ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
"ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ & ΘΕΩΡΙΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΕΛΕΓΧΟΥ"

Μοντελοποίηση δυναμικών συστημάτων με δεδομένη συνεχή συμπεριφορά

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Μούρα Ελευθερία

Επιβλέπων: Νικόλαος Καραμπετάκης
Αναπλ. Καθηγητής Α.Π.Θ.

Θεσσαλονίκη, Δεκέμβριος 2011

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
“ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ & ΘΕΩΡΙΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΕΛΕΓΧΟΥ”

Μοντελοποίηση δυναμικών συστημάτων με δεδομένη συνεχή συμπεριφορά

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Μούρα Ελευθερία

Επιβλέπων: Νικόλαος Καραμπετάκης

Αναπλ. Καθηγητής Α.Π.Θ.

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή

…………………………	…………………………	…………………………
Α. Βαρδουλάκης	Ε.Αντωνίου	Ν. Καραμπετάκης
Καθηγητής Α.Π.Θ.	Επικ. Καθηγητής Α.Τ.Ε.Ι.Θ	Αναπλ. Καθηγητής Α.Π.Θ

Θεσσαλονίκη, Δεκέμβριος 2011

…………………………………………

Μούρα Ελευθερία

Πτυχιούχος Μαθηματικός -ΑΠΘ

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα εργασία χωρίζεται σε δύο μέρη. Συγκεκριμένα, στο πρώτο μέρος μελετάται ο συνεχής χώρος λύσεων (αντίστοιχα διακριτός χώρος λύσεων) του ομογενούς συστήματος των αλγεβρικών και διαφορικών εξισώσεων της μορφής $A(\rho)\beta(t)=0$, όπου $\rho:=d/dt$ (αντίστοιχα του ομογενούς συστήματος των αλγεβρικών εξισώσεων και εξισώσεων διαφορών της μορφής $A(\sigma)\beta(k)=0$ όπου $\sigma\beta(k)=\beta(k+1)$). Ο χώρος λύσεων και στις δύο περιπτώσεις δίνεται σε σχέση με τα πεπερασμένα ζεύγη Jordan των αντίστοιχων πολυωνυμικών πινάκων, για τα οποία γίνεται εκτενής αναφορά του τρόπου με τον οποίο τα κατασκευάζουμε.

Στο δεύτερο μέρος μελετάται το ‘αντίστροφο’ πρόβλημα, γνωρίζοντας την ομαλή συμπεριφορά του ομογενούς συστήματος δηλαδή το χώρο λύσεων αυτού, να βρεθεί το σύστημα των αλγεβρικών και διαφορικών εξισώσεων (αντίστοιχα των αλγεβρικών εξισώσεων και εξισώσεων διαφορών) το οποίο παράγει τον συγκεκριμένο χώρο λύσεων.

ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ

Πολυωνυμικός πίνακας, Smith μορφή, πεπερασμένα ζεύγη Jordan, σύστημα αλγεβρικών-διαφορικών εξισώσεων, σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων και εξισώσεων διαφορών, γενικευμένος αντίστροφος

ABSTRACT

The present paper is divided into two parts. More precisely, the first part study the smooth solution space of the homogenous system of algebraic and differential equations $A(\rho)\beta(t)=0$ where $\rho:=d/dt$ (the homogenous system of algebraic and difference equations $A(\sigma)\beta(k)=0$ where $\sigma\beta(k)=\beta(k+1)$ respectively). The solution space in both cases is given in terms of the finite Jordan pairs of the polynomial matrix $A(\rho)$ for which there is an extensive reference for the way we construct these pairs.

The second part is about the 'inverse' problem, knowing the smooth behavior of the homogenous system that is the system's solution space, try to find out the system of algebraic and differential equations (algebraic equations and difference equations respectively) which generates the specific solution space.

KEY WORDS

Polynomial matrix, Smith form, finite Jordan pairs, system of algebraic-differential equations, system of algebraic equation and difference equations, generalized inverse

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή μου Κο Νικόλαο Καραμπετάκη για την πολύτιμη βοήθεια του, το διαρκές του ενδιαφέρον, τις υποδείξεις του και το χρόνο που αφιέρωσε κατά την διάρκεια εκπόνησης της εργασίας μου.

Οφείλω ακόμη να ευχαριστήσω και τα υπόλοιπα μέλη της τριμελούς επιτροπής Κο Αντώνιο Βαρδουλάκη και Κο Ευστάθιο Αντωνίου για τον χρόνο που αφιέρωσαν στην μελέτη και αξιολόγηση της εργασίας μου.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια μου και τον Χρήστο για την ψυχολογική κυρίως υποστήριξη κατά την διάρκεια των σπουδών μου στο μεταπτυχιακό.

Στον πατέρα μου,

1. Πολυωνυμικοί πίνακες

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζουμε βασικές έννοιες που απαιτούνται για την κατανόηση των επόμενων παραγράφων. Το περιεχόμενο του κεφαλαίου αυτού περιλαμβάνει έννοιες που αφορούν την δομή πολυωνυμικών πινάκων που καθορίζεται από την Smith μορφή τους καθώς και την εύρεση πεπερασμένων ζευγών Jordan που αντιστοιχούν στα πεπερασμένα μηδενικά ενός πολυωνυμικού πίνακα.

1.1 Εισαγωγή

Έστω $\mathbb{R}$ το σώμα των πραγματικών αριθμών και $\mathbb{R}[s]$ ο δακτύλιος των πολυωνύμων με συντελεστές στο $\mathbb{R}$. Το σύνολο των $p \times m$ πινάκων με στοιχεία που ανήκουν στο $\mathbb{R}[s]$ συμβολίζεται με $\mathbb{R}[s]^{p\times m}$.

Ένας πίνακας A(s) του οποίου τα στοιχεία είναι πολυώνυμα καλείται **πολυωνυμικός πίνακας** και αναλύεται ως εξής:

$$\mathrm{A}(s) = \mathrm{A}_q s^q + \ldots + \mathrm{A}_1 s + \mathrm{A}_0 \ \in \mathbb{R}[s]^{p\times m}, \tag{1.1}$$

όπου $\mathrm{A}_i \in \mathbb{R}^{p\times m}$ $, i = 0,1,\ldots q$ και p όχι κατ' ανάγκη ίσο με m.

Ο αριθμός q ονομάζεται **τάξη** (order) του πολυωνυμικού πίνακα A(s).

Ορισμός 1.1 (Gantmacher 1959) Ο **βαθμός** (degree) ενός πολυωνυμικού πίνακα $\mathrm{A}(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times m}$, συμβολίζεται degA(s) και ορίζεται ως ο μέγιστος βαθμός ανάμεσα σε όλους τους βαθμούς των μέγιστων τάξεων (μη μηδενικών) υποοριζουσών του A(s). ■

Ορισμός 1.2 (Wolovich 1974) Ορίζουμε ως **πολυπλοκότητα των γραμμών** (row complexity) c_r(A) (των στηλών c_c(A)) του πολυωνυμικού πίνακα $\mathrm{A}(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times m}$, το άθροισμα των βαθμών των γραμμών (των στηλών) των μη μηδενικών πολυωνυμικών διανυσμάτων δηλαδή:

$$c_r(\mathrm{A}) = \sum_{i=1}^{p} \deg \tilde{t}_i(s) \quad \left(c_c(\mathrm{A}) = \sum_{j=1}^{m} \deg t_j(s) \right)$$ ■

Ορισμός 1.3 (Rosenbrock 1970) Ένας πολυωνυμικός πίνακας $\mathrm{A}(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times p}$ ονομάζεται **αντιστρέψιμος** (unimodular) εάν και μόνο εάν υπάρχει πολυωνυμικός πίνακας $\hat{\mathrm{A}}(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times p}$ τέτοιος ώστε $\mathrm{A}(s)\hat{\mathrm{A}}(s) = I_p$ ή ισοδύναμα εάν και μόνο εάν degA(s)=c, $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$ ή αν $rank\,\mathrm{A}(s) = n$ για κάθε $s \in \mathbb{C}$. ■

Ορισμός 1.4 (Wolovich 1974) Έστω $\mathrm{A}(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times m}$ με rankA(s)=p(=m). Τότε ο A(s) είναι **κανονικός** ως προς τις γραμμές του (row proper) (κανονικός ως προς τις στήλες του (column proper)) εάν και μόνο εάν η πολυπλοκότητα c_r(A) των γραμμών (c_c(A) των στηλών) είναι ίση με το βαθμό του πολυωνυμικού πίνακα A(s) (deg(A(s)). Δηλαδή:

$$\text{A(s) row proper} \Leftrightarrow c_r(\mathrm{A}) = \deg \mathrm{A}(s)$$

$$\text{A(s) column proper} \Leftrightarrow c_c(\mathrm{A}) = \deg \mathrm{A}(s)$$ ■

Ορισμός 1.5 (Vardulakis 1991) Ένας πολυωνυμικός πίνακας $\mathrm{A}(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times p}$, $\mathrm{A}(s) = \mathrm{A}_o + \mathrm{A}_1 s + \mathrm{A}_2 s^2 + ... + \mathrm{A}_q s^q$ όπου $\mathrm{A}_i \in \mathbb{R}^{p\times p}$ θα ονομάζεται **ομαλός** (regular) εάν και μόνο εάν $\mathrm{rank}_R \mathrm{A}_q$=p διαφορετικά θα ονομάζεται (singular). ■

1.2 Στοιχειώδεις πράξεις μεταξύ πολυωνυμικών πινάκων

Οι στοιχειώδεις πράξεις (elementary operations) επί των γραμμών και στηλών ενός πολυωνυμικού πίνακα $\mathrm{A}(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times p}$ ορίζονται ως εξής:

α) Εναλλαγή δύο γραμμών ή στηλών του A(s)

β) Πολλαπλασιασμός της i- γραμμής (στήλης) του A(s) με οποιοδήποτε μη μηδενικό στοιχείο του $\mathbb{R}$ (αντιστρέψιμο στοιχείο).

γ) Πολλαπλασιασμός της i- γραμμής (στήλης) του A(s) με οποιοδήποτε μη μηδενικό στοιχείο t(s) του $\mathbb{R}[s]$ και πρόσθεση της σε οποιαδήποτε άλλη j-γραμμή (στήλη) του A(s).

Οι στοιχειώδεις πράξεις επί των γραμμών (στηλών) του $\mathrm{A}(s)$ επιτυγχάνονται με πολλαπλασιασμό του $\mathrm{A}(s) \in \mathbb{R}^{p\times m}$ από αριστερά (από δεξιά) με τους στοιχειώδεις αντιστρέψιμους πίνακες (elementary unimodular matrices) οι οποίοι προέρχονται εκτελώντας τις αντίστοιχες στοιχειώδεις πράξεις στο μοναδιαίο πίνακα I_p (I_m). Μπορεί ακόμα να δειχθεί ότι κάθε αντιστρέψιμος πίνακας (unimodular) μπορεί να γραφεί ως γινόμενο στοιχειωδών πινάκων.

Σημειώνουμε ότι καθένας από τους μετασχηματισμούς αυτούς είναι ισοδύναμος με τον πολλαπλασιασμό του πολυωνυμικού πίνακα με ένα αντιστρέψιμο πίνακα όπως παρακάτω:

Συγκεκριμένα η εναλλαγή των γραμμών (στηλών) i και j στον A(s) είναι ισοδύναμη με τον πολλαπλασιασμό από τ' αριστερά (δεξιά) με

$$\begin{array}{r} \\ \\ \text{i γραμμή} \rightarrow \\ \\ \text{j γραμμή} \rightarrow \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & & & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ & 0 & \cdots & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & \cdots 1 & \cdots & 0 & \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & & 1 \end{pmatrix}$$

Πρόσθεση στην i-οστή γραμμή του A(s) την j-οστή γραμμή πολλαπλασιάζοντας με το πολυώνυμο t(s) είναι ισοδύναμη με τον πολλαπλασιασμό από τ ' αριστερά με

$$\begin{array}{r} \\ \\ \\ \\ i \text{ γραμμή} \rightarrow \\ \\ \\ \\ j \text{ γραμμή} \rightarrow \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \vdots & & \\ & & & \ddots & & & & & & & \\ & & \ldots & & 1 & & & & t(s) & & \\ & & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & & 1 & & \vdots & & \\ & & & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

η ίδια πράξη για στήλες είναι ισοδύναμη με τον πολλαπλασιασμό από τα δεξιά με τον πίνακα

$$\begin{pmatrix}
1 & & & & & & & & & & & & \\
 & \ddots & & \vdots & & & & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & & & & & & \\
 & & & \ddots & & & & & & & & & \\
 & & \cdots & & 1 & & & & & & & & \\
 & & & & & \ddots & & & & & & & \\
 & & & & \vdots & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & & & \ddots & & & & & \\
 & & & & & & & & 1 & & & & \\
 & & & & & & & & & \ddots & & & \\
 & & & \cdots & \mathrm{t}(s) & \cdots & & & \cdots & & 1 & & \\
 & & & & & & & & & & 1 & \ddots & \\
 & & & & & & & & & & & & 1
\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc}
\uparrow & \uparrow \\
i\ \sigma\tau\acute{\eta}\lambda\eta & j\ \sigma\tau\acute{\eta}\lambda\eta
\end{array}$$

Τελικά, πολλαπλασιασμός της i-ιοστής γραμμής (στήλης) στον A(s) με έναν αριθμό α≠0 είναι ισοδύναμος με τον πολλαπλασιασμό από τ' αριστερά (δεξιά) με

$$\xrightarrow{i}\begin{pmatrix}
1 & & & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & & \\
 & & & \ddots & & & & & \\
\cdots & \cdots & & & \alpha & & & & \\
 & & & & & \ddots & & & \\
 & & & & & & 1 & & \\
 & & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & & 1
\end{pmatrix}$$

Ορισμός 1.6 (Gantmacher 1959) Δύο πολυωνυμικοί πίνακες $A_1(s)$, $A_2(s)$ $\in \mathbb{R}[s]^{p\times m}$ καλούνται **αντιστρέψιμα ισοδύναμοι** (unimodular equivalent), αριστερά αντιστρέψιμα ισοδύναμοι (left unimodular equivalent), δεξιά αντιστρέψιμα ισοδύναμοι (right unimodular equivalent) εάν και μόνο εάν υπάρχουν αντιστρέψιμοι (unimodular) πίνακες $A_L(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times p}$ και $A_R(s) \in \mathbb{R}[s]^{m\times m}$ τέτοιοι ώστε να έχω αντίστοιχα

$$A_1(s) = A_L(s)A_2(s)A_R(s)\,,\; A_1(s) = A_L(s)A_2(s)\,,\; A_1(s) = A_2(s)A_R(s) \qquad \blacksquare$$

Θεώρημα 1.1 Η αντιστρέψιμη ισοδυναμία (unimodular equivalent) είναι μια σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο των p×m πολυωνυμικών πινάκων.

