j-δεκαδικά ψηφία, τότε το $y_{6,n+1}$ είναι σωστό σε j-δεκαδικά ψηφία. Αυτό ορίζει ένα συντηρητικό σφάλμα για το $y_{6,n+1}$. Η τιμή του h μπορεί τότε να αυξηθεί ή να μειωθεί ανάλογα με το σφάλμα.

Ο Sarafyan έχει αναπτύξει πολλές μεθόδους 5ης τάξης, μια από τις καλύτερες είναι η (2.4.10) που δόθηκε στο δεύτερο κεφάλαιο και εδώ θα την παρουσιάσουμε έως ότου μας αποφέρει το $y_{6,n+1}$:

<u>Sarafyan Τύπος</u>

0						
1/2	1/2					$y_{1,n+1}$
1/2	1/4	1/4				$y_{2,n+1}$
1	0	-1	2			
2/3	2/27	10/27	0	1/27		$y_{4,n+1}$
2/10	68/625	-125/625	546/625	54/625	-378/625	
						$y_{6,n+1}$

v = 6, p = 5 (4.1.2.1)

$$\frac{14}{336} \quad 0 \quad 0 \quad \frac{35}{336} \quad \frac{162}{336} \quad \frac{125}{336}$$

Στην συνέχεια βλέποντας τις διακεκομμένες γραμμές, είναι δυνατόν να υπολογίσουμε:

$$y_{1,n+1} = y_n + k_1$$

$$y_{2,n+1} = y_n + k_2 \tag{4.1.2.2}$$

$$y_{4,n+1} = y_n + \frac{1}{6}[k_1 + 4k_3 + k_4]$$

όπου η (4.1.2.2) είναι μια $4^{ης}$ τάξης μέθοδος Runge-Kutta.

Έτσι, εάν κάποιος επιθυμεί να χρησιμοποιήσει μια $5^{ης}$ τάξης μέθοδο Runge-Kutta, μπορεί να λάβει και αποτελέσματα για μια $4^{ης}$ τάξης μέθοδο, χωρίς επιπλέον έργο. Συγκρίνοντας τις δύο μεθόδους ένας υπολογισμός της ακρίβειας μπορεί να ληφθεί και στη συνέχεια μπορεί να φτιαχτεί μία εκτίμηση για την τιμή του h. Αν μια $4^{ης}$ τάξης μέθοδος χρησιμοποιηθεί σε έναν υπολογισμό, τότε δύο επιπλέον στάδια χρειάζονται για να γίνει η σύγκριση σύμφωνα με τα παραπάνω, δηλαδή προσεγγιστικά 50% αύξηση του υπολογιστικού χρόνου για έξι στάδια αντί τεσσάρων. Σε αυτήν την περίπτωση η μέθοδος πρέπει να χρησιμοποιείται σποραδικά για να παρακολουθεί τον υπολογισμό, παρά σε κάθε βήμα.

Ακόμη ο Sarafyan για τον κλασικό τύπο $4^{ης}$ τάξης (2.3.1) έδειξε ότι:

$$\begin{aligned} y_{1,n+1} &= y_n + k_1 \\ y_{2,n+1} &= y_n + k_2 \\ y_{4,n+1} &= y_n + \frac{1}{6}[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4] \end{aligned} \qquad (4.1.2.3)$$

και ότι

$$\begin{aligned} y_{1,n+3/4} &= y_n + \frac{3}{4}k_1 \\ y_{2,n+3/4} &= y_n + \frac{3}{16}[k_1 + 3k_2] \\ y_{3,n+3/4} &= y_n + \frac{3}{32}[2k_1 + 3k_2 + 3k_3] \end{aligned} \qquad (4.1.2.4)$$

Έτσι από το ίδιο σετ k_i μπορούμε να πάρουμε μια συλλογή Runge-Kutta τύπων από πρώτης μέχρι τέταρτης τάξης.

Τελικά ο Sarafyan έφτασε στο συμπέρασμα ότι η πιο καλή υπολογιστική διαδικασία απ' όλες όσες μελέτησε φαίνεται να είναι μια διαδικασία που βασίζεται πάνω στην $5^{ης}$ τάξης μέθοδος του Butcher (2.4.3) όπου αν θέσουμε το y_{n+1} της μεθόδου αυτής με $y_{6,n+1}$, τότε με τα k_i τα οποία χρησιμοποιούνται σε αυτό παίρνουμε:

$$y_{1,n+1} = y_n + k_1$$

$$y_{2,n+1} = y_n - k_1 + 2k_2 \qquad (4.1.2.5)$$

και

$$y_{1,n+1/2} = y_n + \frac{1}{2} k_1$$

$$y_{2,n+1/2} = y_n + \frac{1}{2} k_2$$

$$y_{4,n+1/2} = y_n + \frac{1}{12}[k_1 + 4k_3 + k_4]$$

Επίσης, όταν ένα βήμα μεγέθους 2h χρησιμοποιείται η (2.4.3) και η (4.1.2.5) γίνονται:

$$\begin{array}{c|cccccc}
0 & & & & & & \\
1/2 & 1/2 & & & & & \\
1/2 & 1/4 & 1/4 & & & & \\
1 & 0 & -1 & 1 & & & \\
3/2 & 3/8 & 0 & 0 & 9/8 & & \\
2 & -6/7 & 4/7 & 24/7 & -24/7 & 16/7 & \\
\hline
 & \frac{7}{45} & 0 & \frac{32}{45} & \frac{12}{45} & \frac{32}{45} & \frac{7}{45}
\end{array} \qquad (4.1.2.6)$$

$$y_{1,n+2} = y_n + 2k_1$$

$$y_{2,n+2} = y_n - 2k_1 + 4k_2 \qquad (4.1.2.7)$$

$$y_{6,n+2} = \frac{1}{45}[7k_1 + 32k_3 + 12k_4 + 32k_5 + 7k_6]$$

και

$$y_{1,n+1} = y_n + k_1$$

$$y_{2,n+1} = y_n + k_2$$

$$y_{4,n+1} = y_n + \frac{1}{6}[k_1 + 4k_3 + k_4]$$

Χρησιμοποιώντας την μέθοδο 5ης τάξης (4.1.2.6) και τις σχέσεις (4.1.2.7) μπορεί να λάβει κανείς μια 5ης τάξης Runge-Kutta για 2h και ενσωματωμένη μέσα σε αυτή μια 4ης τάξης μέθοδο Runge-Kutta για h. Δηλαδή ξεκινώντας από x_n είναι δυνατόν να υπολογιστεί το y_{n+1} μέσω μιας 4ης τάξης μεθόδου και το y_{n+2} μέσω μιας 5ης τάξης μεθόδου απαιτώντας συνολικά έξι στάδια. Με βάση κάθε βήμα είναι σαν να απαιτούνται μόνο τρία στάδια, ενώ σε οποιοδήποτε 4ης τάξης μέθοδο χρειάζονται τουλάχιστον τέσσερα στάδια. Έτσι, αυτή η διαδικασία είναι η πιο οικονομική από αυτές που είδαμε που δίνει αποτελέσματα με ακρίβεια τουλάχιστον όπως οι 4ης τάξης μέθοδοι. Την ίδια στιγμή το $y_{4,n+1}$ ταιριάζει με την (4.1.2.1), η οποία μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να υπολογιστούν οι κατάλληλες τιμές του h στον υπολογισμό. Προφανώς, ο παραπάνω σχηματισμός συστήνεται ένθερμα σε οποιονδήποτε χρήστη υπολογιστικών μεθόδων.

4.1.3 Ενσωματωμένοι τύποι Fehlberg

Μια σειρά ενσωματωμένων τύπων που θα παρουσιασθούν στην συνέχεια οφείλεται στον E. Fehlberg. Ας αρχίσουμε με μια μέθοδο Fehlberg 4ης τάξης (4, 5) Runge-Kutta της μορφής:

$$y(x+h) = y(x) + \frac{25}{216}k_1 + \frac{1408}{2565}k_3 + \frac{2197}{4104}k_4 - \frac{1}{5}k_5$$

$$\begin{cases} k_1 = hf(x\,, y) \\ k_2 = hf(x + \frac{1}{4}h\,, y + \frac{1}{4}k_1) \\ k_3 = hf(x + \frac{3}{8}h\,,\ y + \frac{3}{32}k_1 + \frac{9}{32}k_2) \\ k_4 = hf(x + \frac{12}{13}h\,, y + \frac{1932}{2197}k_1 - \frac{7200}{2197}k_2 + \frac{7296}{2197}k_3) \\ k_5 = hf(x + h\,,\ y + \frac{439}{216}k_1 - 8k_2 + \frac{3680}{513}k_3 - \frac{845}{4104}k_4) \end{cases}$$

Ωστόσο, με μία πρόσθετη συνάρτηση αξιολόγησης

$$k_6 = hf(x + \frac{1}{2}h\,, y - \frac{8}{27}k_1 + 2k_2 - \frac{3544}{2565}k_3 + \frac{1859}{4104}k_4 - \frac{11}{40}k_5)$$

μπορούμε να αποκτήσουμε ένα τύπο 5ης τάξης (5, 6), δηλαδή,

$$y(x+h) = y(x) + \frac{16}{135}k_1 + \frac{6656}{12825}k_3 + \frac{28561}{56430}k_4 - \frac{9}{50}k_5 + \frac{2}{55}k_6.$$

Η διαφορά μεταξύ του y (x + h) στη τέταρτη και πέμπτη διαδικασία είναι μια εκτίμηση του τοπικού σφάλματος αποκοπής της 4ης τάξης μεθόδου. Έτσι έξι συναρτήσεις αξιολόγησης δίνουν μια 4ης τάξης προσέγγιση, μαζί με μια εκτίμηση σφάλματος.

Ο Fehlberg ανέπτυξε επίσης, μια $5^{ης}$ τάξης μέθοδο (5, 6) ενσωματωμένη μέσα σε μια $6^{ης}$ τάξης μέθοδο (6, 8), μια $6^{ης}$ τάξης(6, 7) ενσωματωμένη μέσα σε μια $7^{ης}$ τάξης (7, 10) μέθοδο, μια $7^{ης}$ τάξης μέθοδο (7, 11) ενσωματωμένη μέσα σε μια $8^{ης}$ τάξης μέθοδο (8, 13) και μια $8^{ης}$ τάξης μέθοδο (8, 15) ενσωματωμένη μέσα σε μια $9^{ης}$ τάξης μέθοδο (9, 17). Στην συνέχεια θα δοθούν οι τύποι των παραπάνω μεθόδων μαζί με τύπους για το τοπικό σφάλμα αποκοπής T(x, h):

Fehlberg Τύποι :

Τύπος (5, 6) Ενσωματωμένος Σε (6, 8) Τύπο

	Τύπος Fehlberg (2.4.7)								
0	-11/640	0	11/256	-11/160	11/256	0			
1	93/640	-18/5	803/256	-11/160	99/256	0	1		(4.1.3.1)
	$\frac{7}{1408}$	0	$\frac{1125}{2816}$	$\frac{9}{32}$	$\frac{125}{768}$	0	$\frac{5}{66}$	$\frac{5}{66}$	

Όπου το σφάλμα αποκοπής T(x, h) της διαδικασίας $5^{ης}$ τάξης δίνεται από τον τύπο:

$$T(x, h) = \frac{5}{66}(k_1 + k_6 - k_7 - k_8)h$$

Τύπος (6, 8) Ενσωματωμένος Σε (7, 10) Τύπο

	Τύπος Fehlberg (2.5.4)										
0	15/352	0	0	-5445/46592	18/77	-1215/5632	1029/18304	0			
1	-1833/352	0	141/8	-51237/3584	18/7	-729/512	1029/1408	0	1		(4.1.3.2)
	$\frac{11}{864}$	0	0	$\frac{1771561}{6289920}$	$\frac{32}{105}$	$\frac{243}{2560}$	$\frac{16807}{74880}$	0	$\frac{11}{270}$	$\frac{11}{270}$	

Όπου το σφάλμα αποκοπής T(x, h) της διαδικασίας $6^{ης}$ τάξης δίνεται από τον τύπο:

$$T(x, h) = \frac{11}{270}(k_1 + k_8 - k_9 - k_{10})h$$

<u>Τύπος (7, 11) Ενσωματωμένος Σε (8, 13) Τύπο</u>

Τύπος Fehlberg (2.6.2)

0	3/205	0	0	0	0	-6/41	-3/205	-3/41	3/41	6/41	0		
1	-1777/4100	0	0	-341/164	4496/1025	-298/82	2193/4100	51/82	33/164	12/41	0	1	
	0	0	0	0	0	$\frac{34}{105}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{9}{280}$	$\frac{9}{280}$	0	$\frac{41}{840}$	$\frac{41}{840}$

(4.1.3.3)

Όπου το σφάλμα αποκοπής T(x, h) της διαδικασίας $7^{ης}$ τάξης δίνεται από τον τύπο:

$$T(x, h) = \frac{41}{840}(k_1 + k_{11} - k_{12} - k_{13})h$$

Όπως στο κεφάλαιο 2 έτσι και εδώ οι παράμετροι των τύπων που θα παρουσιαστούν παρακάτω θα δίνονται αναλυτικά και όχι με την μορφή πίνακα λόγο του μεγάλου πλήθους τους. Επίσης οι παράμετροι που δεν περιλαμβάνονται είναι ίσοι με μηδέν.

<u>Τύπος (8, 15) Ενσωματωμένος Σε (9, 17) Τύπο</u>

Τύπος Fehlberg (2.7.1)

- -

$c_{16} = 0$

$c_{17} = 1$

$a_{161} = 0.1046\ 4847\ 3406\ 1481\ 0391\ 8730\ 0240\ 6755 * 10^{-2}$

$a_{169} = -0.6716\ 3886\ 8449\ 9028\ 2237\ 7784\ 4617\ 8020 * 10^{-2}$ (4.1.3.4)

$a_{1610} = 0.8182\ 8762\ 1894\ 2502\ 1265\ 3300\ 6524\ 8999 * 10^{-2}$

a_{1611} =-0.4264 0342 8644 8334 7277 1421 3808 7561 * 10^{-2}

a_{1612} = 0.2800 9029 4741 6893 6545 9763 3115 3703 * 10^{-3}

a_{1613} =-0.8783 5333 8762 3867 6639 0578 1314 5633 * 10^{-2}

a_{1614} = 0. 1025 4505 1108 2555 8084 2177 6966 4009 * 10^{-1}

a_{171} =-0.1353 6550 7861 7406 7080 4421 6888 9966 * 10^{+1}

a_{176} =-0.1839 6103 1448 4827 0375 0441 9898 8231

a_{177} =-0.6557 0189 4497 4164 5138 0068 7998 5251

a_{178} =-0.3908 6144 8804 3986 3435 0255 2024 1310

a_{179} = 0.2746 6285 5812 9992 5758 9622 0773 2989

a_{1710} =-0.1046 4851 7535 7191 5887 0351 8857 2676 * 10^{+1}

a_{1711} = 0.1671 4967 6671 2315 5012 0044 8830 6588 * 10^{+1}

a_{1712} = 0.4952 3916 8258 4180 8131 1869 9074 0287

a_{1713} = 0.1148 1836 4662 7330 1905 2257 9595 4930 * 10^{+1}

a_{1714} = 0.4108 2191 3138 3305 5603 9813 2752 7525 * 10^{-1}

a_{1716} = 1

w'_1 = 0.0015 2958 8024 3556 7560

w'_9 = 0.2598 3725 2837 1540 3018 8870 2317 1963

w'_{10} = 0.9284 7805 9965 7702 7788 0637 1430 2190 * 10^{-1}

w'_{11} = 0.1645 2339 5147 6434 2891 6477 3184 2800

w'_{12} = 0.1766 5951 6378 6007 4367 0842 9839 7547

w'_{13} = 0.2392 0102 3203 5275 9374 1089 3332 0941

w'_{14} = 0.3948 4274 6042 0285 3746 7521 1882 9325 * 10^{-2}

w'_{16} = 0.3072 6495 4758 6064 0406 3683 0552 2124 * 10^{-1}

w'_{17} = 0.3072 6495 4758 6064 0406 3683 0552 2124 * 10^{-1}

Όπου το σφάλμα αποκοπής T(x, h) της διαδικασίας 8^{ης} τάξης δίνεται από τον τύπο:

$$T(x, h) = w_{15}(k_1 + k_{15} - k_{16} - k_{17})h$$

Στο σημείο αυτό κρίνεται σκόπιμο να επισημανθεί ότι όταν δύο τύποι, όπου ο ένας είναι ενσωματωμένος στον άλλο, συγκρίνονται και βλέπουμε ότι συμφωνούν σε j δεκαδικά ψηφία συμπεραίνουμε ότι τα αποτελέσματα και των δύο τύπων είναι σωστά σε τουλάχιστον j δεκαδικά ψηφία. Όμως όταν δίνεται ένας τύπος που εκτιμά το σφάλμα αποκοπής T(x, h) μιας μεθόδου, ο τύπος αυτός εκτιμά μόνο το σφάλμα της συγκεκριμένης μεθόδου. Ακόμα και αν ο τύπος της περιέχεται σε έναν ανώτερης τάξης τύπο, και ο T(x, h) χρησιμοποιεί ορισμένα από τα k_i του τύπου της μεθόδου ανώτερης τάξης. Ακόμη στους ενσωματωμένους τύπους, παίρνουμε τα αποτελέσματα μίας μεθόδου σαν έξοδο και αυτά της άλλης τα χρησιμοποιούμε για την σύγκριση των δύο αποτελεσμάτων με σκοπό την εκτίμηση του σφάλματος. Στις αξιολογήσεις k_i το y_n που δίνουμε στην f(x,y) είναι η προηγούμενη τιμή της μεθόδου που παίρνουμε τα αποτελέσματά της σαν έξοδο και όχι το αντίστοιχο αποτέλεσμα αυτής που χρησιμοποιούμε για σύγκριση.

Προφανώς οι παραπάνω ενσωματωμένοι τύποι μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τον καθορισμό του βήματος h.

4.2 Σφάλμα Στρογγύλευσης

Στην ενότητα αυτή θα συζητήσουμε εν συντομία ορισμένες πτυχές του τοπικού σφάλματος στρογγύλευσης σε μονοβηματικές (συμπεριλαμβανομένων των Runge-Kutta) μεθόδους. Η γενική εξίσωση που μας ενδιαφέρει είναι:

$$\breve{y}_{n+1} = \breve{y}_n + h\Phi(x_n, \breve{y}_n ; h) + e_n \qquad (4.2.1)$$

Εδώ το e_n είναι το τοπικό σφάλμα στρογγύλευσης που σχετίζεται με την άμεση αξιολόγηση ενός κανονικού μονοβηματικού αλγορίθμου. Η $\breve{y}_n$ είναι μια στρογγυλοποιημένη ή αλλιώς μια κατά προσέγγιση τιμή της y_n. Ως παράδειγμα αυτής της προσέγγισης, επιλέγουμε τον τέταρτης τάξης κλασικό Runge-Kutta τύπο για τον οποίο:

$$\Phi(x_n, y_n ; h) = \frac{1}{6}[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4] \qquad (4.2.2)$$

Αυτή η ιδιαίτερη συνάρτηση προσαύξησης έχει έναν εξαιρετικό τρόπο για την ελαχιστοποίηση του τοπικού σφάλματος στρογγύλευσης. Όλα τα k_i έχουν το ίδιο πρόσημο, τα βάρη του k_i είναι περίπου ίσα και συνεπώς κάθε όρος στην Φ έχει περίπου ίσο μέγεθος και όλες οι τιμές αθροίζονται. Αυτό το κριτήριο, δηλαδή να είναι όλα τα βάρη ίσα σε μέγεθος και με ίδιο πρόσημο, είναι πιθανόν ένας πολύ καλός κανόνας για την ελαχιστοποίηση του τοπικού σφάλματος στρογγύλευσης.

Επίσης, είναι ίσως αλήθεια ότι στις περισσότερες περιπτώσεις, το τοπικό σφάλμα στρογγύλευσης είναι συγκεντρωμένο στο τελευταίο βήμα του αλγορίθμου, π.χ. , στην εξίσωση:

$$y_{n+1} = y_n + (h/6)[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4]$$

Αυτό προκύπτει, διότι θεωρούμε ότι κάθε k_i υπολογίζεται με υψηλό βαθμό ακρίβειας και η τιμή h / 6 είναι μικρή. Η στρογγύλευση που συνδέεται με το άθροισμα των k_i, ιδιαίτερα μετά τον πολλαπλασιασμό με h / 6, δεν θα επηρεάσει το τελικό άθροισμα.

Μια προφανής διαδικασία για την ελαχιστοποίηση του σφάλματος στρογγύλευσης σε κάθε βήμα είναι η χρήση αριθμητικής διπλής ακρίβειας. Αυτό σημαίνει ότι τυχόν σφάλματα που συμβαίνουν οφείλονται στο ότι πραγματικά χρειάζονται πολύ περισσότερα ψηφία για τον υπολογισμό. Με άλλα λόγια, χρησιμοποιούμε διπλού μήκους αριθμούς με το επιπλέον μήκος να χρησιμοποιείται για την προστασία ή την άμβλυνση του υπολογισμού. Προφανώς αυτό έχει ένα μειονέκτημα με την έννοια ότι ο συνολικός χρόνος υπολογισμού μπορεί να αυξηθεί. Παρ 'όλα αυτά, αυτός είναι συχνά ο δρόμος που ακολουθούμε για να πάρουμε έναν έγκυρο υπολογισμό.

Ο Henrici επεσήμανε έναν εναλλακτικό τρόπο για την επίτευξη πολλών από τα πλεονεκτήματα της διπλής ακρίβειας με παράλληλη ελαχιστοποίηση του συνολικού χρόνου υπολογισμού. Αυτή η μέθοδος περιλαμβάνει μια μερική διπλή ακρίβεια στην οποία το $\breve{y}_n$ είναι σε διπλή ακρίβεια (προφανώς $\breve{y}_{n+1}$ είναι επίσης σε διπλή ακρίβεια όταν υπολογίζεται), αλλά το $h\Phi(x_n, \breve{y}_n ; h)$ είναι σε απλή ακρίβεια. Αυτός ο αλγόριθμος απαιτεί μόνο ένα μικρό ποσό του υπολογιστικού χρόνου ενός απλής ακριβείας υπολογισμού. Όπως περιγράφεται, αντιπροσωπεύει μια από τις καλύτερες προσεγγίσεις για τη χρήση κάθε Runge-Kutta τύπου.

Κεφάλαιο 5

"Εφαρμογές Και Αποτελέσματα υπορουτίνων που κατασκευάσθηκαν από τον συγγραφέα "

Προκειμένου να ελεγχθούν οι μέθοδοι που παρουσιάζονται σε αυτή την εργασία, θα δώσουμε μερικά αριθμητικά αποτελέσματα από μια σειρά διαφορετικών δ.ε. Θα μας απασχολήσει το ζήτημα των σφαλμάτων κατά τους υπολογισμούς, καθώς και το κόστος υπολογισμού, δηλαδή, ο χρόνος που απαιτείται από τον υπολογιστή για να τρέξει την κάθε μέθοδο. Στην συνέχεια θα εξάγουμε συμπεράσματα τα οποία απορρέουν από την συμπεριφορά των δ.ε. που μελετήσαμε καθώς και από στοιχεία που βρήκαμε από δημοσιευμένες έρευνες που αναφέρονται στην βιβλιογραφία. Τα αποτελέσματα που θα παρουσιαστούν έχουν υπολογιστεί με υπορουτίνες που έχουν γραφεί στη Matlab και δίνονται στο Παράρτημα αυτής της εργασίας.

5.1 Αποτελέσματα Μεθόδων Runge-Kutta

Σκοπός αυτής της ενότητας είναι να ελέγξουμε τις μεθόδους που αναλύσαμε στο Κεφάλαιο 2 και επεκτείναμε στο Κεφάλαιο 3 ως προς τον χρόνο υπολογισμού και ως προς τα σφάλματα ολοκλήρωσης. Για να γίνει ο παραπάνω έλεγχος και να καταλήξουμε σε κάποια ασφαλή συμπεράσματα, δίνονται οι παρακάτω πίνακες.

Στον πίνακα 5.1.1 δίνονται τέσσερεις δ.ε. με σκοπό την αριθμητική τους ολοκλήρωση με τις μεθόδους που παρουσιάσθηκαν σε προηγούμενα κεφάλαια. Επίσης, δίνονται και οι εξισώσεις των αναλυτικών τους λύσεων έτσι ώστε να μπορούν να ελέγχονται ως προς την ακρίβεια τα αριθμητικά αποτελέσματα.

<u>Πίνακας 5.1.1</u>

Αριθμός Εξ.	Δ. Ε.	Αρχική Τιμή	Αναλυτική Λύση
1	$y' = -y$	$y(0) = 1$	$y(x) = e^{-x}$
2	$y' = \frac{x}{y+1}$	$y(0) = 0$	$y(x) = \sqrt{x^2 + 1} - 1$
3	$y'' = -y$	$y_1(0) = 0$ και	$y_1(x) = \sin x$ και
ή	$y_1' = y_2$ και $y_2' = -y_1$	$y_2(0) = 1$	$y_2(x) = \cos x$
4	$y_1' = \frac{1}{y_2}$ και $y_2' = -\frac{1}{y_1}$	$y_1(0) = y_2(0) = 1$	$y_1(x) = e^x$ και $y_2(x) = e^{-x}$

Στον πίνακα 5.1.2, παρουσιάζονται για συγκεκριμένα σημεία x οι ακριβείς τιμές των παραπάνω δ.ε. με σκοπό την διευκόλυνση στη σύγκριση τους με τα αντίστοιχα αριθμητικά αποτελέσματα.

Πίνακας 5.1.2

Αποτελέσματα Αναλυτικής (ακριβούς) Λύσης

Διαφορική Εξίσωση 1		Διαφορική Εξίσωση 2	
x	y(x)	x	y(x)
0	1.0	0	0
0.4	0.670320046035639	0.4	0.077032961426901
1.0	0.367879441171442	1.0	0.414213562373095
4.0	0.018315638888734	4.0	3.123105625617661
7.0	$9.118819655545 * 10^{-4}$	7.0	6.071067811865476
10	$4.539992976248 * 10^{-5}$	10	9.049875621120890

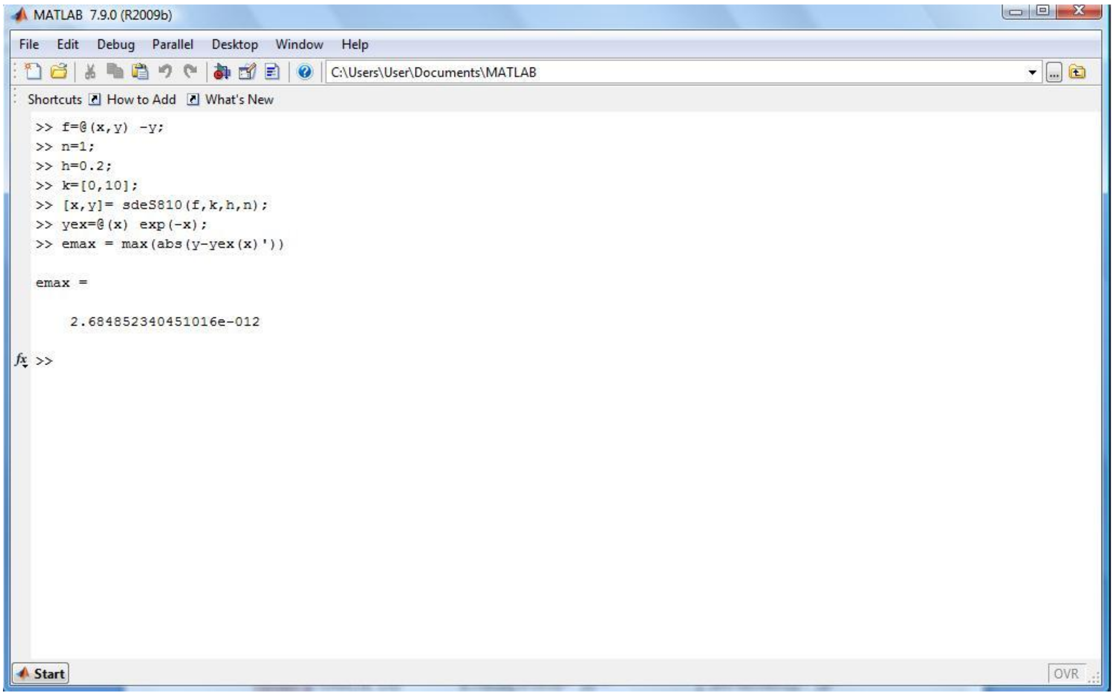
Διαφορική Εξίσωση 3

x	$y_1(x)$	$y_2(x)$
0	0	1.0
0.4	0.389418342308651	0.921060994002885
1.0	0.841470984807897	0.540302305868140
4.0	-0.756802495307928	-0.653643620863612
7.0	0.656986598718789	0.753902254343305
10	-0.544021110889370	-0.839071529076452

<u>Διαφορική Εξίσωση 4</u>

x	$y_1(x)$	$y_2(x)$
0	1.0	1.0
0.4	1.491824697641270	0.670320046035639
1.0	2.718281828459046	0.367879441171442
4.0	54.598150033144236	0.018315638888734
7.0	$1.096633158428 * 10^{+3}$	$9.118819655545 * 10^{-4}$
10	$2.202646579481 * 10^{+4}$	$4.539992976248 * 10^{-5}$

Θα αρχίσουμε τον έλεγχο των μεθόδων Runge-Kutta με τον πίνακα 5.1.3 που παρουσιάζει τη μεγαλύτερη τιμή του πραγματικού σφάλματος των προσεγγιστικών λύσεων των δ.ε. του πίνακα 5.1.1 για κάθε μέθοδο που παρουσιάστηκε στο κεφάλαιο 2 και επεκτάθηκε στο Κεφάλαιο 3, όταν το $x \in [0,10]$ και h=0.2. Αυτό επιτυγχάνεται χρησιμοποιώντας την εντολή “ emax = max(abs(y-yex(x))) ” στο Matlab, όπου yex(x) είναι μια συνάρτηση που δίνει την αναλυτική τιμή της συνάρτησης-λύσης της αντίστοιχης δ.ε. Για παράδειγμα για την δ.ε. 1 μας δίνει:



Όπου “sdeS810(f,k,h,n)” είναι το όνομα της υπορουτίνας που υπολογίζει τις τιμές μιας δ.ε. με την μέθοδο του Shanks Τύπος (8, 10).

