



ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ

“ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΚΑΙ
ΕΛΕΓΧΟΥ ”

**ΔΙΑΚΡΙΤΟΠΟΙΗΣΗ, ΣΥΝΕΧΩΝ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ,
ΧΡΟΝΙΚΑ ΑΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ, ΠΟΛΥΔΙΑΣΤΑΤΩΝ,
ΠΟΛΥΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ**

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Χαράλαμπος Α. Τσανίδης

Επιβλέπων: Νικόλαος Καραμπετάκης
Επικ. Καθηγητής Α.Π.Θ.

Θεσσαλονίκη, Δεκέμβριος 2008



ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
“ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΚΑΙ
ΕΛΕΓΧΟΥ ”

**ΔΙΑΚΡΙΤΟΠΟΙΗΣΗ, ΣΥΝΕΧΩΝ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ,
ΧΡΟΝΙΚΑ ΑΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ, ΠΟΛΥΔΙΑΣΤΑΤΩΝ,
ΠΟΛΥΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ**

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Χαράλαμπος Α. Τσανίδης

Επιβλέπων: Νικόλαος Καραμπετάκης
Επικ. Καθηγητής Α.Π.Θ.

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή

.....
Ν. Καραμπετάκης
Επικ. Καθηγητής Α.Π.Θ.

.....
Α. Βαρδουλάκης
Καθηγητής Α.Π.Θ.

.....
Μ. Γουσίδου
Επικ. Καθηγήτρια Α.Π.Θ.

Θεσσαλονίκη, Δεκέμβριος 2008

Copyright © Χαράλαμπος Λ. Τσανίδης, 2008.
Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευτεί ότι εκφράζουν τις επίσημες θέσεις του Α.Π.Θ.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Τα τελευταία χρόνια η εξέλιξη στο χώρο του αυτομάτου ελέγχου υπήρξε ραγδαία κυρίως εξαιτίας της συνεχώς αυξανόμενης πολυπλοκότητας των ελεγχόμενων συστημάτων και της ταυτόχρονης επιθυμίας για την επίτευξη βέλτιστης συμπεριφοράς. Έτσι λοιπόν η ανάλυση, η σχεδίαση καθώς και η μετατροπή των συστημάτων από το ένα στο άλλο για την καλύτερη μελέτη και απόδοσή τους ήταν αναπόφευκτη. Στην εργασία αυτή θα ασχοληθούμε με τη διακριτοποίηση δισδιάστατων συστημάτων στα οποία η μία μεταβλητή είναι συνεχούς χρόνου και η άλλη διακριτού. Σκοπός μας μετά τη διακριτοποίηση είναι να έχουμε ένα σύστημα διακριτού χρόνου και στις δύο μεταβλητές του. Ο λόγος για τον οποίο χρειάζεται να γίνει αυτή η μετατροπή είναι ότι στην πράξη είναι πολύ δύσκολο να αναλύσουμε και να σχεδιάσουμε απευθείας ένα τέτοιο υβριδικό (συνεχές-διακριτό) σύστημα. Έτσι λοιπόν για την πιο αποτελεσματική ανάλυση και σχεδίασή του είναι αναγκαία η μετατροπή του σε καθαρά δισδιάστατο διακριτό σύστημα. Στο πρώτο κεφάλαιο αναφέρονται τα δισδιάστατα μοντέλα της μορφής χώρου καταστάσεων, μελετούμε τις προϋποθέσεις της ευστάθειάς τους, τον τρόπο με τον οποίο γίνεται η δειγματοληψία τους και στο τέλος του κεφαλαίου παρουσιάζουμε επιγραμματικά τις μεθόδους διακριτοποίησης στα μονοδιάστατα συστήματα. Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζονται και αναλύονται οι μέθοδοι διακριτοποίησης για τα δισδιάστατα συστήματα, και στο τέλος του κεφαλαίου αυτού συγκρίνονται μεταξύ τους για την καλύτερη κατανόηση της αποδοτικότητάς τους.

ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ

Δισδιάστατα μοντέλα χώρου καταστάσεων, δειγματοληψία, ψηφιοποίηση, διακριτοποίηση, γραμμικές επαναλαμβανόμενες διαδικασίες.

ABSTRACT

In the past few years, the evolution in the word of the automatic control was raised dramatically especially because of the constantly increased complexity of the controlled systems and of the simultaneous desire for the achievement of its best behavior. For this reason, the analysis and the systems drawing up affected by more than one variable were inevitable. In this paper we will focus on the discretization of two dimensional systems that one of their variables is continuous and the other one is discrete. Our motivation in applying discretization, is to obtain a system that involves only discrete variables. The reason is that in action is very difficult to analyze and draw a hybrid (continuous-discrete) system, so it is necessary to transform it in to a fully discrete time model so that this processes will be easier to be done. On chapter one, the two dimensional (2-D) state space models are mentioned, we also analyze the stability properties of these systems, we approach sampling of 2-D and finally we make a report to the discretization methods of 1-D systems. On chapter two we show and analyze the discretization methods of 2-D systems and in the end of it, these methods are compared in order to decide which of them are better.

KEY WORDS

2-D state space models, sampling, quantization, discretization, linear repetitive processes.

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Θέλω να εκφράσω τις ειλικρινείς ευχαριστίες μου στον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Καραμπετάκη Νικόλαο για την βοήθεια, την επιστημονική καθοδήγησή του και την συνολική επίβλεψη της εργασίας. Ήταν πάντα διαθέσιμος για συζήτηση, καίριες και παραγωγικές παρατηρήσεις καθόλη την διάρκεια της εκπαιδευτικής μου προσπάθειας.

Οφείλω να ευχαριστήσω τα μέλη της τριμελούς επιτροπής, κ. Βαρδουλάκη Αντώνιο και κα. Γουσίδου-Κουτίτα Μαρία για το χρόνο που αφιέρωσαν στην μελέτη και την αξιολόγηση της εργασίας.

Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω τους γονείς μου για την αγάπη και την υποστήριξή τους καθόλη την διάρκεια των σπουδών μου.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ	5
ABSTRACT	6
ΠΡΟΛΟΓΟΣ	7
ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ι	11
1.1 Εισαγωγή	11
1.2 Γενικά για τα δισδιάστατα συστήματα	14
1.2.1 Τα πιο γνωστά δισδιάστατα μοντέλα	15
1.2.2 Ισοδυναμία δισδιάστατων μοντέλων	19
1.2.3 Οι λύσεις των μοντέλων	20
1.2.4 Παλμός Dirac και μετασχηματισμός Fourier για δισδιάστατα συστήματα	22
1.3 Η ευστάθεια των 2-D συστημάτων	24
1.4 Ψηφιοποίηση συνεχών σημάτων- Δειγματοληψία	37
1.4.1 Επεξεργασία εικόνας μέσω δειγματοληψίας	39
1.5 Μέθοδοι διακριτοποίησης για τα 1-D συστήματα	41
1.5.1 Διακριτοποίηση με χρήση αριθμητικών μεθόδων	41
1.5.2 Μέθοδοι ταύτισης των αποκρίσεων των συστημάτων	45
1.5.3 Διακριτοποίηση της συνάρτησης μεταφοράς ενός συστήματος με συγκράτηση n-τάξης	46
1.5.4 Διακριτοποίηση των συστημάτων στο χώρο των καταστάσεων	47
1.5.5 Adams-Moulton μέθοδος	51
ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙ	55
2.1 Εισαγωγή	55
2.2 Μέθοδοι διακριτοποίησης	58
2.2.1 ZOH προσέγγιση	61
2.2.2 Βελτιώσεις για τη ZOH προσέγγιση	62
2.2.3 Μέθοδος διαφοράς προς τα εμπρός	66
2.2.4 Μέθοδος διαφοράς προς τα πίσω	67
2.2.5 Κανόνας του τραπεζίου	70
2.2.6 Βελτιωμένος κανόνας του τραπεζίου	71
2.2.7 Higher Order (Υψηλότερης Τάξης) Μέθοδος	74
2.2.8 Βελτιωμένη higher order προσέγγιση	76
2.3 Παραδείγματα και συμπεράσματα για τις μεθόδους διακριτοποίησης δισδιάστατων συστημάτων	79
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	103