Απόδειξη

1. **Ανακλαστική Ιδιότητα**

Έστω $A_1(s) \in \mathbb{R}(s)^{p\times m}$. Ισχύει $I_pA_1(s)I_m=A_1(s)$.

2. **Συμμετρική Ιδιότητα**

Έστω $A_1(s), A_2(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times m}$ αντιστρέψιμα ισοδύναμοι (unimodular equivalent) πολυωνυμικοί πίνακες, δηλαδή υπάρχουν αντιστρέψιμοι πίνακες $A_L(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times p}$ και $A_R(s) \in \mathbb{R}[s]^{m\times m}$ τέτοιοι ώστε $A_L(s)A_1(s)A_R(s)=A_2(s)$, τότε θα έχουμε

$A_1(s)A_R(s)=A_L^{-1}(s)A_2(s) \Leftrightarrow A_1(s)=A_L^{-1}(s)A_2(s)A_R^{-1}(s)$ όπου $A_R^{-1}(s),A_L^{-1}(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times p}$ γιατί είναι αντιστρέψιμοι.

3. **Μεταβατική Ιδιότητα**

Έστω $A_1(s)$, $A_2(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times m}$ αντιστρέψιμα ισοδύναμοι πολυωνυμικοί πίνακες, δηλαδή υπάρχουν αντιστρέψιμοι πίνακες $A_L(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times p}$ και $A_R(s) \in \mathbb{R}[s]^{m\times m}$ τέτοιοι ώστε $A_L(s)A_1(s)A_R(s)=A_2(s)$ και $A_2(s),A_3(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times m}$ αντιστρέψιμα ισοδύναμοι δηλαδή υπάρχουν αντιστρέψιμοι πίνακες $A'_R(s) \in \mathbb{R}[s]^{m\times m}$ και $A'_L(s) \in \mathbb{R}[s]^{m\times m}$ τέτοιοι ώστε $A'_L(s)A_2(s)A'_R(s)=A_3(s)$ τότε θα έχουμε

$A_2(s)A'_R(s)= A'^{-1}_L(s)\, A_3(s) \Leftrightarrow A_2(s)= A'^{-1}_L(s)\, A_3(s)\, A'^{-1}_R(s)$.

Επομένως

$A_L(s)\, A_1(s)A_R(s)= A_2(s) \Leftrightarrow A_L(s)A_1(s)A_R(s)= A'^{-1}_L(s)A_3(s)\, A'^{-1}_R(s) \Leftrightarrow$

$A_1(s) = A_L^{-1}(s)\, A'^{-1}_L(s)\, A_3(s)\, A'^{-1}_R(s) \Leftrightarrow$

$A_1(s)= A_L^{-1}(s)\, A'_L{}^{-1}(s)\, A_3(s)\, A'_R{}^{-1}(s)\, A_R^{-1}(s) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow A_1(s)\, [A'_L(s)A_L(s)]^{-1}A_3(s)[A_R(s)A'_R(s)]^{-1}$

όπου $[A'_R(s)A_R(s)]^{-1}$, $[A'_L(s)A_L(s)]^{-1} \in \mathbb{R}[s]^{p\times p}$ γιατί οι πίνακες $A_L(s)$, $A'_L(s)$, $A_R(s)$, $A'_R(s)$ είναι αντιστρέψιμοι. ■

1.3. Smith μορφή ενός πολυωνυμικού πίνακα

Θεώρημα 1.2 (Gantmacher 1959) **[Smith μορφή ενός πολυωνυμικού πίνακα]**

Έστω A(s) $\in \mathbb{R}[s]^{p\times m}$ με $rank_{\mathbb{R}(s)}\mathrm{A}(s) = r$, $r \le \min\{p, m\}$. Τότε ο A(s) είναι αντιστρέψιμος ισοδύναμος με ένα διαγώνιο πίνακα $S^C_{\mathrm{A}(s)} \in \mathbb{R}[s]^{p\times m}$ που έχει τη μορφή:

$$S^C_{\mathrm{A}(s)}(s) = diag\left[\varepsilon_1(s), \varepsilon_2(s), .., \varepsilon_r(s), 0_{m-r,p-r}\right] \qquad (1.2)$$

Ο πολυωνυμικός πίνακας $S^C_{\mathrm{A}(s)}(s)$ ονομάζεται Smith μορφή (Smith form) στο $\mathbb{C}$ του A(s) , όπου $\varepsilon_i(s) \in \mathbb{R}[s]$, έχουν ως μεγιστοβάθμιο συντελεστή τη μοναδά , είναι πρώτα μεταξύ τους και ικανοποιούν τις σχέσεις $\varepsilon_i(s) / \varepsilon_{i+1}(s)\ \forall i \in r-1$.

Απόδειξη

Μεταξύ όλων των στοιχείων $\alpha_{ik}(s)$ του A(s) που δεν είναι ίσα με το μηδέν διαλέγουμε ένα ελαχίστου βαθμού στο s και με κατάλληλες μεταθέσεις των γραμμών και στηλών πηγαίνουμε αυτό το στοιχείο στη θέση $\alpha_{11}(s)$. Μετά βρίσκουμε τα πηλίκα και τα υπόλοιπα των πολυωνύμων $\alpha_{i1}(s)$ και $\alpha_{1k}(s)$ με το $\alpha_{11}(s)$:

$$\alpha_{i1}(s)=\alpha_{11}(s)q_{i1}(s)+r_{i1}(s)\ , \quad \alpha_{1k}(s)=\alpha_{11}(s)q_{1k}(s)+r_{1k}(s)$$

$$\text{για } i = 2,3,...,m;\ k = 2,3,...,n$$

Αν έστω και ένα από τα υπόλοιπα $r_{i1}(s)$, $r_{1k}(s)$ (i = 2,3,...,m; k = 2,3,...,n για π.χ. το $r_{1k}(s)$ δεν είναι ίσο με το μηδέν, τότε με αφαίρεση από την k - th στήλη της πρώτης στήλης πολλαπλασιασμένη με $q_{1k}(s)$ αντικαθιστούμε το $\alpha_{1k}(s)$ με το υπόλοιπο $r_{1k}(s)$ που είναι μικρότερου βαθμού από το $\alpha_{11}(s)$.

Μετά, ακολουθώντας την ίδια διαδικασία που περιγράψαμε παραπάνω μπορούμε να μειώσουμε το βαθμό του στοιχείου στην πάνω αριστερή γωνία του πίνακα βάζοντας στη θέση του ένα στοιχείο μικρότερου βαθμού ως προς s.

Αλλά εάν όλα τα υπόλοιπα $r_{21}(s),...,r_{m1}(s); r_{12}(s),...,r_{1n}(s)$ είναι ίσα με το μηδέν, τότε αφαιρώντας από την i — th γραμμή την πρώτη πολλαπλασιασμένη με $q_{i1}(s)$ για $i = 2,...,m$ και από την k-th στήλη την πρώτη πολλαπλασιασμένη με $q_{1k}(s)$ για $k = 2,...,n$ ανάγουμε τον πολυωνυμικό πίνακα στη μορφή

$$\left\| \begin{matrix} a_{11}(s) & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_{22}(s) & 0 & a_{2n}(s) \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & a_{m2}(s) & ... & a_{mn}(s) \end{matrix} \right\| \tag{1.3}$$

Εάν έστω και ένα από τα στοιχεία $\alpha_{1k}(s)$ για $i=2,...m; k=2,\ldots,n$ δεν είναι διαιρετό χωρίς υπόλοιπο από το $\alpha_{11}(s)$, τότε προσθέτουμε στην πρώτη στήλη, αυτή τη στήλη η οποία περιέχει τέτοια στοιχεία στα οποία καταλήξαμε στην προηγούμενη διαδικασία και μπορούμε να αντικαταστήσουμε ξανά το στοιχείο $\alpha_{11}(s)$ με ένα πολυώνυμο μικρότερου βαθμού.

Εφόσον το αρχικό στοιχείο $\alpha_{11}(s)$ είχε ένα καθορισμένο βαθμό και εφόσον η διαδικασία μείωσης αυτού του βαθμού δε μπορεί να συνεχιστεί απεριόριστα, πρέπει μετά από ένα πεπερασμένο αριθμό στοιχειωδών πράξεων να πάρουμε ένα πίνακα της μορφής:

$$\left\| \begin{matrix} \varepsilon_1(s) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_{22}(s) & \cdots & b_{2n}(s) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & b_{m2}(s) & \cdots & b_{mm}(s) \end{matrix} \right\| \tag{1.4}$$

στον οποίο όλα τα στοιχεία $b_{ik}(s)$ είναι διαιρετά, χωρίς υπόλοιπο, με το $\varepsilon_1(s)$. Αν μεταξύ αυτών των στοιχείων $b_{ik}(s)$ υπάρχει ένα που δεν είναι ίσο με το μηδέν, τότε συνεχίζουμε την ίδια διαδικασία στον υποπίνακα που προκύπτει από τις γραμμές *2,...,m* και τις στήλες 2,..., n, και ανάγουμε τον πίνακα (1.4) στη μορφή:

$$\left\| \begin{matrix} \varepsilon_1(s) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varepsilon_2(s) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & c_{33}(s) & \dots & c_{3n}(s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & c_{m3}(s) & \dots & c_{mn}(s) \end{matrix} \right\|$$

όπου $\varepsilon_2(s)$ είναι διαιρετό χωρίς υπόλοιπο με το $\alpha_1(s)$ και όλα τα πολυώνυμα $\alpha_{ik}(s)$ όπου $i=3,...,m$, $k=3,...,n$ είναι διαιρετά χωρίς υπόλοιπο με το $\varepsilon_2(s)$.

Συνεχίζοντας την διαδικασία, τελικά καταλήγουμε σε ένα πίνακα της μορφής:

$$\left\| \begin{matrix} \varepsilon_1(s) & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varepsilon_2(s) & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & .. \\ 0 & 0 & \dots & \varepsilon_s(s) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{matrix} \right\| \qquad (1.5)$$

όπου τα πολυώνυμα $\varepsilon_1(s),\varepsilon_2(s),..., \varepsilon_s(s)$ με ($s < \min(m, n)$) δεν είναι ίσα με μηδέν και το καθένα είναι διαιρετό με το προηγούμενο.

Πολλαπλασιάζοντας τις πρώτες s γραμμές με τους κατάλληλους μη μηδενικούς παράγοντες, μπορούμε να συμφωνήσουμε ότι οι μεγαλύτεροι συντελεστές των πολυωνύμων $\varepsilon_1(s),\varepsilon_2(s),...,\varepsilon_s(s)$ είναι ίσοι με 1. ■

Ορισμός 1.7 Τα πολυώνυμα $\varepsilon_i(s)$ καλούνται **αναλλοίωτα πολυώνυμα** (invariant polynomials) του A(s) και έχουν ως μεγιστοβάθμιο συντελεστή την μονάδα, είναι μοναδικά ορισμένα από τον A(s) και ικανοποιούν την παρακάτω ιδιότητα

$$\varepsilon_i(s) \mid \varepsilon_{i+1}(s) \ \ \forall i \in r-1 .$$

Επίσης ισχύει ότι $\varepsilon_i(s) = \dfrac{\Delta_i(s)}{\Delta_{i-1}(s)}, i = 1,\dots,r$ όπου $\Delta_0(s) := 1, \Delta_i(s) :=$ ο μέγιστος κοινός διαιρέτης όλων των $i \times i$ ελλάσονων οριζουσών του A(s). Τα πολυώνυμα $\Delta_i(s)$ ονομάζονται διαιρέτες οριζουσών (determinantal divisors) του A(s). ■

Ορισμός 1.8 (Gantmacher 1959) Έστω A(s) $\in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$. Ορίζουμε ως **μηδενικά** (zeros) του πολυωνυμικού πίνακα A(s) τα μηδενικά των αναλλοίωτων πολυωνύμων

$\varepsilon_i(s)$, όπου $i \in r$ όπως ορίστηκαν στην σχέση (1.2). Αν $\lambda_j \in \mathbb{C}$, $j = 1,\ldots,\nu$ είναι τα διαφορετικά μεταξύ τους μηδενικά του A(s), τότε τα πολυώνυμα $\varepsilon_i(s)$ μπορούν να γραφούν $\varepsilon_i(s) = \prod_{j=1}^{\nu}(s-\lambda_j)^{m_{ij}}$ και οι όροι $(s-\lambda_j)^{m_{ij}}$ ονομάζονται **πεπερασμένοι στοιχειώδεις διαιρέτες** (finite elementary divisors) του πίνακα A(s). Επίσης οι εκθέτες έχουν την ιδιότητα $0 \le m_{1j} \le m_{2j} \le \cdots \le m_{rj}$, $j = 1,\ldots,\nu$. ■