Πίνακας 5.1.3

Τύπος Runge-Kutta	δ.ε. 1: Μεγ. Τιμή Πργ. Σφαλ.	δ.ε. 2 Μεγ. Τιμή Πργ. Σφαλ.
Κλασικός Τύπος (4, 4):	$5.796953859605 * 10^{-6}$	$3.854993144536 * 10^{-6}$
Kutta Τύπος (4, 4):	$5.796953859549 * 10^{-6}$	$2.792480398083 * 10^{-6}$
Gill Τύπος (4, 4):	$5.796953859549 * 10^{-6}$	$2.205645527164 * 10^{-6}$
Nystrom Τύπος (5, 6):	$1.941354927926 * 10^{-7}$	$1.650803074793 * 10^{-8}$
Butcher Τύπος 1 (5, 6):	$3.052894947952 * 10^{-8}$	$4.656206425979 * 10^{-8}$
Butcher Τύπος 2 (5, 6):	$3.052894947952 * 10^{-8}$	$4.208683496154 * 10^{-8}$
Butcher Τύπος 3 (5, 6):	$3.052894947952 * 10^{-8}$	$9.617354362889 * 10^{-8}$
Butcher Τύπος 4 (5, 6):	$1.941354929591 * 10^{-7}$	$3.007248189704 * 10^{-8}$
Butcher Τύπος 5 (5, 6):	$1.941354929591 * 10^{-7}$	$5.853263185251 * 10^{-8}$
Fehlberg Τύπος (5, 6):	$7.213348773849 * 10^{-8}$	$1.340915040115 * 10^{-8}$
Shanks Τύπος (5, 5):	$1.941355010082 * 10^{-7}$	$1.412621787599 * 10^{-7}$
Lawson Τύπος (5, 6):	$8.180328547880 * 10^{-8}$	$3.739774442901 * 10^{-8}$
Sarafyan Τύπος (5, 6):	$4.936879113848 * 10^{-7}$	$1.724844431727 * 10^{-7}$
Butcher Τύπος (6, 7):	$1.887967937542 * 10^{-8}$	$1.523502518585 * 10^{-9}$
Shanks Τύπος (6, 6):	$5.566226535247 * 10^{-9}$	$5.893283611114 * 10^{-9}$
Fehlberg τύπος (6, 8):	$6.760565440800 * 10^{-10}$	$5.067404273972 * 10^{-10}$
Shanks Τύπος (7, 7):	$2.336901228084 * 10^{-10}$	$4.607440207138 * 10^{-9}$
Fehlberg Τύπος (7, 11):	$9.012068868941 * 10^{-12}$	$2.300201695781 * 10^{-11}$
Shanks Τύπος (7, 9):	$1.268571359070 * 10^{-10}$	$4.163043382243 * 10^{-10}$
Shanks Τύπος (8, 10):	$2.684852340451 * 10^{-12}$	$1.779519864797 * 10^{-10}$
Shanks Τύπος (8, 12):	$1.013189532273 * 10^{-11}$	$1.151467809989 * 10^{-12}$
Fehlberg Τύπος (8, 15):	$4.756361970948 * 10^{-12}$	$4.872144354628 * 10^{-14}$

δ.ε. 3

Τύπος Runge-Kutta	Μεγ. Τιμή Πργ. Σφαλ. (y_1)	Μεγ. Τιμή Πργ. Σφαλ. (y_2)
Κλασικός Τύπος (4, 4):	$1.279432803614 * 10^{-4}$	$1.075370587487 * 10^{-4}$
Kutta Τύπος (4, 4):	$1.279432803600 * 10^{-4}$	$1.075370587478 * 10^{-4}$
Gill Τύπος (4, 4):	$1.279432803614 * 10^{-4}$	$1.075370587485 * 10^{-4}$
Nystrom Τύπος (5, 6):	$3.587951247108 * 10^{-6}$	$4.265338995446 * 10^{-6}$
Butcher Τύπος 1 (5, 6):	$4.776714130905 * 10^{-7}$	$5.663669421230 * 10^{-7}$
Butcher Τύπος 2 (5, 6):	$4.776714130905 * 10^{-7}$	$5.663669419009 * 10^{-7}$
Butcher Τύπος 3 (5, 6):	$4.776714127574 * 10^{-7}$	$5.663669420120 * 10^{-7}$
Butcher Τύπος 4 (5, 6):	$3.587951247219 * 10^{-6}$	$4.265338996001 * 10^{-6}$
Butcher Τύπος 5 (5, 6):	$3.587951247219 * 10^{-6}$	$4.265338996001 * 10^{-6}$
Fehlberg Τύπος (5, 6):	$1.219602737690 * 10^{-6}$	$1.454363926845 * 10^{-6}$
Shanks Τύπος (5, 5):	$3.587951319717 * 10^{-6}$	$4.265339059506 * 10^{-6}$
Lawson Τύπος (5, 6):	$1.559761603986 * 10^{-6}$	$1.866068612410 * 10^{-6}$
Sarafyan Τύπος (5, 6):	$8.996476976719 * 10^{-6}$	$1.069747063487 * 10^{-5}$
Butcher Τύπος (6, 7):	$4.078529535212 * 10^{-7}$	$3.429604961691 * 10^{-7}$
Shanks Τύπος (6, 6):	$1.219287788512 * 10^{-7}$	$1.025830875245 * 10^{-7}$
Fehlberg τύπος (6, 8):	$1.691035408924 * 10^{-8}$	$1.413130953920 * 10^{-8}$
Shanks Τύπος (7, 7):	$8.211727801216 * 10^{-9}$	$7.2858372668358\ 10^{-9}$
Fehlberg Τύπος (7, 11):	$1.678001071426 * 10^{-10}$	$2.001316889988 * 10^{-10}$
Shanks Τύπος (7, 9):	$2.369525908818 * 10^{-9}$	$2.822446054651 * 10^{-9}$
Shanks Τύπος (8, 10):	$5.686323634180 * 10^{-11}$	$4.778716311549 * 10^{-11}$
Shanks Τύπος (8, 12):	$2.080031147322 * 10^{-10}$	$1.745779631967 * 10^{-10}$
Fehlberg Τύπος (8, 15):	$8.380607319225 * 10^{-11}$	$9.978362580654 * 10^{-11}$

<u>δ.ε. 4</u>

Τύπος Runge-Kutta	Μεγ. Τιμή Πργ. Σφαλ. (y_1)	Μεγ. Τιμή Πργ. Σφαλ. (y_2)
Κλασικός Τύπος (4, 4):	10.239018298259907	$1.643415013719* 10^{-5}$
Kutta Τύπος (4, 4):	2.661426560556720	$5.550896005901* 10^{-6}$
Gill Τύπος (4, 4):	14.096337847997347	$2.163021969315* 10^{-5}$
Nystrom Τύπος (5, 6):	2.294164943039505	$7.011285839686* 10^{-7}$
Butcher Τύπος 1 (5, 6):	0.274408652760030	$8.541090165681* 10^{-8}$
Butcher Τύπος 2 (5, 6):	0.693428491216764	$2.214296892788* 10^{-7}$
Butcher Τύπος 3 (5, 6):	1.975543228345487	$7.745331862263* 10^{-7}$
Butcher Τύπος 4 (5, 6):	0.250632546449197	$6.578872011054* 10^{-8}$
Butcher Τύπος 5 (5, 6):	2.545420855629345	$8.645808997343* 10^{-7}$
Fehlberg Τύπος (5, 6):	0.323697201431060	$1.321630536399* 10^{-7}$
Shanks Τύπος (5, 5):	1.049628310123808	$3.158102879486* 10^{-7}$
Lawson Τύπος (5, 6):	0.359266467141424	$1.003469026484* 10^{-7}$
Sarafyan Τύπος (5, 6):	30.272015840324457	$9.962246745959* 10^{-6}$
Butcher Τύπος (6, 7):	0.009112167812418	$2.202402893392* 10^{-8}$
Shanks Τύπος (6, 6):	0.093862824458483	$2.989965325328* 10^{-8}$
Fehlberg τύπος (6, 8):	0.006854798724817	$9.330188954770* 10^{-9}$
Shanks Τύπος (7, 7):	0.007464853912097	$8.656754646452* 10^{-9}$
Fehlberg Τύπος (7, 11):	$1.955572515726* 10^{-4}$	$1.383302916658* 10^{-10}$
Shanks Τύπος (7, 9):	0.009723652743560	$2.941027976710* 10^{-9}$
Shanks Τύπος (8, 10):	$1.225328414875* 10^{-4}$	$2.947245225648* 10^{-11}$
Shanks Τύπος (8, 12):	$2.237310036435* 10^{-5}$	$3.007066817773* 10^{-11}$
Fehlberg Τύπος (8, 15):	$2.959320408991* 10^{-5}$	$9.619444130138* 10^{-12}$

Για να έχουμε μία καλύτερη εικόνα της συμπεριφοράς των μεθόδων Runge-Kutta που αναλύσαμε σε προηγούμενα κεφάλαια, θα δοθεί ο πίνακας 5.1.4. Ο οποίος παρουσιάζει για ορισμένες από αυτές τις μεθόδους και για επιλεγμένες τιμές του x, τα αντίστοιχα αποτελέσματα (y) και το πραγματικό τους σφάλμα (error), για μερικές από τις δ.ε. του πίνακα 5.1.1. Τα δεδομένα ελήφθησαν με σταθερό βήμα h = 0.2 και οι τιμές του x ανήκουν στο διάστημα [0, 10].

<u>Πίνακας 5.1.4</u>

<u>Για δ.ε. 1:</u>

Κλασικός Τύπος (4, 4) <u>(2.3.1)</u>

x	y(x)	error (x)
0	1.0	0
0.4	0.670324271111111	$4.225075471709 * 10^{-6}$
1.0	0.367885238125302	$5.796953859605 * 10^{-6}$
4.0	0.018316793369374	$1.154480640211 * 10^{-6}$
7.0	$9.119825547936 * 10^{-4}$	$1.005892390644 * 10^{-7}$
10	$4.540708427920 * 10^{-5}$	$7.154516712517 * 10^{-9}$

<u>Butcher Τύπος (5, 6) (2.4.4)</u>

x	y(x)	error (x)
0	1.0	0
0.4	0.670320068286588	$2.225094852815 * 10^{-8}$
1.0	0.367879471700392	$3.052894947952 * 10^{-8}$
4.0	0.018315644968522	$6.079788325564 * 10^{-9}$
7.0	$9.118824952705 * 10^{-4}$	$5.297160292870 * 10^{-10}$
10	$4.539996743821 * 10^{-5}$	$3.767573062476 * 10^{-11}$

Butcher Τύπος (6, 7) (2.5.2)

x	y(x)	error (x)
0	1.0	0
0.4	0.670320059796047	$1.376040725809 * 10^{-8}$
1.0	0.367879460051122	$1.887967937542 * 10^{-8}$
4.0	0.018315642648590	$3.759855808638 * 10^{-9}$
7.0	$9.118822931409 * 10^{-4}$	$3.275863723080 * 10^{-10}$
10	$4.539995306186 * 10^{-5}$	$2.329938051846 * 10^{-11}$

Fehlberg Τύπος (7, 11) (2.6.2)

x	y(x)	error (x)
0	1.0	0
0.4	0.670320046029071	$6.568412480590 * 10^{-12}$
1.0	0.367879441162430	$9.012068868941 * 10^{-12}$
4.0	0.018315638886939	$1.794734499905 * 10^{-12}$
7.0	$9.118819653981 * 10^{-4}$	$1.563706846300 * 10^{-13}$
10	$4.539992975136 * 10^{-5}$	$1.112175943788 * 10^{-14}$

Shanks Τύπος (8, 12) (2.7.3)

x	y(x)	error (x)
0	1.0	0
0.4	0.670320046028255	$7.384648448294 * 10^{-12}$
1.0	0.367879441161310	$1.013189532273 * 10^{-11}$
4.0	0.018315638886716	$2.017774836105 * 10^{-12}$
7.0	$9.118819653787 * 10^{-4}$	$1.758043580505 * 10^{-13}$
10	$4.539992974998 * 10^{-5}$	$1.250400201132 * 10^{-14}$

Για δ.ε. 3:

Κλασικός Τύπος (4, 4) (2.3.1)

x	$y_1(x)$	$error_1(x)$
0	0	0
0.4	0.389413155555556	$5.186753095021 * 10^{-6}$
1.0	0.841462022780622	$8.962027274406 * 10^{-6}$
4.0	-0.756761436811150	$4.105849677849 * 10^{-5}$
7.0	0.656907066752213	$7.953196657573 * 10^{-5}$
10	-0.543898797685532	$1.223132038381 * 10^{-4}$

x	$y_2(x)$	$error_2(x)$
0	1.0	0
0.4	0.921062226666667	$1.232663781492 * 10^{-6}$
1.0	0.540312170882300	$9.865014160226 * 10^{-6}$
4.0	-0.653677626215905	$3.400535229303 * 10^{-5}$
7.0	0.753951026632949	$4.877228964395 * 10^{-5}$
10	-0.839124470273775	$5.294119732280 * 10^{-5}$

Butcher Τύπος (5, 6) (2.4.4)

x	$y_1(x)$	$error_1(x)$
0	0	0
0.4	0.389418342843911	$5.352605580988 * 10^{-10}$
1.0	0.841470953569306	$3.123859060317 * 10^{-8}$
4.0	-0.756802398716717	$9.659121147365 * 10^{-8}$
7.0	0.656986482702905	$1.160158844549 * 10^{-7}$
10	-0.544021024210655	$8.667871431722 * 10^{-8}$

x	$y_2(x)$	$error_2$ (x)
0	1.0	0
0.4	0.921060971090677	$2.291220835282 * 10^{-8}$
1.0	0.540302257836910	$4.803123021535 * 10^{-8}$
4.0	-0.653643413027840	$2.078357719259 * 10^{-7}$
7.0	0.753901870416426	$3.839268782890 * 10^{-7}$
10	-0.839070962709512	$5.663669400135 * 10^{-7}$

Butcher Τύπος (6, 7) (2.5.2)

x	$y_1(x)$	$error_1$ (x)
0	0	0
0.4	0.389418358874389	$1.656573866970 * 10^{-8}$
1.0	0.841471014065583	$2.925768649575 * 10^{-8}$
4.0	-0.756802628429452	$1.331215240263 * 10^{-7}$
7.0	0.656986855177572	$2.564587832099 * 10^{-7}$
10	-0.544021503492057	$3.926026869161 * 10^{-7}$

x	$y_2(x)$	$error_2(x)$
0	1.0	0
0.4	0.921060990515334	$3.487550914727 * 10^{-9}$
1.0	0.540302275287840	$3.058029940384 * 10^{-8}$
4.0	-0.653643516281915	$1.045816970802 * 10^{-7}$
7.0	0.753902106032563	$1.483107411326 * 10^{-7}$
10	-0.839071371026347	$1.580501054477 * 10^{-7}$

<u>Fehlberg Τύπος (7, 11) (2.6.2)</u>

x	$y_1(x)$	$error_1(x)$
0	0	0
0.4	0.389418342306608	$2.042421787252 * 10^{-12}$
1.0	0.841470984792267	$1.562960871837 * 10^{-11}$
4.0	-0.756802495253827	$5.410161207919 * 10^{-11}$
7.0	0.656986598640736	$7.805323054555 * 10^{-11}$
10	-0.544021110803847	$8.552314412213 * 10^{-11}$

x	$y_2(x)$	$error_2\ (x)$
0	1.0	0
0.4	0.921060993994798	$8.087086555974 * 10^{-12}$
1.0	0.540302305854336	$1.380340286516 * 10^{-11}$
4.0	-0.653643620800129	$6.348299663728 * 10^{-11}$
7.0	0.753902254219961	$1.233438906567 * 10^{-10}$
10	-0.839071528886274	$1.901783175384 * 10^{-10}$

Shanks Τύπος (8, 12) (2.7.3)

x	$y_1(x)$	$error_1\ (x)$
0	0	0
0.4	0.389418342317112	$8.461731315634 * 10^{-12}$
1.0	0.841470984823612	$1.571553998048 * 10^{-11}$
4.0	-0.756802495378343	$7.041445204692 * 10^{-11}$
7.0	0.656986598852765	$1.339758304297 * 10^{-10}$
10	-0.544021111092291	$2.029213463928 * 10^{-10}$

x	$y_2(x)$	$error_2$ (x)
0	1.0	0
0.4	0.921060994001650	$1.235456181803 * 10^{-12}$
1.0	0.540302305853646	$1.449407260878 * 10^{-11}$
4.0	-0.653643620815087	$4.852496182650 * 10^{-11}$
7.0	0.753902254276625	$6.667921770287 * 10^{-10}$
10	-0.839071529009160	$6.729239387937 * 10^{-10}$

Για δ.ε. 4:

Κλασικός Τύπος (4, 4) (2.3.1)

x	$y_1(x)$	$error_1$ (x)
0	1.0	0
0.4	1.491796456432462	$2.824120880818 * 10^{-5}$
1.0	2.718154848537953	$1.269799210930 * 10^{-4}$
4.0	54.588617817570849	0.009532215573387
7.0	$1.096321635869 * 10^{+3}$	0.311522559502009
10	$2.201820216683 * 10^{+4}$	8.263627977015858

x	$y_2(x)$	$error_2(x)$
0	1.0	0
0.4	0.670332188145048	$1.214210940847 \cdot 10^{-5}$
1.0	0.367895875321580	$1.643415013719 \cdot 10^{-5}$
4.0	0.018318687464683	$3.048575948995 \cdot 10^{-6}$
7.0	$9.121280358770 \cdot 10^{-4}$	$2.460703225083 \cdot 10^{-7}$
10	$4.541604097111 \cdot 10^{-5}$	$1.611120862966 \cdot 10^{-8}$

Butcher Τύπος (5, 6) (2.4.4)

x	$y_1(x)$	$error_1(x)$
0	1.0	0
0.4	1.491824663660095	$3.398117587316 \cdot 10^{-8}$
1.0	2.718280484935471	$1.343523574171 \cdot 10^{-6}$
4.0	54.597564575119961	$5.854580242754 \cdot 10^{-4}$
7.0	$1.096595795965 \cdot 10^{+3}$	0.037362462936699
10	$2.202491217371 \cdot 10^{+4}$	1.553621094124537

x	$y_2(x)$	$error_2\ (x)$
0	1.0	0
0.4	0.670320452154775	$4.061191359872 * 10^{-7}$
1.0	0.367880159254883	$7.180834409315 * 10^{-7}$
4.0	0.018315942084746	$3.031960114468 * 10^{-7}$
7.0	$9.119223394233 * 10^{-4}$	$4.037386883279 * 10^{-8}$
10	$4.540379405866 * 10^{-5}$	$3.864296178795 * 10^{-9}$

Butcher Τύπος (6, 7) (2.5.2)

x	$y_1(x)$	$error_1\ (x)$
0	1.0	0
0.4	1.491824739111167	$4.146989618370 * 10^{-8}$
1.0	2.718282011327301	$1.828682556493 * 10^{-7}$
4.0	54.598162299065500	$1.226592126358 * 10^{-5}$
7.0	$1.096633504295 * 10^{+3}$	$3.458664009486 * 10^{-4}$
10	$2.202647327206 * 10^{+4}$	0.00747725628753 0

x	$y_2(x)$	$error_2$ (x)
0	1.0	0
0.4	0.670320029387757	$1.664788229494 * 10^{-8}$
1.0	0.367879419147413	$2.202402893392 * 10^{-8}$
4.0	0.018315635316556	$3.572178604999 * 10^{-9}$
7.0	$9.118817252302 * 10^{-4}$	$2.403243117748 * 10^{-10}$
10	$4.539991771301 * 10^{-5}$	$1.204947442821 * 10^{-11}$

Fehlberg Τύπος (7, 11) (2.6.2)

x	$y_1(x)$	$error_1$ (x)
0	1.0	0
0.4	1.491824697790908	$1.496380797050 * 10^{-10}$
1.0	2.718281829217558	$7.585128081189 * 10^{-10}$
4.0	54.598150124963411	$9.181917448586 * 10^{-8}$
7.0	$1.096633162741 * 10^{+3}$	$4.312791133998 * 10^{-6}$
10	$2.202646594970 * 10^{+4}$	$1.548930267745 * 10^{-4}$

x	$y_2(x)$	$error_2$ (x)
0	1.0	0
0.4	0.670320045943129	$9.251044374991 * 10^{-11}$
1.0	0.367879441034112	$1.373299807206 * 10^{-10}$
4.0	0.018315638851027	$3.770765297228 * 10^{-11}$
7.0	$9.118819613666 * 10^{-4}$	$4.187890811046 * 10^{-12}$
10	$4.539992940043 * 10^{-5}$	$3.620525306966 * 10^{-13}$

Shanks Τύπος (8, 12) (2.7.3)

x	$y_1(x)$	$error_1$ (x)
0	1.0	0
0.4	1.491824697690093	$4.882294568631 * 10^{-11}$
1.0	2.718281828681399	$2.223532469259 * 10^{-10}$
4.0	54.598150050989489	$1.784525238690 * 10^{-8}$
7.0	$1.096633159055 * 10^{+3}$	$6.265822776186 * 10^{-7}$
10	$2.202646581277 * 10^{+4}$	$1.795956632122 * 10^{-5}$

x	$y_2(x)$	$error_2$ (x)
0	1.0	0
0.4	0.670320046013718	$2.192168668813* 10^{-11}$
1.0	0.367879441141372	$3.007066817773* 10^{-11}$
4.0	0.018315638882752	$5.982131456861* 10^{-12}$
7.0	$9.118819650339* 10^{-4}$	$5.206474357547* 10^{-13}$
10	$4.539992972549* 10^{-5}$	$3.699089103602* 10^{-14}$

Στην συνέχεια για να δούμε την συμπεριφορά για διαφορετικές τιμές του h των μεθόδων Runge-Kutta που μελετάμε, θα δοθεί ο πίνακας 5.1.5. Αυτός ο πίνακας παρουσιάζει για ορισμένες από τις παραπάνω μεθόδους και για διάφορες επιλεγμένες τιμές του h το αντίστοιχο πραγματικό τους σφάλμα (error), σε δύο σταθερά σημεία x = 0.5 και x = 3.5.

<u>Πίνακας 5.1.5</u>

<u>Για δ.ε. 1:</u>

Κλασικός Τύπος (4, 4) <u>(2.3.1)</u>

h	error (0.5)	error (3.5)
0.25	$1.216598621933* 10^{-5}$	$4.240216661642* 10^{-6}$
0.1	$2.747107467060* 10^{-7}$	$9.573942912413* 10^{-8}$
0.05	$1.646750824590* 10^{-8}$	$5.739083135808* 10^{-9}$
0.01	$2.548394828494* 10^{-11}$	$8.881295004981* 10^{-12}$

Butcher Τύπος (5, 6) (2.4.4)

h	error (0.5)	error (3.5)
0.25	$8.430906361934 * 10^{-8}$	$2.938252005590 * 10^{-8}$
0.1	$6.475529001903 * 10^{-10}$	$2.256783267207 * 10^{-10}$
0.05	$1.827893392203 * 10^{-11}$	$6.370397265254 * 10^{-12}$
0.01	$5.218048215738 * 10^{-15}$	$1.817990202823 * 10^{-15}$

Butcher Τύπος (6, 7) (2.5.2)

h	error (0.5)	error (3.5)
0.25	$6.230247528993 * 10^{-8}$	$2.171300989700 * 10^{-8}$
0.1	$2.208446758800 * 10^{-10}$	$7.696644016563 * 10^{-11}$
0.05	$3.288813665847 * 10^{-12}$	$1.146065881085 * 10^{-12}$
0.01	$1.110223024625 * 10^{-16}$	$3.816391647148 * 10^{-17}$

Fehlberg Τύπος (7, 11) (2.6.2)

h	error (0.5)	error (3.5)
0.25	$3.688649385935 * 10^{-11}$	$1.285527240213 * 10^{-11}$
0.1	$5.384581669432 * 10^{-14}$	$1.872113575274 * 10^{-14}$
0.05	$4.440892098500 * 10^{-16}$	$1.457167719821 * 10^{-16}$
0.01	$3.330669073875 * 10^{-16}$	$6.591949208711 * 10^{-17}$

Shanks Τύπος (8, 12) (2.7.3)

h	error (0.5)	error (3.5)
0.25	$5.303735228779 * 10^{-11}$	$1.848402680915 * 10^{-11}$
0.1	$2.864375403533 * 10^{-14}$	$1.003017113810 * 10^{-14}$
0.05	$1.110223024625 * 10^{-16}$	$2.428612866368\ 10\text{-}^{17}$
0.01	$1.221245327088 * 10^{-15}$	$8.326672684689\ 10^{-17}$

Για δ.ε. 2:

Κλασικός Τύπος (4, 4) (2.3.1)

h	error (0.5)	error (3.5)
0.25	$6.719635517807 * 10^{-6}$	$4.315438158819 * 10^{-6}$
0.1	$1.584786831765 * 10^{-7}$	$1.009242112104 * 10^{-7}$
0.05	$9.675672485443 * 10^{-9}$	$6.128675789085 * 10^{-9}$
0.01	$1.521728576481 * 10^{-11}$	$9.581668791725 * 10^{-12}$

Butcher Τύπος (5, 6) (2.4.4)

h	error (0.5)	error (3.5)
0.25	$2.069506760821 * 10^{-7}$	$1.279770347473 * 10^{-7}$
0.1	$2.371630683506 * 10^{-9}$	$1.327533638573 * 10^{-9}$
0.05	$7.594573581127 * 10^{-11}$	$4.138112075225 * 10^{-11}$
0.01	$2.473021787353 * 10^{-14}$	$8.881784197001 * 10^{-15}$

Butcher Τύπος (6, 7) (2.5.2)

h	error (0.5)	error (3.5)
0.25	$5.805772862466 * 10^{-9}$	$1.023122919719 * 10^{-9}$
0.1	$2.629575723834 * 10^{-11}$	$4.027000954920 * 10^{-12}$
0.05	$4.314881785206 * 10^{-13}$	$6.306066779871 * 10^{-14}$
0.01	$8.326672684689 * 10^{-17}$	$4.440892098501 * 10^{-15}$

Fehlberg Τύπος (7, 11) (2.6.2)

h	error (0.5)	error (3.5)
0.25	$1.241502178839 * 10^{-10}$	$3.802425041499 * 10^{-11}$
0.1	$1.410815908542 * 10^{-13}$	$4.218847493576 * 10^{-14}$
0.05	$8.881784197001 * 10^{-16}$	$8.881784197001 * 10^{-16}$
0.01	$2.775557561563 * 10^{-17}$	$6.661338147751 * 10^{-15}$

Shanks Τύπος (8, 12) (2.7.3)

h	error (0.5)	error (3.5)
0.25	$6.914857575424 * 10^{-12}$	$1.668887250616 * 10^{-12}$
0.1	$3.358424649491 * 10^{-15}$	$2.220446049250 * 10^{-15}$
0.05	$5.551115123126 * 10^{-17}$	$1.776356839400 * 10^{-15}$
0.01	$8.326672684689 * 10^{-17}$	$8.437694987151 * 10^{-15}$

Για δ.ε. 3:

Κλασικός Τύπος (4, 4) (2.3.1)

h	$error_1$ (0.5)	$error_1$ (3.5)
0.25	$1.557902303978 * 10^{-5}$	$1.125816720205 * 10^{-4}$
0.1	$3.809802634480 * 10^{-7}$	$2.806737635586 * 10^{-6}$
0.05	$2.335335824721 * 10^{-8}$	$1.732193974924 * 10^{-7}$
0.01	$3.673122916936 * 10^{-11}$	$2.739760085468 * 10^{-10}$

h	$error_2$ (0.5)	$error_2$ (3.5)
0.25	$4.677057177771 * 10^{-6}$	$1.701663086329 * 10^{-5}$
0.1	$1.686140639334 * 10^{-7}$	$7.921354668872 * 10^{-7}$
0.05	$1.152195394649 * 10^{-8}$	$5.677713721397 * 10^{-8}$
0.01	$1.967037643880 * 10^{-11}$	$1.000315386079 * 10^{-10}$

Butcher Τύπος (5, 6) (2.4.4)

h	$error_1$ (0.5)	$error_1$ (3.5)
0.25	$2.287169564852 * 10^{-9}$	$1.036249470676 * 10^{-7}$
0.1	$2.471571836082 * 10^{-10}$	$8.836901765896 * 10^{-10}$
0.05	$1.040767472205 * 10^{-11}$	$4.732081393399 * 10^{-11}$
0.01	$4.107825191113 * 10^{-15}$	$1.859623566247 * 10^{-14}$

h	$error_2$ (0.5)	$error_2$ (3.5)
0.25	$8.885556734839 * 10^{-8}$	$6.135049280820 * 10^{-7}$
0.1	$8.393019612640 * 10^{-10}$	$6.060468238367 * 10^{-9}$
0.05	$2.510913699183 * 10^{-11}$	$1.842863639467 * 10^{-10}$
0.01	$7.660538869914 * 10^{-15}$	$5.662137425588 * 10^{-14}$

Butcher Τύπος (6, 7) (2.5.2)

h	$error_1$ (0.5)	$error_1$ (3.5)
0.25	$7.801701318311 * 10^{-8}$	$5.611037316444 * 10^{-7}$
0.1	$3.040881990657 * 10^{-10}$	$2.235648666193 * 10^{-9}$
0.05	$4.648337270652 * 10^{-12}$	$3.444200480374 * 10^{-11}$
0.01	$1.110223024625 * 10^{-16}$	$7.771561172376 * 10^{-16}$

h	$error_2$ (0.5)	$error_2$ (3.5)
0.25	$2.070164240031 * 10^{-8}$	$6.639309990675 * 10^{-8}$
0.1	$1.299127472265 * 10^{-10}$	$5.998974650367 * 10^{-10}$
0.05	$2.256195230643 * 10^{-12}$	$1.104327740364 * 10^{-11}$
0.01	$1.332267629550 * 10^{-15}$	$2.775557561563 * 10^{-15}$

Fehlberg Τύπος (7, 11) (2.6.2)

h	$error_1$ (0.5)	$error_1$ (3.5)
0.25	$1.508915214998* 10^{-11}$	$5.789940749068* 10^{-11}$
0.1	$3.358424649491* 10^{-14}$	$1.587063813702* 10^{-13}$
0.05	$1.110223024625* 10^{-16}$	$8.881784197001* 10^{-16}$
0.01	$3.330669073875* 10^{-16}$	$1.998401444325* 10^{-15}$

h	$error_2$ (0.5)	$error_2$ (3.5)
0.25	$4.724232116615* 10^{-11}$	$3.422930827668* 10^{-10}$
0.1	$7.471800955727* 10^{-14}$	$5.498934640968* 10^{-13}$
0.05	$6.661338147751* 10^{-16}$	$3.996802888651* 10^{-15}$
0.01	$5.551115123126* 10^{-16}$	$6.661338147751* 10^{-16}$

Shanks Τύπος (8, 12) (2.7.3)

h	$error_1$ (0.5)	$error_1$ (3.5)
0.25	$6.270067798297* 10^{-11}$	$4.458634017546* 10^{-10}$
0.1	$3.874678355942* 10^{-14}$	$2.844946500602* 10^{-13}$
0.05	$2.775557561563* 10^{-16}$	$1.831867990632* 10^{-15}$
0.01	$4.440892098501* 10^{-16}$	$1.332267629550* 10^{-15}$

h	$error_2$ (0.5)	$error_2$ (3.5)
0.25	$1.149091932717 * 10^{-11}$	$1.769273616503 * 10^{-11}$
0.1	$1.554312234475 * 10^{-14}$	$6.750155989721 * 10^{-14}$
0.05	$1.110223024625 * 10^{-16}$	$1.110223024625 * 10^{-16}$
0.01	$1.887379141863 * 10^{-15}$	$3.774758283726 * 10^{-15}$