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ι

ΤΑ ΔΙΣΔΙΑΣΤΑΤΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΟΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥΣ ΚΑΙ Η ΔΙΑΚΡΙΤΟΠΟΙΗΣΗ

1.1 Εισαγωγή

Η σύνδεση των αναλογικών συστημάτων με ψηφιακά απαιτεί την κατάλληλη διαμόρφωσή τους έτσι, ώστε να μπορούν να επεξεργάζονται συγχρόνως αναλογικά αλλά και ψηφιακά σήματα.

Τις έννοιες του ‘σήματος’ και του ‘συστήματος’ τις συναντάμε σε πολλούς τομείς των τεχνολογικών και εφαρμοσμένων επιστημών. Οι τηλεπικοινωνίες, η ηλεκτρονική, η παραγωγή και κατανομή ηλεκτρικής ενέργειας, ο αυτοματισμός και η ρομποτική, η αεροναυτική και αστροναυτική, η οικονομία και οικονομετρία και ακόμα η βιολογία και η ιατρική είναι μερικά μόνο από τα παραδείγματα επιστημονικών περιοχών για τις οποίες οι έννοιες αυτές έπαιξαν και παίζουν συνεχώς πολύ σημαντικό ρόλο στη διατύπωση, ανάλυση, διερεύνηση και λύση προβλημάτων τα οποία τις απασχολούν.

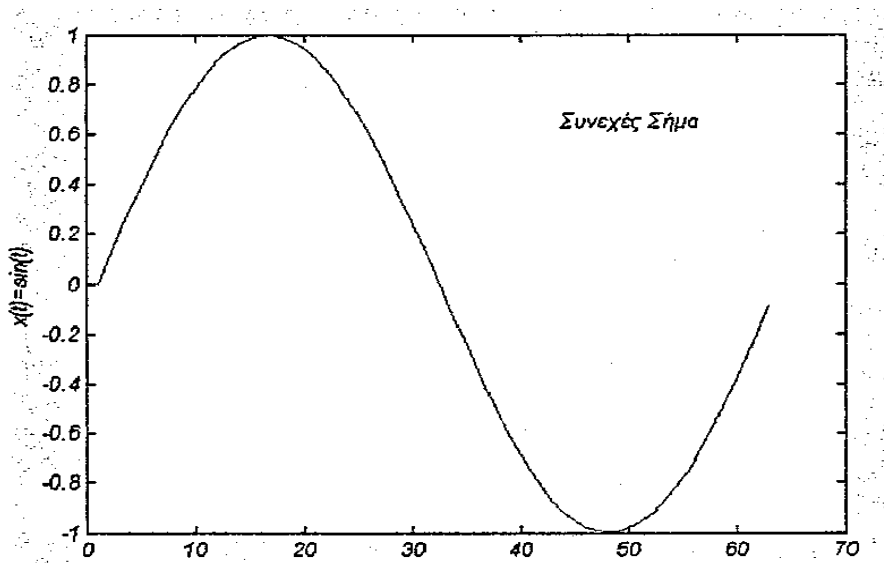
Αν και η φύση των σημάτων και των συστημάτων διαφέρει από επιστημονική περιοχή σε περιοχή, σε όλες τις περιπτώσεις οι δύο αυτές έννοιες έχουν βασικές κοινές ιδιότητες.