Παράδειγμα 1.1

Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε την Smith μορφή του παρακάτω πολυωνυμικού πίνακα:

$$A(s) = \begin{pmatrix} s^2+s & s^2-1 \\ s+1 & s+1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}[s]^{2x2}$$

Μεταξύ όλων των στοιχείων του *A(s)* που δεν είναι ίσα με το μηδέν διαλέγουμε αυτό που είναι ελαχίστου βαθμού και το πηγαίνουμε με εναλλαγές γραμμών-στηλών στην θέση (1,1) $a_{11}(s)$. Έτσι με εναλλαγή της πρώτης και δεύτερης γραμμής παίρνουμε:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{U_1} \begin{pmatrix} s^2+s & s^2-1 \\ s+1 & s+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s+1 & s+1 \\ s^2+s & s^2-1 \end{pmatrix}$$

Μετά βρίσκουμε τα πηλίκα και τα υπόλοιπα των πολυωνύμων $\alpha_{21}(s)$ και $\alpha_{12}(s)$ με το $\alpha_{11}(s)$. Οπότε $\alpha_{21}(s)=\alpha_{11}(s)q_{21}(s)+r_{21}(s) \Leftrightarrow s^2+s=(s+1)s+0$ και $\alpha_{12}(s)= \alpha_{11}(s)q_{12}(s)+r_{12}(s) \Leftrightarrow s+1=(s+1)\cdot 1+0$. Επειδή όλα τα υπόλοιπα είναι ίσα με μηδέν αφαιρούμε τη δεύτερη γραμμή από την πρώτη πολλαπλασιασμένη με το $q_{21}(s)$ δηλαδή με το s.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -s & 1 \end{pmatrix}}_{U_2} \begin{pmatrix} s+1 & s+1 \\ s^2+s & s^2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s+1 & s+1 \\ 0 & -s-1 \end{pmatrix}$$

Έπειτα αφαιρούμε τη δεύτερη στήλη από την πρώτη πολλαπλασιασμένη με το $q_{12}(s)$ δηλαδή με το 1.

$$\begin{pmatrix} s+1 & s+1 \\ 0 & -s-1 \end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{V_1}=\begin{pmatrix} s+1 & 0 \\ 0 & -s-1 \end{pmatrix}$$

Πολλαπλασιάζουμε την δεύτερη γραμμή με -1.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{U_3}\begin{pmatrix} s+1 & 0 \\ 0 & -s-1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} s+1 & 0 \\ 0 & s+1 \end{pmatrix}$$

Έστω $U_L(s)$ το γινόμενο

$$U_L(s)=\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{U_3}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -s & 1 \end{pmatrix}}_{U_2}\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{U_1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & s \end{pmatrix}$$

Και $U_R(s)$ ο πίνακας:

$$U_R(s)=\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{V_1}$$

Τότε:

$$S_{A(s)}^{\mathbb{C}}(s) = U_L(s)A(s)U_R(s) = \begin{pmatrix} s+1 & 0 \\ 0 & s+1 \end{pmatrix}$$

Παράδειγμα 1.2

Όμοια με το Παράδειγμα 1.1 μπορούμε να υπολογίσουμε την Smith μορφή του παρακάτω πολυωνυμικού πίνακα:

$$A(s) = \begin{pmatrix} 1+s^2 & s \\ s & 1+s \end{pmatrix}$$

Μεταξύ όλων των στοιχείων του $A(s)$ που δεν είναι ίσα με το μηδέν διαλέγουμε αυτό που είναι ελάχιστης τάξης και το πηγαίνουμε με εναλλαγές γραμμών στην θέση (1,1) $a_{11}(s)$. Έτσι με εναλλαγή της πρώτης και δεύτερης γραμμής παίρνουμε:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{U_1}\begin{pmatrix} 1+s^2 & s \\ s & 1+s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} s & 1+s \\ 1+s^2 & s \end{pmatrix}$$

Μέτα βρίσκουμε τα πηλίκα και τα υπολοίπα των πολυωνύμων $\alpha_{21}(s)$ και $\alpha_{12}(s)$ με το $\alpha_{11}(s)$.Οπότε:

$$a_{21}(s)=a_{11}(s)q_{21}(s)+r_{21}(s)\Leftrightarrow s^2+1=s\cdot s+1$$

$$a_{12}(s)=a_{11}(s)q_{12}(s)+r_{12}(s)\Leftrightarrow s+1=s\cdot 1+1$$

Αφού το $r_{12}(s)$ δεν είναι ίσα με το μηδέν τότε αφαιρούμε την δεύτερη γραμμή από την πρώτη πολλαπλασιασμένη με $q_{21}(s)$ δηλαδή με s.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -s & 1 \end{pmatrix}}_{U_2}\begin{pmatrix} s & 1+s \\ 1+s^2 & s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} s & 1+s \\ 1 & -s^2 \end{pmatrix}$$

Έπειτα αφαιρούμε τη δεύτερη στήλη από την πρώτη πολλαπλασιασμένη με το $q_{12}(s)$ δηλαδή με το 1.

$$\begin{pmatrix} s & 1+s \\ 1 & -s^2 \end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{V_1}=\begin{pmatrix} s & 1 \\ 1 & -s^2-1 \end{pmatrix}$$

Εναλάσσουμε την δεύτερη γραμμή με την πρώτη.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{U_3}\begin{pmatrix} s & 1 \\ 1 & -s^2-1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -s^2-1 \\ s & 1 \end{pmatrix}$$

Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη γραμμή με –s και την αφαιρούμε από την δεύτερη γραμμή:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -s & 1 \end{pmatrix}}_{U_4}\begin{pmatrix} 1 & -s^2-1 \\ s & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -s^2-1 \\ 0 & s^3+s+1 \end{pmatrix}$$

Έπειτα αφαιρούμε την δεύτερη στήλη από την πρώτη πολλαπλασιασμένη με το $q_{21}(s)$ δηλαδή με το s.

$$\begin{pmatrix} 1 & -s^2-1 \\ 0 & 1+s^3+s \end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & s^2+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{V_2}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1+s^3+s \end{pmatrix}$$

Έστω $U_L(s)$ το γινόμενο:

$$U_L(s)=\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -s & 1 \end{pmatrix}}_{U_4}\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{U_3}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -s & 1 \end{pmatrix}}_{U_2}\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{U_1}=\begin{pmatrix} 1 & -s \\ -s & 1+s^2 \end{pmatrix}$$

και $U_R(s)$ το γινόμενο:

$$U_R(s)=\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{V_1}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & s^2+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{V_2}=\begin{pmatrix} 1 & s^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Τότε θα έχουμε:

$$S_{A(s)}^{\mathbb{C}}(s)=U_L(s)A(s)U_R(s)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1+s^3+s \end{pmatrix}$$

Παράδειγμα 1.3

Έστω A(s)= $\begin{pmatrix} \frac{3}{10}s^2-\frac{14}{5}s+4 & \frac{3}{10}s^2-\frac{2}{5}s \\ -\frac{1}{10}s^2-\frac{2}{5}s & -\frac{1}{10}s^2-\frac{6}{5}s+4 \end{pmatrix}$ υπάρχουν οι $U_L(s), U_R(s) \in \mathbb{R}[s]^{2\times 2}$

όπως δείξαμε στα παραπάνω παραδείγματα έτσι ώστε:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -1 \\ \frac{3}{2}-\frac{3}{10}s & \frac{3}{2}-\frac{9}{10}s \end{pmatrix}}_{U_L(s)}\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{3}{10}s^2-\frac{14}{5}s+4 & \frac{3}{10}s^2-\frac{2}{5}s \\ -\frac{1}{10}s^2-\frac{2}{5}s & -\frac{1}{10}s^2-\frac{6}{5}s+4 \end{pmatrix}}_{A(s)}\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{3}{8} & 1-\frac{1}{3}s \\ -\frac{3}{8} & -\frac{1}{3}+\frac{1}{3}s \end{pmatrix}}_{U_R(s)}=\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (s-2)^2 \end{pmatrix}}_{S_{A(s)}^{C}}$$

1.4 Πεπερασμένα ζεύγη Jordan (Finite Jordan pairs)

Στην παράγραφο αυτή θα ορίσουμε και θα υπολογίσουμε τα πεπερασμένα ζεύγη Jordan που αντιστοιχούν σε ένα πολυωνυμικό πίνακα:

Θεώρημα 1.3 (Gohberg 1982)

Έστω ($C_{s_o} \in \mathbb{R}^{r \times n}, J_{s_o} \in \mathbb{R}^{n \times n}$) ένα ζεύγος πινάκων όπου J_{s_0} είναι ένας πίνακας Jordan με μοναδική ιδιοτιμή s_0 δηλαδή

$$J_{s_0} = \begin{pmatrix} s_0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s_0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & s_0 & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & s_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n} \tag{1.6}$$

Τότε οι ακόλουθες συνθήκες είναι ικανές και αναγκαίες ώστε το ζεύγος $\left(C_{s_0}, J_{s_0}\right)$ να είναι ένα ζεύγος Jordan του πολυωνυμικού πίνακα $\mathrm{A}(s) = \mathrm{A}_o + \mathrm{A}_1 s + \mathrm{A}_2 s^2 + ...\mathrm{A}_q s^q$ που αντιστοιχεί στο s_o:

α) η ορίζουσα A(s) να έχει μία ρίζα s_o πολλαπλότητας n

β) $$\operatorname{rank} \begin{pmatrix} C_{s_0} \\ C_{s_0} J_{s_0} \\ \vdots \\ C_{s_0} J_{s_0}^{n-1} \end{pmatrix} = n \tag{1.7}$$

γ) $$\mathrm{A}_q C_{s_0} J_{s_0}^q + ... + \mathrm{A}_1 C_{s_0} J_{s_0} + \mathrm{A}_0 C_{s_0} = 0 \tag{1.8}$$

Παίρνοντας ένα ζεύγος Jordan $C_{s_i} \in \mathbb{R}^{r \times n_i}, J_{s_i} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$ για κάθε μηδενικό s_i, όπου i=1,2,…,k, του A(s), ορίζουμε ένα νέο πεπερασμένο ζεύγος Jordan ($C \in \mathbb{R}^{r \times n}, J \in \mathbb{R}^{n \times n}$) του A(s) όπου $C = (C_{s_1} \quad C_{s_2} \quad \cdots \quad C_{s_k})$; $J = b\,\mathrm{lo}\,ckdiag(J_{s_1} \quad J_{s_2} \quad \cdots \quad J_{s_k})$ όπου $n = n_1 + n_2 + ... + n_k$ είναι το πλήθος των διαφορετικών ιδιοτιμών του T(s).

Σημειώνουμε ότι το ζεύγος $\left(C_{s_0}, J_{s_0}\right)$ δεν είναι ορισμένο μοναδικά από τον πολυωνυμικό πίνακα A(s).

Παράδειγμα 1.4

Θεωρούμε τον πολυωνυμικό πίνακα του παραδείγματος 1.4

$$A(s)=\begin{pmatrix} \frac{3}{10}s^2-\frac{14}{5}s+4 & \frac{3}{10}s^2-\frac{2}{5}s \\ -\frac{1}{10}s^2-\frac{2}{5}s & -\frac{1}{10}s^2-\frac{6}{5}s+4 \end{pmatrix}$$

Δηλαδή:

$$A(s)=\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{3}{10} & \frac{3}{10} \\ -\frac{1}{10} & -\frac{1}{10} \end{pmatrix}}_{A_2}s^2+\underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{14}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & -\frac{6}{5} \end{pmatrix}}_{A_1}s+\underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}}_{A_0}$$

Θεωρούμε επίσης τους πίνακες:

$$C=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; J=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι:

α) $\det A(s)=(s-2)^2$ και συνεπώς η $s_o=2$ είναι μία ιδιοτιμή του A(s).

β) $$rank\begin{pmatrix} C \\ CJ^{2-1} \end{pmatrix}=rank\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ - & - \\ 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}=2$$

γ) $$A_2CJ^2+A_1CJ+A_oC=0_{2,2}$$

Συνεπώς το ζεύγος (C,J) είναι ένα πεπερασμένο ζεύγος Jordan που ανταποκρίνεται στην ιδιοτιμή $s_1=2$ του πολυωνυμικού πίνακα A(s). ■

Ας υποθέσουμε ότι ο πολυωνυμικός πίνακας $A(s) \in \mathbb{R}[s]^{r\times r}$ έχει k διαφορετικά μηδενικά στο $\mathbb{C}$, $s_1, s_2, ..., s_k$ όπου για να μην υπάρχει δυσκολία έκφρασης υποθέτουμε ότι $s_i \in \mathbb{R} - k_i$ και έστω η Smith μορφή του A(s) στο $\mathbb{C}$ είναι

$$S_{A(s)}^{\mathbb{C}} = diag[\underbrace{1,1,....,1}_{z-1}, f_z(s), f_{z+1}(s), ..., f_r(s)] \in \mathbb{R}^{r\times r} \tag{1.9}$$

με $1 \le z \le r$, $f_i[s] \in \mathbb{R}[s]$ τα αναλλοίωτα πολυώνυμα του A(s) και $f_i(s) / f_{i+1}(s), i = z, z+1, ...r-1$. Υποθέτουμε ότι κάθε αναλλοίωτο πολυώνυμο $f_z(s), ..., f_r(s)$ αναλύεται ως γινόμενο πρώτων μεταξύ τους πολυωνύμων δηλαδή

$$\begin{aligned} f_z(s) &= (s-s_1)^{\sigma_{1z}} (s-s_2)^{\sigma_{2z}} ....(s-s_k)^{\sigma_{kz}} \\ f_{z+1}(s) &= (s-s_1)^{\sigma_{1,z+1}} (s-s_2)^{\sigma_{2,z+1}} ....(s-s_k)^{\sigma_{k,z+1}} \\ &\vdots \\ f_r(s) &= (s-s_1)^{\sigma_{1,r}} (s-s_2)^{\sigma_{2,r}} ....(s-s_k)^{\sigma_{k,z+1}} \end{aligned} \tag{1.10}$$

όπου $0 \le \sigma_{i,z} \le \sigma_{i,z+1} \le ... \le \sigma_{i,r}$ δηλαδή $f_j(s) = (s-s_i)^{\sigma_{i,j}} \hat{f}_j(s), j = z, z+1, ..., r$ με $\hat{f}_j(s_i) \ne 0$.