<u>Για δ.ε. 4:</u>

Κλασικός Τύπος (4, 4) <u>(2.3.1)</u>

h	$error_1$ (0.5)	$error_1$ (3.5)
0.25	$9.523219891050 * 10^{-5}$	0.012358679738377
0.1	$2.419328461123 * 10^{-6}$	$3.283220910717 * 10^{-4}$
0.05	$1.507346476526 * 10^{-7}$	$2.081769493145 * 10^{-5}$
0.01	$2.405822208118 * 10^{-10}$	$3.370487888787 * 10^{-8}$

h	$error_2$ (0.5)	$error_2$ (3.5)
0.25	$3.324010742711 * 10^{-5}$	$1.064775816526 * 10^{-5}$
0.1	$8.693846299535 * 10^{-7}$	$2.922014014674 * 10^{-7}$
0.05	$5.479734810354 * 10^{-8}$	$1.875507615878 * 10^{-8}$
0.01	$8.829492692541 * 10^{-11}$	$3.066143172692 * 10^{-11}$

Butcher Τύπος (5, 6) (2.4.4)

h	$error_1$ (0.5)	$error_1$ (3.5)
0.25	$6.377859316231* 10^{-7}$	$8.663288272217* 10^{-4}$
0.1	$2.982671887253* 10^{-9}$	$7.447861669618* 10^{-6}$
0.05	$1.918707415172* 10^{-10}$	$2.184187053444* 10^{-7}$
0.01	$8.659739592076* 10^{-14}$	$6.616573955398* 10^{-11}$

h	$error_2$ (0.5)	$error_2$ (3.5)
0.25	$1.589456316453* 10^{-6}$	$1.262176944364* 10^{-6}$
0.1	$1.262590265672* 10^{-8}$	$1.157422525877* 10^{-8}$
0.05	$3.574692764019* 10^{-10}$	$3.483533253523* 10^{-10}$
0.01	$1.050270981295* 10^{-13}$	$1.079171474405* 10^{-13}$

Butcher Τύπος (6, 7) (2.5.2)

h	$error_1$ (0.5)	$error_1$ (3.5)
0.25	$2.196832189494* 10^{-7}$	$2.476887815561* 10^{-5}$
0.1	$8.735956402717* 10^{-10}$	$1.127202864382* 10^{-7}$
0.05	$1.353694933925* 10^{-11}$	$1.824446371756* 10^{-9}$
0.01	0	$6.394884621841* 10^{-14}$

h	$error_2$ (0.5)	$error_2$ (3.5)
0.25	$7.014448222264 * 10^{-8}$	$1.886683123967 * 10^{-8}$
0.1	$3.037493589986 * 10^{-10}$	$9.664379019281 * 10^{-11}$
0.05	$4.842459766508 * 10^{-12}$	$1.615738792760 * 10^{-12}$
0.01	$9.992007221626 * 10^{-16}$	$5.204170427930 * 10^{-17}$

Fehlberg Τύπος (7, 11) (2.6.2)

h	$error_1$ (0.5)	$error_1$ (3.5)
0.25	$1.297093987773 * 10^{-9}$	$2.529933027517 * 10^{-7}$
0.1	$7.192024753522 * 10^{-13}$	$2.453646175127 * 10^{-10}$
0.05	$2.220446049250 * 10^{-15}$	$1.435296326235 * 10^{-12}$
0.01	$1.776356839400 * 10^{-15}$	$8.526512829121 * 10^{-14}$

h	$error_2$ (0.5)	$error_2$ (3.5)
0.25	$6.003659791531 * 10^{-10}$	$2.736336331133 * 10^{-10}$
0.1	$5.161426841482 * 10^{-13}$	$3.114661306647 * 10^{-13}$
0.05	$2.664535259100 * 10^{-15}$	$2.012279232133 * 10^{-15}$
0.01	$1.110223024625 * 10^{-16}$	$1.908195823574 * 10^{-16}$

Shanks Τύπος (8, 12) (2.7.3)

h	$error_1$ (0.5)	$error_1$ (3.5)
0.25	$4.013243071199 * 10^{-10}$	$5.633628319401 * 10^{-8}$
0.1	$2.648992136756 * 10^{-13}$	$3.706190909725 * 10^{-11}$
0.05	$4.440892098501 * 10^{-16}$	$7.105427357601 * 10^{-15}$
0.01	$2.220446049250 * 10^{-16}$	$2.060573933704 * 10^{-13}$

h	$error_2$ (0.5)	$error_2$ (3.5)
0.25	$1.474831368142 * 10^{-10}$	$5.131770702826 * 10^{-11}$
0.1	$9.714451465470 * 10^{-14}$	$3.376465773641 * 10^{-14}$
0.05	$1.110223024625 * 10^{-16}$	$6.591949208712 * 10^{-17}$
0.01	$1.110223024625 * 10^{-16}$	$2.324529457809 * 10^{-16}$

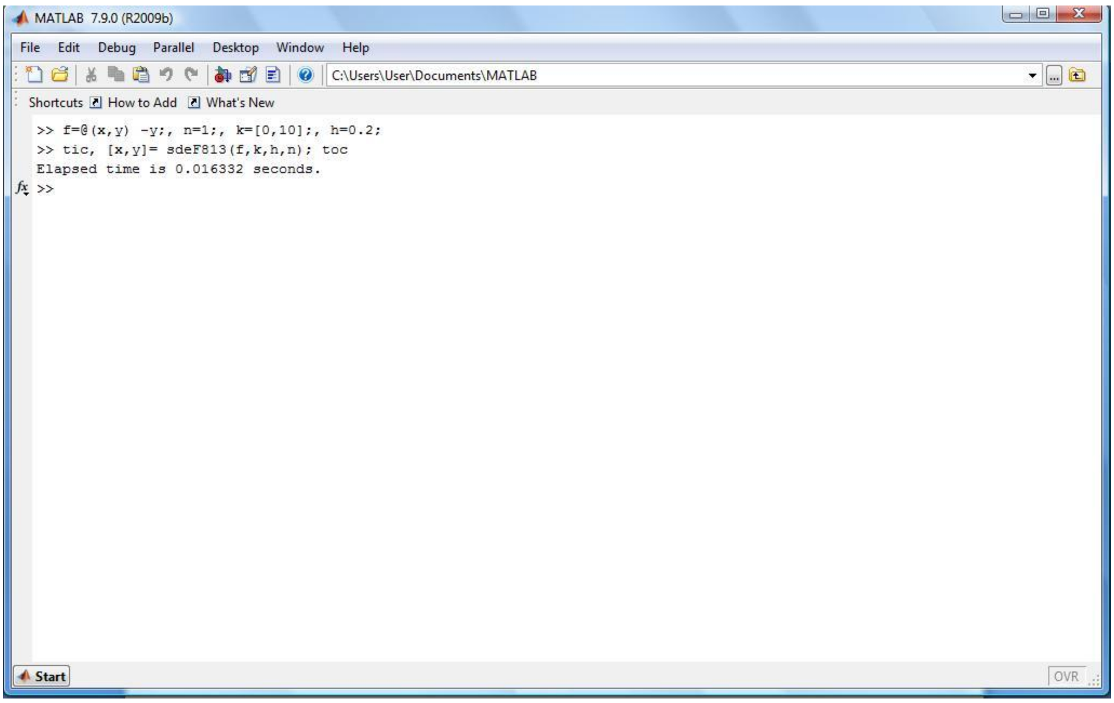
Όπως φαίνεται, κάθε μέθοδος αποδίδει εξαιρετικές προσεγγίσεις προς τις ακριβείς τιμές για τις δ.ε. 1 , 2 και 3. Η δ.ε. 4 ολοκληρώνεται επίσης καλά αλλά η αλληλεπίδραση των δύο μεταβλητών αποδίδει αποτελέσματα που δεν είναι τόσο καλά όσο τα αποτελέσματα μονών στοιχείων όπως αυτά που δίνονται από στις δ.ε. 1 και 2. Παρόμοια συμπεριφορά έχει παρατηρηθεί κατά την διάρκεια πολλών αριθμητικών υπολογισμών στην βιβλιογραφία.

Ακόμη παρατηρούμε ότι είναι συχνά δύσκολη η διάκριση μεταξύ των μεθόδων Runge-Kutta της ίδιας τάξης και συχνά μεταξύ μεθόδων παρακείμενων τάξεων. Ωστόσο, γενικά, ένας ανώτερης τάξης τύπος, όπως ήταν αναμενόμενο, αποδίδει πάντα καλύτερα (με μεγαλύτερη ακρίβεια) αποτελέσματα από ένα χαμηλότερης τάξης τύπο. Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε και αν συγκρίνουμε τις τάξεις των παραπάνω μεθόδων, για διαφορετικές τιμές του h.

Επίσης παρατηρούμε ότι όταν το h αυξάνεται σε τιμές μεγαλύτερες του ένα, τότε αστάθειες, ανακρίβειες ακόμη και ταλαντώσεις συμβαίνουν και οι υπολογισμοί είναι άνευ αξίας σε αυτές τις μεγάλες τιμές του h. Όταν όμως το h παίρνει τιμές μικρότερες του 0.1 τότε οι ολοκληρώσεις μπορούν να πραγματοποιηθούν σε σχεδόν οποιαδήποτε επιθυμητή ακρίβεια. Ενώ το h μειώνεται μεγαλώνει η ακρίβεια των αποτελεσμάτων μέχρι που φτάνει σε ένα σημείο όπου το σφάλμα στρογγύλευσης γίνεται σημαντικό και περαιτέρω μείωση του h θα οδηγήσει σε μειωμένη ακρίβεια. Δηλαδή ένα ελάχιστο σημείο του σφάλματος εμφανίζεται σε σχέση με τα δεδομένα του h. Ποιοτικά αυτό μπορεί να ερμηνευθεί ότι οφείλεται στον ανταγωνισμό μεταξύ του φθίνοντος σφάλματος αποκοπής και του αύξοντος σφάλματος στρογγύλευσης. Δηλαδή η αύξηση του σφάλματος σε πολύ αυξημένες τιμές του h οφείλεται στην αύξηση του σφάλματος αποκοπής, ενώ η άνοδος του σφάλματος σε πολύ μικρές τιμές του h οφείλεται στην εισβολή του σφάλματος στρογγύλευσης. Έτσι, όπως έχει αναφερθεί και στο Κεφάλαιο 4, μπορεί να θεωρηθεί ότι η χρήση αριθμητικής διπλής ακρίβειας (με αύξηση του χρόνου υπολογισμού) επεκτείνει αποτελεσματικά την περιοχή της μείωσης του σφάλματος στρογγύλευσης.

Είναι ενδιαφέρον ότι το μέγιστο σφάλμα των αποτελεσμάτων της δ.ε. 4 που υπολογίζονται με τη μέθοδο Gill (4,4) και h=0.2 είναι maxe = 14.096337847997347, ενώ η ίδια μέθοδος με h= 0.01 δίνει maxe= $8.347317634616 * 10^{-5}$. Ακόμη με h=0.2 και με την μέθοδο του Fehlberg (8, 13) το μέγιστο σφάλμα των αποτελεσμάτων της ίδιας δ.ε. είναι maxe =$7.169881428126 * 10^{-6}$. Τέλος ένας συνδυασμός της μεθόδου Fehlberg (8, 13) με την τιμή του h=0.01 δίνει maxe = $3.445165930315852 * 10^{-9}$. Με αυτή την παρατήρηση επιβεβαιώνονται για ακόμη μια φορά τα παραπάνω συμπεράσματα.

Στην συνέχεια ο πίνακας 5.1.6 παρουσιάζει τον χρόνο υπολογισμού (t) που χρειάζεται η κάθε μέθοδος του Πίνακα 5.1.4 χρησιμοποιώντας την εντολές tic και toc του Matlab. Για παράδειγμα ο χρόνος υπολογισμού της μεθόδου Fehlberg (8, 13) με h=0.2 στο διάστημα [0,10] για την δ.ε. 1 εμφανίζεται στο Matlab ως εξής:



Πίνακας 5.1.6

Τύπος Runge-Kutta	δ.ε. 1: χρόνος (t)	δ.ε. 2 χρόνος (t)	δ.ε. 3 χρόνος (t)
Κλασικός Τύπος (4, 4):	0.006073	0.005798	0.005901
Butcher Τύπος (5, 6):	0.006955	0.007374	0.006657
Butcher Τύπος (6, 7):	0.008323	0.008789	0.007410
Fehlberg Τύπος (7, 11):	0.014214	0.014843	0.01165
Shanks Τύπος (8, 12):	0.017610	0.016911	0.013250

Τύπος Runge-Kutta	δ.ε. 4: χρόνος (t)
Κλασικός Τύπος (4, 4):	0.005673
Butcher Τύπος (5, 6):	0.006958
Butcher Τύπος (6, 7):	0.007630
Fehlberg Τύπος (7, 11):	0.011856
Shanks Τύπος (8, 12):	0.013496

Η αύξηση του χρόνου υπολογισμού καθώς αυξάνεται η τάξη της κάθε μεθόδου οφείλεται στην παράλληλη αύξηση του αριθμού των συναρτήσεων αξιολόγησης ν. Η αυξανόμενη ακρίβεια που επιτυγχάνεται μεταξύ γειτονικής τάξης μεθόδων είναι μεταξύ του δέκα και του εκατό και από τέταρτης σε όγδοης τάξης είναι μεταξύ του 10^6 και 10^8 ενώ οι αντίστοιχοι χρόνοι υπολογισμού είναι περίπου το ίδιο. Έτσι σύμφωνα με αυτά τα αποτελέσματα φαίνεται ότι ο πρόσθετος χρόνος υπολογισμού είναι λιγότερο σημαντικός από το μειωμένο σφάλμα.

Με βάση αυτά τα αποτελέσματα, το συμπέρασμα φαίνεται να είναι ότι οι όγδοης τάξης μέθοδοι και η έβδομης τάξης μέθοδος του Fehlberg (7, 11) είναι προτιμότεροι όταν επιθυμούμε υψηλή ακρίβεια.

Στην συνέχεια θα δώσουμε δύο ακόμη πίνακες έτσι ώστε να έχουμε μια καλύτερη εικόνα για την συμπεριφορά των μεθόδων Runge-Kutta όγδοης τάξης και τη μέθοδο του Fehlberg (7, 11). Ο πίνακας 5.1.7 παρουσιάζει το σφάλμα για h = 0.5 και για h = 0.1 στις τιμές x = 0.5 και x = 10 και ο πίνακας 5.1.8 παρουσιάζει τον χρόνο υπολογισμού (t) που χρειάζονται οι παραπάνω μέθοδοι για h=0.1.

Πίνακας 5.1.7

Για δ.ε. 1:

Μέθοδος	h	error(0.5)	error(10)
Fehlberg Τύπος (8, 15):	0.5	$2.117458286488 * 10^{-8}$	$3.169911491093 * 10^{-11}$
	0.1	$6.772360450213 * 10^{-15}$	$1.011696152201 * 10^{-17}$
Shanks Τύπος (8, 12):	0.5	$1.860510279172 * 10^{-8}$	$2.785251158399 * 10^{-11}$
	0.1	$2.864375403533 * 10^{-14}$	$4.306315503841 * 10^{-17}$
Shanks Τύπος (8, 10):	0.5	$4.676392162395 * 10^{-9}$	$7.000730697189 * 10^{-12}$
	0.1	$7.993605777301 * 10^{-15}$	$1.163484456348 * 10^{-17}$
Fehlberg Τύπος (7, 11):	0.5	$5.818175830008 * 10^{-9}$	$8.710021256759 * 10^{-12}$
	0.1	$5.384581669432 * 10^{-14}$	$8.027161834540 * 10^{-17}$

Για δ.ε. 2:

Μέθοδος	h	error(0.5)	error(10)
Fehlberg Τύπος (8, 15):	0.5	$2.639914714608 * 10^{-8}$	$2.943139065792 * 10^{-9}$
	0.1	$1.410815908542 * 10^{-13}$	$1.421085471520 * 10^{-14}$
Shanks Τύπος (8, 12):	0.5	$1.976414171212 * 10^{-9}$	$2.247340091799 * 10^{-10}$
	0.1	$3.358424649491 * 10^{-15}$	$1.243449787580 * 10^{-14}$
Shanks Τύπος (8, 10):	0.5	$1.011535154943 * 10^{-7}$	$1.464171184295 * 10^{-8}$
	0.1	$1.210198607993 * 10^{-12}$	$1.705302565824 * 10^{-13}$
Fehlberg Τύπος (7, 11):	0.5	$2.639914714608 * 10^{-8}$	$2.943139065792 * 10^{-9}$
	0.1	$1.410815908542 * 10^{-13}$	$1.421085471520 * 10^{-14}$

<u>Για δ.ε. 3:</u>

Μέθοδος	h	$error_1(0.5)$	$error_1(10)$
Fehlberg Τύπος (8, 15):	0.5	$1.561639373371 * 10^{-9}$	$1.723606479764 * 10^{-9}$
	0.1	$3.719247132494 * 10^{-15}$	$8.870681966755 * 10^{-14}$
Shanks Τύπος (8, 12):	0.5	$1.623149753494 * 10^{-8}$	$3.270798475397 * 10^{-7}$
	0.1	$3.874678355942 * 10^{-14}$	$7.523981437885 * 10^{-13}$
Shanks Τύπος (8, 10):	0.5	$4.473027948038 * 10^{-9}$	$8.947799745584 * 10^{-8}$
	0.1	$1.076916333886 * 10^{-14}$	$2.055022818581 * 10^{-13}$
Fehlberg Τύπος (7, 11):	0.5	$7.256585332627 * 10^{-10}$	$2.375100571772 * 10^{-8}$
	0.1	$3.358424649491 * 10^{-14}$	$7.803757640090 * 10^{-13}$

Μέθοδος	h	$error_2(0.5)$	$error_2(10)$
Fehlberg Τύπος (8, 15):	0.5	$1.957449258239 * 10^{-8}$	$3.927300215034 * 10^{-7}$
	0.1	$9.214851104389 * 10^{-15}$	$1.815214645262 * 10^{-13}$
Shanks Τύπος (8, 12):	0.5	$2.240729268799 * 10^{-9}$	$2.029151202620 * 10^{-8}$
	0.1	$1.554312234475 * 10^{-14}$	$3.619327060278 * 10^{-13}$
Shanks Τύπος (8, 10):	0.5	$1.799186355456 * 10^{-10}$	$3.134860926401 * 10^{-9}$
	0.1	$4.218847493576 * 10^{-15}$	$1.024735851729 * 10^{-13}$
Fehlberg Τύπος (7, 11):	0.5	$6.173477506977 * 10^{-9}$	$1.220297055626 * 10^{-7}$
	0.1	$7.471800955727 * 10^{-14}$	$1.436073482353 * 10^{-12}$

<u>Για δ.ε. 4:</u>

Μέθοδος	h	$error_1(0.5)$	$error_1(10)$
Fehlberg Τύπος (8, 15):	0.5	$5.966074545505 * 10^{-8}$	0.099091926018446
	0.1	$1.998401444325 * 10^{-15}$	$4.633693606593 * 10^{-8}$
Shanks Τύπος (8, 12):	0.5	$1.012493324737 * 10^{-7}$	0.026426175783854
	0.1	$2.648992136756 * 10^{-13}$	$7.011112757027 * 10^{-8}$
Shanks Τύπος (8, 10):	0.5	$7.391517153899 * 10^{-8}$	0.047078239054827
	0.1	$3.546052340653 * 10^{-13}$	$8.007045835257 * 10^{-7}$
Fehlberg Τύπος (7, 11):	0.5	$3.747085135508 * 10^{-7}$	0.103071894362074
	0.1	$7.192024753522 * 10^{-13}$	$1.060259819496 * 10^{-6}$

Μέθοδος	h	$error_2(0.5)$	$error_2(10)$
Fehlberg Τύπος (8, 15):	0.5	$1.139535121819 * 10^{-8}$	$2.541607404071 * 10^{-10}$
	0.1	$1.310063169058 * 10^{-14}$	$1.158402258665 * 10^{-16}$
Shanks Τύπος (8, 12):	0.5	$3.706577411666 * 10^{-8}$	$5.419622416185 * 10^{-11}$
	0.1	$9.714451465470 * 10^{-14}$	$1.443276379486 * 10^{-16}$
Shanks Τύπος (8, 10):	0.5	$7.821327141500 * 10^{-9}$	$1.260336893579 * 10^{-10}$
	0.1	$1.296740492762 * 10^{-13}$	$2.038869290413 * 10^{-15}$
Fehlberg Τύπος (7, 11):	0.5	$1.387030660327 * 10^{-7}$	$2.137267804888 * 10^{-10}$
	0.1	$5.161426841482 * 10^{-13}$	$2.562023943692 * 10^{-15}$

Πίνακας 5.1.8

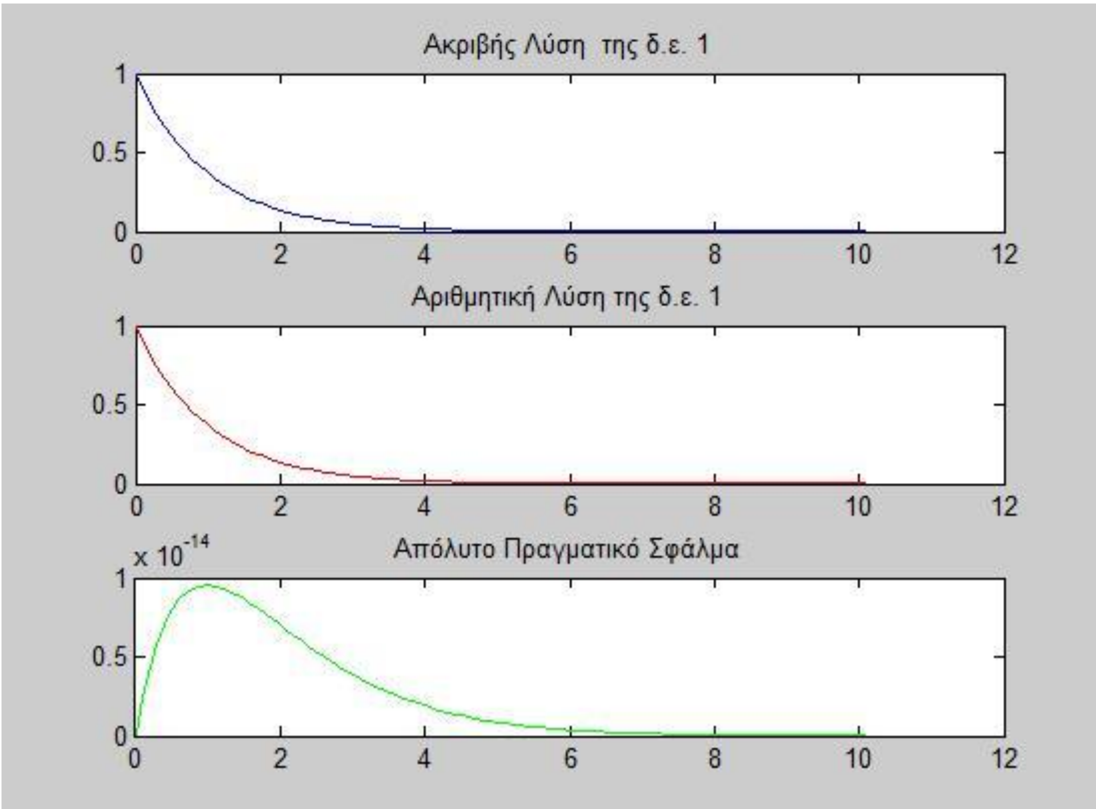
	δ.ε. 1	δ.ε. 2	δ.ε. 3
Μέθοδος	χρόνος(t)	χρόνος(t)	χρόνος(t)
Fehlberg Τύπος (8, 15):	0.039697	0.039473	0.025213
Shanks Τύπος (8, 12):	0.034080	0.030110	0.027235
Shanks Τύπος (8, 10):	0.026769	0.025007	0.020444
Fehlberg Τύπος (7, 11):	0.029698	0.028118	0.022110

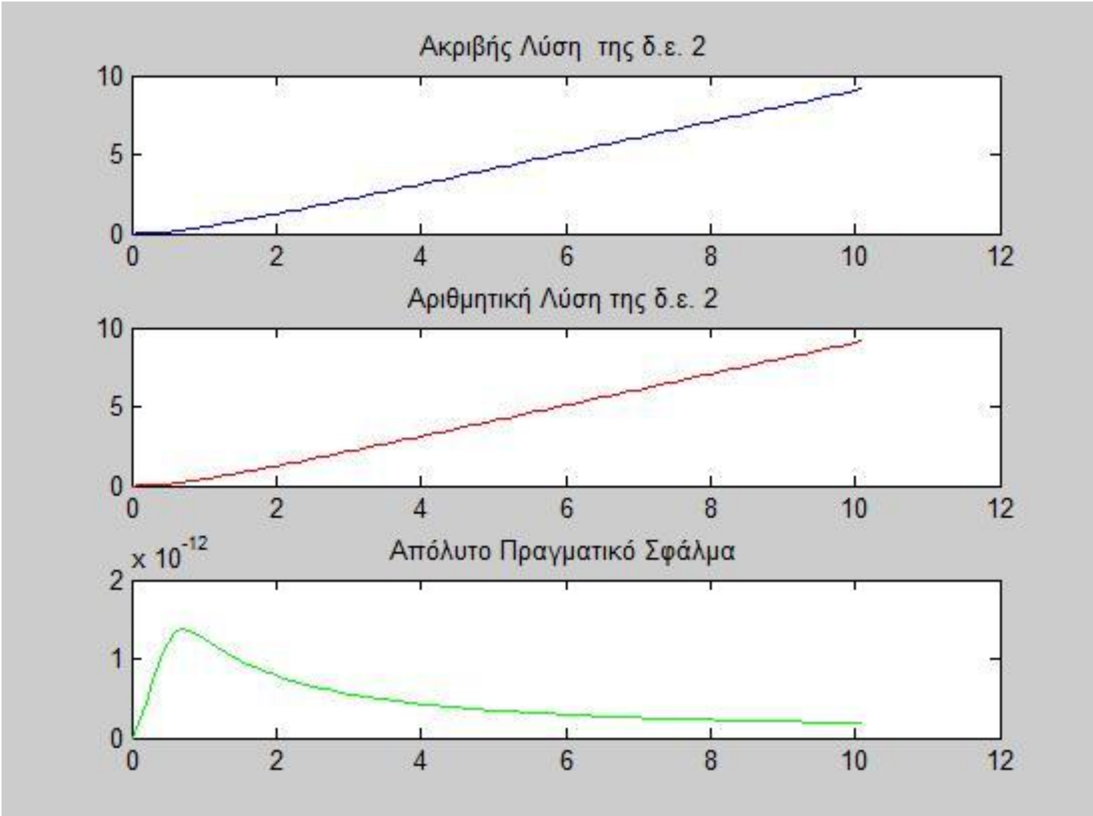
	δ.ε. 4
Μέθοδος	χρόνος(t)
Fehlberg Τύπος (8, 15):	0.025445
Shanks Τύπος (8, 12):	0.023644
Shanks Τύπος (8, 10):	0.018472
Fehlberg Τύπος (7, 11):	0.019759

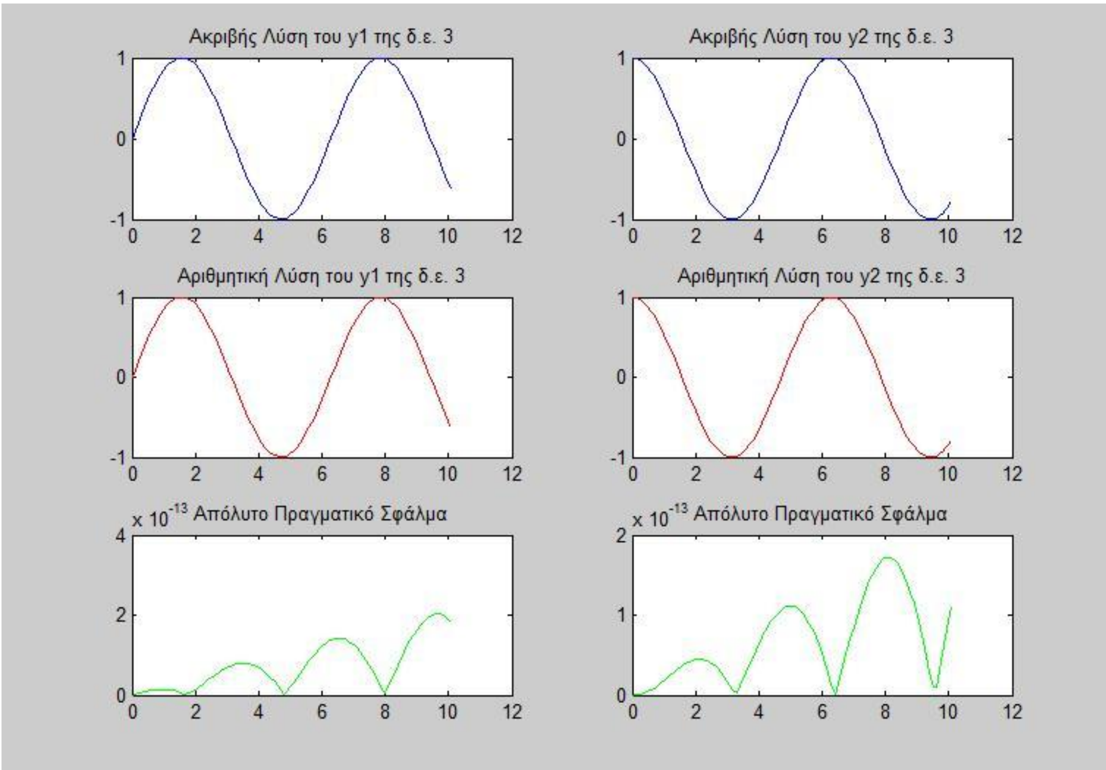
Οι διαφορές μεταξύ των παραπάνω μεθόδων στον χρόνο υπολογισμού και στην ακρίβεια των αποτελεσμάτων τους είναι ελάχιστες. Όπως ήταν αναμενόμενο, διαπιστώνουμε ξανά ότι η διάκριση μεταξύ μεθόδων της ίδιας τάξης είναι δύσκολη. Έτσι όποια απ τις παραπάνω μεθόδους και αν χρησιμοποιήσουμε είναι σχεδόν το ίδιο. Όμως θα μπορούσαμε να προτείνουμε την μέθοδο του Shanks (8, 10) επειδή χρειάζεται τις λιγότερες συναρτήσεις αξιολόγησης και δίνει πολύ ακριβή αποτελέσματα. Βέβαια, η επιλογή της μεθόδου εξαρτάται και από το πρόβλημα που είναι να επιλύσουμε.

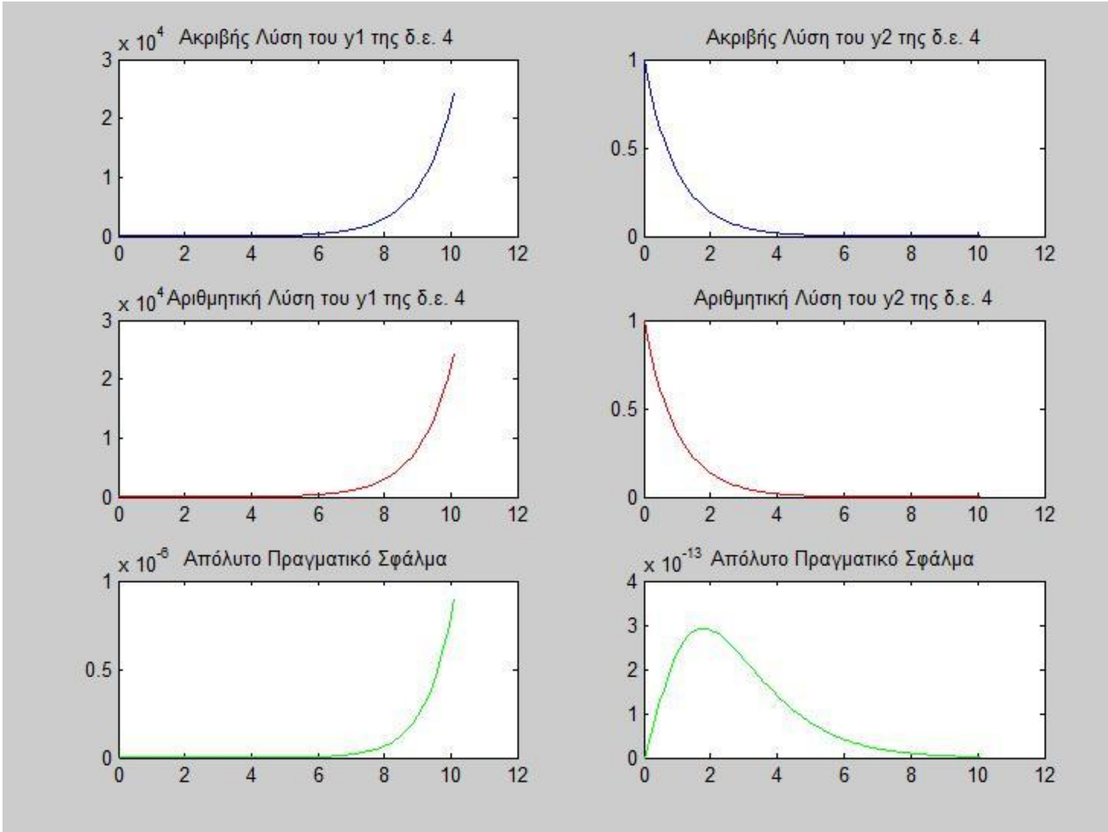
Θα κλείσουμε αυτή την ενότητα με τον πίνακα 5.1.9. Σε αυτόν δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των ακριβών λύσεων για κάθε δ.ε. του πίνακα 5.1.1 με μπλε χρώμα, οι αντίστοιχες των αριθμητικών λύσεων με κόκκινο και του πραγματικού σφάλματος με πράσινο, για κάθε $x \in [0,10]$. Η αριθμητική λύση κάθε δ.ε. έχει εκτιμηθεί με την μέθοδο του Shanks (8, 10) με h=0.1. Όλες οι γραφικές παραστάσεις έχουν υπολογιστεί στο Matlab και έχουν παρουσιαστεί όπως ακριβώς δίνονται από αυτό.

Πίνακας 5.1.9




Ακριβής Λύση της δ.ε. 2
Αριθμητική Λύση της δ.ε. 2
x 10^-12
Απόλυτο Πραγματικό Σφάλμα
0
2
4
6
8
10
12


Ακριβής Λύση του y1 της δ.ε. 3
Ακριβής Λύση του y2 της δ.ε. 3
Αριθμητική Λύση του y1 της δ.ε. 3
Αριθμητική Λύση του y2 της δ.ε. 3
x 10^-13 Απόλυτο Πραγματικό Σφάλμα
x 10^-13 Απόλυτο Πραγματικό Σφάλμα



Παρατηρούμε ότι με την μέθοδο του Shanks (8, 10) και με h=0.1 όλες οι λύσεις των δ.ε. προσεγγίζονται με εξαιρετική ακρίβεια. Κάτι που ισχύει και για όλες τις μεθόδους υψηλής τάξης.

5.2 Εκτιμήσεις Σφαλμάτων

Σε αυτή την ενότητα θέλουμε να ελέγξουμε την χρησιμότητα των μεθόδων του Κεφαλαίου 4 που προσεγγίζουν τη λύση μιας δ.ε. και παράλληλα εκτιμούν και το σφάλμα αποκοπής. Σε αυτήν την προσπάθεια θα μας βοηθήσουν οι παρακάτω πίνακες.

Στην αρχή θα παρουσιάσουμε μερικά αποτελέσματα των μεθόδων της ενότητας 4.1.1. Δεν θα ασχοληθούμε ιδιαίτερα με αυτές τις μεθόδους επειδή έχουν περιορισμένη εφαρμογή για το λόγο του ότι χρησιμοποιούνται μόνο όταν η f(x, y) είναι γραμμική. Ο πίνακας 5.2.1 παρουσιάζει για την δ.ε. 1 της προηγούμενης ενότητας και για επιλεγμένα x και h τα αντίστοιχα πραγματικά σφάλματα (e) και σφάλματα αποκοπής (T) που παίρνουμε χρησιμοποιώντας τις μεθόδους αυτές. Για τον λόγο που αναφέραμε πιο πριν, τα παρακάτω αποτελέσματα μόνο θα παρουσιασθούν χωρίς να σχολιαστούν.

Πίνακας 5.2.1

Merson Τύπος

h	x	T(x,h)	error (x)
0.1	0.5	$9.310001154959 * 10^{-9}$	$4.196068181805 * 10^{-8}$
	1.0	$5.646801530534 * 10^{-9}$	$5.090088189830 * 10^{-8}$
	2.8	$9.334102476765 * 10^{-10}$	$2.355880866084 * 10^{-8}$
	4.0	$2.811378107673 * 10^{-10}$	$1.013682485867 * 10^{-8}$
0.01	0.5	$8.508711675052 * 10^{-14}$	$4.211964110823 * 10^{-12}$
	1.0	$5.160790776208 * 10^{-14}$	$5.109357381627 * 10^{-12}$
	2.8	$8.530766515645 * 10^{-15}$	$2.364809736921 * 10^{-12}$
	4.0	$2.569407360486 * 10^{-15}$	$1.017526340963 * 10^{-12}$

Scraton Τύπος

h	x	T(x,h)	error (x)
0.1	0.5	-0.001597675149832	0.028924444676920
	1.0	-0.001015250829117	0.035923748523296
	2.8	$-1.984626994019 * 10^{-4}$	0.018125968506751
	4.0	$-6.684710264077 * 10^{-5}$	0.008271951580583
0.01	0.5	$-1.389950064946 * 10^{-5}$	0.002746453048786
	1.0	$-8.468647624528 * 10^{-6}$	0.003339158963448
	2.8	$-1.422812179408 * 10^{-6}$	0.001558141710605
	4.0	$-4.332147635496 * 10^{-7}$	$6.740965699538 * 10^{-4}$

Στην συνέχεια θα ασχοληθούμε με τις μεθόδους που παρουσιάσθηκαν στις ενότητες 4.1.2 και 4.1.3. Αυτές οι μέθοδοι, σε αντίθεση με αυτές του Merson και του Scraton, ισχύουν για κάθε δ.ε. Για να έχουμε μια εικόνα για την συμπεριφορά τους θα δοθεί ο πίνακας 5.2.2. Ο πίνακας αυτός παρουσιάζει για τις δ.ε. της προηγούμενης ενότητας και για επιλεγμένα x και h τα αντίστοιχα πραγματικά σφάλματα (π.χ. e_4 και e_6 για y_4 και y_6 αντίστοιχα), την εκτίμηση των σφαλμάτων αποκοπής (T) και την εκτίμηση του σφάλματος (ε) που παίρνουμε χρησιμοποιώντας τις μεθόδους που αναφέραμε.

Πίνακας 5.2.2

Για δ.ε. 1:

Sarafyan Τύπος (4, 4) σε (5, 6)

h	x	T(x,h)	e_4 (x)
0.1	0.5	----------------------------	$4.568468026100 * 10^{-8}$
	1.0	----------------------------	$2.069049342968 * 10^{-8}$
	4.0	----------------------------	$1.066513627412 * 10^{-9}$
	10.0	----------------------------	$1.303768665294 * 10^{-11}$
0.01	0.5	----------------------------	$4.048983370808 * 10^{-13}$
	1.0	----------------------------	$1.810218641651 * 10^{-13}$
	4.0	----------------------------	$1.030078800035 * 10^{-14}$
	10.0	----------------------------	$1.210918301395 * 10^{-16}$

h	x	e_5 (x)	ε(x)
0.1	0.5	$1.157182283329 * 10^{-8}$	$5.725650309429 * 10^{-8}$
	1.0	$1.403733052019 * 10^{-8}$	$3.472782394986 * 10^{-8}$
	4.0	$2.795509972814 * 10^{-9}$	$1.728996345401 * 10^{-9}$
	10.0	$1.732343913094 * 10^{-11}$	$4.285752478004 * 10^{-12}$
0.01	0.5	$8.508711675052 * 10^{-14}$	$5.119238366547 * 10^{-13}$
	1.0	$1.293964935201 * 10^{-13}$	$3.104183576852 * 10^{-13}$
	4.0	$2.575370472435 * 10^{-14}$	$1.545291672400 * 10^{-14}$
	10.0	$1.594048244097 * 10^{-16}$	$3.831299427021 * 10^{-17}$

Fehlberg Τύπος (5, 6) σε (6, 8)

h	x	$T_5(x,h)$	$e_6(x)$
0.1	0.5	$3.227466868045 * 10^{-11}$	$3.734397235888 * 10^{-10}$
	1.0	$1.957557632407 * 10^{-11}$	$1.236317992426 * 10^{-9}$
	4.0	$9.746105700679 * 10^{-13}$	$4.576181295013 * 10^{-9}$
	10.0	$2.415818157772 * 10^{-15}$	$5.056916198626 * 10^{-9}$
0.01	0.5	$2.847837706395 * 10^{-18}$	$3.774758283725 * 10^{-15}$
	1.0	$1.727166915381 * 10^{-18}$	$1.160183060733 * 10^{-14}$
	4.0	$8.597641091282 * 10^{-20}$	$4.151540222708 * 10^{-14}$
	10.0	$2.131218315203 * 10^{-22}$	$4.579992526725 * 10^{-14}$

h	x	$e_5(x)$	$\varepsilon(x)$
0.1	0.5	$1.617344702609 * 10^{-9}$	$1.990784426198 * 10^{-9}$
	1.0	$1.961938167483 * 10^{-9}$	$3.198256159909 * 10^{-9}$
	4.0	$3.907166257110 * 10^{-10}$	$4.966897920733 * 10^{-9}$
	10.0	$2.421224252179 * 10^{-12}$	$5.059337422878 * 10^{-9}$
0.01	0.5	$1.432187701766 * 10^{-14}$	$1.809663530139 * 10^{-14}$
	1.0	$1.731947918415 * 10^{-14}$	$2.892130979148 * 10^{-14}$
	4.0	$3.445160823290 * 10^{-15}$	$4.496056305037 * 10^{-14}$
	10.0	$2.137911158870 * 10^{-17}$	$4.582130437884 * 10^{-14}$

Fehlberg Τύπος (6, 8) σε (7, 10)

h	x	$T_6(x,h)$	$e_7(x)$
0.1	0.5	$-1.709582321386 * 10^{-13}$	$2.016276035022 * 10^{-12}$
	1.0	$-1.036914175922 * 10^{-13}$	$6.595335388937 * 10^{-12}$
	4.0	$-5.162492170506 * 10^{-15}$	$2.424905068410 * 10^{-11}$
	10.0	$-1.279653111397 * 10^{-17}$	$2.678622330454 * 10^{-11}$
0.01	0.5	$-1.766847984791 * 10^{-21}$	$9.992007221626 * 10^{-16}$
	1.0	$-1.060108790875 * 10^{-21}$	$1.165734175856 * 10^{-15}$
	4.0	$-5.521399952472 * 10^{-23}$	$9.540979117872 * 10^{-16}$
	10.0	$-1.509757799504 * 10^{-25}$	$9.525664762186 * 10^{-16}$

h	x	$e_6(x)$	$\varepsilon(x)$
0.1	0.5	$8.528733275170 * 10^{-12}$	$1.054500931019 * 10^{-11}$
	1.0	$1.034555774382 * 10^{-11}$	$1.694089313275 * 10^{-11}$
	4.0	$2.060289439054 * 10^{-12}$	$2.630934012315 * 10^{-11}$
	10 .0	$1.276745636297 * 10^{-14}$	$2.679899076090 * 10^{-11}$
0.01	0.5	$1.110223024625 * 10^{-16}$	$1.110223024625 * 10^{-15}$
	1.0	$2.220446049250 * 10^{-16}$	$1.387778780781 * 10^{-15}$
	4.0	$1.040834085586 * 10^{-17}$	$9.645062526431 * 10^{-16}$
	10.0	$1.084202172486 * 10^{-19}$	$9.526748964359 * 10^{-16}$

Fehlberg Τύπος (7, 11) σε (8, 13)

h	x	$T_7(x,h)$	$e_8(x)$
0.1	0.5	$-1.099334743608 * 10^{-15}$	$1.398881011028 * 10^{-14}$
	1.0	$-6.666996650518 * 10^{-16}$	$4.374278717023 * 10^{-14}$
	4.0	$-3.319527605836 * 10^{-17}$	$1.563263407611 * 10^{-13}$
	10.0	$-8.228551984730 * 10^{-20}$	$1.723664410530 * 10^{-13}$
0.01	0.5	$8.467102680363 * 10^{-22}$	$3.330669073875 * 10^{-16}$
	1.0	$2.116775670091 * 10^{-22}$	0
	4.0	$-3.968954381420 * 10^{-23}$	$2.081668171172 * 10^{-17}$
	10.0	$-2.583954675404 * 10^{-26}$	$2.708472552140 * 10^{-17}$

h	x	$e_7(x)$	$\varepsilon(x)$
0.1	0.5	$5.384581669432 * 10^{-14}$	$6.783462680460 * 10^{-14}$
	1.0	$6.528111384796 * 10^{-14}$	$1.090239010182 * 10^{-13}$
	4.0	$1.296879270640 * 10^{-14}$	$1.692951334675 * 10^{-13}$
	10.0	$8.027161834540 * 10^{-17}$	$1.724467126713 * 10^{-13}$
0.01	0.5	$3.330669073875 * 10^{-16}$	0
	1.0	0	0
	4.0	$4.510281037540 * 10^{-17}$	$2.428612866367 * 10^{-17}$
	10.0	$2.981555974335 * 10^{-19}$	$2.738288111884 * 10^{-17}$

Fehlberg Τύπος (8, 15) σε (9, 17)

h	x	$T_8(x,h)$	e_9 (x)
0.1	0.5	$-1.383932427919 * 10^{-16}$	$1.776356839400 * 10^{-15}$
	1.0	$-8.389730555940 * 10^{-17}$	$5.551115123126 * 10^{-15}$
	4.0	$-4.177542136733 * 10^{-18}$	$1.964053919501 * 10^{-14}$
	10.0	$-1.035588626524 * 10^{-20}$	$2.165025022325 * 10^{-14}$
0.01	0.5	$7.995295955470 * 10^{-22}$	$8.881784197001 * 10^{-16}$
	1.0	0	$1.443289932013 * 10^{-15}$
	4.0	$8.328433286948 * 10^{-24}$	$7.632783294298 * 10^{-16}$
	10.0	$1.626647126357 * 10^{-26}$	$7.794735993813 * 10^{-16}$

h	x	e_8 (x)	ε(x)
0.1	0.5	$6.772360450213 * 10^{-15}$	$8.548717289614 * 10^{-15}$
	1.0	$8.104628079764 * 10^{-15}$	$1.365574320289 * 10^{-14}$
	4.0	$1.630640067418 * 10^{-15}$	$2.127117926243 * 10^{-14}$
	10.0	$1.011696152201 * 10^{-17}$	$2.166036718477 * 10^{-14}$
0.01	0.5	$3.330669073875 * 10^{-16}$	$5.551115123126 * 10^{-16}$
	1.0	$6.661338147751 * 10^{-16}$	$7.771561172376 * 10^{-16}$
	4.0	$2.428612866367 * 10^{-17}$	$7.875644580935 * 10^{-16}$
	10.0	$1.897353801850 * 10^{-19}$	$7.796633347615 * 10^{-16}$

Για δ.ε. 2:

Sarafyan Τύπος (4, 4) σε (5, 6)

h	x	T(x,h)	e_4 (x)
0.1	0.5	----------------------------	$1.728362827857 \cdot 10^{-8}$
	1.0	----------------------------	$7.108135191558 \cdot 10^{-10}$
	4.0	----------------------------	$1.894536971747 \cdot 10^{-9}$
	10.0	----------------------------	$7.778666599734 \cdot 10^{-10}$
0.01	0.5	----------------------------	$1.519062653443 \cdot 10^{-13}$
	1.0	----------------------------	$1.110223024625 \cdot 10^{-15}$
	4.0	----------------------------	$2.753353101070 \cdot 10^{-14}$
	10.0	----------------------------	$6.927791673661 \cdot 10^{-14}$

h	x	e_5 (x)	ε(x)
0.1	0.5	$4.287254384838 \cdot 10^{-9}$	$2.157088266341 \cdot 10^{-8}$
	1.0	$5.080325105045 \cdot 10^{-9}$	$5.791138624200 \cdot 10^{-9}$
	4.0	$1.895898549264 \cdot 10^{-9}$	$1.361577517400 \cdot 10^{-12}$
	10.0	$7.778666599734 \cdot 10^{-10}$	0
0.01	0.5	$4.148070775756 \cdot 10^{-14}$	$1.933869731019 \cdot 10^{-13}$
	1.0	$4.818367926873 \cdot 10^{-14}$	$4.707345624411 \cdot 10^{-14}$
	4.0	$2.753353101070 \cdot 10^{-14}$	0
	10.0	$7.105427357601 \cdot 10^{-14}$	$1.776356839400 \cdot 10^{-15}$

Fehlberg Τύπος (5, 6) σε (6, 8)

h	x	$T_5(x,h)$	e_6 (x)
0.1	0.5	$4.916125061752 * 10^{-12}$	$2.448138913813 * 10^{-11}$
	1.0	$9.171483017489 * 10^{-13}$	$8.542172524883 * 10^{-11}$
	4.0	$6.728624391668 * 10^{-17}$	$3.430868922294 * 10^{-10}$
	10.0	$-3.154042683594 * 10^{-19}$	$4.262705743940 * 10^{-10}$
0.01	0.5	$4.159393788990 * 10^{-19}$	$3.191891195797 * 10^{-16}$
	1.0	$6.373794589763 * 10^{-20}$	$1.054711873394 * 10^{-15}$
	4.0	$-3.942553354493 * 10^{-21}$	$8.437694987151 * 10^{-15}$
	10.0	$-2.628368902995 * 10^{-21}$	$6.217248937901 * 10^{-14}$

h	x	e_5 (x)	ε(x)
0.1	0.5	$3.337085885402 * 10^{-10}$	$3.581899776783 * 10^{-10}$
	1.0	$3.801318149144 * 10^{-10}$	$4.655535401632 * 10^{-10}$
	4.0	$1.410458416728 * 10^{-10}$	$4.841327339022 * 10^{-10}$
	10.0	$5.786482404346 * 10^{-11}$	$4.841353984375 * 10^{-10}$
0.01	0.5	$3.275157922644 * 10^{-15}$	$3.594347042224 * 10^{-15}$
	1.0	$3.386180225107 * 10^{-15}$	$4.440892098501 * 10^{-15}$
	4.0	$4.884981308351 * 10^{-15}$	$3.552713678800 * 10^{-15}$
	10.0	$4.085620730621 * 10^{-14}$	$2.131628207280 * 10^{-14}$

Fehlberg Τύπος (6, 8) σε (7, 10)

h	x	$T_6(x,h)$	$e_7(x)$
0.1	0.5	$-1.615368332924 * 10^{-14}$	$7.902845045038 * 10^{-13}$
	1.0	$-9.319617094511 * 10^{-14}$	$8.487099911747 * 10^{-13}$
	4.0	$-6.162765770952 * 10^{-18}$	$1.192379528447 * 10^{-12}$
	10.0	0	$1.874056465567 * 10^{-12}$
0.01	0.5	$-7.067391939165 * 10^{-22}$	$6.938893903907 * 10^{-17}$
	1.0	$-1.060108790875 * 10^{-21}$	$1.665334536938 * 10^{-16}$
	4.0	$-2.826956775666 * 10^{-21}$	$1.065814103640 * 10^{-14}$
	10.0	$-1.413478387833 * 10^{-21}$	$6.394884621841 * 10^{-14}$

h	x	$e_6(x)$	$\varepsilon(x)$
0.1	0.5	$4.952288579218 * 10^{-12}$	$5.742573083722 * 10^{-12}$
	1.0	$9.421907698481 * 10^{-13}$	$9.348077867344 * 10^{-14}$
	4.0	$1.159961016128 * 10^{-12}$	$2.352340544576 * 10^{-12}$
	10.0	$4.831690603169 * 10^{-13}$	$2.357225525884 * 10^{-12}$
0.01	0.5	$1.387778780781 * 10^{-17}$	$8.326672684689 * 10^{-17}$
	1.0	$5.551115123126 * 10^{-17}$	$1.110223024625 * 10^{-16}$
	4.0	$1.154631945610 * 10^{-14}$	$8.881784197001 * 10^{-16}$
	10.0	$9.414691248821 * 10^{-14}$	$3.019806626980 * 10^{-14}$

Fehlberg Τύπος (7, 11) σε (8, 13)

h	x	$T_7(x,h)$	$e_8(x)$
0.1	0.5	$9.152260629258 * 10^{-16}$	$1.129651927556 * 10^{-14}$
	1.0	$-1.030954422361 * 10^{-16}$	$4.113376306236 * 10^{-14}$
	4.0	$6.773682144290 * 10^{-20}$	$1.110223024625 * 10^{-13}$
	10.0	0	$1.332267629550 * 10^{-13}$
0.01	0.5	0	$4.163336342344 * 10^{-17}$
	1.0	$4.233551340181 * 10^{-22}$	$5.551115123126 * 10^{-17}$
	4.0	$8.467102680363 * 10^{-22}$	$1.243449787580 * 10^{-14}$
	10.0	$1.693420536073 * 10^{-21}$	$6.572520305781 * 10^{-14}$

h	x	$e_7(x)$	$\varepsilon(x)$
0.1	0.5	$1.410815908542 * 10^{-13}$	$1.523781101298 * 10^{-13}$
	1.0	$1.085798118083 * 10^{-13}$	$1.497135748707 * 10^{-13}$
	4.0	$3.730349362740 * 10^{-14}$	$1.483257960899 * 10^{-13}$
	10.0	$1.421085471520 * 10^{-14}$	$1.474376176702 * 10^{-13}$
0.01	0.5	$2.775557561563 * 10^{-17}$	$1.387778780781 * 10^{-17}$
	1.0	$1.110223024625 * 10^{-16}$	$5.551115123126 * 10^{-17}$
	4.0	$1.199040866595 * 10^{-14}$	$4.440892098501 * 10^{-16}$
	10.0	$6.394884621841 * 10^{-14}$	$1.776356839400 * 10^{-15}$

Fehlberg Τύπος (8, 15) σε (9, 17)

h	x	$T_8(x,h)$	$e_9(x)$
0.1	0.5	$-8.229824636831 * 10^{-18}$	$6.938893903907 * 10^{-17}$
	1.0	$-1.364530509734 * 10^{-18}$	$1.665334536937 * 10^{-16}$
	4.0	0	$1.776356839400 * 10^{-15}$
	10.0	0	$1.776356839400 * 10^{-15}$
0.01	0.5	0	$1.387778780781 * 10^{-17}$
	1.0	0	$5.551115123126 * 10^{-17}$
	4.0	$5.330197303647 * 10^{-22}$	$4.440892098501 * 10^{-15}$
	10.0	$-1.066039460729 * 10^{-21}$	$4.973799150321 * 10^{-14}$

h	x	$e_8(x)$	$\varepsilon(x)$
0.1	0.5	$5.551115123126 * 10^{-17}$	$1.249000902703 * 10^{-16}$
	1.0	$2.220446049250 * 10^{-16}$	$3.885780586188 * 10^{-16}$
	4.0	$8.881784197001 * 10^{-16}$	$8.881784197001 * 10^{-16}$
	10.0	$8.881784197001 * 10^{-15}$	$7.105427357601 * 10^{-15}$
0.01	0.5	$2.775557561563 * 10^{-17}$	$4.163336342344 * 10^{-17}$
	1.0	$5.551115123126 * 10^{-17}$	0
	4.0	$9.325873406851 * 10^{-15}$	$4.884981308351 * 10^{-15}$
	10.0	$7.993605777301 * 10^{-14}$	$3.019806626980 * 10^{-14}$

Για δ.ε. 3:

Sarafyan Τύπος (4, 4) σε (5, 6)

h	x	$T_1(x,h)$	$e_{14}(x)$
0.1	0.5	----------------------------	$7.071475738307 * 10^{-8}$
	1.0	----------------------------	$2.611253635543 * 10^{-8}$
	4.0	----------------------------	$3.416510407916 * 10^{-8}$
	10.0	----------------------------	$8.556684005789 * 10^{-8}$
0.01	0.5	----------------------------	$6.543654507141 * 10^{-13}$
	1.0	----------------------------	$1.681987882307 * 10^{-13}$
	4.0	----------------------------	$4.906075545819 * 10^{-13}$
	10.0	----------------------------	$1.158850793104 * 10^{-12}$

h	x	$e_{15}(x)$	$\varepsilon_1(x)$
0.1	0.5	$6.851614775538 * 10^{-9}$	$7.756637215861 * 10^{-8}$
	1.0	$2.732022708063 * 10^{-8}$	$5.343276343606 * 10^{-8}$
	4.0	$9.609231799157 * 10^{-8}$	$6.192721391240 * 10^{-8}$
	10.0	$1.606193295034 * 10^{-7}$	$7.505248944550 * 10^{-8}$
0.01	0.5	$8.193445921734 * 10^{-14}$	$7.362999099314 * 10^{-13}$
	1.0	$2.907674101493 * 10^{-13}$	$4.589661983800 * 10^{-13}$
	4.0	$1.043054531635 * 10^{-12}$	$5.524469770535 * 10^{-13}$
	10.0	$1.863620369136 * 10^{-12}$	$7.047695760320 * 10^{-13}$

h	x	$T_2(x,h)$	$e_{24}(x)$
0.1	0.5	----------------------------	$4.648352469605 * 10^{-8}$
	1.0	----------------------------	$8.540896101472 * 10^{-8}$
	4.0	----------------------------	$1.560724610661 * 10^{-7}$
	10.0	----------------------------	$3.440927677234 * 10^{-7}$
0.01	0.5	----------------------------	$5.431211036466 * 10^{-13}$
	1.0	----------------------------	$8.856249067435 * 10^{-13}$
	4.0	----------------------------	$1.540545468970 * 10^{-12}$
	10.0	----------------------------	$3.376410262490 * 10^{-12}$

h	x	$e_{25}(x)$	$\varepsilon_2(x)$
0.1	0.5	$1.595087295581 * 10^{-8}$	$3.053265174024 * 10^{-8}$
	1.0	$2.142673749539 * 10^{-8}$	$6.398222351933 * 10^{-8}$
	4.0	$1.002709667519 * 10^{-7}$	$5.580149431417 * 10^{-8}$
	10.0	$3.078172482462 * 10^{-7}$	$3.627551947716 * 10^{-8}$
0.01	0.5	$1.527666881884 * 10^{-13}$	$3.903544154582 * 10^{-13}$
	1.0	$1.900701818158 * 10^{-13}$	$6.955547249277 * 10^{-13}$
	4.0	$9.168221737355 * 10^{-13}$	$6.237232952344 * 10^{-13}$
	10.0	$2.931876963430 * 10^{-12}$	$4.445332990599 * 10^{-13}$

Fehlberg Τύπος (5, 6) σε (6, 8)

h	x	$T_{15}(x,h)$	$e_{16}(x)$
0.1	0.5	$-1.632295845206* 10^{-11}$	$4.450968482672* 10^{-10}$
	1.0	$-3.511400503277* 10^{-11}$	$1.733420851302* 10^{-9}$
	4.0	$3.049670627563* 10^{-11}$	$2.011645849898* 10^{-8}$
	10.0	$1.953556624128* 10^{-11}$	$2.814622590552* 10^{-8}$
0.01	0.5	$-2.164461791617* 10^{-18}$	$5.495603971895* 10^{-15}$
	1.0	$-3.859102641823* 10^{-18}$	$1.798561299893* 10^{-14}$
	4.0	$3.461561845245* 10^{-18}$	$2.126077092157* 10^{-13}$
	10.0	$2.462781662106* 10^{-18}$	$3.284039706841* 10^{-13}$

h	x	$e_{15}(x)$	$\varepsilon_1(x)$
0.1	0.5	$8.105517368406* 10^{-10}$	$3.654548885734* 10^{-10}$
	1.0	$3.505137513571* 10^{-9}$	$1.771716662269* 10^{-9}$
	4.0	$1.216717560037* 10^{-8}$	$7.949282898601* 10^{-9}$
	10.0	$1.942953919976* 10^{-8}$	$8.716686705768* 10^{-9}$
0.01	0.5	$1.065814103640* 10^{-14}$	$5.162537064507* 10^{-15}$
	1.0	$3.830269434957* 10^{-14}$	$2.031708135064* 10^{-14}$
	4.0	$1.366684543314* 10^{-13}$	$7.593925488436* 10^{-14}$
	10.0	$2.452482661397* 10^{-13}$	$8.315570454442* 10^{-14}$

h	x	$T_{25}(x,h)$	$e_{26}(x)$
0.1	0.5	$-4.336285770692* 10^{-11}$	$9.240685994172* 10^{-11}$
	1.0	$-3.022884436452* 10^{-11}$	$1.041364550147* 10^{-9}$
	4.0	$3.488161727054* 10^{-11}$	$1.119113712811* 10^{-8}$
	10.0	$4.201354373828* 10^{-11}$	$4.035050549245* 10^{-8}$
0.01	0.5	$-4.094341658641* 10^{-18}$	$2.331468351713* 10^{-15}$
	1.0	$-2.556088758163* 10^{-18}$	$1.409983241274* 10^{-14}$
	4.0	$3.074534524279* 10^{-18}$	$9.015010959956* 10^{-14}$
	10.0	$3.920212218817* 10^{-18}$	$3.669287096386* 10^{-13}$

h	x	$e_{25}(x)$	$\varepsilon_2(x)$
0.1	0.5	$2.171855140176* 10^{-9}$	$2.264262000118* 10^{-9}$
	1.0	$3.034766105081* 10^{-9}$	$4.076130655228* 10^{-9}$
	4.0	$1.399616200715* 10^{-8}$	$2.805024879038* 10^{-9}$
	10.0	$4.209598913896* 10^{-8}$	$1.745483646509* 10^{-9}$
0.01	0.5	$2.009503674572* 10^{-14}$	$2.242650509743* 10^{-14}$
	1.0	$2.498001805407* 10^{-14}$	$3.907985046681* 10^{-14}$
	4.0	$1.224575996162* 10^{-13}$	$3.230749001659* 10^{-14}$
	10.0	$3.896882816434* 10^{-13}$	$2.275957200482* 10^{-14}$