Οι όροι $(s-s_i)^{\sigma_{i,j}}$ ονομάζονται **πεπερασμένοι στοιχειώδεις διαιρέτες (finite elementary divisors)** του A(s) στο s=s$_i$. όπως έχουμε αναφέρει στον ορισμό 1.8.

Ορίζουμε επίσης με n το άθροισμα των πεπερασμένων διαιρετών ως $n := \deg\left[\prod_{j=z}^{r} f_j(s)\right] = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=z}^{r} \sigma_{i,j}$.

Παρακάτω δίνουμε έναν αλγόριθμο για την κατασκευή ενός πεπερασμένου ζεύγους Jordan μήκους n.

Αλγόριθμος 1.1 (Vardulakis 1991)

Ένας αλγόριθμος για την κατασκευή πεπερασμένου ζεύγους Jordan του $A(s) \in \mathbb{R}[s]^{r\times r}$ δίνεται παρακάτω:

Βήμα 1: Υπολογίζουμε αντιστρέψιμους πίνακες $U_L(s), U_R(s)$ τέτοιους ώστε $U_L(s)A(s)U_R(s) = S_{A(s)}^{\mathbb{C}}(s)$

Βήμα 2: Έστω $u_j(s) \in \mathbb{R}[s]^{r\times 1}$ $j \in r$ είναι οι στήλες του $U_R(s)$ και $u_j^q(s) = (d^q / d^q)u_j(s)$. Υπολογίζουμε τα διανύσματα

$$\beta^i_{j,q} = \frac{1}{q!} u_j^{(q)}(s_i), i \in k \tag{1.11}$$

j=z,z+1,…,r και q=0,1,…σ_{ij}-1 όπου $s_i \in \mathbb{C}, i \in k$ είναι τα μηδενικά του A(s) και $0 \le \sigma_{i,z} \le \sigma_{i,z+1} \le ... \le \sigma_{i,r}$ είναι οι πολλαπλότητες τους.

Τότε για κάθε $i \in k$ και j=z,z+1,…,r τα διανύσματα $\beta^i_{j,0}, \beta^i_{j,1}, ..., \beta^i_{j,(\sigma_{i,j-2})}, \beta^i_{j,(\sigma_{i,j-1})}$ δημιουργούν μία αλυσίδα Jordan που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή s_i του A(s) με μήκος σ_{ij} όπως φαίνεται και στο επόμενο βήμα.

Βήμα 3: Δημιουργούμε τους πίνακες

$$C_{i,j} = [\beta^i_{j,0}, \beta^i_{j,1}, ..., \beta^i_{j,(\sigma_{i,j-2})}, \beta^i_{j,(\sigma_{i,j-1})}] \in \mathbb{R}^{r\times\sigma_{i,j}}$$

$$J_{i,j} = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\sigma_{i,j}\times\sigma_{i,j}}$$

όπου $i \in k$ και $j = z, z+1, \dots, r$ και

$$C := [C_{i,z}, C_{i,z+1}, \dots, C_{i,r}] \in \mathbb{R}^{r\times m_i}$$

$$J_i := blockdiag[J_{i,z,} J_{i,z+1,...,} J_{i,r}] \in \mathbb{R}^{m_i\times m_i}$$

όπου $m_i := \sigma_{i,z} + \sigma_{i,z+1} + \dots + \sigma_{i,r}$

Βήμα 4: Το ζεύγος (C,J) όπου:

$$C := [C_{1,} C_2, ..., C_k] \in \mathbb{R}^{r\times n}$$

$$J := blockdiag[J_{1,} J_{2,...,} J_k] \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

και $n := m_1 + m_2 + ... + m_k = \deg[\left[\prod_{j=z}^{r} f_j(s)\right] = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=z}^{r}\sigma_{i,j}$

αποτελεί ένα ζεύγος Jordan του πολυωνυμικού πίνακα A(s).

Παράδειγμα 1.5

Θεωρούμε τον πολυωνυμικό πίνακα του παραδείγματος 1.1

$$A(s) = \begin{pmatrix} s^2+s & s^2-1 \\ s+1 & s+1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}[s]^{2x2}$$

Βήμα 1: Έχουμε υπολογίσει στο παράδειγμα 1.1 τους αντιστρέψιμους πίνακες $U_L(s), U_R(s) \in \mathbb{R}[s]^{2\times 2}$.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & s \end{pmatrix}}_{U_L(s)} \underbrace{\begin{pmatrix} s^2+S & s^2-1 \\ s+1 & s+1 \end{pmatrix}}_{A(s)} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{U_R(s)} = \underbrace{\begin{pmatrix} s+1 & 0 \\ 0 & s+1 \end{pmatrix}}_{S^{\mathbb{C}}_{A(s)}(s)}$$

Βήμα 2:

Έστω $u_1^{(0)}(s) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ η πρώτη στήλη του $U_R(s)$ που αντιστοιχεί στη πρώτη στήλη της Smith μορφής που περιέχει το μηδενικό s_1=-1. Υπολογίζουμε τα διανύσματα:

$$\beta_{1,0}^1 = \frac{1}{0!}u_1^{(0)}(s_1) = \frac{1}{0!}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ομοίως για την δεύτερη στήλη έχουμε $u_2^{(0)}(s) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ άρα

$$\beta_{2,0}^1 = \frac{1}{0!}u_2^{(0)}(s_1) = \frac{1}{0!}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Βήμα 3: Το ζεύγος (C,J) :

$C=(C_{1,1},C_{1,2})=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ όπου: $C_{1,1}=(\beta^{1}_{1,0})=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$ και $C_{1,2}=(\beta^{1}_{2,0})=\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}$

και $J=\begin{pmatrix}J_{1,1} & 0\\ 0 & J_{1,2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ όπου: $J_{1,1}$=(-1) και $J_{1,2}$=(-1) αποτελεί ένα

πεπερασμένο ζεύγος Jordan του πολυωνυμικού πίνακαι A(s). ■

Παράδειγμα 1.6

Θεωρούμε τον πολυωνυμικό πίνακα του παραδείγματος 1.3

$$A(s)=\begin{pmatrix}\frac{3}{10}s^2-\frac{14}{5}s+4 & \frac{3}{10}s^2-\frac{2}{5}s\\ -\frac{1}{10}s^2-\frac{2}{5}s & -\frac{1}{10}s^2-\frac{6}{5}s+4\end{pmatrix}$$

Βήμα 1: Έχουμε υπολογίσει τους αντιστρέψιμους πίνακες $U_L(s),U_R(s)\in\mathbb{R}[s]^{2\times 2}$

$$U_L(s)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3} & -1\\ \frac{3}{2}-\frac{3}{10}s & \frac{3}{2}-\frac{9}{10}s\end{pmatrix},U_R(s)=\begin{pmatrix}\frac{3}{8} & 1-\frac{1}{3}s\\ -\frac{3}{8} & -\frac{1}{3}+\frac{1}{3}s\end{pmatrix}$$

τέτοιους ώστε

$$\underbrace{\begin{pmatrix}-\frac{1}{3} & -1\\ \frac{3}{2}-\frac{3}{10}s & \frac{3}{2}-\frac{9}{10}s\end{pmatrix}}_{U_L(s)}\underbrace{\begin{pmatrix}\frac{3}{10}s^2-\frac{14}{5}s+4 & \frac{3}{10}s^2-\frac{2}{5}s\\ -\frac{1}{10}s^2-\frac{2}{5}s & -\frac{1}{10}s^2-\frac{6}{5}s+4\end{pmatrix}}_{A(s)}\underbrace{\begin{pmatrix}\frac{3}{8} & 1-\frac{1}{3}s\\ -\frac{3}{8} & -\frac{1}{3}+\frac{1}{3}s\end{pmatrix}}_{U_R(s)}=\underbrace{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & (s-2)^2\end{pmatrix}}_{S^{C}_{A(s)}(s)}$$

Βήμα 2: Έστω $u_2(s)=\begin{pmatrix} 1-\frac{1}{3}s \\ -\frac{1}{3}+\frac{1}{3}s \end{pmatrix}\in\mathbb{R}[s]^{2\times 1}$ η **δεύτερη** στήλη του $U_R(s)$, που αντιστοιχεί στην δεύτερη στήλη της Smith μορφή του A(s) στο μηδενικό $s_2=2$.

Υπολογίζουμε τα διανύσματα:

$$\beta_{2,0}^2 := \frac{1}{0!}u_2^{(0)}(s_2)=u_2(2)=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\beta_{2,1}^2 := \frac{1}{1!}u_2^{(1)}(s_2)=u_2^1(2)=\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Βήμα 3: Το ζεύγος (C,J) όπου:

$$C=(\beta_{2,0}^2 \quad \beta_{2,1}^2)=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, J=\begin{pmatrix} s_2 & 1 \\ 0 & s_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

αποτελεί πεπερασμένο ζεύγος Jordan του πολυωνυμικού πίνακα A(s). ■

2.Επίλυση γραμμικών ομογενών συστημάτων αλγεβρικών και διαφορικών εξισώσεων

Στην παράγραφο αυτή θα προτείνουμε φόρμουλες επίλυση του συστήματος αλγεβρικών και διαφορικών εξισώσεων της μορφής Α(ρ)β(t)=0 σε σχέση με τα πεπερασμένα ζεύγη Jordan.

Έστω το γραμμικό σύστημα αλγεβρικών και διαφορικών εξισώσεων

$$A(\rho)\beta(t)=0,\ t\geq 0 \tag{2.1}$$

όπου $\rho=\dfrac{d}{dt}$ ο διαφορικός τελεστής, $A(\rho)\in\mathbb{R}[\rho]^{r\times r}$ και $\beta(t):(0-,\infty)\to\mathbb{R}^r$.

Υποθέτουμε ότι β(t) ανήκει στο χώρο των απείρως διαφορίσιμων συναρτήσεων, έτσι ώστε $\beta^{(q)}(0-)=\beta^{(q)}(0+)=\beta^{(q)}(0)$ με q=0,1,2,…. ($\beta^{q}(t)$ δηλώνει την παράγωγο τάξης q του β(t) ως προς t). Έστω:

$$A(\rho)=\mathrm{A}_k\rho^k+A_{k-1}\rho^{k-1}+\ldots+A_1\rho+\mathrm{A}_0 \tag{2.2}$$

όπου $\mathrm{A}_i\in\mathbb{R}^{r\times r}, i=0,1,....,k$ και έστω $\beta(0-),\beta^{(1)}(0-),...,\beta^{(\kappa-1)}(0-)$ είναι οι ‘αρχικές συνθήκες’ του διανύσματος β(t) και των παραγώγων του τάξης 1,2,…,k-1 στο σημείο t=0-.

Έστω $\lambda_0\in\mathbb{C}$ ένα πεπερασμένο μηδενικό του Α(ρ),δηλαδή $|\mathrm{A}(\lambda_0)|$=0.Τότε έχουμε την επόμενη πρόταση

Πρόταση 2.1

Έστω

$$\beta(t)=\left[\frac{t^{\mu}}{\mu!}\beta_0+\frac{t^{\mu-1}}{(\mu-1)!}\beta_1+\ldots+\frac{t}{1!}\beta_{\mu-1}+\beta_{\mu}\right]e^{\lambda_0 t} \tag{2.3}$$

όπου $\beta_i\in\mathbb{C}$, i=0,1,…,μ και $\beta_0\neq 0$.

Τότε η β(t) ικανοποιεί την γραμμική ομογενή διαφορική εξίσωση (2.1) εάν και μόνο εάν οι επόμενες εξισώσεις ικανοποιούνται:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{A}(\lambda_0)\beta_0 = 0\\
&\mathrm{A}^{(1)}(\lambda_0)\beta_0 + \mathrm{A}(\lambda_0)\beta_1 = 0\\
&\vdots\\
&\frac{1}{\mu!}\mathrm{A}^{(\mu)}(\lambda_0)\beta_0 + \frac{1}{(\mu-1)!}\mathrm{A}^{(\mu-1)}(\lambda_0)\beta_1 + \ldots + \mathrm{A}^{(1)}(\lambda_0)\beta_{\mu-1} + \mathrm{A}(\lambda_0)\beta_\mu = 0
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

Απόδειξη

Παρατηρούμε ότι

Α(ρ)β(t)=

$$\mathrm{A}_0\left[\frac{t^\mu}{\mu!}\beta_0 + \frac{t^{\mu-1}}{(\mu-1)!}\beta_1 + \ldots + \beta_\mu\right]e^{\lambda_0 t} + A_1\lambda_0\left[\frac{t^\mu}{\mu!}\beta_0 + \frac{t^{\mu-1}}{(\mu-1)!}\beta_1 + \ldots + \beta_\mu\right]e^{\lambda_0 t} +$$

$$A_1\left[\frac{t^{\mu-1}}{(\mu-1)!}\beta_0 + \frac{t^{\mu-2}}{(\mu-2)!}\beta_1 + \ldots + \beta_{\mu-1}\right]e^{\lambda_0 t} + A_2\lambda^2{}_0\left[\frac{t^\mu}{\mu!}\beta_0 + \frac{t^{\mu-1}}{(\mu-1)!}\beta_1 + \ldots + \beta_\mu\right]e^{\lambda_0 t} +$$

$$2A_2\lambda_0\left[\frac{t^{\mu-1}}{(\mu-1)!}\beta_0 + \frac{t^{\mu-2}}{(\mu-2)!}\beta_1 + \ldots + \beta_{\mu-1}\right]e^{\lambda_0 t} + A_2\left[\frac{t^{\mu-2}}{(\mu-2)!}\beta_0 + \frac{t^{\mu-3}}{(\mu-3)!}\beta_1 + \ldots + \beta_{\mu-2}\right]e^{\lambda_0 t} +$$

$$A_3\lambda_0^3\left[\frac{t^\mu}{\mu!}\beta_0 + \frac{t^{\mu-1}}{(\mu-1)!}\beta_1 + \ldots + \beta_\mu\right]e^{\lambda_0 t} + 3A_3\lambda^2{}_0\left[\frac{t^{\mu-1}}{(\mu-1)!}\beta_0 + \frac{t^{\mu-2}}{(\mu-2)!}\beta_1 + \ldots + \beta_{\mu-1}\right]e^{\lambda_0 t} +$$

$$\frac{1}{2!}3A_3\lambda_0\left[\frac{t^{\mu-2}}{(\mu-2)!}\beta_0 + \frac{t^{\mu-3}}{(\mu-3)!}\beta_1 + \ldots + \beta_{\mu-2}\right]e^{\lambda_0 t} + \ldots + A_\mu\lambda_0^\mu\left[\frac{t^\mu}{\mu!}\beta_0 + \frac{t^{\mu-1}}{(\mu-1)!}\beta_1 + \ldots + \beta_\mu\right]e^{\lambda_0 t} +$$

$$\mu A_\mu\lambda_0^{\mu-1}\left[\frac{t^{\mu-1}}{(\mu-1)!}\beta_0 + \frac{t^{\mu-2}}{(\mu-2)!}\beta_1 + \ldots + \beta_{\mu-1}\right]e^{\lambda_0 t} + \ldots = \left[\underbrace{\mathrm{A}_0 + \mathrm{A}_1\lambda_0 + \mathrm{A}_2\lambda_0^2 + \ldots + A_\mu\lambda_0^\mu}_{\mathrm{A}(\lambda_0)}\right]\frac{t^\mu}{\mu!}\beta_0 e^{\lambda_0 t} +$$

$$\left[\mathrm{A}_0 + \mathrm{A}_1\lambda_0 + \mathrm{A}_2\lambda_0^2 + \ldots + A_\mu\lambda_0^\mu\right]\frac{t^{\mu-1}}{(\mu-1)!}\beta_1 e^{\lambda_0 t} + \ldots + \left[\mathrm{A}_0 + \mathrm{A}_1\lambda_0 + \mathrm{A}_2\lambda_0^2 + \ldots + A_\mu\lambda_0^\mu\right]\beta_\mu e^{\lambda_0 t} +$$

$$\left[\underbrace{\mathrm{A}_1 + 2\mathrm{A}_2\lambda_0 + \ldots + \mu A_\mu\lambda_0^{\mu-1}}_{\mathrm{A}^{(1)}(\lambda_0)}\right]\frac{t^{\mu-1}}{(\mu-1)!}\beta_0 e^{\lambda_0 t} + \ldots + \left[\mathrm{A}_1 + 2\mathrm{A}_2\lambda_0 + \ldots + \mu A_\mu\lambda_0^{\mu-1}\right]\beta_{\mu-1}e^{\lambda_0 t} +$$

$$\frac{1}{\mu!}\left[\underbrace{\mathrm{A}_{\mu-1}+\mu A_{\mu}\lambda_0}_{\mathrm{A}^{(\mu)}(\lambda_0)}\ \mathrm{A}_{\mu-1}+\mu A_{\mu}\lambda_0\right]\beta_0 e^{\lambda_0 t}=$$

$$\frac{t^{\mu}}{\mu!}\mathrm{A}(\lambda_0)\beta_0 e^{\lambda_0 t}+\frac{t^{\mu-1}}{(\mu-1)!}\mathrm{A}(\lambda_0)\beta_1 e^{\lambda_0 t}+\ldots+\mathrm{A}(\lambda_0)\beta_{\mu} e^{\lambda_0 t}+ \tag{2.5}$$

$$\frac{t^{\mu-1}}{(\mu-1)!}\mathrm{A}^{(1)}(\lambda_0)\beta_0 e^{\lambda_0 t}+\frac{1}{\mu!}\mathrm{A}^{(\mu)}(\lambda_0)\beta_0 e^{\lambda_0 t}.$$

Αν λοιπόν θέλουμε Α(ρ)β(t)=0, τότε αν τα πολυώνυμα $\left\{e^{\lambda_0 t}, te^{\lambda_0 t}, ..., t^{\mu}e^{\lambda_0 t}\right\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, θα πρέπει οι συντελεστές των πολυωνύμων αυτών να είναι μηδέν οπότε και αποδεικνύονται οι ζητούμενες σχέσεις (2.4). ■

Ορισμός 2.1 Η ακολουθία $\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_\mu$ η οποία ικανοποιεί τις εξισώσεις (2.4) είναι γνωστή ως Jordan αλυσίδα μήκους μ+1 που αντιστοιχεί στο μηδενικό $\lambda_0\in\mathbb{C}$ του πίνακα Α(ρ). Το διάνυσμα $\beta_0 \in\mathbb{R}^r, \beta_0\neq 0$ είναι γνωστό ως ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στο μηδενικό $\lambda_0\in\mathbb{C}$ του πίνακα Α(ρ). Τα διανύσματα $\beta_1,\ldots,\beta_\mu$ ονομάζονται γενικευμένα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στο μηδενικό $\lambda_0\in\mathbb{C}$ του πίνακα Α(ρ). Ένα διάνυσμα β(t) όπως αυτό της σχέσης (2.3) ονομάζεται λύση της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (2.1). ■

Είναι φανερό ότι εάν για κάποια μ>0, $\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_\mu$ είναι μια αλυσίδα Jordan τότε από τις σχέσεις (2.4) προκύπτει ότι οι ακολουθίες:

$$\begin{gathered}\beta_0\\ \beta_0,\beta_1\\ \vdots\\ \beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_{\mu-1}\end{gathered} \tag{2.6}$$

είναι επίσης αλυσίδες Jordan μήκους 1,2,…,μ αντίστοιχα, που αντιστοιχούν στο μηδενικό $\lambda_0\in\mathbb{C}$ του πίνακα Α(ρ) και συνεπώς τα διανύσματα $\beta_j(t)$, j=0,1,…,μ που ορίζονται από την σχέση

$$\beta_j(t)=[\rho \mathrm{I}_r-\lambda_0 \mathrm{I}_r]^j\beta(t)=\left[\frac{t^{\mu-j}}{(\mu-j)!}\beta_0+\frac{t^{\mu-j-1}}{(\mu-j-1)!}\beta_1+\frac{t}{1!}\beta_{\mu-j-1}+\beta_{\mu-j}\right]e^{\lambda_0 t} \tag{2.7}$$

είναι επίσης λύσεις της (2.1). Οι εξισώσεις της μορφής (2.7) μπορούν να γραφούν υπό την μορφή πινάκων ως:

$$\Psi(t)=\left[\beta_\mu(t)\quad ,\beta_{\mu-1}(t)\quad ,\ldots\quad \beta_1(t)\quad ,\beta_0(t)\right]=$$

$$\left[\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_{\mu-1},\beta_\mu\right]\begin{bmatrix} 1 & \frac{t}{1!} & \cdots & \frac{t^{\mu-1}}{(\mu-1)!} & \frac{t^{\mu}}{\mu!} \\ 0 & 1 & \cdots & \frac{t^{\mu-2}}{(\mu-2)!} & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \frac{t}{1!} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \frac{t}{1!} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}e^{\lambda_0 t} \tag{2.8}$$

Αν τώρα ορίσουμε τους πίνακες:

$\Psi(t):=[\beta_\mu(t),\beta_{\mu-1}(t),\ldots,\beta_1(t),\beta_0(t)],\qquad C:=[\beta_0,\beta_{1,\ldots,}\beta_{\mu-1},\beta_\mu]\in\mathbb{R}^{r\times(\mu+1)}$ και

$$J=\begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{(\mu+1)(\mu+1)}$$

η (2.8) μπορεί να πάρει την μορφή

$$\Psi = \mathrm{C}e^{\mathrm{J}t} \tag{2.9}$$

όπου

$$e^{Jt}=\begin{bmatrix} 1 & \frac{t}{1!} & \cdots & \frac{t^{\mu-1}}{(\mu-1)!} & \frac{t^{\mu}}{\mu!} \\ 0 & 1 & \cdots & \frac{t^{\mu-2}}{(\mu-2)!} & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \frac{t}{1!} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \frac{t}{1!} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} e^{\lambda_0 t}$$

Πρόταση 2.2 Τα διανύσματα $\beta_j(t), j=0,1,\dots,\mu$ που ορίζονται στη σχέση (2.7) με $\beta_0 \neq 0$, είναι $\mathbb{C}-$γραμμικά ανεξάρτητα στο διάστημα [0,t_2], t_2>0. ■

Λήμμα 2.1 Έστω το σύνολο $\{f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)\}$ από διανύσματα με στοιχεία συναρτήσεις $f_i(t) := [t_{1,} t_2] \rightarrow \mathbb{R}^r$ και έστω ότι έχουν συνεχείς παραγώγους έως και την (n-1) τάξη στο διάστημα [t_1,t_2]. Συμβολίζουμε με $F(t)=\left[f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)\right]$ δηλαδή τον $r \times n$ πίνακα με $f_i(t)$ την i-στήλη του και με $F^i(t)$ την i-παράγωγο του F(t). Τότε εάν για κάποιο $t_0=[t_{1,} t_2]$

$$rank\begin{bmatrix} F(t_0) \\ F^{(1)}(t_0) \\ \vdots \\ F^{(n-1)}(t_0) \end{bmatrix} = n \tag{2.10}$$

οι συναρτήσεις $f_i(t), i \in n$ είναι $\mathbb{C}-$γραμμικά ανεξάρτητες στο διάστημα [t_1,t_2]. ■

Πρόταση 2.3

Ο χώρος X των λύσεων του συστήματος (2.1) είναι ένας $\mathbb{R}$-διανυσματικός χώρος.

■

Παράδειγμα 2.1

Έστω ο πίνακας A(s)=$\begin{pmatrix} s^2+s & s^2-1 \\ s+1 & s+1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}[s]$

που αναφέραμε στο παράδειγμα 1.1 του οποίου η Smith μορφή είναι

$$S_{A(s)}^{\mathbb{C}}(s) = \begin{pmatrix} s+1 & 0 \\ 0 & s+1 \end{pmatrix}$$

δηλαδή s_1=-1,s_2=-1,σ_{11}=1,z=1,z+1=2=r.

Ισχύει $U_L(s)A(s)U_R(s)$= $S_A^{\mathbb{C}}(s)$ όπου $U_L(s) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ s & -1 \end{pmatrix}$ και $U_R(s) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ οι πίνακες που ανάγουν τον πίνακα A(s) στη Smith μορφή.

Από τη σχέση $S_{A(s)}^{\mathbb{C}}(s) = U_L(s)A(s)U_R(s)$ έχουμε

$$A(s)U_R(s) = U_L^{-1}(s)S_{A(s)}^{\mathbb{C}}(s)$$

δηλαδή

$$A(s)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = U_L^{-1}(s)\begin{pmatrix} s+1 & 0 \\ 0 & s+1 \end{pmatrix}$$

Έχουμε

$$u_1^{(0)}(s_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{και } \beta_{1,0}^1 = \frac{1}{0!}u_1^{(0)}(-1) = \frac{1}{0!}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Αντίστοιχα

$$u_2^{(0)}(s_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{και } \beta_{2,0}^1 = \frac{1}{0!}u_2^{(0)}(-1) = \frac{1}{0!}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ορίζουμε τις παρακάτω διανυσματικές συναρτήσεις

$$\beta_{jq}^i(t) = \left[\frac{t^{\sigma_{ij}-1-q}}{(\sigma_{ij}-1-q)!}\beta_{j0}^t + \frac{t^{\sigma_{ij}-2-q}}{(\sigma_{ij}-2-q)!}\beta_{j1}^t + \ldots + \frac{t}{1!}\beta_{j(\sigma_{ij}-2-q)}^i + \beta_{(\sigma_{ij}-1-q)}^i \right] e^{s_i t}$$

όπου $i \in k$,j=z,z+1,….,r και q=0,1,….,σ_{ij}-1.