Fehlberg Τύπος (6, 8) σε (7, 10)

h	x	$T_{16}(x,h)$	$e_{17}(x)$
0.1	0.5	$-2.450186195910 * 10^{-13}$	$8.600342660259 * 10^{-13}$
	1.0	$-1.560177938488 * 10^{-13}$	$7.332912055347 * 10^{-12}$
	4.0	$1.862759843493 * 10^{-13}$	$5.286981963337 * 10^{-11}$
	10.0	$2.350763256893 * 10^{-13}$	$2.190597703233 * 10^{-10}$
0.01	0.5	$-3.533695969582 * 10^{-21}$	$4.996003610813 * 10^{-16}$
	1.0	$-1.060108790875 * 10^{-21}$	$1.110223024625 * 10^{-15}$
	4.0	0	0
	10.0	$4.240435163499 * 10^{-21}$	$1.998401444325 * 10^{-15}$

h	x	$e_{16}(x)$	$\varepsilon_1(x)$
0.1	0.5	$1.223726675548 * 10^{-11}$	$1.309730102150 * 10^{-11}$
	1.0	$1.555100492823 * 10^{-11}$	$2.288391698357 * 10^{-11}$
	4.0	$7.433020865477 * 10^{-11}$	$2.146038902140 * 10^{-11}$
	10.0	$2.347626537613 * 10^{-10}$	$1.570288343800 * 10^{-11}$
0.01	0.5	0	$4.996003610813 * 10^{-16}$
	1.0	$4.440892098501 * 10^{-16}$	$6.661338147751 * 10^{-16}$
	4.0	$4.440892098501 * 10^{-16}$	$4.440892098501 * 10^{-16}$
	10.0	$2.109423746788 * 10^{-15}$	$1.110223024625 * 10^{-16}$

h	x	$T_{26}(x,h)$	$e_{27}(x)$
0.1	0.5	$1.230769061769 * 10^{-13}$	$2.619904293510 * 10^{-12}$
	1.0	$2.254782985837 * 10^{-13}$	$9.617084906210 * 10^{-12}$
	4.0	$-2.012046342294 * 10^{-13}$	$1.256852399933 * 10^{-10}$
	10.0	$-1.411420928692 * 10^{-13}$	$1.918847303273 * 10^{-10}$
0.01	0.5	$1.413478387833 * 10^{-21}$	$6.661338147751 * 10^{-16}$
	1.0	$1.413478387833 * 10^{-21}$	0
	4.0	$-2.120217581749 * 10^{-21}$	$2.442490654175 * 10^{-15}$
	10.0	$-2.120217581749 * 10^{-21}$	$1.887379141863 * 10^{-15}$

h	x	$e_{26}(x)$	$\varepsilon_2(x)$
0.1	0.5	$6.181388734205 * 10^{-12}$	$3.561484440695 * 10^{-12}$
	1.0	$2.258326858851 * 10^{-11}$	$1.296618368229 * 10^{-11}$
	4.0	$8.065104140087 * 10^{-11}$	$4.503419859248 * 10^{-11}$
	10.0	$1.416738948379 * 10^{-10}$	$5.021083548939 * 10^{-11}$
0.01	0.5	$1.110223024625 * 10^{-15}$	$4.440892098501 * 10^{-16}$
	1.0	$9.992007221626 * 10^{-16}$	$9.992007221626 * 10^{-16}$
	4.0	$1.998401444325 * 10^{-15}$	$4.440892098501 * 10^{-16}$
	10.0	$3.219646771413 * 10^{-15}$	$1.332267629550 * 10^{-15}$

Fehlberg Τύπος (7, 11) σε (8, 13)

h	x	$T_{17}(x,h)$	$e_{18}(x)$
0.1	0.5	$-6.348972273843 * 10^{-16}$	$1.765254609154 * 10^{-14}$
	1.0	$-1.279040530896 * 10^{-15}$	$6.272760089132 * 10^{-14}$
	4.0	$1.122805552238 * 10^{-15}$	$7.361888876289 * 10^{-13}$
	10.0	$7.462565618365 * 10^{-16}$	$1.084909939664 * 10^{-12}$
0.01	0.5	$8.467102680363 * 10^{-22}$	$2.775557561563 * 10^{-16}$
	1.0	$4.233551340181 * 10^{-22}$	$4.440892098501 * 10^{-16}$
	4.0	$2.116775670091 * 10^{-21}$	$2.997602166488 * 10^{-15}$
	10.0	$-8.467102680363 * 10^{-22}$	$9.992007221626 * 10^{-16}$

h	x	$e_{17}(x)$	$\varepsilon_1(x)$
0.1	0.5	$3.358424649491 * 10^{-14}$	$1.593170040337 * 10^{-14}$
	1.0	$1.304512053935 * 10^{-13}$	$6.772360450213 * 10^{-14}$
	4.0	$4.604094883121 * 10^{-13}$	$2.757793993169 * 10^{-13}$
	10.0	$7.803757640090 * 10^{-13}$	$3.045341756547 * 10^{-13}$
0.01	0.5	$3.330669073875 * 10^{-16}$	$5.551115123126 * 10^{-17}$
	1.0	$2.220446049250 * 10^{-16}$	$2.220446049250 * 10^{-16}$
	4.0	$2.553512956638 * 10^{-15}$	$4.440892098501 * 10^{-16}$
	10.0	$6.661338147751 * 10^{-16}$	$3.330669073875 * 10^{-16}$

h	x	$T_{27}(x,h)$	$e_{28}(x)$
0.1	0.5	$-1.506195961604 * 10^{-15}$	$4.551914400963 * 10^{-15}$
	1.0	$-1.017474794894 * 10^{-15}$	$4.263256414561 * 10^{-14}$
	4.0	$1.187697427180 * 10^{-15}$	$3.552713678801 * 10^{-13}$
	10.0	$1.454038609093 * 10^{-15}$	$1.363020807332 * 10^{-12}$
0.01	0.5	$-4.233551340181 * 10^{-22}$	$5.551115123126 * 10^{-16}$
	1.0	0	$4.440892098501 * 10^{-16}$
	4.0	0	$6.661338147751 * 10^{-16}$
	10.0	$8.467102680363 * 10^{-22}$	$4.440892098501 * 10^{-16}$

h	x	$e_{27}(x)$	$\varepsilon_2(x)$
0.1	0.5	$7.471800955727 * 10^{-14}$	$7.926992395824 * 10^{-14}$
	1.0	$9.892087149410 * 10^{-14}$	$1.415534356397 * 10^{-13}$
	4.0	$4.645173135032 * 10^{-13}$	$1.092459456231 * 10^{-13}$
	10.0	$1.436073482353 * 10^{-12}$	$7.305267502034 * 10^{-14}$
0.01	0.5	$5.551115123126 * 10^{-16}$	0
	1.0	$2.220446049250 * 10^{-16}$	$2.220446049250 * 10^{-16}$
	4.0	$1.110223024625 * 10^{-15}$	$4.440892098501 * 10^{-16}$
	10.0	$3.330669073875 * 10^{-16}$	$7.771561172376 * 10^{-16}$

Fehlberg Τύπος (8, 15) σε (9, 17)

h	x	$T_{18}(x,h)$	$e_{19}(x)$
0.1	0.5	$7.142464386887 * 10^{-17}$	$2.109423746788 * 10^{-15}$
	1.0	$1.526568507765 * 10^{-16}$	$7.993605777301 * 10^{-15}$
	4.0	$-1.327858752285 * 10^{-16}$	$8.859579736509 * 10^{-14}$
	10.0	$-8.536844001521 * 10^{-17}$	$1.263433802023 * 10^{-13}$
0.01	0.5	$-5.330197303647 * 10^{-22}$	$6.106226635438 * 10^{-16}$
	1.0	$-5.330197303647 * 10^{-22}$	$2.442490654175 * 10^{-15}$
	4.0	$5.330197303647 * 10^{-22}$	$9.992007221626 * 10^{-16}$
	10.0	$5.330197303647 * 10^{-22}$	$4.329869796038 * 10^{-15}$

h	x	$e_{18}(x)$	$\varepsilon_1(x)$
0.1	0.5	$3.719247132494 * 10^{-15}$	$1.609823385706 * 10^{-15}$
	1.0	$1.565414464721 * 10^{-14}$	$7.660538869914 * 10^{-15}$
	4.0	$5.428990590417 * 10^{-14}$	$3.430589146092 * 10^{-14}$
	10.0	$8.870681966755 * 10^{-14}$	$3.763656053479 * 10^{-14}$
0.01	0.5	$6.106226635438 * 10^{-16}$	0
	1.0	$1.887379141863 * 10^{-15}$	$5.551115123126 * 10^{-16}$
	4.0	$2.664535259100 * 10^{-15}$	$1.665334536938 * 10^{-15}$
	10.0	$5.107025913276 * 10^{-15}$	$7.771561172376 * 10^{-16}$

h	x	$T_{28}(x,h)$	$e_{29}(x)$
0.1	0.5	$1.878574737697 * 10^{-16}$	$3.330669073875 * 10^{-16}$
	1.0	$1.305258715717 * 10^{-16}$	$4.662936703426 * 10^{-15}$
	4.0	$-1.508232629040 * 10^{-16}$	$4.729550084903 * 10^{-14}$
	10.0	$-1.818663320004 * 10^{-16}$	$1.729727472366 * 10^{-13}$
0.01	0.5	$-2.665098651824 * 10^{-22}$	$8.881784197001 * 10^{-16}$
	1.0	$-5.330197303647 * 10^{-22}$	$5.551115123126 * 10^{-16}$
	4.0	0	$1.776356839400 * 10^{-15}$
	10.0	0	$4.218847493576 * 10^{-15}$

h	x	$e_{28}(x)$	$\varepsilon_2(x)$
0.1	0.5	$9.214851104389 * 10^{-15}$	$9.547918011776 * 10^{-15}$
	1.0	$1.265654248073 * 10^{-14}$	$1.731947918415 * 10^{-14}$
	4.0	$5.961897642237 * 10^{-14}$	$1.232347557334 * 10^{-14}$
	10.0	$1.815214645262 * 10^{-13}$	$8.548717289614 * 10^{-15}$
0.01	0.5	$1.221245327088 * 10^{-15}$	$3.330669073875 * 10^{-16}$
	1.0	$1.110223024625 * 10^{-15}$	$5.551115123126 * 10^{-16}$
	4.0	$1.665334536938 * 10^{-15}$	$1.110223024625 * 10^{-16}$
	10.0	$5.329070518201 * 10^{-15}$	$1.110223024625 * 10^{-15}$

Για δ.ε. 4:

Sarafyan Τύπος (4, 4) σε (5, 6)

h	x	$T_1(x,h)$	$e_{14}(x)$
0.1	0.5	----------------------------	$7.608549623672 * 10^{-7}$
	1.0	----------------------------	$1.011920085947 * 10^{-6}$
	4.0	----------------------------	$2.210005609768 * 10^{-4}$
	10.0	----------------------------	0.723948871411267
0.01	0.5	----------------------------	$7.994049866511 * 10^{-12}$
	1.0	----------------------------	$1.068700683504 * 10^{-11}$
	4.0	----------------------------	$2.196230752816 * 10^{-9}$
	10.0	----------------------------	$7.208887836896 * 10^{-6}$

h	x	$e_{15}(x)$	$\varepsilon_1(x)$
0.1	0.5	$1.578937005586 * 10^{-7}$	$6.029612618086 * 10^{-7}$
	1.0	$1.780312786082 * 10^{-8}$	$9.941169580863 * 10^{-7}$
	4.0	$2.409682404334 * 10^{-4}$	$1.996767945656 * 10^{-5}$
	10.0	0.732004816574772	0.008055945163505
0.01	0.5	$1.522115766761 * 10^{-12}$	$6.471934099750 * 10^{-12}$
	1.0	$1.687538997430 * 10^{-14}$	$1.067013144507 * 10^{-11}$
	4.0	$2.410551758203 * 10^{-9}$	$2.143210053873 * 10^{-10}$
	10.0	$7.295351679204 * 10^{-6}$	$8.646384230815 * 10^{-8}$

h	x	$T_2(x,h)$	$e_{24}(x)$
0.1	0.5	----------------------------	$9.624610008974 * 10^{-8}$
	1.0	----------------------------	$1.105499550236 * 10^{-7}$
	4.0	----------------------------	$1.271169817844 * 10^{-7}$
	10.0	----------------------------	$1.824999131417 * 10^{-9}$
0.01	0.5	----------------------------	$7.486233855047 * 10^{-13}$
	1.0	----------------------------	$1.237843161306 * 10^{-12}$
	4.0	----------------------------	$1.274907263094 * 10^{-12}$
	10.0	----------------------------	$1.819771004892 * 10^{-14}$

h	x	$e_{25}(x)$	$\varepsilon_2(x)$
0.1	0.5	$1.663128720297 * 10^{-7}$	$2.625589721195 * 10^{-7}$
	1.0	$2.698002485868 * 10^{-7}$	$1.592502935632 * 10^{-7}$
	4.0	$1.350456240619 * 10^{-7}$	$7.928642277444 * 10^{-9}$
	10.0	$1.844652061641 * 10^{-9}$	$1.965293022315 * 10^{-11}$
0.01	0.5	$1.672662008900 * 10^{-12}$	$2.421285394405 * 10^{-12}$
	1.0	$2.706446178280 * 10^{-12}$	$1.468603016974 * 10^{-12}$
	4.0	$1.348025857606 * 10^{-12}$	$7.311859451242 * 10^{-14}$
	10.0	$1.837894799458 * 10^{-14}$	$1.812379456581 * 10^{-16}$

Fehlberg Τύπος (5, 6) σε (6, 8)

h	x	$T_{15}(x,h)$	$e_{16}(x)$
0.1	0.5	$-3.670679648285 * 10^{-11}$	$9.437777226395 * 10^{-10}$
	1.0	$-6.051927814107 * 10^{-11}$	$8.091923131559 * 10^{-9}$
	4.0	$-1.215562418399 * 10^{-9}$	$3.327721231017 * 10^{-6}$
	10.0	$-4.903931870682 * 10^{-7}$	0.009080958789127
0.01	0.5	$-7.241156327752 * 10^{-18}$	$1.176836406103 * 10^{-14}$
	1.0	$-1.194067992631 * 10^{-17}$	$7.815970093361 * 10^{-14}$
	4.0	$-2.397072439532 * 10^{-16}$	$3.264943870818 * 10^{-11}$
	10.0	$-9.676300165169 * 10^{-14}$	$9.243012755178 * 10^{-8}$

h	x	$e_{15}(x)$	$\varepsilon_1(x)$
0.1	0.5	$5.739406727656 * 10^{-10}$	$1.517718395405 * 10^{-9}$
	1.0	$4.071910808534 * 10^{-9}$	$4.020012323025 * 10^{-9}$
	4.0	$3.202325473239 * 10^{-6}$	$1.253957577774 * 10^{-7}$
	10.0	0.009029428994836	$5.152979429113 * 10^{-5}$
0.01	0.5	$1.620925615953 * 10^{-14}$	$2.797762022055 * 10^{-14}$
	1.0	$6.217248937901 * 10^{-15}$	$7.194245199571 * 10^{-14}$
	4.0	$3.029043682545 * 10^{-11}$	$2.359001882724 * 10^{-12}$
	10.0	$9.144423529506 * 10^{-8}$	$9.858922567219 * 10^{-10}$

h	x	$T_{25}(x,h)$	$e_{26}(x)$
0.1	0.5	$-4.221931253675 * 10^{-11}$	$1.536403226865 * 10^{-10}$
	1.0	$-2.560730820360 * 10^{-11}$	$4.038462342315 * 10^{-10}$
	4.0	$-1.274912905873 * 10^{-12}$	$4.780054605608 * 10^{-9}$
	10.0	$-3.160192912821 * 10^{-15}$	$6.595651927121 * 10^{-9}$
0.01	0.5	$-2.951001185838 * 10^{-18}$	$1.998401444325 * 10^{-15}$
	1.0	$-1.790247769053 * 10^{-18}$	$2.664535259100 * 10^{-15}$
	4.0	$-8.909759898513 * 10^{-20}$	$3.175237850428 * 10^{-14}$
	10.0	$-2.209023424942 * 10^{-22}$	$4.927694130562 * 10^{-14}$

h	x	$e_{25}(x)$	$\varepsilon_2(x)$
0.1	0.5	$2.450555203204 * 10^{-9}$	$2.604195525890 * 10^{-9}$
	1.0	$3.779873858356 * 10^{-9}$	$4.183720092588 * 10^{-9}$
	4.0	$1.717270537577 * 10^{-9}$	$6.497325143184 * 10^{-9}$
	10.0	$2.259568841577 * 10^{-11}$	$6.618247615537 * 10^{-9}$
0.01	0.5	$2.153832667773 * 10^{-14}$	$1.953992523340 * 10^{-14}$
	1.0	$3.436140261215 * 10^{-14}$	$3.169686735305 * 10^{-14}$
	4.0	$1.686498163345 * 10^{-14}$	$4.861736013773 * 10^{-14}$
	10.0	$2.303794091260 * 10^{-16}$	$4.950732071475 * 10^{-14}$

Fehlberg Τύπος (6, 8) σε (7, 10)

h	x	$T_{16}(x,h)$	$e_{17}(x)$
0.1	0.5	$6.611274110473 * 10^{-12}$	$5.325651031285 * 10^{-11}$
	1.0	$1.090014759523 * 10^{-11}$	$3.523270564187 * 10^{-10}$
	4.0	$2.189353202435 * 10^{-10}$	$6.359637438891 * 10^{-8}$
	10.0	$8.832481213445 * 10^{-8}$	$7.704074596404 * 10^{-5}$
0.01	0.5	$6.502000584032 * 10^{-20}$	0
	1.0	$1.045974006996 * 10^{-19}$	$1.776356839400 * 10^{-15}$
	4.0	$2.125871495301 * 10^{-18}$	$2.131628207280 * 10^{-13}$
	10.0	$8.105450467189 * 10^{-16}$	$3.019522409886 * 10^{-10}$

h	x	$e_{16}(x)$	$\varepsilon_1(x)$
0.1	0.5	$3.266134029900 * 10^{-10}$	$2.733568926772 * 10^{-10}$
	1.0	$1.076373656872 * 10^{-9}$	$7.240466004532 * 10^{-10}$
	4.0	$8.618145841410 * 10^{-8}$	$2.258508402520 * 10^{-8}$
	10.0	$8.632180106360 * 10^{-5}$	$9.281055099564 * 10^{-6}$
0.01	0.5	$2.220446049250 * 10^{-16}$	$2.220446049250 * 10^{-16}$
	1.0	$3.552713678801 * 10^{-15}$	$1.776356839400 * 10^{-15}$
	4.0	$2.202682480856 * 10^{-13}$	$7.105427357601 * 10^{-15}$
	10.0	$3.092281986028 * 10^{-10}$	$7.275957614183 * 10^{-12}$

h	x	$T_{26}(x,h)$	$e_{27}(x)$
0.1	0.5	$-2.415918956658* 10^{-12}$	$2.914024577194* 10^{-11}$
	1.0	$-1.465328789377* 10^{-12}$	$9.406697643044* 10^{-11}$
	4.0	$-7.295442807285* 10^{-14}$	$3.429522915654* 10^{-10}$
	10.0	$-1.808359491545* 10^{-16}$	$3.785386326903* 10^{-10}$
0.01	0.5	$-2.473587178708* 10^{-20}$	$6.661338147751* 10^{-16}$
	1.0	$-1.448815347529* 10^{-20}$	$1.054711873394* 10^{-15}$
	4.0	$-7.177819938214* 10^{-22}$	$6.557254739192* 10^{-16}$
	10.0	$-1.833277327969* 10^{-24}$	$5.051501209517* 10^{-16}$

h	x	$e_{26}(x)$	$\varepsilon_2(x)$
0.1	0.5	$1.198796617530* 10^{-10}$	$1.490199075249* 10^{-10}$
	1.0	$1.453382414418* 10^{-10}$	$2.394052178722* 10^{-10}$
	4.0	$2.884430194694* 10^{-11}$	$3.717965935124* 10^{-10}$
	10.0	$1.775113733847* 10^{-13}$	$3.787161440637* 10^{-10}$
0.01	0.5	$1.110223024625* 10^{-16}$	$5.551115123126* 10^{-16}$
	1.0	$3.885780586188* 10^{-16}$	$6.661338147751* 10^{-16}$
	4.0	$1.561251128379* 10^{-16}$	$4.996003610813* 10^{-16}$
	10.0	$7.860465750520* 10^{-19}$	$5.043640743767* 10^{-16}$

<u>Fehlberg Τύπος (7, 11) σε (8, 13)</u>

h	x	$T_{17}(x,h)$	$e_{18}(x)$
0.1	0.5	$1.316465124743 * 10^{-14}$	$1.751931932858 * 10^{-13}$
	1.0	$2.170504516859 * 10^{-14}$	$1.494804280355 * 10^{-12}$
	4.0	$4.359606855414 * 10^{-13}$	$4.627054295270 * 10^{-10}$
	10.0	$1.758811170779 * 10^{-10}$	$1.041778887156 * 10^{-6}$
0.01	0.5	$1.693420536073 * 10^{-21}$	$1.776356839400 * 10^{-15}$
	1.0	0	$2.220446049250 * 10^{-15}$
	4.0	0	$2.344791028008 * 10^{-13}$
	10.0	$1.387250103151 * 10^{-17}$	$2.728484105319 * 10^{-10}$

h	x	$e_{17}(x)$	$\varepsilon_1(x)$
0.1	0.5	$7.192024753522 * 10^{-13}$	$5.440092820663 * 10^{-13}$
	1.0	$2.935873766319 * 10^{-12}$	$1.441069485963 * 10^{-12}$
	4.0	$5.076685738459 * 10^{-10}$	$4.496314431890 * 10^{-11}$
	10.0	$1.060259819496 * 10^{-6}$	$1.848093234003 * 10^{-8}$
0.01	0.5	$1.776356839400 * 10^{-15}$	0
	1.0	$2.220446049250 * 10^{-15}$	0
	4.0	$2.415845301584 * 10^{-13}$	$7.105427357601 * 10^{-15}$
	10.0	$2.692104317248 * 10^{-10}$	$3.637978807092 * 10^{-12}$

h	x	$T_{27}(x,h)$	$e_{28}(x)$
0.1	0.5	$-9.745025553705 * 10^{-15}$	$8.515410598875 * 10^{-14}$
	1.0	$-5.910647302286 * 10^{-15}$	$2.633449014411 * 10^{-13}$
	4.0	$-2.942720368803 * 10^{-16}$	$1.268825322587 * 10^{-12}$
	10.0	$-7.294276660653 * 10^{-19}$	$1.525280119222 * 10^{-12}$
0.01	0.5	$-1.270065402054 * 10^{-21}$	0
	1.0	$-6.350327010272 * 10^{-22}$	$5.551115123126 * 10^{-17}$
	4.0	$-5.291939175227 * 10^{-23}$	$2.463307335887 * 10^{-16}$
	10.0	0	$8.482526746983 * 10^{-17}$

h	x	$e_{27}(x)$	$\varepsilon_2(x)$
0.1	0.5	$5.161426841482 * 10^{-13}$	$6.012967901370 * 10^{-13}$
	1.0	$7.024381076803 * 10^{-13}$	$9.657830091214 * 10^{-13}$
	4.0	$2.310998614696 * 10^{-13}$	$1.499925184056 * 10^{-12}$
	10.0	$2.562023943692 * 10^{-15}$	$1.527842143165 * 10^{-12}$
0.01	0.5	$1.110223024625 * 10^{-16}$	$1.110223024625 * 10^{-16}$
	1.0	$1.665334536938 * 10^{-16}$	$1.110223024625 * 10^{-16}$
	4.0	$1.595945597899 * 10^{-16}$	$8.673617379884 * 10^{-17}$
	10.0	$4.540096597283 * 10^{-19}$	$8.437125781011 * 10^{-17}$

Fehlberg Τύπος (8, 15) σε (9, 17)

h	x	$T_{18}(x,h)$	$e_{19}(x)$
0.1	0.5	$6.890879074155 * 10^{-17}$	$6.661338147751 * 10^{-16}$
	1.0	$1.137677312490 * 10^{-16}$	$3.108624468950 * 10^{-14}$
	4.0	$2.289682195333 * 10^{-15}$	$1.679012484601 * 10^{-11}$
	10.0	$9.194097412145 * 10^{-13}$	$4.642424755730 * 10^{-8}$
0.01	0.5	$1.066039460729 * 10^{-21}$	$1.332267629550 * 10^{-15}$
	1.0	$2.132078921459 * 10^{-21}$	$8.881784197001 * 10^{-16}$
	4.0	0	$5.258016244625 * 10^{-13}$
	10.0	$8.732995262295 * 10^{-18}$	$7.457856554538 * 10^{-10}$

h	x	$e_{18}(x)$	$\varepsilon_1(x)$
0.1	0.5	$1.998401444325 * 10^{-15}$	$2.664535259100 * 10^{-15}$
	1.0	$2.353672812205 * 10^{-14}$	$7.549516567451 * 10^{-15}$
	4.0	$1.656275117057 * 10^{-11}$	$2.273736754432 * 10^{-13}$
	10.0	$4.633693606593 * 10^{-8}$	$8.731149137020 * 10^{-11}$
0.01	0.5	$1.110223024625 * 10^{-15}$	$2.220446049250 * 10^{-16}$
	1.0	0	$8.881784197001 * 10^{-16}$
	4.0	$5.044853423897 * 10^{-13}$	$2.131628207280 * 10^{-14}$
	10.0	$7.312337402254 * 10^{-10}$	$1.455191522837 * 10^{-11}$

h	x	$T_{28}(x,h)$	$e_{29}(x)$
0.1	0.5	$2.440803949286 * 10^{-16}$	$1.776356839400 * 10^{-15}$
	1.0	$1.480515603061 * 10^{-16}$	$4.329869796038 * 10^{-15}$
	4.0	$7.372329145607 * 10^{-18}$	$2.858130399019 * 10^{-14}$
	10.0	$1.826789788784 * 10^{-20}$	$3.800590078111 * 10^{-14}$
0.01	0.5	0	$2.220446049250 * 10^{-16}$
	1.0	$3.997647977735 * 10^{-22}$	$1.054711873394 * 10^{-15}$
	4.0	0	$5.932754287841 * 10^{-16}$
	10.0	0	$8.166888389519 * 10^{-16}$

h	x	$e_{28}(x)$	$\varepsilon_2(x)$
0.1	0.5	$1.310063169058 * 10^{-14}$	$1.487698852998 * 10^{-14}$
	1.0	$1.970645868710 * 10^{-14}$	$2.403632848313 * 10^{-14}$
	4.0	$8.836681386626 * 10^{-15}$	$3.741798537682 * 10^{-14}$
	10.0	$1.158402258665 * 10^{-16}$	$3.812174100698 * 10^{-14}$
0.01	0.5	$3.330669073875 * 10^{-16}$	$5.551115123126 * 10^{-16}$
	1.0	$2.775557561563 * 10^{-16}$	$7.771561172376 * 10^{-16}$
	4.0	$2.255140518770 * 10^{-16}$	$8.187894806611 * 10^{-16}$
	10.0	$1.700842158087 * 10^{-18}$	$8.183896811099 * 10^{-16}$

Παρατηρώντας τον παραπάνω πίνακα διαπιστώνουμε ότι οι εκτιμήσεις του σφάλματος ε πολλές φορές σχεδόν συμπίπτουν με τα αντίστοιχα πραγματικά σφάλματα e_n και e_{n+1} και διαφέρουν τις περισσότερες φορές κατά ένα δεκαδικό ψηφίο και μερικές φορές κατά δύο ενώ στην δ.ε. 4, σε πολύ λίγες περιπτώσεις κατά τρία δεκαδικά ψηφία. Στις μεθόδους που εξετάζουμε εδώ, το εκτιμηθέν σφάλμα ε είναι η διαφορά μεταξύ των αντίστοιχων τιμών που δίνουν γειτονικές τάξεις που υπάρχουν μέσα σε ενσωματωμένους τύπους. Έτσι, η παραπάνω συμπεριφορά είναι αναμενόμενη αφού όπως διαπιστώσαμε και πιο πριν είναι συχνά δύσκολη η διάκριση μεταξύ των μεθόδων Runge-Kutta παρακείμενων τάξεων. Το εκτιμηθέν σφάλμα αποκοπής T_n σαν γενικό κανόνα διαφέρει από το αντίστοιχο e_n για h=0.1 κατά δύο μέχρι επτά δεκαδικά ψηφία και για h=0.01 από τέσσερα μέχρι επτά δεκαδικά ψηφία. Άρα, συμπεραίνουμε ότι το εκτιμηθέν σφάλμα ε προσεγγίζει καλύτερα το πραγματικό σφάλμα από ότι το εκτιμηθέν σφάλμα αποκοπής T_n. Έτσι εάν κάποιος χρησιμοποιήσει κάποια από τις παραπάνω μεθόδους θα έχει αποτελέσματα δύο γειτονικών τάξεων και ένα σφάλμα ε που εκτιμά εξίσου καλά και τις δύο περιπτώσεις το οποίο μπορεί να το χρησιμοποιήσει, με κατάλληλη τροποποίηση του, για τον προσδιορισμό ενός κατάλληλου βήματος h καθώς τρέχει η μέθοδος.

Συμπεράσματα

- Οι αριθμητικές μέθοδοι που παρουσιάσθηκαν έχουν την δυνατότητα να επιλύουν οποιοδήποτε διαφορική εξίσωση και οποιοδήποτε σύστημα διαφορικών εξισώσεων. Επιπλέον, ορισμένοι από αυτούς έχουν την δυνατότητα εκτίμησης του σφάλματος σε κάθε βήμα.
- Γενικά, κάθε μέθοδος αποδίδει εξαιρετικές προσεγγίσεις προς τις ακριβείς τιμές των διαφορικών εξισώσεων που επιλύουν. Συχνά, είναι δύσκολη η διάκριση μεταξύ των μεθόδων Runge-Kutta της ίδιας τάξης και συχνά μεταξύ μεθόδων παρακείμενων τάξεων. Ωστόσο, γενικά, ένας ανώτερης τάξης τύπος, όπως ήταν αναμενόμενο, αποδίδει πάντα καλύτερα (με μεγαλύτερη ακρίβεια) αποτελέσματα από ένα χαμηλότερης τάξης τύπο.
- Ενώ το h μειώνεται, μεγαλώνει η ακρίβεια των αποτελεσμάτων (μειώνεται το σφάλμα) μέχρι που ένα ελάχιστο σημείο του σφάλματος εμφανίζεται σε σχέση με τα δεδομένα του h. Περαιτέρω μείωση του h θα οδηγήσει σε μειωμένη ακρίβεια.
- Καθώς αυξάνεται η τάξη της κάθε μεθόδου, αυξάνεται ελάχιστα ο χρόνος υπολογισμού. Όμως ο πρόσθετος χρόνος υπολογισμού είναι λιγότερο σημαντικός από το μειωμένο σφάλμα που παίρνουμε όταν χρησιμοποιηθεί μια μέθοδος υψηλότερης τάξης.
- Το εκτιμηθέν σφάλμα ε προσεγγίζει καλύτερα το πραγματικό σφάλμα, από ότι το εκτιμηθέν σφάλμα αποκοπής T_n.
- Η επιλογή της μεθόδου και του βήματος h εξαρτάται και από το πρόβλημα που είναι να επιλύσουμε.