Άρα $\beta_{10}^{1}(t) = \left[\frac{t^0}{0!}\beta_{10}^{1}\right] e^{s_1 t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t}$ και $\beta_{20}^{1}(t) = \left[\frac{t^0}{0!}\beta_{20}^{1}\right] e^{s_1 t} = \begin{pmatrix} -1 \\ +1 \end{pmatrix} e^{-t}$

Επομένως ο χώρος λύσεων είναι ο εξής:

$$X = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t}, \begin{pmatrix} -1 \\ +1 \end{pmatrix} e^{-t} \right\rangle$$

■

Παράδειγμα 2.2

Θεωρούμε το ομογενές σύστημα αλγεβρικών και διαφορικών εξισώσεων

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{3}{10}\rho^2 - \frac{14}{5}\rho + 4 & \frac{3}{10}\rho^2 - \frac{2}{5}\rho \\ -\frac{1}{10}\rho^2 - \frac{2}{5}\rho & -\frac{1}{10}\rho^2 - \frac{6}{5}\rho + 4 \end{pmatrix}}_{\mathrm{A}(\rho)} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \beta_1(t) \\ \beta_1(t) \end{pmatrix}}_{\beta(t)} = 0_{2,1} \quad (2.11)$$

όπου το πεπερασμένο ζεύγος Jordan έχει υπολογιστεί στο παράδειγμα (1.6) και είναι:

$$C = (\beta_{2,0}^{2} \quad \beta_{2,1}^{2}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ο αριθμός στηλών (column span) του

$$\Psi = Ce^{Jt} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} e^{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} t} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}e^{2t} & \frac{1}{3}e^{2t}(t-1) \\ \frac{1}{3}e^{2t} & \frac{1}{3}e^{2t}(t+1) \end{pmatrix}$$

αποτελεί τον χώρο λύσεων του συστήματος (2.11) δηλαδή:

$$B^{\mathbb{C}} = \left\langle \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} e^{2t}, \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(t-1) \\ \frac{1}{3}(t+1) \end{pmatrix} e^{2t} \right\rangle$$

Παράδειγμα 2.3

Έστω ο πολυωνυμικός πίνακας $A(s)=\begin{pmatrix} s+1 & s+1 \\ 0 & (s+2)^2 \end{pmatrix}\in\mathbb{R}[s]^{2\times 2}$ και έστω η Smith μορφή του είναι $S_{A(s)}^{\mathbb{C}}(s)$=$U_L(s)A(s)U_R(s)$

δηλαδή $s_1=-1, s_2=-2, k=2, z=3, r=2, n=3$ όπου

$$U_R(s)=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -(s+1)(s+3) \end{pmatrix}$$

και

$$S_{A(s)}^{\mathbb{C}}(s)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (s+1)(s+2)^2 \end{pmatrix}$$

Έστω

$$u_2(s)=\begin{pmatrix} -1 \\ -(s+1)(s+3) \end{pmatrix}$$

η δεύτερη στήλη του $U_R(s)$ που ανταποκρίνεται στην δεύτερη στήλη της Smith μορφής του A(s) και έτσι στην πεπερασμένη ιδιοτιμή $s_1=-1$ υπολογίζουμε τα διανύσματα

$$\beta_{20}^{1}:=\frac{1}{0!}u_2^{(0)}(s_1)=u_2(-1)=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Στην πεπερασμένη ιδιοτιμή $s_2=-2$ υπολογίζουμε τα διανύσματα

$$\beta_{20}^{2}:=\frac{1}{0!}u_2^{(0)}(s_2)=u_2(-2)=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\beta_{21}^{2}:=\frac{1}{1!}u_2^{(1)}(s_2)=u_2^{(1)}(-2)=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ορίζουμε

$$C=(C_{12},C_{22})=(\beta_{20}^{1}\,|\,\beta_{20}^{2}\;\beta_{21}^{2})=\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

και

$$J_1=(1) \text{ και } J_2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Άρα

$$J = blockdiag(J_{1,}J_2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

και

$$\Psi(t) = Ce^{Jt} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} e^{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} t} = \begin{pmatrix} -e^{-t} & -e^{-2t} & -te^{-2t} \\ 0 & e^{-2t} & te^{-2t} \end{pmatrix}$$

που ορίζει τον χώρο λύσεων

$$B^{\mathbb{C}} = \left\langle \begin{pmatrix} -e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -e^{-2t} \\ e^{-2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -te^{-2t} \\ te^{-2t} \end{pmatrix} \right\rangle$$

■

3.Κατασκευή συστήματος αλγεβρικών και διαφορικών εξισώσεων δεδομένου του χώρου λύσεων

Στην προηγούμενη ενότητα μελετήσαμε την επίλυση γραμμικών ομογενών συστημάτων αλγεβρικών και διαφορικών εξισώσεων της μορφής Α(ρ)β(t)=0,Α(ρ) $\in \mathbb{R}[\rho]^{r\times r}$ με $\det A(\rho)\neq 0$ και $\rho := \frac{d}{dt}$ δηλαδή πώς να κατασκευάσουμε τον ομαλό χώρο λύσεων αλγεβρικών και γραμμικών διαφορικών εξισώσεων ενός ομογενούς συστήματος. Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε το **αντίστροφο πρόβλημα** δηλαδή γνωρίζοντας την ομαλή (smooth) συμπεριφορά ενός συστήματος να μπορέσουμε να βρούμε το σύστημα των αλγεβρικών και γραμμικών διαφορικών εξισώσεων της μορφής Α(ρ)β(t)=0,το οποίο παράγει τον συγκεκριμένο χώρο λύσεων.

Θεωρούμε τις $\mathbb{C}^r-$διανυσματικές συναρτήσεις της μορφής $\tilde{\beta}_j(t)=\beta_j(t)e^{s_jt}$ όπου $\beta_j(t)$ πολυώνυμα ως προς t των οποίων οι συντελεστές είναι διανύσματα στο $\mathbb{C}^r$.

Στην ενότητα αυτή θα δείξουμε πως μπορούμε να βρούμε ένα $n\times n$ πολυωνυμικό πίνακα Α(ρ) με πεπερασμένο πλήθος μηδενικών τέτοιο ώστε οι συναρτήσεις $\beta_1(t),\ldots,\beta_r(t)$ να αποτελούν λύσεις του συστήματος Α(ρ)β(t)=0 όπου $\rho := \frac{d}{dt}$.

Χωρίς κανένα περιορισμό το πρόβλημα αυτό είναι εύκολο να λυθεί.

Αν υποθέσουμε ότι r=1 και έχω λύσεις της μορφής $\tilde{\beta}_j(t)=\beta_j(t)e^{s_jt}$ όπου $\beta_j(t)$ πολυώνυμο του t τότε μπορούμε να επιλέξουμε $A(s)=\prod (s-s_j)^{\sigma_j+1}$ όπου σ_j+1 είναι ο βαθμός του πολυωνύμου $\beta_j(t)$. Στην γενική περίπτωση r>1 μπορούμε να επιλέξουμε βαθμωτά πολυώνυμα $A_1(s),\ldots.A_n(s)$ τέτοια ώστε Α(ρ)β(t)=0.

Έπειτα θέτουμε

$$A(s)=\begin{pmatrix} A_1(s) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2(s) & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_r(s) \end{pmatrix}.$$

Τότε οι συναρτήσεις $\beta_1(t),\ldots,\beta_r(t)$ είναι οι λύσεις της Α(ρ)β(t)=0.

Παράδειγμα 3.1

Έστω ο χώρος λύσεων $B^{\mathbb{C}} = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} e^{2t}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} te^{2t} \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} e^{3t}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} e^{4t} \right\rangle$

τότε

$$A(\rho)\beta(t) = \begin{pmatrix}(\rho-2)^2 & 0 & 0\\ 0 & \rho-3 & 0\\ 0 & 0 & \rho-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta_1(t)\\ \beta_2(t)\\ \beta_3(t)\end{pmatrix} = 0$$

■

Μ'αυτήν όμως την επιλογή του A(s) η (2.1) μπορεί να έχει λύσεις οι οποίες δεν είναι γραμμικοί συνδυασμοί των διανυσματικών συναρτήσεων και των παραγώγων τους.

Έτσι θέλουμε να κατασκευάσουμε τον πολυωνυμικό πίνακα A(s) με τέτοιο τρόπο ώστε η περιοχή λύσεων της (2.1) να είναι ακριβώς ίση με την περιοχή που παράγεται από τις συναρτήσεις $\beta_1(t),...,\beta_r(t)$ και των παραγώγων τους.

Αυτό το **'αντίστροφο'** πρόβλημα λύνεται με το Θεώρημα 3.2 που ακολουθεί για την λύση του οποίου θα χρησιμοποιήσουμε έννοιες και συμπεράσματα του ειδικού γενικευμένου αντίστροφου.

Ορισμός 3.1 Για κάθε πίνακα $A \in R^{pxm}$ υπάρχει ένας μοναδικός πίνακας $A^{\dagger} \in R^{mxp}$,ο οποίος ονομάζεται **γενικευμένος αντίστροφος (Moore-Penrose)** και ικανοποιεί τα παρακάτω:

i) $AA^{\dagger}A=A$
ii) $A^{\dagger}AA^{\dagger} = A^{\dagger}$
iii) $(A A^{\dagger})^T=A A^{\dagger}$
iv) $(A^{\dagger} A)^T= A^{\dagger} A$

όπου A^T είναι ο ανάστροφος του A.

Στην ειδική περίπτωση που ο A είναι τετραγωνικός πίνακας ,ο γενικευμένος αντίστροφος Moore-Penrose του A είναι απλά ο αντίστροφος του, δηλαδή $A^{\dagger} =A^{-1}$.■

Θεώρημα 3.1 (Gohberg 1982)

Έστω

$$\beta_j(t) = (\sum_{k=0}^{\sigma_j - 1} \beta_{j,k} t^k) e^{s_j t}$$

όπου κάθε $\beta_{j,k} \in \mathbb{C}^r$ με $0 \le k \le \sigma_j - 1, 1 \le j \le l$. Ορίζουμε

$$C_j = \begin{pmatrix} \beta_{j,0} & \dots & (\sigma_j - 2)!\beta_{j,\sigma_j - 2} & (\sigma_j - 1)!\beta_{j,\sigma_j - 1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times\sigma_j}$$

και J_j να είναι το Jordan block τάξης σ_j με ιδιοτιμή s_j δηλαδή:

$$J_j = \begin{pmatrix} s_j & 1 & & 0 \\ \vdots & s_j & 1 & \vdots \\ & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & & s_j \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\sigma_j \times \sigma_j}$$

όπου j=1,2,….,l και έστω

$$C = (C_1, C_2, \dots C_l) \in \mathbb{R}^{r\times n}, \qquad J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_l \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

και $n = \sum_{j=1}^{l} \sigma_j$. Έστω α κάποιος μιγαδικός αριθμός διαφορετικός των $s_1, s_2, \dots, s_l$ ορίζουμε ως

$$A(s) = I_r - C(J - aI_n)^{-q} \left\{ (s-a)V_q + (s-a)^2 V_{q-1} + \dots + (s-a)^q V_1 \right\} \qquad \textbf{(3.1)}$$

όπου $q = ind(C, J)$ ο δείκτης σταθεροποιησιμότητας και $\begin{pmatrix} V_1 & V_2 & \dots & V_q \end{pmatrix}$ είναι ο γενικευμένος αντίστροφος του

$$S_{1-q} = \begin{pmatrix} C \\ C(J - aI_n)^{-1} \\ \vdots \\ C(J - aI_n)^{1-q} \end{pmatrix}$$

Οι διανυσματικές συναρτήσεις $\beta_j(t), j=1,2,...,l$ είναι λύσεις του συστήματος αλγεβρικών και διαφορικών εξισώσεων Α(ρ)β(t)=0.

Επιπλέον, q είναι ο ελάχιστος δυνατός βαθμός κάθε $n\times n$ πολυωνυμικού πίνακα με αυτή την ιδιότητα.

Αλγόριθμος 3.1

Δεδομένα: $\beta_j(t)=(\sum_{k=0}^{\sigma_j-1}\beta_{j,k}t^k)e^{s_jt}$

Βήμα 1: Ορίζουμε

$$C_j=\begin{pmatrix}\beta_{j,0} & \cdots & (\sigma_j-2)!\beta_{j,\sigma_j-2} & (\sigma_j-1)!\beta_{j,\sigma_j-1}\end{pmatrix},\ J_j=\begin{pmatrix}s_j & 1 & & 0\\ \vdots & s_j & 1 & \vdots\\ & & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & & s_j\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{\sigma_j\times\sigma_j}$$

όπου j=1,2,….,l και

$$C=(C_1,C_2,....C_l)\in\mathbb{R}^{r\times n},\ J=\begin{pmatrix}J_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & J_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & J_l\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{n\times n}$$

Βήμα 2: Υπολογίζουμε το q=ind(C,J) όπου ind(C,J) είναι ο δείκτης σταθεροποιησιμότητας του ζεύγους (C,J) και το $\begin{pmatrix}V_1 & V_2 & \dots & V_q\end{pmatrix}$ είναι ο γενικευμένος αντίστροφος του

$$S_{1-q}=\begin{pmatrix}C\\ C(J-aI_n)^{-1}\\ \vdots\\ C(J-aI_n)^{1-q}\end{pmatrix}$$

ενώ α είναι ένας αυθαίρετος μιγαδικός αριθμός διαφορετικός των μηδενικών $s_1,s_2,\dots,s_l$

Βήμα 3: Υπολογίζουμε τον πολυωνυμικό πίνακα

$$A(s) = I_r - C(J - aI_n)^{-q}\left\{(s-a)V_q + (s-a)^2 V_{q-1} + \ldots + (s-a)^q V_1\right\}$$

■

Παράδειγμα 3.2. Έστω ότι ψάχνουμε τον πολυωνυμικό πίνακα με χώρο λύσεων

$$B^{\mathbb{C}} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t e^{2t} \right\rangle$$

$$\beta_1(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\beta_{1,1}} e^{2t} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\beta_{1,0}} t e^{2t}$$

Τότε $\sigma_1=2$ έτσι,

Βήμα 1:

$$C = C_1 = (\beta_{1,0} \quad \beta_{1,1}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \;\; ; \;\; J = J_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Βήμα 2: Φαίνεται ότι q=ind(C,J)=1 εφόσον det(C)=-2≠0. Συνεπώς

$$S_{1-1} = S_0 = C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

και

$$V_1 = C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Βήμα 3: Από τον τύπο

$$A(s) = I_r - C(J - aI_n)^{-q}\left\{(s-a)V_q + (s-a)^2 V_{q-1} + \ldots + (s-a)^q V_1\right\}$$

και για α=1≠2 έχουμε:

$$A(s)=I_2-C(J-aI_2)^{-1}(s-a)V_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}-a\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right]^{-1}(s-a)\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}a&0\\0&a\end{pmatrix}\right]^{-1}(s-a)\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}2-a&1\\0&2-a\end{pmatrix}\right]^{-1}(s-a)\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\underline{\underline{\alpha=1}}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}2-1&1\\0&2-1\end{pmatrix}\right]^{-1}(s-1)\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\right]^{-1}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}(s-1)&\frac{1}{2}(s-1)\\-\frac{1}{2}(s-1)&\frac{1}{2}(s-1)\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}(s-1)&\frac{1}{2}(s-1)\\-\frac{1}{2}(s-1)&\frac{1}{2}(s-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{5}{2}-\frac{3}{2}s&\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}-\frac{1}{2}s&\frac{3}{2}-\frac{1}{2}s\end{pmatrix}=$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix}\frac{5}{2}&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{3}{2}\end{pmatrix}}_{A_0}+\underbrace{\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}&\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}}_{A_1}s$$

ενώ η Smith μορφή του παραπάνω πολυωνυμικού πίνακα A(s) είναι:

$$S^{\mathbb{C}}_{A(s)}(s)=\begin{pmatrix}1&0\\0&(s-2)^2\end{pmatrix}$$

Σημειώνουμε επίσης ότι:

$$\underbrace{A(s)\beta(s)=\begin{pmatrix}\frac{5}{2}-\frac{3}{2}s & \frac{1}{2}s-\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}s & \frac{3}{2}-\frac{1}{2}s\end{pmatrix}}_{A(s)=A_0+A_1s}\underbrace{\left(\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\frac{1}{s-2}+\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\frac{1}{(s-2)^2}\right)}_{\beta(s)=L[\beta(t)]}=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}-\frac{3}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}}_{A_1}\underbrace{\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}}_{\beta(0)}$$

όπου β(s)=L[β(t)] ο μετασχηματισμός Laplace του β(t), επομένως η συνάρτηση β(t) ικανοποιεί το ομογενές σύστημα γραμμικών διαφορικών εξισώσεων A(ρ)β(t)=$0_{2,1}$.■

Παράδειγμα 3.3

Έστω ο χώρος λύσεων του A(ρ)β(t)=0 (από το παράδειγμα 2.1) είναι ο

$$\left\langle \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}e^{-t},\begin{pmatrix}-1\\+1\end{pmatrix}e^{-t}\right\rangle$$

Δηλαδή

$$\beta_1(t)=\underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}_{\beta_{1,0}}e^{-t},\quad \beta_2(t)=\underbrace{\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}}_{\beta_{2,0}}e^{-t}$$

Βήμα 1:

$$C_1=(\beta_{10})=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\quad J_1=(-1)\qquad C_2=(\beta_{20})=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\quad J_2=(-1)$$

$$C=(C_1,C_2)=(\beta_{1,0}\quad \beta_{2,0})=\begin{pmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{pmatrix}\ ;\ J=\begin{pmatrix}J_1 & 0\\0 & J_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$$

Βήμα 2: q=ind(C,J)=1 εφόσον det(C)=1≠0

$$S_{1-1}=S_0=C=\begin{pmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{pmatrix}$$

και

$$V_1=C^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}$$

Βήμα 3: Από τον τύπο

$$A(s)=I_r-C(J-aI_n)^{-q}\left\{(s-a)V_q+(s-a)^2V_{q-1}+\ldots+(s-a)^qV_1\right\}$$

και για α=1≠2 έχουμε:

$$A(s)=I_2-C(J-aI_2)^{-1}(s-a)V_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}-a\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right]^{-1}(s-a)\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\alpha&0\\0&\alpha\end{pmatrix}\right]^{-1}(s-a)\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\underline{\underline{\alpha=1}}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right]^{-1}(s-1)\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right]^{-1}(s-1)\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&0\\0&-2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}(s-1)&(s-1)\\0&(s-1)\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&0\\0&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(s-1)&(s-1)\\0&(s-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}+\frac{1}{2}s&0\\0&\frac{1}{2}+\frac{1}{2}s\end{pmatrix}$$

Σημειώνουμε επίσης ότι: A(s)β(s)=

$$\underbrace{\begin{pmatrix}\frac{1}{2}+\frac{1}{2}s&0\\0&\frac{1}{2}+\frac{1}{2}s\end{pmatrix}}_{A(s)=A_0+A_1s}\underbrace{\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\frac{1}{s+1}\right)}_{\beta_1(s)=L[\beta(t)]}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0\\0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}}_{A_1}\underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}_{\beta(0)}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix}\frac{1}{2}+\frac{1}{2}s&0\\0&\frac{1}{2}+\frac{1}{2}s\end{pmatrix}}_{A(s)=A_0+A_1s}\underbrace{\left(\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\frac{1}{s+1}\right)}_{\beta_2(s)=L[\beta(t)]}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0\\0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}}_{A_1}\underbrace{\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}}_{\beta(0)}$$

όπου β(s)=L[β(t)] ο μετασχηματισμός Laplace των $\beta_1(t)$ και $\beta_2(t)$ αντίστοιχα ,επομένως οι συναρτήσεις $\beta_1(t)$ και $\beta_2(t)$ ικανοποιούν το ομογενές σύστημα γραμμικών και διαφορικών εξισώσεων $A(\rho)\beta(t)=0_{2,1}$. ■

4.Επίλυση γραμμικού ομογενούς συστήματος αλγεβρικών εξισώσεων και εξισώσεων διαφορών

Τα συστήματα διακριτού χρόνου έχουν γίνει αντικείμενο μελέτης τα τελευταία χρόνια. Ο κύριος λόγος είναι ότι ένα ευρύ φάσμα φυσικών, οικονομικών και κοινωνικών συστημάτων μπορεί να ερμηνευτεί από συστήματα εξισώσεων διαφορών.

Στην ενότητα αυτή θα παρουσιάσουμε το χώρο λύσεων του ομογενούς συστήματος που αποτελείται από αλγεβρικές εξισώσεις και εξισώσεις διαφορών σε διακριτό χώρο η μορφή του οποίου δίνεται από την σχέση:

$$\mathrm{A}(\sigma)\beta(k)=0 \tag{4.1}$$

όπου σβ(k)=β(k+1) είναι ο τελεστής μετατόπισης και

$A(\sigma) = A_q\sigma^q + \ldots + \mathrm{A}_1\sigma + \mathrm{A}_0$ με $A_i \in \mathbb{R}^{r\times r}$ και det(A(σ) ≠ 0, και $\xi(\mathrm{k}) : \left[0, \mathrm{N}\right] \to \mathbb{R}^m$

Τα συστήματα της μορφής (4.1) τα ονομάζουμε και (auto-regressive) AR-representation του B_D όπου B_D ορίζεται ως

$$B_D := \left\{ \xi(k) : [0, N] \to \mathbb{R}^m \mid (4.1) \text{ ικανοποιείται } \forall k \in [0,1,2,\ldots,N-q] \right\}$$

και N υποθέτουμε ότι είναι αρκετά μεγάλο.

Υποθέτουμε ότι ο πολυωνυμικός πίνακας A(σ) έχει k διακριτά μηδενικά $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l$ όπου πιο απλά υποθέτουμε ότι $\lambda_i \in \mathbb{C}$ $i \in l$ και έστω

$$S^{\mathbb{C}}_{A(\sigma)}(\sigma) = U_L(\sigma)\mathrm{A}(\sigma)U_R(\sigma) = diag[\underbrace{1,1,....,1}_{z-1}, f_z(\sigma), f_{z+1}(\sigma),...., f_r(\sigma), 0_{p-r,m-r}] \tag{4.2}$$

όπου $U_L(\sigma), U_R(\sigma) \in \mathbb{R}[\sigma]^{r\times r}$

και $S^{\mathbb{C}}_{A(\sigma)}(\sigma)$ η Smith μορφή του πολυωνυμικού πίνακα A(σ). Υποθέτουμε ότι οι μερικές πολλαπλότητες των μηδενικών $\sigma_i \in \mathbb{C}$ $i \in l$ είναι $0 \le \sigma_{i,z} \le \sigma_{i,z+1} \le \ldots \le \sigma_{i,r}$ δηλαδή $f_j(\sigma) = (\sigma - \lambda_i)^{\sigma_{i,j}} \hat{f}_j(\sigma), j = z, z+1, ..., r$ με $\hat{f}_j(\sigma_i) \ne 0$. Οι όροι $(\sigma - \lambda_i)^{\sigma_{i,j}}$ ονομάζονται πεπερασμένοι στοιχειώδεις διαιρέτες του A(σ) στο σ=λ_i.

Επίσης, ορίζουμε με n το άθροισμα των βαθμών των πεπερασμένων στοιχειωδών διαιρετών του A(σ) δηλαδή

$$n := \deg\left[\prod_{j=z}^{r} f_j(\sigma)\right] = \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=z}^{r}\sigma_{i,j}$$

Έστω $u_j(\sigma) \in \mathbb{R}[s]^{r\times 1}$, $j \in r$ είναι οι στήλες του $U_R(\sigma)$ και $u_j^q(\sigma) = (d^q / d^q)u_j(\sigma), \quad q = 0,1,\dots,\sigma_{i,j}-1$. Υπολογίζουμε τα διανύσματα

$$\beta_{j,q}^{i} = \frac{1}{q!}u_j^{(q)}(\lambda_i), i \in k, j = z, z+1,\dots,r$$

Ορίζουμε τις διανυσματικές συναρτήσεις

$$\tilde{\beta}_{j,q}^{i}(k) := \lambda_i^k \beta_{j,q}^{i} + k\lambda_i^{k-1}\beta_{j,k-1}^{i} + \dots + \binom{k}{q}\lambda_i^{k-q}\beta_{j,0}^{i} \text{ αν } \lambda_i \neq 0 \tag{4.3}$$

$$\tilde{\beta}_{j,q}^{i}(k) := \delta(k)\beta_{j,q}^{i} + \delta(k-1)\beta_{j,q-1}^{i} + \dots + \delta(k-q)\beta_{j,0}^{i}\text{, αν } \lambda_i = 0 \tag{4.4}$$

$i \in l : j = z, z+1,\dots,r; q = 0,1,\dots,\sigma_{i,j}-1$ όπου με δ(k) ορίζουμε την γνωστή δέλτα συνάρτηση του Kronecker

$$\delta(k) = \begin{cases} 1, k = 0 \\ 0, k \neq 0 \end{cases}$$

Έστω

$$\Psi_{i,j}(k) := [\tilde{\beta}_{j,0}^{i}(k) \quad \tilde{\beta}_{j,1}^{i}(k) \quad \cdots \quad \tilde{\beta}_{j,\sigma_{i,j}-2}^{i}(k) \quad \tilde{\beta}_{j,\sigma_{i,j}-1}^{i}(k)]$$

$$C_{i,j} := [\beta_{j,0}^{i} \quad \beta_{j,1}^{i} \cdots \quad \beta_{j,\sigma_{i,j}-2}^{i} \quad \beta_{j,\sigma_{i,j}-1}^{i}] \in \mathbb{R}^{1\times\sigma_{i,j}},$$

$$J_{i,j} := \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \lambda_i & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\sigma_{i,j}\times\sigma_{i,j}}$$

όπου $i \in l$ και $j = z, z+1, \ldots, r$ και

$$\Psi_i^F(k) := [\Psi_{i,z}(k)\Psi_{i,z+1}(k) \quad \cdots \quad \Psi_{i,r-1}(k) \quad \Psi_{i,r}(k)]$$

$$C_i^F := [C_{i,z} \quad C_{i,z+1} \quad \cdots \quad C_{i,r-1} \quad C_{i,r}], \in \mathbb{R}^{1\times m_i}$$

$$J_i^F := blockdiag[J_{i,z} \quad J_{i,z+1} \quad \cdots \quad J_{i,r-1} \quad J_{i,r}], \in \mathbb{R}^{m_i \times m_i}$$

όπου $m_i := \sigma_{i,z} + \sigma_{i,z+1} + \cdots + \sigma_{\iota,r}$ και $i \in l$. Τέλος, έστω

$$\Psi_F^D(k) := [\Psi_1^F(k) \quad \Psi_2^F(k) \quad \cdots \quad \Psi_{k-1}^F(k) \quad \Psi_k^F(k)]$$

$$C_F^D := [C_1^F \quad C_2^F \quad \cdots \quad C_{k-1}^F \quad C_k^F], \in \mathbb{R}^{1\times n}$$

$$J_F^D := blockdiag[J_1^F \quad J_2^F \quad \cdots \quad J_{k-1}^F \quad J_k^F], \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

όπου $n = \deg\left[\prod_{j=z}^{r} f_j(\sigma)\right] = \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=z}\sigma_{ij}$

Ο χώρος λύσεων B_F^D του συστήματος παράγεται από τις στήλες του πίνακα $\Psi_F^D(k)$ δηλαδή $\mathrm{B}_F^D := \left\langle \Psi_F^D(k) \right\rangle = \left\langle C_F^D (J_F^D)^k \right\rangle$

Θεώρημα 4.1 (Karampetakis 2004) Η διάσταση $\dim B_F^D = n :=$ το συνολικό άθροισμα βαθμών των πεπερασμένων στοιχειωδών διαιρετών του πολυωνυμικού πίνακα Α(σ). ■

Παράδειγμα 4.1 Θεωρούμε την AR-representation

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \sigma^2+\sigma & \sigma^2-1 \\ \sigma+1 & \sigma+1 \end{pmatrix}}_{A(\sigma)} \underbrace{\begin{pmatrix} \beta_1(k) \\ \beta_2(k) \end{pmatrix}}_{\beta(k)} = 0_{2,1}$$

Υπάρχουν οι αντιστρέψιμοι πίνακες $U_L(\sigma)$ και $U_R(\sigma)$ που ανάγουν τον πίνακα Α(σ) στη Smith μορφή:

$$S^{\mathbb{C}}_{A(\sigma)}(s) = U_L(\sigma)A(\sigma)U_R(\sigma) \Leftrightarrow$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \sigma+1 & 0 \\ 0 & \sigma+1 \end{pmatrix}}_{S^{\mathbb{C}}_{A(\sigma)}(\sigma)} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \sigma & -1 \end{pmatrix}}_{U_L(\sigma)} \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma^2+s & \sigma^2-1 \\ \sigma+1 & \sigma+1 \end{pmatrix}}_{A(\sigma)} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{U_R(\sigma)}$$

δηλαδή σ_1=-1,σ_2=-1,σ_{11}=1,z=1,z+1=2=r

Από τις στήλες του $U_R(\sigma)$ έχουμε $u_1^{(0)}(\sigma) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ και υπολογίζουμε τα διανύσματα

$$\beta_{1,0}^1 = \frac{1}{0!} u_1^{(0)}(\sigma_1) = \frac{1}{0!} u_1^{(0)}(-1) = \frac{1}{0!}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ομοιώς για το $u_2^{(0)}(\sigma) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ έχουμε $\beta_{2,0}^1 = \frac{1}{0!} u_2^{(0)}(\sigma_2) = \frac{1}{0!} u_2^{(0)}(-1) = \frac{1}{0!}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

όπου $i \in l$,j=z,z+1,….,r και q=0,1,….,σ_{ij}-1.