Παράρτημα

Τα Μαθηματικά αποτελούν έναν κλάδο ο οποίος είναι στενά συνυφασμένος με την εκτέλεση πράξεων. Από τις πρώτες τάξεις του δημοτικού μέχρι και το Πανεπιστήμιο μεγάλο μέρος του χρόνου μας στα Μαθηματικά έχει να κάνει με πράξεις. Οι μέθοδοι που παρουσιάστηκαν στα προηγούμενα κεφάλαια, είναι αλγόριθμοι οι οποίοι προσεγγίζουν τη λύση μιας δ.ε. βήμα-βήμα. Λόγο της μορφής τους, οι συγκεκριμένοι αλγόριθμοι μπορούν πολύ εύκολα να γίνουν προγράμματα σε ένα Η/Υ. Το οποίο είναι πάρα πολύ σημαντικό μιας και για να προσεγγιστεί ικανοποιητικά μια συνάρτηση-λύση χρειάζονται εκατοντάδες σημεία. Έτσι εξοικονομείται πάρα πολύς κόπος και χρόνος αφού με την λύση μιας δ.ε. σε έναν Η/Υ παίρνουμε χιλιάδες σημεία σε λιγότερο από ένα δευτερόλεπτο χωρίς φυσικά ο χρήστης να κάνει ούτε μία πράξη. Για τους παραπάνω λόγους θα παρουσιάσουμε στη συνέχεια όλες τις μεθόδους της εργασίας αυτής στην μορφή συναρτήσεων γραμμένες στο Matlab σύμφωνα με την ανάλυση που έγινε στα προηγούμενα κεφάλαια.

Υπορουτίνες Μεθόδων Runge-Kutta 4ης – 8ης τάξης

Οι υπορουτίνες που θα παρουσιασθούν στη συνέχεια έχουν την δυνατότητα να λύνουν κάθε είδους πρόβλημα αρχικών τιμών καθώς και κάθε είδους σύστημα δ.ε. σε αυτή τη μορφή. Η δομή των υπορουτίνων είναι η εξής:

[x, y] = όνομα_συνάρτησης (f, k, h, n)

Τα δεδομένα εισόδου έχουν ως εξής:

1) Μία συνάρτηση f(x, Y), με f (x, Y)= Y’ όπου το Y’ να είναι το διάνυσμα των y_i’ για i = 1, 2, . . . , m και το $m \in$.
2) Ένα διάστημα k, όπου k = [x_0, v] είναι το διάστημα στο οποίο θα εκτιμηθεί η λύση της δ.ε.
3) Ένα διάνυσμα n, όπου n είναι το διάνυσμα των αρχικών τιμών στο σημείο x_0.
4) Το μέγεθος του βήματος h.

Η f(x, Y) εισάγεται στο Matlab με την εξής μορφή “ @ (x, y) [y_1’, y_2’, ………,y_m’] ”, τα k και n με την μορφή πίνακα του Matlab και το h σαν ένας αριθμός.

Οι έξοδοι τους είναι:

1) Ένας πίνακας $Y_{n \times m}$, όπου τα στοιχεία της κάθε στήλης του είναι οι προσεγγίσεις y_i της αντίστοιχης λύσης $y(x_i)$ για i = 1, 2, . . . , m. Με n συμβολίσαμε τον αριθμό των σημείων που παίρνουμε και με m τον αριθμό των λύσεων y_i που προσεγγίσαμε.

2) Ένας πίνακα $x_{1 \times n}$, με στοιχεία τα σημεία x_i στα οποία προσεγγίζουμε την λύση της δ.ε.

Για παράδειγμα το πρόβλημα αρχικών τιμών y' = – y με αρχική συνθήκη y(0) = 1. Έστω ότι διαλέγουμε να λυθεί με την υπορουτίνα που κατασκευάσαμε για την μέθοδο του Shanks (8, 10), στο διάστημα [0, 2] με βήμα h=0.2. Το όνομα της υπορουτίνας είναι “ sdeS810 ”, έτσι εισάγουμε στο Matlab τις εντολές:

```
>> f=@(x,y) -y;, n=1;, k=[0,2];, h=0.2;
>> [x,y]= sdeS810(f,k,h,n);
```

αφού φυσικά πιο πριν έχουμε αποθηκεύσει τον κώδικα της “ sdeS810 ” που δίνεται παρακάτω, στο Matlab. Σαν εξόδους παίρνουμε τα αποτελέσματα:

```
>> y

y =

   1.0000
   0.8187
   0.6703
   0.5488
   0.4493
   0.3679
   0.3012
   0.2466
   0.2019
   0.1653
   0.1353

>> x = x'

x =

        0
   0.2000
   0.4000
   0.6000
   0.8000
   1.0000
   1.2000
   1.4000
   1.6000
   1.8000
   2.0000
```

Ακόμη για να λυθεί το σύστημα $y_1' = \frac{1}{y_2}$ και $y_2' = -\frac{1}{y_1}$ με $y_1(0) = y_2(0) = 1$ στο ίδιο διάστημα με ίδιο βήμα και την ίδια μέθοδο εισάγουμε στο Matlab τις εντολές:

```
>> f=@(x,y) [1/y(2),-1/y(1)];, k=[0,2];, n=[1,1];, h=0.2;
>> [x,y]= sdeS810(f,k,h,n);
```

και μας δίνει:

```
>> y

y =

    1.0000    1.0000
    1.2214    0.8187
    1.4918    0.6703
    1.8221    0.5488
    2.2255    0.4493
    2.7183    0.3679
    3.3201    0.3012
    4.0552    0.2466
    4.9530    0.2019
    6.0496    0.1653
    7.3891    0.1353
```

και

```
>> x=x'

x =

         0
    0.2000
    0.4000
    0.6000
    0.8000
    1.0000
    1.2000
    1.4000
    1.6000
    1.8000
    2.0000
```

Οι υπορουτίνες που κατασκευάστηκαν από τον συγγραφέα δίνονται στην συνέχεια:

Υπορουτίνα Κλασικού Τύπου (4, 4)   (2.3.1)

```
function[x,y]= sdeC44(f,k,h,n)
c2=1/2;, c3=1/2;, c4=1;
a21=1/2;,
a31=0;, a32=1/2;
a41=0;, a42=0;, a43=1;
w1=1/6;, w2=1/3;, w3=1/3;, w4=1/6;
x(1)=k(1);, [u,v]=size(n);, m=((k(2)-k(1))/h)+1;
for j=1:v
    y(1,j)=n(j);
end
for i=1:m
k1=h*f(x(i),y(i,:));
k2=h*f(x(i)+c2*h,y(i,:)+a21*k1);
k3=h*f(x(i)+c3*h,y(i,:)+a31*k1+a32*k2);
k4=h*f(x(i)+c4*h,y(i,:)+a41*k1+a42*k2+a43*k3);
for j=1:v
y(i+1,j)=y(i,j)+w1*k1(j)+w2*k2(j)+w3*k3(j)+w4*k4(j);
end
x(i+1)=x(i)+h;
end
```

Υπορουτίνα Kutta Τύπου (4, 4)   (2.3.2)

```
function[x,y]=sdeK44(f,k,h,n)
c2=1/3;, c3=2/3;, c4=1;
a21=1/3;,
a31=-1/3;, a32=1;
a41=1;, a42=-1;, a43=1;
w1=1/8;, w2=3/8;, w3=3/8;, w4=1/8;
x(1)=k(1);, [u,v]=size(n);, m=((k(2)-k(1))/h)+1;
for j=1:v
    y(1,j)=n(j);
end
for i=1:m
k1=h*f(x(i),y(i,:));
k2=h*f(x(i)+c2*h,y(i,:)+a21*k1);
k3=h*f(x(i)+c3*h,y(i,:)+a31*k1+a32*k2);
k4=h*f(x(i)+c4*h,y(i,:)+a41*k1+a42*k2+a43*k3);
for j=1:v
y(i+1,j)=y(i,j)+w1*k1(j)+w2*k2(j)+w3*k3(j)+w4*k4(j);
end
x(i+1)=x(i)+h;
end
```

Υπορουτίνα Gill Τύπου (4, 4)   (2.3.3)

```
function[x,y]=sdeG44(f,k,h,n)
c2=1/2;, c3=1/2;, c4=1;
a21=1/2;,
a31=(sqrt(2)-1)/2;, a32=(2-sqrt(2))/2;
a41=0;, a42=-sqrt(2)/2;, a43=1+(sqrt(2)/2);
w1=1/6;, w2=(2-sqrt(2))/6;, w3=(2+sqrt(2))/6;, w4=1/6;
x(1)=k(1);, [u,v]=size(n);, m=((k(2)-k(1))/h)+1;
for j=1:v
    y(1,j)=n(j);
end
for i=1:m
k1=h*f(x(i),y(i,:));
k2=h*f(x(i)+c2*h,y(i,:)+a21*k1);
k3=h*f(x(i)+c3*h,y(i,:)+a31*k1+a32*k2);
k4=h*f(x(i)+c4*h,y(i,:)+a41*k1+a42*k2+a43*k3);
for j=1:v
y(i+1,j)=y(i,j)+w1*k1(j)+w2*k2(j)+w3*k3(j)+w4*k4(j);
end
x(i+1)=x(i)+h;
end
```

Υπορουτίνα Nystrom Τύπου (5, 6)   (2.4.1)

```
function[x,y]= sdeN56(f,k,h,n)
c2=1/3;,c3=2/5;,c4=1;,c5=2/3;,c6=4/5;
a21=1/3;
a31=4/25;,a32=6/25;
a41=1/4;,a42=-12/4;,a43=15/4;
a51=6/81;,a52=90/81;,a53=-50/81;,a54=8/81;
a61=6/75;,a62=36/75;,a63=10/75;,a64=8/75;,a65=0;
w1=23/192;,w2=0;, w3=125/192;, w4=0; w5=-81/192;,
w6=125/192;
x(1)=k(1);, [u,v]=size(n);, m=((k(2)-k(1))/h)+1;
for j=1:v
    y(1,j)=n(j);
end
for i=1:m
k1=h*f(x(i),y(i,:));
k2=h*f(x(i)+c2*h,y(i,:)+a21*k1);
k3=h*f(x(i)+c3*h,y(i,:)+a31*k1+a32*k2);
k4=h*f(x(i)+c4*h,y(i,:)+a41*k1+a42*k2+a43*k3);
k5=h*f(x(i)+c5*h,y(i,:)+a51*k1+a52*k2+a53*k3+a54*k4);
k6=h*f(x(i)+c6*h,y(i,:)+a61*k1+a62*k2+a63*k3+a64*k4+a65*
k5);
```

```
for j=1:v
y(i+1,j)=y(i,j)+w1*k1(j)+w2*k2(j)+w3*k3(j)+w4*k4(j)+w5*
k5(j)+w6*k6(j);
end
x(i+1)=x(i)+h;
end
```

Υπορουτίνα 1 Butcher Τύπου (5, 6) (2.4.2)

```
function[x,y]= sdeB561(f,k,h,n)
c2=1/8;, c3=1/4;, c4=1/2;, c5=3/4;, c6=1;
a21=1/8;,
a31=0;, a32=1/4;
a41=1/2;, a42=-1;, a43=1;,
a51=3/16;, a52=0;, a53=0;, a54=9/16;
a61=-5/7;, a62=4/7;, a63=12/7;, a64=-12/7;, a65=8/7;
w1=7/90;, w2=0;, w3=32/90;, w4=12/90;, w5=32/90;,
w6=7/90;
x(1)=k(1);, [u,v]=size(n);, m=((k(2)-k(1))/h)+1;
for j=1:v
    y(1,j)=n(j);
end
for i=1:m
k1=h*f(x(i),y(i,:));
k2=h*f(x(i)+c2*h,y(i,:)+a21*k1);
k3=h*f(x(i)+c3*h,y(i,:)+a31*k1+a32*k2);
k4=h*f(x(i)+c4*h,y(i,:)+a41*k1+a42*k2+a43*k3);
k5=h*f(x(i)+c5*h,y(i,:)+a51*k1+a52*k2+a53*k3+a54*k4);
k6=h*f(x(i)+c6*h,y(i,:)+a61*k1+a62*k2+a63*k3+a64*k4+a65*
k5);
for j=1:v
y(i+1,j)=y(i,j)+w1*k1(j)+w2*k2(j)+w3*k3(j)+w4*k4(j)+w5*
k5(j)+w6*k6(j);
end
x(i+1)=x(i)+h;
end
```

Υπορουτίνα 2 Butcher Τύπου (5, 6) (2.4.3)

```
function[x,y]= sdeB562(f,k,h,n)
c2=1/4;, c3=1/4;, c4=1/2;, c5=3/4;, c6=1;
a21=1/4;,
a31=1/8;, a32=1/8;
a41=0;, a42=-1/2;, a43=1;,
a51=3/16;, a52=0;, a53=0;, a54=9/16;
a61=-3/7;, a62=2/7;, a63=12/7;, a64=-12/7;, a65=8/7;
```

```
w1=7/90;, w2=0;, w3=32/90;, w4=12/90;, w5=32/90;,
w6=7/90;
x(1)=k(1);, [u,v]=size(n);, m=((k(2)-k(1))/h)+1;
for j=1:v
    y(1,j)=n(j);
end
for i=1:m
k1=h*f(x(i),y(i,:));
k2=h*f(x(i)+c2*h,y(i,:)+a21*k1);
k3=h*f(x(i)+c3*h,y(i,:)+a31*k1+a32*k2);
k4=h*f(x(i)+c4*h,y(i,:)+a41*k1+a42*k2+a43*k3);
k5=h*f(x(i)+c5*h,y(i,:)+a51*k1+a52*k2+a53*k3+a54*k4);
k6=h*f(x(i)+c6*h,y(i,:)+a61*k1+a62*k2+a63*k3+a64*k4+a65*
k5);
for j=1:v
y(i+1,j)=y(i,j)+w1*k1(j)+w2*k2(j)+w3*k3(j)+w4*k4(j)+w5*
k5(j)+w6*k6(j);
end
x(i+1)=x(i)+h;
end
```

Υπορουτίνα 3 Butcher Τύπου (5, 6)   (2.4.4)

```
function[x,y]= sdeB563(f,k,h,n)
c2=-1/2;, c3=1/4;, c4=1/2;, c5=3/4;, c6=1;
a21=-1/2;,
a31=5/16;, a32=-1/16;
a41=-3/4;, a42=1/4;, a43=1;,
a51=3/16;, a52=0;, a53=0;, a54=9/16;
a61=0;, a62=-1/7;, a63=12/7;, a64=-12/7;, a65=8/7;
w1=7/90;, w2=0;, w3=32/90;, w4=12/90;, w5=32/90;,
w6=7/90;
x(1)=k(1);, [u,v]=size(n);, m=((k(2)-k(1))/h)+1;
for j=1:v
    y(1,j)=n(j);
end
for i=1:m
k1=h*f(x(i),y(i,:));
k2=h*f(x(i)+c2*h,y(i,:)+a21*k1);
k3=h*f(x(i)+c3*h,y(i,:)+a31*k1+a32*k2);
k4=h*f(x(i)+c4*h,y(i,:)+a41*k1+a42*k2+a43*k3);
k5=h*f(x(i)+c5*h,y(i,:)+a51*k1+a52*k2+a53*k3+a54*k4);
k6=h*f(x(i)+c6*h,y(i,:)+a61*k1+a62*k2+a63*k3+a64*k4+a65*
k5);
for j=1:v
y(i+1,j)=y(i,j)+w1*k1(j)+w2*k2(j)+w3*k3(j)+w4*k4(j)+w5*
k5(j)+w6*k6(j);
end
```

```
x(i+1)=x(i)+h;
end
```

Υπορουτίνα 4 Butcher Τύπου (5, 6) (2.4.5)

```
function[x,y]= sdeB564(f,k,h,n)
c2=1/5;, c3=2/5;, c4=1/3;, c5=4/5;, c6=1;
a21=1/5;,
a31=0;, a32=2/5;
a41=7/36;, a42=0;, a43=5/36;,
a51=0;, a52=0;, a53=4/5;, a54=0;
a61=1/4;, a62=0;, a63=-35/4;, a64=54/7;, a65=25/14;
w1=5/48;, w2=0;, w3=0;, w4=27/56;, w5=125/336;, w6=1/24;
x(1)=k(1);, [u,v]=size(n);, m=((k(2)-k(1))/h)+1;
for j=1:v
    y(1,j)=n(j);
end
for i=1:m
k1=h*f(x(i),y(i,:));
k2=h*f(x(i)+c2*h,y(i,:)+a21*k1);
k3=h*f(x(i)+c3*h,y(i,:)+a31*k1+a32*k2);
k4=h*f(x(i)+c4*h,y(i,:)+a41*k1+a42*k2+a43*k3);
k5=h*f(x(i)+c5*h,y(i,:)+a51*k1+a52*k2+a53*k3+a54*k4);
k6=h*f(x(i)+c6*h,y(i,:)+a61*k1+a62*k2+a63*k3+a64*k4+a65*
k5);
for j=1:v
y(i+1,j)=y(i,j)+w1*k1(j)+w2*k2(j)+w3*k3(j)+w4*k4(j)+w5*
k5(j)+w6*k6(j);
end
x(i+1)=x(i)+h;
end
```

Υπορουτίνα 5 Butcher Τύπου (5, 6) (2.4.6)

```
function[x,y]= sdeB565(f,k,h,n)
c2=-1/5;, c3=2/5;, c4=1/3;, c5=4/5;, c6=1;
a21=-1/5;,
a31=4/5;, a32=-2/5;
a41=7/36;, a42=0;, a43=5/36;,
a51=0;, a52=0;, a53=4/5;, a54=0;
a61=1/4;, a62=0;, a63=-35/4;, a64=54/7;, a65=25/14;
w1=5/48;, w2=0;, w3=0;, w4=27/56;, w5=125/336;, w6=1/24;
x(1)=k(1);, [u,v]=size(n);, m=((k(2)-k(1))/h)+1;
for j=1:v
    y(1,j)=n(j);
end
```

```
for i=1:m
k1=h*f(x(i),y(i,:));
k2=h*f(x(i)+c2*h,y(i,:)+a21*k1);
k3=h*f(x(i)+c3*h,y(i,:)+a31*k1+a32*k2);
k4=h*f(x(i)+c4*h,y(i,:)+a41*k1+a42*k2+a43*k3);
k5=h*f(x(i)+c5*h,y(i,:)+a51*k1+a52*k2+a53*k3+a54*k4);
k6=h*f(x(i)+c6*h,y(i,:)+a61*k1+a62*k2+a63*k3+a64*k4+a65*
k5);
for j=1:v
y(i+1,j)=y(i,j)+w1*k1(j)+w2*k2(j)+w3*k3(j)+w4*k4(j)+w5*
k5(j)+w6*k6(j);
end
x(i+1)=x(i)+h;
end
```

Υπορουτίνα Fehlberg Τύπου (5, 6) (2.4.7)

```
function[x,y]= sdeF56(f,k,h,n)
c2=1/6;, c3=4/15;, c4=2/3;, c5=4/5;, c6=1;
a21=1/6;,
a31=4/75;, a32=16/75;
a41=5/6;, a42=-8/3;, a43=5/2;,
a51=-8/5;, a52=144/25;, a53=-4;, a54=16/25;
a61=361/320;, a62=-18/5;, a63=407/128;, a64=-11/80;,
a65=55/128;
w1=31/384;, w2=0;, w3=1125/2816;, w4=9/32;, w5=125/768;,
w6=5/66;
x(1)=k(1);, [u,v]=size(n);, m=((k(2)-k(1))/h)+1;
for j=1:v
    y(1,j)=n(j);
end
for i=1:m
k1=h*f(x(i),y(i,:));
k2=h*f(x(i)+c2*h,y(i,:)+a21*k1);
k3=h*f(x(i)+c3*h,y(i,:)+a31*k1+a32*k2);
k4=h*f(x(i)+c4*h,y(i,:)+a41*k1+a42*k2+a43*k3);
k5=h*f(x(i)+c5*h,y(i,:)+a51*k1+a52*k2+a53*k3+a54*k4);
k6=h*f(x(i)+c6*h,y(i,:)+a61*k1+a62*k2+a63*k3+a64*k4+a65*
k5);
for j=1:v
y(i+1,j)=y(i,j)+w1*k1(j)+w2*k2(j)+w3*k3(j)+w4*k4(j)+w5*
k5(j)+w6*k6(j);
end
x(i+1)=x(i)+h;
end
```

Υπορουτίνα Shanks Τύπου (5, 5)   (2.4.8)

```
function[x,y]= sdeS55(f,k,h,n)
c2=1/9000;, c3=3/10;, c4=3/4;, c5=1;
a21=1/9000;
a31=-4047/10;, a32=4050/10;
a41=20241/8;, a42=-20250/8;, a43=15/8;
a51=-931041/81;, a52=931500/81;, a53=-490/81;,
a54=112/81;
w1=105/1134;, w2=0;, w3=500/1134;, w4=448/1134;,
w5=81/1134;
x(1)=k(1);, [u,v]=size(n);, m=((k(2)-k(1))/h)+1;
for j=1:v
    y(1,j)=n(j);
end
for i=1:m
k1=h*f(x(i),y(i,:));
k2=h*f(x(i)+c2*h,y(i,:)+a21*k1);
k3=h*f(x(i)+c3*h,y(i,:)+a31*k1+a32*k2);
k4=h*f(x(i)+c4*h,y(i,:)+a41*k1+a42*k2+a43*k3);
k5=h*f(x(i)+c5*h,y(i,:)+a51*k1+a52*k2+a53*k3+a54*k4);
for j=1:v
y(i+1,j)=y(i,j)+w1*k1(j)+w2*k2(j)+w3*k3(j)+w4*k4(j)+w5*
k5(j);
end
x(i+1)=x(i)+h;
end
```

Υπορουτίνα Lawson Τύπου (5, 6)   (2.4.9)

```
function[x,y]= sdeL56(f,k,h,n)
c2=1/2;, c3=1/4;, c4=1/2;, c5=3/4;, c6=1;
a21=1/2;,
a31=3/16;, a32=1/16;
a41=0;, a42=0;, a43=1/2;,
a51=0;, a52=-3/16;, a53=6/16;, a54=9/16;
a61=1/7;, a62=4/7;, a63=6/7;, a64=-12/7;, a65=8/7;
w1=7/90;, w2=0;, w3=32/90;, w4=12/90;, w5=32/90;,
w6=7/90;
x(1)=k(1);, [u,v]=size(n);, m=((k(2)-k(1))/h)+1;
for j=1:v
    y(1,j)=n(j);
end
for i=1:m
k1=h*f(x(i),y(i,:));
k2=h*f(x(i)+c2*h,y(i,:)+a21*k1);
k3=h*f(x(i)+c3*h,y(i,:)+a31*k1+a32*k2);
k4=h*f(x(i)+c4*h,y(i,:)+a41*k1+a42*k2+a43*k3);
k5=h*f(x(i)+c5*h,y(i,:)+a51*k1+a52*k2+a53*k3+a54*k4);
```

```
k6=h*f(x(i)+c6*h,y(i,:)+a61*k1+a62*k2+a63*k3+a64*k4+a65*
k5);
for j=1:v
y(i+1,j)=y(i,j)+w1*k1(j)+w2*k2(j)+w3*k3(j)+w4*k4(j)+w5*
k5(j)+w6*k6(j);
end
x(i+1)=x(i)+h;
end
```

Υπορουτίνα Sarafyan Τύπου (5, 6)   (2.4.10)

```
function[x,y]= sdeSrf56(f,k,h,n)
c2=1/2;, c3=1/2;, c4=1;, c5=2/3;, c6=2/10;
a21=1/2;,
a31=1/4;, a32=1/4;
a41=0;, a42=-1;, a43=2;,
a51=7/27;, a52=10/27;, a53=0;, a54=1/27;
a61=28/625;, a62=-125/625;, a63=546/625;, a64=54/625;,
a65=-378/625;
w1=14/336;, w2=0;, w3=0;, w4=35/336;, w5=162/336;,
w6=125/336;
x(1)=k(1);, [u,v]=size(n);, m=((k(2)-k(1))/h)+1;
for j=1:v
    y(1,j)=n(j);
end
for i=1:m
k1=h*f(x(i),y(i,:));
k2=h*f(x(i)+c2*h,y(i,:)+a21*k1);
k3=h*f(x(i)+c3*h,y(i,:)+a31*k1+a32*k2);
k4=h*f(x(i)+c4*h,y(i,:)+a41*k1+a42*k2+a43*k3);
k5=h*f(x(i)+c5*h,y(i,:)+a51*k1+a52*k2+a53*k3+a54*k4);
k6=h*f(x(i)+c6*h,y(i,:)+a61*k1+a62*k2+a63*k3+a64*k4+a65*
k5);
for j=1:v
y(i+1,j)=y(i,j)+w1*k1(j)+w2*k2(j)+w3*k3(j)+w4*k4(j)+w5*
k5(j)+w6*k6(j);
end
x(i+1)=x(i)+h;
end
```

Υπορουτίνα Butcher Τύπου (6, 7)   (2.5.1)

```
function[x,y]= sdeB67(f,k,h,n)
c2=1/3;, c3=2/3;, c4=1/3;, c5=1/2;, c6=1/2;, c7=1;
a21=1/3;,
a31=0;, a32=2/3;
a41=1/12;, a42=1/3;, a43=-1/12;,
a51=-1/16;, a52=9/8;, a53=-3/16;, a54=-3/8;
```

```
a61=0;, a62=9/8;, a63=-3/8;, a64=-3/4;, a65=1/2;
a71=9/44;, a72=-9/11;, a73=63/44;, a74=18/11;, a75=0;,
a76=-16/11;
w1=11/120;, w2=0;, w3=27/40;, w4=27/40;, w5=-4/15;,
w6=  -4/15; w7=11/120;
x(1)=k(1);, [u,v]=size(n);, m=((k(2)-k(1))/h)+1;
for j=1:v
    y(1,j)=n(j);
end
for i=1:m
k1=h*f(x(i),y(i,:));
k2=h*f(x(i)+c2*h,y(i,:)+a21*k1);
k3=h*f(x(i)+c3*h,y(i,:)+a31*k1+a32*k2);
k4=h*f(x(i)+c4*h,y(i,:)+a41*k1+a42*k2+a43*k3);
k5=h*f(x(i)+c5*h,y(i,:)+a51*k1+a52*k2+a53*k3+a54*k4);
k6=h*f(x(i)+c6*h,y(i,:)+a61*k1+a62*k2+a63*k3+a64*k4+a65*
k5);
k7=h*f(x(i)+c7*h,y(i,:)+a71*k1+a72*k2+a73*k3+a74*k4+a75*
k5+a76*k6);
for j=1:v
y(i+1,j)=y(i,j)+w1*k1(j)+w2*k2(j)+w3*k3(j)+w4*k4(j)+w5*
k5(j)+w6*k6(j)+w7*k7(j);
end
x(i+1)=x(i)+h;
end
```

Υπορουτίνα Shanks Τύπου (6, 6)   (2.5.2)

```
function[x,y]= sdeS66(f,k,h,n)
c2=1/300;, c3=1/5;, c4=3/5;, c5=14/15;, c6=1;
a21=1/300;
a31=-29/5;, a32=30/5;
a41=323/5;, a42=-330/5;, a43=10/5;
a51=-510104/810;, a52=521640/810;, a53=-12705/810;,
a54=1925/810;
a61=-417923/77;, a62=427350/77;, a63=-10605/77;,
a64=1309/77;, a65=-54/77;
w1=198/3696;, w2=0;, w3=1225/3696;, w4=1540/3696;,
w5=810/3696;, w6=-77/3696;
x(1)=k(1);, [u,v]=size(n);, m=((k(2)-k(1))/h)+1;
for j=1:v
    y(1,j)=n(j);
end
for i=1:m
k1=h*f(x(i),y(i,:));
k2=h*f(x(i)+c2*h,y(i,:)+a21*k1);
k3=h*f(x(i)+c3*h,y(i,:)+a31*k1+a32*k2);
k4=h*f(x(i)+c4*h,y(i,:)+a41*k1+a42*k2+a43*k3);
```

```
k5=h*f(x(i)+c5*h,y(i,:)+a51*k1+a52*k2+a53*k3+a54*k4);
k6=h*f(x(i)+c6*h,y(i,:)+a61*k1+a62*k2+a63*k3+a64*k4+a65*
k5);
for j=1:v
y(i+1,j)=y(i,j)+w1*k1(j)+w2*k2(j)+w3*k3(j)+w4*k4(j)+w5*
k5(j)+w6*k6(j);
end
x(i+1)=x(i)+h;
end
```

Υπορουτίνα Fehlberg τύπου (6, 8)   (2.5.3)

```
function[x,y]= sdeF68(f,k,h,n)
c2=2/33;, c3=4/33;, c4=2/11;, c5=1/2;, c6=2/3;, c7=6/7;,
c8=1;
a21=2/33;
a31=0;, a32=4/33;
a41=1/22;,a42=0;,a43=3/22;
a51=43/64; a52=0; a53=-165/64;, a54=77/32;
a61=-2383/486;, a62=0;, a63=1067/54;, a64=-26312/1701;,
a65=2176/1701;
a71=10077/4802;, a72=0;, a73=-5643/686;,
a74=116259/16807;, a75=-6240/16807;, a76=1053/2401;
a81=-733/176;, a82=0;, a83=141/8;,a84=-335763/23296;,
a85=216/77;, a86=-4617/2816;, a87=7203/9152;
w1=77/1440;, w2=0;, w3=0;, w4=1771561/6289920;,
w5=32/105;, w6=243/2560; w7=16807/74880;, w8=11/270;
x(1)=k(1);, [u,v]=size(n);, m=((k(2)-k(1))/h)+1;
for j=1:v
    y(1,j)=n(j);
end
for i=1:m
k1=h*f(x(i),y(i,:));
k2=h*f(x(i)+c2*h,y(i,:)+a21*k1);
k3=h*f(x(i)+c3*h,y(i,:)+a31*k1+a32*k2);
k4=h*f(x(i)+c4*h,y(i,:)+a41*k1+a42*k2+a43*k3);
k5=h*f(x(i)+c5*h,y(i,:)+a51*k1+a52*k2+a53*k3+a54*k4);
k6=h*f(x(i)+c6*h,y(i,:)+a61*k1+a62*k2+a63*k3+a64*k4+a65*
k5);
k7=h*f(x(i)+c7*h,y(i,:)+a71*k1+a72*k2+a73*k3+a74*k4+a75*
k5+a76*k6);
k8=h*f(x(i)+c8*h,y(i,:)+a81*k1+a82*k2+a83*k3+a84*k4+a85*
k5+a86*k6+a87*k7);
for j=1:v
y(i+1,j)=y(i,j)+w1*k1(j)+w2*k2(j)+w3*k3(j)+w4*k4(j)+w5*
k5(j)+w6*k6(j)+w7*k7(j)+w8*k8(j);
end
```

```
x(i+1)=x(i)+h;
end
```