Επομένως

$$C = (\beta_{1,0}^1, \beta_{2,0}^2) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C_F^D = C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$J_F^D = J = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Επομένως ο χώρος λύσεων είναι ο εξής:

$$\mathrm{B}_F^D := \left\langle \Psi_F^D(k) \right\rangle = \left\langle C_F^D (J_F^D)^k \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}(-1)^k, \begin{pmatrix} -1 \\ +1 \end{pmatrix}(-1)^k \right\rangle$$

■

Παράδειγμα 4.2 Θεωρούμε την AR-representation

Θεωρούμε το ομογενές σύστημα αλγεβρικών και διαφορικών εξισώσεων

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{3}{10}\sigma^2-\frac{14}{5}\sigma+4 & \frac{3}{10}\sigma^2-\frac{2}{5}\sigma \\ -\frac{1}{10}\sigma^2-\frac{2}{5}\sigma & -\frac{1}{10}\sigma^2-\frac{6}{5}\sigma+4 \end{pmatrix}}_{\mathrm{A}(\sigma)} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \beta_1(k) \\ \beta_2(k) \end{pmatrix}}_{\beta(\xi)} = 0_{2,1}$$

Υπάρχουν οι αντιστρέψιμοι πίνακες $U_L(\sigma)$ και $U_R(\sigma)$ που ανάγουν τον πίνακα $A(\sigma)$ στη Smith μορφή:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (\sigma-2)^2 \end{pmatrix}}_{S^{\mathbb{C}}_{A(\sigma)}(\sigma)} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -1 \\ \frac{3}{2}-\frac{3}{10}\sigma & \frac{3}{2}-\frac{9}{10}\sigma \end{pmatrix}}_{U_L(\sigma)} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{3}{10}\sigma^2-\frac{14}{5}\sigma+4 & \frac{3}{10}\sigma^2-\frac{2}{5}\sigma \\ -\frac{1}{10}\sigma^2-\frac{2}{5}\sigma & -\frac{1}{10}\sigma^2-\frac{6}{5}\sigma+4 \end{pmatrix}}_{A(\sigma)} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{3}{8} & 1-\frac{1}{3}\sigma \\ -\frac{3}{8} & -\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\sigma \end{pmatrix}}_{U_R(\sigma)}$$

Από τις στήλες του $U_R(\sigma)$ έχουμε $u_2(\sigma) = \begin{pmatrix} 1-\frac{1}{3}\sigma \\ -\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\sigma \end{pmatrix} \in \mathbb{R}[\sigma]^{2\times 1}$ και υπολογίζουμε τα διανύσματα

$$\beta_{2,0}^2 := \frac{1}{0!}u_2^{(0)}(\sigma_2) = u_2^{(0)}(2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\beta_{2,1}^2 := \frac{1}{1!}u_2^{(1)}(\sigma_2) = u_2^{1}(2) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

όπου $i \in l$, $j=z,z+1,\ldots,r$ και $q=0,1,\ldots,\sigma_{ij}-1$. Επομένως

$$C_F^D = C = (\beta_{2,0}^2 \quad \beta_{2,1}^2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, J_F^D = J = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Οι στήλες του

$$\Psi_F^D = C_F^D (J_F^D)^k = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^k & k2^k \\ 0 & 2^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}2^k & \frac{1}{3}2^k(k-1) \\ \frac{1}{3}2^k & \frac{1}{3}2^k(k+1) \end{pmatrix}$$

αποτελεί τον χώρο λύσεων του συστήματος δηλαδή

$$B^{\mathbb{C}} = \left\langle \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} 2^{\kappa}, \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(k-1) \\ \frac{1}{3}(k+1) \end{pmatrix} 2^k \right\rangle$$

■

5.Κατασκευή συστήματος αλγεβρικών εξισώσεων και εξισώσεων διαφορών δεδομένου του χώρου λύσεων

Στην ενότητα αυτή θα δείξουμε πως μπορούμε να βρούμε ένα nxn πολυωνυμικό πίνακα Α(σ) με πεπερασμένο πλήθος μηδενικών τέτοιο ώστε οι συναρτήσεις

$$\beta_i(k) := \lambda_i^k \beta_{q_i,i} + k\lambda_i^{k-1}\beta_{q_i-1,i} + \ldots + \binom{k}{k-q_i}\lambda_i^{k-q_i}\beta_{0,i} = \sum_{j=0}^{q_i}\binom{k}{k-q_i+j}\lambda_i^{k-q_i+j}\beta_{j,i}, k \geq 0$$

να αποτελούν λύσεις του συστήματος

$$A(\sigma)\beta(k)=0$$

όπου σβ(k)=β(k+1) ο τελεστής μετατόπισης και

$$A(\sigma) = A_q\sigma_q + \ldots + A_1\sigma + A_0 \in \mathbb{R}[\sigma]^{r\times r}$$

Επιπλέον κάθε λύση της (4.1) είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των λύσεων της μορφής (4.3). Το θεώρημα που ακολουθεί λύνει το **'αντίστροφο'** πρόβλημα, δηλαδή γνωρίζοντας την ομαλή συμπεριφορά του συστήματος να μπορέσουμε να βρούμε το σύστημα Α(σ)β(k)=0 της AR-representation.

Θεώρημα 5.1 (Gohberg 1982)

Υποθέτουμε ότι δίνεται ένα πεπερασμένο πλήθος διανυσματικών συναρτήσεων της μορφής

$$\beta_i(k) := \lambda_i^k \beta_{q_i,i} + k\lambda_i^{k-1}\beta_{q_i-1,i} + \ldots + \binom{k}{k-q_i}\lambda_i^{k-q_i}\beta_{0,i} = \sum_{j=0}^{q_i}\binom{k}{k-q_i+j}\lambda_i^{k-q_i+j}\beta_{j,i}, k \geq 0, i \in l$$

όπου $\beta_{j,i} \in \mathbb{C}^r, 0 \leq j_i \leq q_i$

Θέτουμε

$$C_i := (\beta_{0,i}, \quad \beta_{1,i}, \ldots, \quad \beta_{q_i-1,i}, \quad \beta_{q_i,i}) \in \mathbb{R}^{1\times(q_i+1)}, \; J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ \vdots & \lambda_i & 1 & \vdots \\ & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & & \lambda_i \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(q_i+1)\times(q_i+1)}$$

και

$$C = (C_1 \quad C_2 \quad \ldots \quad C_l) \in \mathbb{R}^{1\times n} \quad J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_l \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

όπου $n = \sum_{i=1}^{l} (q_i + 1)$

Έστω α κάποιος μιγαδικός αριθμός διαφορετικός των μηδενικών $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_i$ και ορίζουμε

$$A(\sigma) = I_r - C(J - aI_n)^{-q} \left\{ (\sigma - a)V_q + (\sigma - a)^2 V_{q-1} + \ldots + (\sigma - a)^q V_1 \right\}$$

όπου $q = ind(C, J)$ και $\begin{pmatrix} V_1 & V_2 & \ldots & V_q \end{pmatrix}$ είναι ο γενικευμένος αντίστροφος του

$$S_{1-q} = \begin{pmatrix} C \\ C(J - aI_n)^{-1} \\ \vdots \\ C(J - aI_n)^{1-q} \end{pmatrix}$$

Οι διανυσματικές συναρτήσεις

$$\Psi_{i,j}(k) := [\tilde{\beta}^i_{j,0}(k) \quad \tilde{\beta}^i_{j,1}(k) \quad \cdots \quad \tilde{\beta}^i_{j,\sigma_{i,j}-2}(k) \quad \tilde{\beta}^i_{j,\sigma_{i,j}-1}(k)]$$

είναι λύσεις του συστήματος αλγεβρικών εξισώσεων και εξισώσεων διαφορών A(σ)β(k)=0.Επιπλέον, q είναι ο ελάχιστος δυνατός βαθμός κάθε $n \times n$ πολυωνυμικού πίνακα με αυτή την ιδιότητα. ■

Παράδειγμα 5.1

Έστω ότι ψάχνουμε τον πολυωνυμικό πίνακα A(σ) γνωρίζοντας ότι ο χώρος λύσεων του συστήματος A(σ)β(k)=0 είναι ο παρακάτω:

$$B^{\mathbb{C}} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} 2^k, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} 2^k + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} k \cdot 2^k \right\rangle$$

$$\beta_1(k) = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\beta_{1,1}} (2)^k + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\beta_{1,0}} k(2)^k$$

Τότε σ_1=2 και q_i+1= 2, έτσι,

$$C = C_1 = (\beta_{1,0} \quad \beta_{1,1}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \ ; \ J = J_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Βήμα 2: Φαίνεται ότι q=ind(C,J)=1 εφόσον det(C)=-2≠0. Συνεπώς

$$S_{1-1} = S_0 = C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

και

$$V_1 = C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Βήμα 3: Από τον τύπο

$$A(\sigma) = I_r - C(J - aI_n)^{-q} \left\{ (\sigma - a)V_q + (\sigma - a)^2 V_{q-1} + \ldots + (\sigma - a)^q V_1 \right\}$$

και για α=1≠2 έχουμε:

$$A(s) = I_2 - C(J - aI_2)^{-1}(\sigma - a)V_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]^{-1} (\sigma - a) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} =$$

$$=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}a&0\\0&a\end{pmatrix}\right]^{-1}(\sigma-a)\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}2-a&1\\0&2-a\end{pmatrix}\right]^{-1}(\sigma-a)\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\underline{\underline{\alpha=1}}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}2-1&1\\0&2-1\end{pmatrix}\right]^{-1}(\sigma-1)\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\right]^{-1}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}(\sigma-1)&\frac{1}{2}(\sigma-1)\\-\frac{1}{2}(\sigma-1)&\frac{1}{2}(\sigma-1)\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}(\sigma-1)&\frac{1}{2}(\sigma-1)\\-\frac{1}{2}(\sigma-1)&\frac{1}{2}(\sigma-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{5}{2}-\frac{3}{2}\sigma&\frac{1}{2}\sigma-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sigma&\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\sigma\end{pmatrix}=$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix}\frac{5}{2}&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{3}{2}\end{pmatrix}}_{A_0}+\underbrace{\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}&\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}}_{A_1}\sigma$$

και η Smith μορφή του παραπάνω πολυωνυμικού πίνακα A(σ) είναι:

$$S^{\mathbb{C}}_{A(\sigma)}(\sigma)=\begin{pmatrix}1&0\\0&(\sigma-2)^2\end{pmatrix}$$

■

Παράδειγμα 5.2

Ο χώρος λύσεων του A(σ)β(k)=0 είναι ο

$$\mathrm{B}_F^D:=\left\langle\Psi_F^D(k)\right\rangle=\left\langle C_F^D(J_F^D)^k\right\rangle=\left\langle\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}(-1)^k,\begin{pmatrix}-1\\+1\end{pmatrix}(-1)^k\right\rangle$$

Δηλαδή

$$\beta_1(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\beta_{1,0}}(-1)^k, \quad \beta_2(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\beta_{2,0}}(-1)^k$$

Βήμα 1:

$$C_1 = (\beta_{10}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad C_2 = (\beta_{20}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$J_1 = (-1) \qquad J_2 = (-1)$$

$$C = C_1 = (\beta_{1,0} \quad \beta_{2,0}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;;\; J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Βήμα 2: q=ind(C,J)=1 det(C)=1≠0

Βήμα 3: Από τον τύπο

$$A(s) = I_r - C(J - aI_n)^{-q}\left\{(s-a)V_q + (s-a)^2 V_{q-1} + \ldots + (s-a)^q V_1\right\}$$

και για α=1≠2 έχουμε:

$$A(s) = I_2 - C(J - aI_2)^{-1}(\sigma - a)V_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]^{-1}(\sigma - a)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}\right]^{-1}(\sigma - a)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\alpha=1}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]^{-1}(\sigma - 1)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]^{-1}(\sigma - 1)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} (\sigma - 1) & (\sigma - 1) \\ 0 & (\sigma - 1) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (\sigma - 1) & (\sigma - 1) \\ 0 & (\sigma - 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sigma & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sigma \end{pmatrix}$$

■

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] A.I.G. Vardulakis. (1991) Linear Multivariable Control. Algebraic Analysis and Synthesis Methods.

[2] Gantmacher F.R (1959) The Theory of Matrices, Vols. 1 and 2 Chelsea Publishing Co. New York.

[3] Wolovich W.A (1974) Linear Multivariable Systems Springer-Velag, New York.

[4] I.Gohberg; Lancaster P; Rodman L; (1982) Matrix polynomials Computer Science and Applied Mathematics Academic press. New York London.

[5] N.P.Karampetakis (1997) Computation of the generalized inverse of a polynomial matrix and applications,Linear Algebra and its applications.

[6] N.P.Karampetakis (2004) On the solution space of dicrete time AR-representations over a finite time horizon, Linear Algebra and its applications.

[7] N.P.Karampetakis (2011) Construction of Agebraic-Differential Equations with given smooth and impulsive solutions.