Υπορουτίνα Shanks Τύπου (7, 7)   (2.6.1)

```
function[x,y]= sdeS77(f,k,h,n)
c2=1/192;, c3=1/6;, c4=1/2;, c5=1;, c6=5/6;, c7=1;
a21=1/192;
a31=-15/6;, a32=16/6;
a41=4867/186;, a42=-5072/186;, a43=298/186;,
a51=-19995/31;, a52=20896/31;, a53=-1025/31;, a54=155/31;
a61=-469805/5022;, a62=490960/5022;, a63=-22736/5022;,
a64=5580/5022;, a65=186/5022;
a71=914314/2604;, a72=-955136/2604;, a73=47983/2604;,
a74=-6510/2604;, a75=-558/2604;, a76=2511/2604;
w1=14/300;, w2=0;, w3=81/300;, w4=110/300;, w5=0;,
w6=81/300; w7=14/300;
x(1)=k(1);, [u,v]=size(n);, m=((k(2)-k(1))/h)+1;
for j=1:v
    y(1,j)=n(j);
end
for i=1:m
k1=h*f(x(i),y(i,:));
k2=h*f(x(i)+c2*h,y(i,:)+a21*k1);
k3=h*f(x(i)+c3*h,y(i,:)+a31*k1+a32*k2);
k4=h*f(x(i)+c4*h,y(i,:)+a41*k1+a42*k2+a43*k3);
k5=h*f(x(i)+c5*h,y(i,:)+a51*k1+a52*k2+a53*k3+a54*k4);
k6=h*f(x(i)+c6*h,y(i,:)+a61*k1+a62*k2+a63*k3+a64*k4+a65*
k5);
k7=h*f(x(i)+c7*h,y(i,:)+a71*k1+a72*k2+a73*k3+a74*k4+a75*
k5+a76*k6);
for j=1:v
y(i+1,j)=y(i,j)+w1*k1(j)+w2*k2(j)+w3*k3(j)+w4*k4(j)+w5*
k5(j)+w6*k6(j)+w7*k7(j);
end
x(i+1)=x(i)+h;
end
```

Υπορουτίνα Fehlberg Τύπου (7, 11)   (2.6.2)

```
function[x,y]= sdeF711(f,k,h,n)
c2=2/27;, c3=1/9;, c4=1/6;, c5=5/12;, c6=1/2;, c7=5/6;,
c8=1/6;, c9=2/3;, c10=1/3;, c11=1;
a21=2/27;,
a31=1/36;, a32=1/12;
a41=1/24;, a42=0;, a43=1/8;,
a51=5/12;, a52=0;, a53=-25/16;, a54=25/16;
a61=1/20;, a62=0;, a63=0;, a64=1/4;, a65=1/5;
```

```
a71=-25/108;, a72=0;, a73=0;, a74=125/108;, a75=-65/27;,
a76=125/54;
a81=31/300;, a82=0;, a83=0;, a84=0;, a85=61/225;,
a86=-2/9;, a87=13/900;
a91=2;, a92=0;, a93=0;, a94=-53/6;, a95=704/45;,
a96=-107/9;, a97=67/90;, a98=3;
a101=-91/108;, a102=0;, a103=0;, a104=23/108;,
a105=-976/135;, a106=311/54;, a107=-19/60;, a108=17/6;,
a109=-1/12;
a111=2383/4100;, a112=0;, a113=0;, a114=-341/164;,
a115=4496/1025;, a116=-301/82;, a117=2133/4100;,
a118=45/82;, a119=45/164;,a1110=18/41;
w1=41/840;, w2=0;, w3=0;, w4=0;, w5=0;, w6=34/105;
w7=9/35;, w8=9/35;, w9=9/280;, w10=9/280;, w11=41/840;
x(1)=k(1);, [u,v]=size(n);, m=((k(2)-k(1))/h)+1;
for j=1:v
    y(1,j)=n(j);
end
for i=1:m
k1=h*f(x(i),y(i,:));
k2=h*f(x(i)+c2*h,y(i,:)+a21*k1);
k3=h*f(x(i)+c3*h,y(i,:)+a31*k1+a32*k2);
k4=h*f(x(i)+c4*h,y(i,:)+a41*k1+a42*k2+a43*k3);
k5=h*f(x(i)+c5*h,y(i,:)+a51*k1+a52*k2+a53*k3+a54*k4);
k6=h*f(x(i)+c6*h,y(i,:)+a61*k1+a62*k2+a63*k3+a64*k4+a65*
k5);
k7=h*f(x(i)+c7*h,y(i,:)+a71*k1+a72*k2+a73*k3+a74*k4+a75*
k5+a76*k6);
k8=h*f(x(i)+c8*h,y(i,:)+a81*k1+a82*k2+a83*k3+a84*k4+a85*
k5+a86*k6+a87*k7);
k9=h*f(x(i)+c9*h,y(i,:)+a91*k1+a92*k2+a93*k3+a94*k4+a95*
k5+a96*k6+a97*k7+a98*k8);
k10=h*f(x(i)+c10*h,y(i,:)+a101*k1+a102*k2+a103*k3+a104*
k4+a105*k5+a106*k6+a107*k7+a108*k8+a109*k9);
k11=h*f(x(i)+c11*h,y(i,:)+a111*k1+a112*k2+a113*k3+a114*
k4+a115*k5+a116*k6+a117*k7+a118*k8+a119*k9+a1110*k10);
for j=1:v
y(i+1,j)=y(i,j)+w1*k1(j)+w2*k2(j)+w3*k3(j)+w4*k4(j)+w5*
k5(j)+w6*k6(j)+w7*k7(j)+w8*k8(j)+w9*k9(j)+w10*k10(j)+w11*
k11(j);
end
x(i+1)=x(i)+h;
end
```

Υπορουτίνα Shanks Τύπου (7, 9)   (2.6.3)

```
function[x,y]= sdeS79(f,k,h,n)
c2=2/9;, c3=1/3;, c4=1/2;, c5=1/6;, c6=8/9;, c7=1/9;,
c8=5/6;, c9=1;
a21=2/9;,
a31=1/12;, a32=3/12;
a41=1/8;, a42=0;, a43=3/8;,
a51=23/216;, a52=0;, a53=21/216;, a54=-8/216;
a61=-4136/729;, a62=0;, a63=-13584/729;, a64=5264/729;,
a65=13104/729;
a71=105131/151632;, a72=0;, a73=302016/151632;,
a74=-107744/151632;, a75=-284256/151632;,
a76=1701/151632;
a81=-775229/1375920;, a82=0;, a83=-2770950/1375920;,
a84=1735136/1375920;, a85=2547216/1375920;,
a86=81891/1375920;, a87=328536/1375920;
a91=23569/251888;, a92=0;, a93=-122304/251888;,
a94=-20384/251888;, a95=695520/251888;,
a96=-99873/251888;, a97=-466560/251888;,
a98=241920/251888;
w1=110201/2140320;, w2=0;, w3=0;, w4=767936/2140320;,
w5=635040/2140320;, w6=-59049/2140320;
w7=-59049/2140320;, w8=635040/2140320;,
w9=110201/2140320;
x(1)=k(1);, [u,v]=size(n);, m=((k(2)-k(1))/h)+1;
for j=1:v
    y(1,j)=n(j);
end
for i=1:m
k1=h*f(x(i),y(i,:));
k2=h*f(x(i)+c2*h,y(i,:)+a21*k1);
k3=h*f(x(i)+c3*h,y(i,:)+a31*k1+a32*k2);
k4=h*f(x(i)+c4*h,y(i,:)+a41*k1+a42*k2+a43*k3);
k5=h*f(x(i)+c5*h,y(i,:)+a51*k1+a52*k2+a53*k3+a54*k4);
k6=h*f(x(i)+c6*h,y(i,:)+a61*k1+a62*k2+a63*k3+a64*k4+a65*
k5);
k7=h*f(x(i)+c7*h,y(i,:)+a71*k1+a72*k2+a73*k3+a74*k4+a75*
k5+a76*k6);
k8=h*f(x(i)+c8*h,y(i,:)+a81*k1+a82*k2+a83*k3+a84*k4+a85*
k5+a86*k6+a87*k7);
k9=h*f(x(i)+c9*h,y(i,:)+a91*k1+a92*k2+a93*k3+a94*k4+a95*
k5+a96*k6+a97*k7+a98*k8);
for j=1:v
y(i+1,j)=y(i,j)+w1*k1(j)+w2*k2(j)+w3*k3(j)+w4*k4(j)+w5*
k5(j)+w6*k6(j)+w7*k7(j)+w8*k8(j)+w9*k9(j);
end
x(i+1)=x(i)+h;
end
```

Υπορουτίνα Fehlberg Τύπου (8, 15)   (2.7.1)

```
function[x,y]= sdeF815(f,k,h,n)
c2 = 0.44368940376498183109599404281370;
c3 = 0.66553410564747274664399106422055;
c4 = 0.99830115847120911996598659633083;
c5 = 0.3155;
c6 = 0.50544100948169068626516126737384;
c7 = 0.17142857142857142857142857142857;
c8 = 0.82857142857142857142857142857143;
c9 = 0.66543966121011562534953769255586;
c10 = 0.24878317968062652069722274560771;
c11 = 0.1090;
c12 = 0.8910;
c13 = 0.3995;
c14 = 0.6005;
c15 = 1;
a21= 0.44368940376498183109599404281370;
a31 = 0.16638352641186818666099776605514;
a32 = 0.49915057923560455998299329816541;
a41 = 0.24957528961780227999149664908271;
a42 = 0;
a43 = 0.74872586885340683997448994724812;
a51 = 0.20661891163400602426556710393185;
a52 = 0;
a53 = 0.17707880377986347040380997288319;
a54 =-0.68197715413869494669377076815048*(10^(-1));
a61 = 0.10927823152666408227903890926157;
a62 = 0;, a63 = 0;
a64 = 0.40215962642367995421990563690087*(10^(-2));
a65 = 0.39214118169078980444392330174325;
a71 = 0.98899281409164665304844765434355*(10^(-1));
a72 = 0;, a73 = 0;
a74 = 0.35138370227963966951204487356703*(10^(-2));
a75 = 0.12476099983160016621520625872489;
a76 =-0.55745546834989799643742901466348*(10^(-1));
a81 =-0.36806865286242203724153101080691;
a82 = 0;, a83 = 0;, a84 = 0;
a85 =-0.22273897469476007645024020944166*10;
a86 = 0.13742908256702910729565691245744*10;
a87 = 0.20497390027111603002159354092206*10;
a91 = 0.45467962641347150077351950603349*(10^(-1));
a92 = 0;, a93 = 0;, a94 = 0;, a95 = 0;
a96 = 0.32542131701589147114677469648853;
a97 = 0.28476660138527908888182420573687;
a98 = 0.97837801675979152435868397271099*(10^(-2));
a101 = 0.60842071062622057051094145205182*(10^(-1));
a102 = 0;, a103 = 0;, a104 = 0;, a105 = 0;
```

```
a106 =-0.21184565744037007526325275251206*(10^(-1));
a107 = 0.19596557266170831957464490662983;
a108 =-0.42742640364817603675144835342899*(10^(-2));
a109 = 0.17434365736814911965323452558189*(10^(-1));
a111 = 0.54059783296931917365785724111182*(10^(-1));
a112 = 0;, a113 = 0;, a114 = 0;, a115 = 0;, a116 = 0;
a117 = 0.11029825597828926530283127648228;
a118 =-0.12565008520072556414147763782250*(10^(-2));
a119 = 0.36790043477581460136384043566339*(10^(-2));
a1110 =-0.57780542770972073040840628571866*(10^(-1));
a121 = 0.12732477068667114646645181799160;
a122 = 0;, a123 = 0;, a124 = 0;, a125 = 0;, a126 = 0;,
a127 = 0;
a128 = 0.11448805006396105323658875721817;
a129 = 0.28773020709697992776202201849198;
a1210 = 0.50945379459611363153735885079465;
a1211 =-0.14799682244372575900242144449640;
a131 =-0.36526793876616740535848544394333*(10^(-2));
a132 = 0;, a133 = 0;, a134 = 0;, a135 = 0;
a136 = 0.81629896012318919777819421247030*(10^(-1));
a137 =-0.38607735635693506490517694343215;
a138 = 0.30862242924605106450474166025206*(10^(-1));
a139 =-0.58077254528320602815829374733518*(10^(-1));
a1310 = 0.33598659328884971493143451362322;
a1311 = 0.41066880401949958613549622786417;
a1312 =-0.11840245972355985520633156154536*(10^(-1));
a141 =-0.12375357921245143254979096135669*10;
a142 = 0; a143 = 0;, a144 = 0;, a145 = 0;
a146 =-0.24430768551354785358734861366763*(10^(+2));
a147 = 0.54779568932778656050436528991173;
a148 =-0.44413863533413246374959896569346*10;
a149 = 0.10013104813713266094792617851022*(10^(+2));
a1410 =-0.14995773102051758447170985073142*(10^(+2));
a1411 = 0.58946948523217013620824539651427*10;
a1412 = 0.17380377503428984877616857440542*10;
a1413 = 0.27512330693166730263758622860276*(10^(+2));
a151 =-0.35260859388334522700502958875588;
a152 = 0;, a153 = 0;, a154 = 0;, a155 = 0;
a156 =-0.18396103144848270375044198988231;
a157 =-0.65570189449741645138006879985251;
a158 =-0.39086144880439863435025520241310;
a159 = 0.26794646712850022936584423271209;
a1510 =-0.10383022991382490865769858507427*10;
a1511 = 0.16672327324258671664727346168501*10;
a1512 = 0.49551925855315977067732967071441;
a1513 = 0.11394001132397063228586738141784*10;
a1514 = 0.51336696424658613688199097191534*(10^(-1));
w1 = 0.32256083500216249913612900960247*(10^(-1));
```

```
w2 = 0;, w3 = 0;, w4 = 0;, w5 = 0;, w6 = 0;, w7 = 0;
w8 = 0;
w9 = 0.259837252837154030188870231719 63;
w10 = 0.928478059965770277880637143021 90*(10^(-1));
w11 = 0.164523395147643428916477318428 00;
w12 = 0.176659516378600743670842983975 47;
w13 = 0.239201023203527593741089333209 41;
w14 = 0.394842746042028537467521188293 25*(10^(-2));
w15 = 0.307264954758606404063683055221 24*(10^(-1));
x(1)=k(1);, [u,v]=size(n);, m=((k(2)-k(1))/h)+1;
for j=1:v
    y(1,j)=n(j);
end
for i=1:m
k1=h*f(x(i),y(i,:));
k2=h*f(x(i)+c2*h,y(i,:)+a21*k1);
k3=h*f(x(i)+c3*h,y(i,:)+a31*k1+a32*k2);
k4=h*f(x(i)+c4*h,y(i,:)+a41*k1+a42*k2+a43*k3);
k5=h*f(x(i)+c5*h,y(i,:)+a51*k1+a52*k2+a53*k3+a54*k4);
k6=h*f(x(i)+c6*h,y(i,:)+a61*k1+a62*k2+a63*k3+a64*k4+a65*
k5);
k7=h*f(x(i)+c7*h,y(i,:)+a71*k1+a72*k2+a73*k3+a74*k4+a75*
k5+a76*k6);
k8=h*f(x(i)+c8*h,y(i,:)+a81*k1+a82*k2+a83*k3+a84*k4+a85*
k5+a86*k6+a87*k7);
k9=h*f(x(i)+c9*h,y(i,:)+a91*k1+a92*k2+a93*k3+a94*k4+a95*
k5+a96*k6+a97*k7+a98*k8);
k10=h*f(x(i)+c10*h,y(i,:)+a101*k1+a102*k2+a103*k3+a104*k4
+a105*k5+a106*k6+a107*k7+a108*k8+a109*k9);
k11=h*f(x(i)+c11*h,y(i,:)+a111*k1+a112*k2+a113*k3+a114*k4
+a115*k5+a116*k6+a117*k7+a118*k8+a119*k9+a1110*k10);
k12=h*f(x(i)+c12*h,y(i,:)+a121*k1+a122*k2+a123*k3+a124*k4
+a125*k5+a126*k6+a127*k7+a128*k8+a129*k9+a1210*k10+a1211*
k11);
k13=h*f(x(i)+c13*h,y(i,:)+a131*k1+a132*k2+a133*k3+a134*k4
+a135*k5+a136*k6+a137*k7+a138*k8+a139*k9+a1310*k10+a1311*
k11+a1312*k12);
k14=h*f(x(i)+c14*h,y(i,:)+a141*k1+a142*k2+a143*k3+a144*k4
+a145*k5+a146*k6+a147*k7+a148*k8+a149*k9+a1410*k10+a1411*
k11+a1412*k12+a1413*k13);
k15=h*f(x(i)+c15*h,y(i,:)+a151*k1+a152*k2+a153*k3+a154*k4
+a155*k5+a156*k6+a157*k7+a158*k8+a159*k9+a1510*k10+a1511*
k11+a1512*k12+a1513*k13+a1514*k14);
for j=1:v
y(i+1,j)=y(i,j)+w1*k1(j)+w2*k2(j)+w3*k3(j)+w4*k4(j)+w5*
k5(j)+w6*k6(j)+w7*k7(j)+w8*k8(j)+w9*k9(j)+w10*k10(j)+w11*
k11(j)+w12*k12(j)+w13*k13(j)+w14*k14(j)+w15*k15(j);
end
```

```
x(i+1)=x(i)+h;
end
```

Υπορουτίνα Shanks Τύπου (8, 10)   (2.7.2)

```
function[x,y]= sdeS810(f,k,h,n)
c2=4/27;, c3=2/9;, c4=1/3;, c5=1/2;, c6=2/3;, c7=1/6;,
c8=1;, c9=5/6;, c10=1;
a21=4/27;,
a31=1/18;, a32=3/18;
a41=1/12;, a42=0;, a43=3/12;,
a51=1/8;, a52=0;, a53=0;, a54=3/8;
a61=13/54;, a62=0;, a63=-27/54;, a64=42/54;, a65=8/54;
a71=389/4320;, a72=0;, a73=-54/4320;, a74=966/4320;,
a75=-824/4320;, a76=243/4320;
a81=-231/20;, a82=0;, a83=81/20;, a84=-1164/20;,
a85=656/20;, a86=-122/20;, a87=800/20;
a91=-127/288;, a92=0;, a93=18/288;, a94=-678/288;,
a95=456/288;, a96=-9/288;, a97=576/288;, a98=4/288;
a101=1481/820;, a102=0;, a103=-81/820;, a104=7104/820;,
a105=-3376/820;, a106=72/820;, a107=-5040/820;,
a108=-60/820;, a109=720/820;
w1=41/840;, w2=0;, w3=0;, w4=27/840;, w5=272/840;,
w6=27/840; w7=216/840;, w8=0;, w9=216/840;, w10=41/840;
x(1)=k(1);, [u,v]=size(n);, m=((k(2)-k(1))/h)+1;
for j=1:v
    y(1,j)=n(j);
end
for i=1:m
k1=h*f(x(i),y(i,:));
k2=h*f(x(i)+c2*h,y(i,:)+a21*k1);
k3=h*f(x(i)+c3*h,y(i,:)+a31*k1+a32*k2);
k4=h*f(x(i)+c4*h,y(i,:)+a41*k1+a42*k2+a43*k3);
k5=h*f(x(i)+c5*h,y(i,:)+a51*k1+a52*k2+a53*k3+a54*k4);
k6=h*f(x(i)+c6*h,y(i,:)+a61*k1+a62*k2+a63*k3+a64*k4+a65*
k5);
k7=h*f(x(i)+c7*h,y(i,:)+a71*k1+a72*k2+a73*k3+a74*k4+a75*
k5+a76*k6);
k8=h*f(x(i)+c8*h,y(i,:)+a81*k1+a82*k2+a83*k3+a84*k4+a85*
k5+a86*k6+a87*k7);
k9=h*f(x(i)+c9*h,y(i,:)+a91*k1+a92*k2+a93*k3+a94*k4+a95*
k5+a96*k6+a97*k7+a98*k8);
k10=h*f(x(i)+c10*h,y(i,:)+a101*k1+a102*k2+a103*k3+a104*k4
+a105*k5+a106*k6+a107*k7+a108*k8+a109*k9);
for j=1:v
y(i+1,j)=y(i,j)+w1*k1(j)+w2*k2(j)+w3*k3(j)+w4*k4(j)+w5*
k5(j)+w6*k6(j)+w7*k7(j)+w8*k8(j)+w9*k9(j)+w10*k10(j);
```

```
end
x(i+1)=x(i)+h;
end
```

Υπορουτίνα Shanks Τύπου (8, 12)   (2.7.3)

```
function[x,y]= sdeS812(f,k,h,n)
c2=1/9;, c3=1/6;, c4=1/4;, c5=1/10;, c6=1/6;, c7=1/2;,
c8=2/3;, c9=1/3;, c10=5/6;, c11=5/6;, c12=1;
a21=1/9;,
a31=1/24;, a32=3/24;
a41=1/16;, a42=0;, a43=3/16;,
a51=29/500;, a52=0;, a53=33/500;, a54=-12/500;
a61=33/972;, a62=0;, a63=0;, a64=4/972;, a65=125/972;
a71=-21/36;, a72=0;, a73=0;, a74=76/36;, a75=125/36;,
a76=-162/36;
a81=-30/243;, a82=0;, a83=0;, a84=-32/243;, a85=125/243;,
a86=0;, a87=99/243;
a91=1175/324;, a92=0;, a93=0;, a94=-3456/324;,
a95=-6250/324;, a96=8424/324;, a97=242/324;, a98=-27/324;
a101=293/324;, a102=0;, a103=0;, a104=-852/324;,
a105=-1375/324;, a106=1836/324;, a107=-118/324;,
a108=162/324;, a109=1;
a111=1303/1620;, a112=0;, a113=0;, a114=-4260/1620;,
a115=-6875/1620;, a116=9990/1620;, a117=1030/1620;,
a118=0;, a119=0;,a1110=162/1620;
a121=-8595/4428;, a122=0;, a123=0;, a124=30720/4428;,
a125=48750/4428;, a126=-66096/4428;, a127=378/4428;,
a128=-729/4428;, a129=-1944/4428;, a1210=-1296/4428;,
a1211=3240/4428;
w1=41/840;, w2=0;, w3=0;, w4=0;, w5=0;, w6=216/840;
w7=272/840;, w8=27/840;, w9=27/840;, w10=36/840;,
w11=180/840;, w12=41/840;
x(1)=k(1);, [u,v]=size(n);, m=((k(2)-k(1))/h)+1;
for j=1:v
    y(1,j)=n(j);
end
for i=1:m
k1=h*f(x(i),y(i,:));
k2=h*f(x(i)+c2*h,y(i,:)+a21*k1);
k3=h*f(x(i)+c3*h,y(i,:)+a31*k1+a32*k2);
k4=h*f(x(i)+c4*h,y(i,:)+a41*k1+a42*k2+a43*k3);
k5=h*f(x(i)+c5*h,y(i,:)+a51*k1+a52*k2+a53*k3+a54*k4);
k6=h*f(x(i)+c6*h,y(i,:)+a61*k1+a62*k2+a63*k3+a64*k4+a65*
k5);
```

```
k7=h*f(x(i)+c7*h,y(i,:)+a71*k1+a72*k2+a73*k3+a74*k4+a75*
k5+a76*k6);
k8=h*f(x(i)+c8*h,y(i,:)+a81*k1+a82*k2+a83*k3+a84*k4+a85*
k5+a86*k6+a87*k7);
k9=h*f(x(i)+c9*h,y(i,:)+a91*k1+a92*k2+a93*k3+a94*k4+a95*
k5+a96*k6+a97*k7+a98*k8);
k10=h*f(x(i)+c10*h,y(i,:)+a101*k1+a102*k2+a103*k3+a104*k4
+a105*k5+a106*k6+a107*k7+a108*k8+a109*k9);
k11=h*f(x(i)+c11*h,y(i,:)+a111*k1+a112*k2+a113*k3+a114*k4
+a115*k5+a116*k6+a117*k7+a118*k8+a119*k9+a1110*k10);
k12=h*f(x(i)+c12*h,y(i,:)+a121*k1+a122*k2+a123*k3+a124*k4
+a125*k5+a126*k6+a127*k7+a128*k8+a129*k9+a1210*k10+a1211*
k11);
for j=1:v
y(i+1,j)=y(i,j)+w1*k1(j)+w2*k2(j)+w3*k3(j)+w4*k4(j)+w5*
k5(j)+w6*k6(j)+w7*k7(j)+w8*k8(j)+w9*k9(j)+w10*k10(j)+w11*
k11(j)+w12*k12(j);
end
x(i+1)=x(i)+h;
end
```

Υπορουτίνες Μεθόδων Runge-Kutta με Δυνατότητα Εκτίμησης του Σφάλματος Αποκοπής

Οι υπορουτίνες που θα παρουσιασθούν παρακάτω βασίζονται σε ενσωματωμένους τύπους Runge-Kutta και όπως και οι συναρτήσεις που παρουσιάσθηκαν πιο πριν μπορούν να λύνουν κάθε είδους πρόβλημα αρχικών τιμών καθώς και κάθε είδους σύστημα δ.ε. σε αυτή τη μορφή. Επιπλέον έχουν την δυνατότητα να δίνουν και μια εκτίμηση του σφάλματος αποκοπής. Η δομή των υπορουτίνων είναι η εξής:

[x, y, T, e, yem]= όνομα_συνάρτησης (f, k, h, n)

Τα δεδομένα εισόδου είναι ίδια με αυτά των προηγούμενων υπορουτίνων. Στις εξόδους παίρνουμε επιπλέον:

1) Ένα πίνακα $T_{n \times m}$, όπου τα στοιχεία T_i της κάθε στήλης του είναι οι εκτιμήσεις του σφάλματος αποκοπής των αντίστοιχων προσεγγίσεων y_i για i = 1, 2, . . . , m που έχουν υπολογιστεί με ειδικούς τύπους.

2) Ένα πίνακα e $_{n \times m}$, όπου τα στοιχεία e_i της κάθε στήλης του είναι οι εκτιμήσεις του σφάλματος αποκοπής των αντίστοιχων προσεγγίσεων y_i για i = 1, 2, . . . , m. Σε αυτή την περίπτωση η εκτίμηση του σφάλματος στο y_i είναι διαφορά των προσεγγίσεων, για την συγκεκριμένη τιμή y_i, που παίρνουμε από τις δύο διαδικασίες που συνυπάρχουν στον ενσωματωμένο τύπο που χρησιμοποιήσαμε.
3) Ένα πίνακα yem, όπου τα στοιχεία της κάθε στήλης του είναι οι προσεγγίσεις yem_i της αντίστοιχης λύσης $y(x_i)$ για i = 1, 2, . . . , m, που υπολογίζεται από την επιπλέον διαδικασία που συνυπάρχει μέσα στον ενσωματωμένο τύπο η οποία δεν συμμετέχει στον υπολογισμό των αξιολογήσεων k_i.

Για παράδειγμα το σύστημα $y_1' = \frac{1}{y_2}$ και $y_2' = -\frac{1}{y_1}$ με $y_1(0) = y_2(0) =1$. Έστω ότι διαλέγουμε να λυθεί με την υπορουτίνα που κατασκευάσαμε για την μέθοδο του Fehlberg που περιέχει τύπο (5, 6) ενσωματωμένο μέσα σε τύπο (6, 8), στο διάστημα [0, 2] με βήμα h=0.2. Το όνομα της υπορουτίνας είναι “sdeF56em68”, έτσι εισάγουμε στο Matlab τις εντολές:

```
>> f=@(x,y) [1/y(2),-1/y(1)];, k=[0,2];, n=[1,1];, h=0.2;
>> [x,y,T,e,yem]= sdeF56em68(f,k,h,n);
```

Σαν εξόδους παίρνουμε τα αποτελέσματα:

```
>> y

y =

   1.0000    1.0000
   1.2214    0.8187
   1.4918    0.6703
   1.8221    0.5488
   2.2255    0.4493
   2.7183    0.3679
   3.3201    0.3012
   4.0552    0.2466
   4.9530    0.2019
   6.0496    0.1653
   7.3891    0.1353

>> yem

yem =

   1.0000    1.0000
   1.2214    0.8187
```

```
150

    1.4918    0.6703
    1.8221    0.5488
    2.2255    0.4493
    2.7183    0.3679
    3.3201    0.3012
    4.0552    0.2466
    4.9530    0.2019
    6.0496    0.1653
    7.3891    0.1353

>> x=x'

x =

         0
    0.2000
    0.4000
    0.6000
    0.8000
    1.0000
    1.2000
    1.4000
    1.6000
    1.8000
    2.0000

>> T

T =

  1.0e-008 *

         0         0
    0.0535   -0.9758
    0.0654   -0.7989
    0.0799   -0.6541
    0.0975   -0.5355
    0.1191   -0.4385
    0.1455   -0.3590
    0.1777   -0.2939
    0.2171   -0.2406
    0.2652   -0.1970
    0.3239   -0.1613
```

151

```
>> e

e =

  1.0e-006 *

         0         0
    0.0027    0.0488
    0.0059    0.0887
    0.0099    0.1214
    0.0148    0.1482
    0.0208    0.1701
    0.0281    0.1881
    0.0369    0.2028
    0.0478    0.2148
    0.0611    0.2247
    0.0772    0.2327
```

Όπου το “ 1.0e-006 * ” που υπάρχει πριν από τον πίνακα e σημαίνει ότι πολλαπλασιάζεται κάθε στοιχείο του με $1* 10^{-6}$ και το “ 1.0e-008 * ” πριν από τον πίνακα T ότι κάθε στοιχείο του T πολλαπλασιάζεται με $1* 10^{-8}$.

Οι υπορουτίνες που κατασκευάστηκαν από τον συγγραφέα δίνονται στην συνέχεια:

<u>Υπορουτίνα Merson Τύπου (4.1.1.1)</u>

```
function[x,y,T]= sdeM45em(f,k,h,n)
c2=1/3;, c3=1/3;, c4=1/2;, c5=1;
a21=1/3;
a31=1/6;, a32=1/6;
a41=1/8;, a42=0;, a43=3/8;
a51=1/2;, a52=0;, a53=-3/2;, a54=2;
w1=1/6;, w2=0;, w3=0;, w4=2/3;, w5=1/6;
x(1)=k(1);, [u,v]=size(n);, m=((k(2)-k(1))/h)+1;
for j=1:v
    y(1,j)=n(j);
    T(1,j)=0;
end
for i=1:m
k1=h*f(x(i),y(i,:));
k2=h*f(x(i)+c2*h,y(i,:)+a21*k1);
k3=h*f(x(i)+c3*h,y(i,:)+a31*k1+a32*k2);
k4=h*f(x(i)+c4*h,y(i,:)+a41*k1+a42*k2+a43*k3);
k5=h*f(x(i)+c5*h,y(i,:)+a51*k1+a52*k2+a53*k3+a54*k4);
for j=1:v
y(i+1,j)=y(i,j)+w1*k1(j)+w2*k2(j)+w3*k3(j)+w4*k4(j)+w5*
k5(j);
```

```
T(i+1,j)=(1/30)*(2*k1(j)-9*k3(j)+8*k4(j)-k5(j));
End
x(i+1)=x(i)+h;
end
```

Υπορουτίνα Scraton Τύπου (4.1.1.3)

```
function[x,y,T]= sdeScr45em(f,k,h,n)
c2=2/9;, c3=1/3;, c4=3/4;, c5=9/10;
a21=2/9;
a31=1/12;, a32=1/4;
a41=69/128;, a42=243/128;, a43=270/128;
a51=(-345*9)/10000;, a52=(2025*9)/10000;,
a53=(-1224*9)/10000;, a54=(544*9)/10000;
w1=17/162;, w2=0;, w3=81/170;, w4=32/135;, w5=250/1377;
x(1)=k(1);, [u,v]=size(n);, m=((k(2)-k(1))/h)+1;
for j=1:v
    y(1,j)=n(j);
    T(1,j)=0;
end
for i=1:m
k1=h*f(x(i),y(i,:));
k2=h*f(x(i)+c2*h,y(i,:)+a21*k1);
k3=h*f(x(i)+c3*h,y(i,:)+a31*k1+a32*k2);
k4=h*f(x(i)+c4*h,y(i,:)+a41*k1+a42*k2+a43*k3);
k5=h*f(x(i)+c5*h,y(i,:)+a51*k1+a52*k2+a53*k3+a54*k4);
for j=1:v
y(i+1,j)=y(i,j)+w1*k1(j)+w2*k2(j)+w3*k3(j)+w4*k4(j)+w5*
k5(j);
T(i+1,j)=-(1/(k4(j)-k1(j)))*
((-1/18)*k1(j)+(27/170)*k3(j)-
(4/15)*k4(j)+(25/153)*k5(j))*((19/24)*k1(j)-
(27/8)*k2(j)+(57/20)*k3(j)-(4/15)*k4(j));
end
x(i+1)=x(i)+h;
end
```

Υπορουτίνα Sarafyan Τύπου (4.1.2.1)

```
function[x,y,yem,e]= sdeSrf56em(f,k,h,n)
c2=1/2;, c3=1/2;, c4=1;, c5=2/3;, c6=2/10;
a21=1/2;,
a31=1/4;, a32=1/4;
a41=0;, a42=-1;, a43=2;,
a51=7/27;, a52=10/27;, a53=0;, a54=1/27;
a61=28/625;, a62=-125/625;, a63=546/625;, a64=54/625;,
a65=-378/625;
```

```
w1=14/336;, w2=0;, w3=0;, w4=35/336;, w5=162/336;,
w6=125/336;
x(1)=k(1);, [u,v]=size(n);, m=((k(2)-k(1))/h)+1;
for j=1:v
    y(1,j)=n(j);
    yem(1,j)=n(j);
    e(1,j)=0;
end
for i=1:m
k1=h*f(x(i),y(i,:));
k2=h*f(x(i)+c2*h,y(i,:)+a21*k1);
k3=h*f(x(i)+c3*h,y(i,:)+a31*k1+a32*k2);
k4=h*f(x(i)+c4*h,y(i,:)+a41*k1+a42*k2+a43*k3);
k5=h*f(x(i)+c5*h,y(i,:)+a51*k1+a52*k2+a53*k3+a54*k4);
k6=h*f(x(i)+c6*h,y(i,:)+a61*k1+a62*k2+a63*k3+a64*k4+a65*
k5);
for j=1:v
y(i+1,j)=y(i,j)+w1*k1(j)+w2*k2(j)+w3*k3(j)+w4*k4(j)+w5*
k5(j)+w6*k6(j);
yem(i+1,j)=y(i,j)+(1/6)*(k1(j)+4*k3(j)+k4(j));
e(i+1,j)=abs(y(i+1,j)-yem(i+1,j));
end
x(i+1)=x(i)+h;
end
```

Υπορουτίνα Fehlberg Τύπος 56 σε 68 (4.1.3.1)

```
function[x,y,T,e,yem]= sdeF56em68(f,k,h,n)
c2=1/6;, c3=4/15;, c4=2/3;, c5=4/5;, c6=1;, c7=0;, c8=1;
a21=1/6;,
a31=4/75;, a32=16/75;
a41=5/6;, a42=-8/3;, a43=5/2;,
a51=-8/5;, a52=144/25;, a53=-4;, a54=16/25;
a61=361/320;, a62=-18/5;, a63=407/128;, a64=-11/80;,
a65=55/128;
a71=-11/640;, a72=0;, a73=11/256;, a74=-11/160;,
a75=11/256;, a76=0;
a81=93/640;, a82=-18/5;, a83=803/256;, a84=-11/160;,
a85=99/256;, a86=0;, a87=1;
w1=31/384;, w2=0;, w3=1125/2816;, w4=9/32;, w5=125/768;,
w6=5/66;
w1em=7/1408;, w2em=0;, w3em=1125/2816;, w4em=9/32;,
w5em=125/768;, w6em=0;, w7em=5/66;, w8em=5/66;
x(1)=k(1);, [u,v]=size(n);, m=((k(2)-k(1))/h)+1;
for j=1:v
    y(1,j)=n(j);
    yem(1,j)=n(j);
    T(1,j)=0;
    e(1,j)=0;
```

```
end
for i=1:m
k1=h*f(x(i),y(i,:));
k2=h*f(x(i)+c2*h,y(i,:)+a21*k1);
k3=h*f(x(i)+c3*h,y(i,:)+a31*k1+a32*k2);
k4=h*f(x(i)+c4*h,y(i,:)+a41*k1+a42*k2+a43*k3);
k5=h*f(x(i)+c5*h,y(i,:)+a51*k1+a52*k2+a53*k3+a54*k4);
k6=h*f(x(i)+c6*h,y(i,:)+a61*k1+a62*k2+a63*k3+a64*k4+a65
*k5);
k7=h*f(x(i)+c7*h,y(i,:)+a71*k1+a72*k2+a73*k3+a74*k4+a75
*k5+a76*k6);
k8=h*f(x(i)+c8*h,y(i,:)+a81*k1+a82*k2+a83*k3+a84*k4+a85
*k5+a86*k6+a87*k7);
for j=1:v
y(i+1,j)=y(i,j)+w1*k1(j)+w2*k2(j)+w3*k3(j)+w4*k4(j)+w5
*k5(j)+w6*k6(j);
yem(i+1,j)=yem(i,j)+w1em*k1(j)+w2em*k2(j)+w3em*k3(j)+w4em
*k4(j)+w5em*k5(j)+w6em*k6(j)+w7em*k7(j)+w8em*k8(j);
T(i+1,j)=(5/66)*(k1(j)+k6(j)-k7(j)-k8(j))*h;
e(i+1,j)=abs(y(i+1,j)-yem(i+1,j));
end
x(i+1)=x(i)+h;
end
```

<u>Υπορουτίνα Fehlberg Τύπος 68 σε 710 (4.1.3.2)</u>

```
function[x,y,T,e,yem] = sdeF68em710(f,k,h,n)
c2=2/33;, c3=4/33;, c4=2/11;, c5=1/2;, c6=2/3;, c7=6/7;,
c8=1;, c9=0;, c10=1;
a21=2/33;
a31=0;, a32=4/33;
a41=1/22;,a42=0;,a43=3/22;
a51=43/64; a52=0; a53=-165/64;, a54=77/32;
a61=-2383/486;, a62=0;, a63=1067/54;, a64=-26312/1701;,
a65=2176/1701;
a71=10077/4802;, a72=0;, a73=-5643/686;,
a74=116259/16807;, a75=-6240/16807;, a76=1053/2401;
a81=-733/176;, a82=0;, a83=141/8;,a84=-335763/23296;,
a85=216/77;, a86=-4617/2816;, a87=7203/9152;
a91=15/352;, a92=0;, a93=0;, a94=-5445/46592;,
a95=18/77;, a96=-1215/5632;, a97=1029/18304;, a98=0;
a101=-1833/352;, a102=0;, a103=141/8;, a104=-51237/3584;,
a105=18/7;, a106=-729/512;, a107=1029/1408;, a108=0;,
a109=1;
w1=77/1440;, w2=0;, w3=0;, w4=1771561/6289920;,
w5=32/105;, w6=243/2560; w7=16807/74880;, w8=11/270;
```

```
w1em=11/864;, w2em=0;, w3em=0;, w4em=1771561/6289920;,
w5em=32/105;, w6em=243/2560; w7em=16807/74880;, w8em=0;,
w9em=11/270;, w10em=11/270;
x(1)=k(1);, [u,v]=size(n);, m=((k(2)-k(1))/h)+1;
for j=1:v
    y(1,j)=n(j);
    yem(1,j)=n(j);
    T(1,j)=0;
    e(1,j)=0;
end
for i=1:m
k1=h*f(x(i),y(i,:));
k2=h*f(x(i)+c2*h,y(i,:)+a21*k1);
k3=h*f(x(i)+c3*h,y(i,:)+a31*k1+a32*k2);
k4=h*f(x(i)+c4*h,y(i,:)+a41*k1+a42*k2+a43*k3);
k5=h*f(x(i)+c5*h,y(i,:)+a51*k1+a52*k2+a53*k3+a54*k4);
k6=h*f(x(i)+c6*h,y(i,:)+a61*k1+a62*k2+a63*k3+a64*k4+a65*
k5);
k7=h*f(x(i)+c7*h,y(i,:)+a71*k1+a72*k2+a73*k3+a74*k4+a75*
k5+a76*k6);
k8=h*f(x(i)+c8*h,y(i,:)+a81*k1+a82*k2+a83*k3+a84*k4+a85*
k5+a86*k6+a87*k7);
k9=h*f(x(i)+c9*h,y(i,:)+a91*k1+a92*k2+a93*k3+a94*k4+a95*
k5+a96*k6+a97*k7+a98*k8);
k10=h*f(x(i)+c10*h,y(i,:)+a101*k1+a102*k2+a103*k3+a104*k4
+a105*k5+a106*k6+a107*k7+a108*k8+a109*k9);
for j=1:v
y(i+1,j)=y(i,j)+w1*k1(j)+w2*k2(j)+w3*k3(j)+w4*k4(j)+w5*
k5(j)+w6*k6(j)+w7*k7(j)+w8*k8(j);
yem(i+1,j)=yem(i,j)+w1em*k1(j)+w2em*k2(j)+w3em*k3(j)+w4em
*k4(j)+w5em*k5(j)+w6em*k6(j)+w7em*k7(j)+w8em*k8(j)+w9em*
k9(j)+w10em*k10(j);
T(i+1,j)=(11/270)*(k1(j)+k8(j)-k9(j)-k10(j))*h;
e(i+1,j)=abs(y(i+1,j)-yem(i+1,j));
end
x(i+1)=x(i)+h;
end
```

Υπορουτίνα Fehlberg Τύπος 711 σε 813 (4.1.3.3)

```
function[x,y,T,e,yem]= sdeF711em813(f,k,h,n)
c2=2/27;, c3=1/9;, c4=1/6;, c5=5/12;, c6=1/2;, c7=5/6;,
c8=1/6;, c9=2/3;, c10=1/3;, c11=1;, c12=0;, c13=1;
a21=2/27;,
a31=1/36;, a32=1/12;
a41=1/24;, a42=0;, a43=1/8;,
a51=5/12;, a52=0;, a53=-25/16;, a54=25/16;
a61=1/20;, a62=0;, a63=0;, a64=1/4;, a65=1/5;
```

```
a71=-25/108;, a72=0;, a73=0;, a74=125/108;, a75=-65/27;,
a76=125/54;
a81=31/300;, a82=0;, a83=0;, a84=0;, a85=61/225;,
a86=-2/9;, a87=13/900;
a91=2;, a92=0;, a93=0;, a94=-53/6;, a95=704/45;,
a96=-107/9;, a97=67/90;, a98=3;
a101=-91/108;, a102=0;, a103=0;, a104=23/108;,
a105=-976/135;, a106=311/54;, a107=-19/60;, a108=17/6;,
a109=-1/12;
a111=2383/4100;, a112=0;, a113=0;, a114=-341/164;,
a115=4496/1025;, a116=-301/82;, a117=2133/4100;,
a118=45/82;, a119=45/164;,a1110=18/41;
a121=3/205;, a122=0;, a123=0;, a124=0;, a125=0;,
a126=-6/41;, a127=-3/205;, a128=-3/41;, a129=3/41;,
a1210=6/41;, a1211=0;
a131=-1777/4100;, a132=0;, a133=0;, a134=-341/164;,
a135=4496/1025;, a136=-289/82;, a137=2193/4100;,
a138=51/82;, a139=33/164;, a1310=12/41;, a1311=0;,
a1312=1;
w1=41/840;, w2=0;, w3=0;, w4=0;, w5=0;, w6=34/105;
w7=9/35;, w8=9/35;, w9=9/280;, w10=9/280;, w11=41/840;
w1em=0;, w2em=0;, w3em=0;, w4em=0;, w5em=0;, w6em=34/105;
w7em=9/35;, w8em=9/35;, w9em=9/280;, w10em=9/280;,
w11em=0;,w12em=41/840;, w13em=41/840;
x(1)=k(1);, [u,v]=size(n);, m=((k(2)-k(1))/h)+1;
for j=1:v
    y(1,j)=n(j);
    yem(1,j)=n(j);
    T(1,j)=0;
    e(1,j)=0;
end
for i=1:m
k1=h*f(x(i),y(i,:));
k2=h*f(x(i)+c2*h,y(i,:)+a21*k1);
k3=h*f(x(i)+c3*h,y(i,:)+a31*k1+a32*k2);
k4=h*f(x(i)+c4*h,y(i,:)+a41*k1+a42*k2+a43*k3);
k5=h*f(x(i)+c5*h,y(i,:)+a51*k1+a52*k2+a53*k3+a54*k4);
k6=h*f(x(i)+c6*h,y(i,:)+a61*k1+a62*k2+a63*k3+a64*k4+a65*
k5);
k7=h*f(x(i)+c7*h,y(i,:)+a71*k1+a72*k2+a73*k3+a74*k4+a75*
k5+a76*k6);
k8=h*f(x(i)+c8*h,y(i,:)+a81*k1+a82*k2+a83*k3+a84*k4+a85*
k5+a86*k6+a87*k7);
k9=h*f(x(i)+c9*h,y(i,:)+a91*k1+a92*k2+a93*k3+a94*k4+a95*
k5+a96*k6+a97*k7+a98*k8);
k10=h*f(x(i)+c10*h,y(i,:)+a101*k1+a102*k2+a103*k3+a104*k4
+a105*k5+a106*k6+a107*k7+a108*k8+a109*k9);
k11=h*f(x(i)+c11*h,y(i,:)+a111*k1+a112*k2+a113*k3+a114*k4
+a115*k5+a116*k6+a117*k7+a118*k8+a119*k9+a1110*k10);
```

```
k12=h*f(x(i)+c12*h,y(i,:)+a121*k1+a122*k2+a123*k3+a124*k4
+a125*k5+a126*k6+a127*k7+a128*k8+a129*k9+a1210*k10+a1211*
k11);
k13=h*f(x(i)+c13*h,y(i,:)+a131*k1+a132*k2+a133*k3+a134*k4
+a135*k5+a136*k6+a137*k7+a138*k8+a139*k9+a1310*k10+a1311*
k11+a1312*k12);
for j=1:v
y(i+1,j)=y(i,j)+w1*k1(j)+w2*k2(j)+w3*k3(j)+w4*k4(j)+w5*
k5(j)+w6*k6(j)+w7*k7(j)+w8*k8(j)+w9*k9(j)+w10*k10(j)+w11*
k11(j);
yem(i+1,j)=yem(i,j)+w1em*k1(j)+w2em*k2(j)+w3em*k3(j)+w4em
*k4(j)+w5em*k5(j)+w6em*k6(j)+w7em*k7(j)+w8em*k8(j)+w9em*
k9(j)+w10em*k10(j)+w11em*k11(j)+w12em*k12(j)+w13em*
k13(j);
T(i+1,j)=(41/840)*(k1(j)+k11(j)-k12(j)-k13(j))*h;
e(i+1,j)=abs(y(i+1,j)-yem(i+1,j));
end
x(i+1)=x(i)+h;
end
```

<u>Υπορουτίνα Fehlberg Τύπος 815 σε 917 (4.1.3.4)</u>

```
function[x,y,T,e,yem]= sdeF815em917(f,k,h,n)
c2 = 0.44368940376498183109599404281370;
c3 = 0.66553410564747274664399106422055;
c4 = 0.99830115847120911996598659633083;
c5 = 0.3155;
c6 = 0.50544100948169068626516126737384;
c7 = 0.17142857142857142857142857142857;
c8 = 0.82857142857142857142857142857143;
c9 = 0.66543966121011562534953769255586;
c10 = 0.24878317968062652069722274560771;
c11 = 0.1090;
c12 = 0.8910;
c13 = 0.3995;
c14 = 0.6005;
c15 = 1;
c16 = 0;
c17 = 1;
a21= 0.44368940376498183109599404281370;
a31 = 0.16638352641186818666099776605514;
a32 = 0.49915057923560455998299329816541;
a41 = 0.24957528961780227999149664908271;
a42 = 0;
a43 = 0.74872586885340683997448994724812;
a51 = 0.20661891163400602426556710393185;
a52 = 0;
a53 = 0.17707880377986347040380997288319;
a54 =-0.68197715413869494669377076815048*(10^(-1));
```

```
a61 = 0.10927823152666408227903890926157;
a62 = 0;, a63 = 0;
a64 = 0.40215962642367995421990563690087*(10^(-2));
a65 = 0.39214118169078980444392330174325;
a71 = 0.98899281409164665304844765434355*(10^(-1));
a72 = 0;, a73 = 0;
a74 = 0.35138370227963966951204487356703*(10^(-2));
a75 = 0.12476099983160016621520625872489;
a76 =-0.55745546834989799643742901466348*(10^(-1));
a81 =-0.36806865286242203724153101080691;
a82 = 0;, a83 = 0;, a84 = 0;
a85 =-0.22273897469476007645024020944166*10;
a86 = 0.13742908256702910729565691245744*10;
a87 = 0.20497390027111603002159354092206*10;
a91 = 0.45467962641347150077351950603349*(10^(-1));
a92 = 0;, a93 = 0;, a94 = 0;, a95 = 0;
a96 = 0.32542131701589147114677469648853;
a97 = 0.28476660138527908888182420573687;
a98 = 0.97837801675979152435868397271099*(10^(-2));
a101 = 0.60842071062622057051094145205182*(10^(-1));
a102 = 0;, a103 = 0;, a104 = 0;, a105 = 0;
a106 =-0.21184565744037007526325275251206*(10^(-1));
a107 = 0.19596557266170831957464490662983;
a108 =-0.42742640364817603675144835342899*(10^(-2));
a109 = 0.17434365736814911965323452558189*(10^(-1));
a111 = 0.54059783296931917365785724111182*(10^(-1));
a112 = 0;, a113 = 0;, a114 = 0;, a115 = 0;, a116 = 0;
a117 = 0.11029825597828926530283127648228;
a118 =-0.12565008520072556414147763782250*(10^(-2));
a119 = 0.36790043477581460136384043566339*(10^(-2));
a1110 =-0.57780542770972073040840628571866*(10^(-1));
a121 = 0.12732477068667114646645181799160;
a122 = 0;, a123 = 0;, a124 = 0;, a125 = 0;, a126 = 0;,
a127 = 0;
a128 = 0.11448805006396105323658875721817;
a129 = 0.28773020709697992776202201849198;
a1210 = 0.50945379459611363153735885079465;
a1211 =-0.14799682244372575900242144449640;
a131 =-0.36526793876616740535848544394333*(10^(-2));
a132 = 0;, a133 = 0;, a134 = 0;, a135 = 0;
a136 = 0.81629896012318919777819421247030*(10^(-1));
a137 =-0.38607735635693506490517694343215;
a138 = 0.30862242924605106450474166025206*(10^(-1));
a139 =-0.58077254528320602815829374733518*(10^(-1));
a1310 = 0.33598659328884971493143451362322;
a1311 = 0.41066880401949958613549622786417;
a1312 =-0.11840245972355985520633156154536*(10^(-1));
a141 =-0.12375357921245143254979096135669*10;
a142 = 0; a143 = 0;, a144 = 0;, a145 = 0;
```

```
a146 =-0.24430768551354785358734861366763*(10^(+2));
a147 = 0.54779568932778656050436528991173;
a148 =-0.44413863533413246374959896569346*10;
a149 = 0.10013104813713266094792617851022*(10^(+2));
a1410 =-0.14995773102051758447170985073142*(10^(+2));
a1411 = 0.58946948523217013620824539651427*10;
a1412 = 0.17380377503428984877616857440542*10;
a1413 = 0.27512330693166730263758622860276*(10^(+2));
a151 =-0.35260859388334522700502958875588;
a152 = 0;, a153 = 0;, a154 = 0;, a155 = 0;
a156 =-0.18396103144848270375044198988231;
a157 =-0.65570189449741645138006879985251;
a158 =-0.39086144880439863435025520241310;
a159 = 0.26794646712850022936584423271209;
a1510 =-0.10383022991382490865769858507427*10;
a1511 = 0.16672327324258671664727346168501*10;
a1512 = 0.49551925855315977067732967071441;
a1513 = 0.11394001132397063228586738141784*10;
a1514 = 0.51336696424658613688199097191534*(10^(-1));
a161 = 0.10464847340614810391873002406755*(10^(-2));
a162 = 0;, a163 = 0;, a164 = 0;, a165 = 0;, a166 = 0;,
a167 = 0;, a168 = 0;
a169 =-0.67163886844990282237778446178020*(10^(-2));
a1610 = 0.81828762189425021265330065248999*(10^(-2));
a1611 =-0.42640342864483347277142138087561*(10^(-2));
a1612 = 0.28009029474168936545976331153703*(10^(-3));
a1613 =-0.87835333876238676639057813145633*(10^(-2));
a1614 = 0.10254505110825558084217769664009*(10^(-1));
a1615 = 0;
a171 =-0.13536550786174067080442168889966*10;
a172 = 0;, a173 = 0;, a174 = 0;, a175 = 0;
a176 =-0.18396103144848270375044198988231;
a177 =-0.65570189449741645138006879985251;
a178 =-0.39086144880439863435025520241310;
a179 = 0.27466285581299925758962207732989;
a1710 =-0.10464851753571915887035188572676*10;
a1711 =0.16714967667123155012004488306588*10;
a1712 = 0.49523916825841808131186990740287;
a1713 = 0.11481836466273301905225795954930*10;
a1714 = 0.41082191313833055603981327527525*(10^(-1));
a1715 = 0;
a1716 = 1;
w1 = 0.32256083500216249913612900960247*(10^(-1));
w2 = 0;, w3 = 0;, w4 = 0;, w5 = 0;, w6 = 0;, w7 = 0;,
w8 = 0;
w9 = 0.25983725283715403018887023171963;
w10 = 0.92847805996577027788063714302190*(10^(-1));
w11 = 0.16452339514764342891647731842800;
w12 = 0.17665951637860074367084298397547;
```

```
w13 = 0.239201023203527593741089333320941;
w14 = 0.394842746042028537467521188293 25*(10^(-2));
w15 = 0.307264954758606404063683055221 24*(10^(-1));
w1em = 0.00152958802435567560;
w2em = 0;, w3em = 0;, w4em = 0;, w5em = 0;, w6em = 0;,
w7em = 0;, w8em = 0;
w9em = 0.25983725283715403018887023171963;
w10em = 0.92847805996577027788063714302190*(10^(-1));
w11em = 0.16452339514764342891647731842800;
w12em = 0.17665951637860074367084298397547;
w13em = 0.23920102320352759374108933320941;
w14em = 0.39484274604202853746752118829325*(10^(-2));
w15em = 0;
w16em = 0.30726495475860640406368305522124*(10^(-1));
w17em = 0.30726495475860640406368305522124*(10^(-1));
x(1)=k(1);, [u,v]=size(n);, m=((k(2)-k(1))/h)+1;
for j=1:v
    y(1,j)=n(j);
    yem(1,j)=n(j);
    T(1,j)=0;
    e(1,j)=0;
end
for i=1:m
k1=h*f(x(i),y(i,:));
k2=h*f(x(i)+c2*h,y(i,:)+a21*k1);
k3=h*f(x(i)+c3*h,y(i,:)+a31*k1+a32*k2);
k4=h*f(x(i)+c4*h,y(i,:)+a41*k1+a42*k2+a43*k3);
k5=h*f(x(i)+c5*h,y(i,:)+a51*k1+a52*k2+a53*k3+a54*k4);
k6=h*f(x(i)+c6*h,y(i,:)+a61*k1+a62*k2+a63*k3+a64*k4+a65*
k5);
k7=h*f(x(i)+c7*h,y(i,:)+a71*k1+a72*k2+a73*k3+a74*k4+a75*
k5+a76*k6);
k8=h*f(x(i)+c8*h,y(i,:)+a81*k1+a82*k2+a83*k3+a84*k4+a85*
k5+a86*k6+a87*k7);
k9=h*f(x(i)+c9*h,y(i,:)+a91*k1+a92*k2+a93*k3+a94*k4+a95*
k5+a96*k6+a97*k7+a98*k8);
k10=h*f(x(i)+c10*h,y(i,:)+a101*k1+a102*k2+a103*k3+a104*k4
+a105*k5+a106*k6+a107*k7+a108*k8+a109*k9);
k11=h*f(x(i)+c11*h,y(i,:)+a111*k1+a112*k2+a113*k3+a114*k4
+a115*k5+a116*k6+a117*k7+a118*k8+a119*k9+a1110*k10);
k12=h*f(x(i)+c12*h,y(i,:)+a121*k1+a122*k2+a123*k3+a124*k4
+a125*k5+a126*k6+a127*k7+a128*k8+a129*k9+a1210*k10+a1211*
k11);
k13=h*f(x(i)+c13*h,y(i,:)+a131*k1+a132*k2+a133*k3+a134*k4
+a135*k5+a136*k6+a137*k7+a138*k8+a139*k9+a1310*k10+a1311*
k11+a1312*k12);
k14=h*f(x(i)+c14*h,y(i,:)+a141*k1+a142*k2+a143*k3+a144*k4
+a145*k5+a146*k6+a147*k7+a148*k8+a149*k9+a1410*k10+a1411*
k11+a1412*k12+a1413*k13);
```

```
k15=h*f(x(i)+c15*h,y(i,:)+a151*k1+a152*k2+a153*k3+a154*k4
+a155*k5+a156*k6+a157*k7+a158*k8+a159*k9+a1510*k10+a1511*
k11+a1512*k12+a1513*k13+a1514*k14);
k16=h*f(x(i)+c16*h,y(i,:)+a161*k1+a162*k2+a163*k3+a164*k4
+a165*k5+a166*k6+a167*k7+a168*k8+a169*k9+a1610*k10+a1611*
k11+a1612*k12+a1613*k13+a1614*k14+a1615*k15);
k17=h*f(x(i)+c17*h,y(i,:)+a171*k1+a172*k2+a173*k3+a174*k4
+a175*k5+a176*k6+a177*k7+a178*k8+a179*k9+a1710*k10+a1711*
k11+a1712*k12+a1713*k13+a1714*k14+a1715*k15+a1716*k16);
for j=1:v
y(i+1,j)=y(i,j)+w1*k1(j)+w2*k2(j)+w3*k3(j)+w4*k4(j)+w5*
k5(j)+w6*k6(j)+w7*k7(j)+w8*k8(j)+w9*k9(j)+w10*k10(j)+w11*
k11(j)+w12*k12(j)+w13*k13(j)+w14*k14(j)+w15*k15(j);
yem(i+1,j)=yem(i,j)+w1em*k1(j)+w2em*k2(j)+w3em*k3(j)+w4em
*k4(j)+w5em*k5(j)+w6em*k6(j)+w7em*k7(j)+w8em*k8(j)+w9em*
k9(j)+w10em*k10(j)+w11em*k11(j)+w12em*k12(j)+w13em*k13(j)
+w14em*k14(j)+w15em*k15(j)+w16em*k16(j)+w17em*k17(j);
T(i+1,j)=w15*(k1(j)+k15(j)-k16(j)-k17(j))*h;
e(i+1,j)=abs(y(i+1,j)-yem(i+1,j));
end
x(i+1)=x(i)+h;
end
```

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1]. Lapidus L., Seinfeld J.: (1971)/ Numerical Solution of Ordinary Differential Equations/ *Academic Press.*

[2]. Cheney W., Kincaid D.: (1980)/ Numerical Mathematics and Computing/ *Brooks/ cole Publishing Company, Monterey, California.*

[3]. Μαρία Γουσίδου – Κουτίτα: (2009)/ Αριθμητικές Μέθοδοι με Εφαρμογές Κανονικών (Συνήθων), (ODEs) και Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων, (PDEs)/ *Σημειώσεις Α.Π.Θ.*

[4]. Μαρία Γουσίδου – Κουτίτα: (2004)/ Αριθμητική Ανάλυση/ *Εκδόσεις Χριστοδουλίδη.*

[5]. Μαρία Γουσίδου – Κουτίτα: (1993)/ Πανεπιστημιακές Παραδόσεις Υπολογιστικών Μαθηματικών ΙΙ/ *Υπηρεσία Δημοσιευμάτων Α.Π.Θ.*

[6]. Erwin Fehlberg: (1968)/ Classical Fifth, Sixth, Seventh and Eighth Order Runge-Kutta Formulas/ *George C. Marshall Space Flight Center, National Aeronautics and Space Administration, Huntsville, Alabama.*

[7]. Erwin Fehlberg: (1970)/ SOME Experimental Results Concerning the Error Propagation in Runge-Kutta Type Integration Formulas/ *George C. Marshall Space Flight Center, National Aeronautics and Space Administration, Huntsville, Alabama.*

[8]. E. Baylis Shanks: (1966)/ Solutions of differential equations by evaluations of functions/ *National Aeronautics and Space Administration (non Center Specific).*

[9]. Γ. Γεωργίου , Χ. Ξενοφώντος: (2007)/ Εισαγωγή στη Matlab/ *Σημειώσεις Πανεπιστημίου Κύπρου.*

[10]. Θωμάς Κυβεντίδης: (2007)/ Διαφορικές Εξισώσεις/ *Εκδώσεις Ζήτη.*