Ορισμός 1.1: Με τον όρο **σήμα** (signal) ορίζουμε μια μαθηματική συνάρτηση μίας ή περισσότερων ανεξάρτητων μεταβλητών μία από τις οποίες είναι υποχρεωτικά ο χρόνος και τυπικά περιέχει πληροφορίες για τη χρονική εξέλιξη μιας ποσότητας, η οποία περιγράφει ένα φαινόμενο ή μια διαδικασία. •

Ένα σήμα μπορεί να είναι συνεχούς χρόνου ή διακριτού χρόνου.

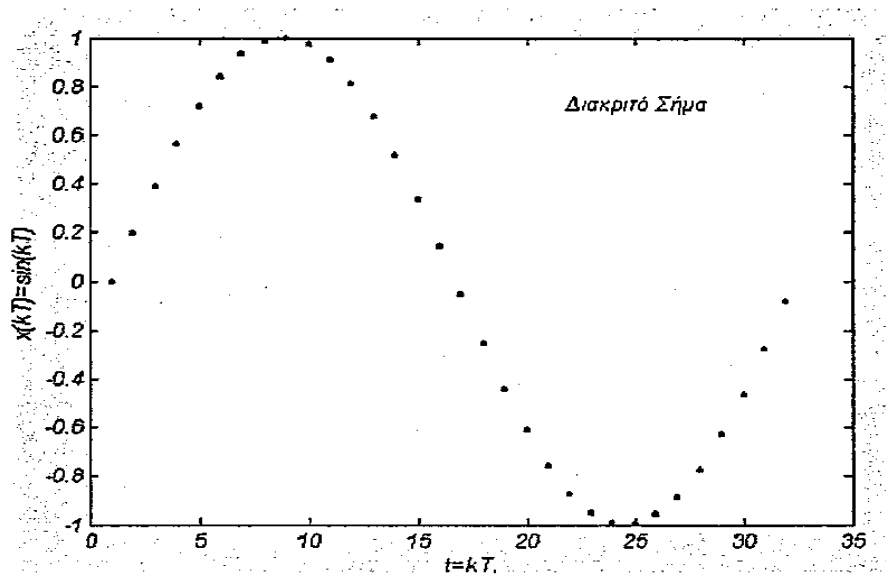
Διακριτοποίηση, συνεχών γραμμικών, χρονικά αμετάβλητων, πολυδιάστατων, πολυμεταβλητών συστημάτων

Για παράδειγμα ένα σήμα **συνεχούς χρόνου** (continuous time signal) είναι μια πραγματική συνάρτηση $x(t): R \rightarrow R^n$ της ανεξάρτητης μεταβλητής t , η οποία εκφράζει το συνεχή χρόνο.



Σχήμα 1

Όμοια ένα σήμα **διακριτού χρόνου** (discrete time signal) είναι ένα σήμα $x(kT): Z \rightarrow R^n$ το οποίο είναι συνάρτηση της μεταβλητής διακριτού χρόνου $t=kT$ με $T>0$ να είναι η περίοδος δειγματοληψίας.



Σχήμα 2

Ορισμός 1.2: Με τον όρο **σύστημα** εννοούμε ένα σύνολο από επιμέρους τμήματα, εξαρτήματα, στοιχεία που συνδέονται μεταξύ τους και αλληλεπιδρούν επιτελώντας συγκεκριμένο έργο. Ένα σύστημα ελέγχου μπορεί να ταξινομηθεί ανάλογα με τους τύπους των σημάτων που επεξεργάζεται σε σήματα συνεχούς χρόνου, σήματα διακριτού χρόνου και σε μικτά ή υβριδικά.

Τα **συστήματα συνεχούς χρόνου** περιλαμβάνουν στοιχεία που παράγουν ή επεξεργάζονται μόνο συνεχή σήματα στο χρόνο.

Τα **συστήματα διακριτού χρόνου** περιλαμβάνουν στοιχεία που παράγουν ή επεξεργάζονται μόνο σήματα διακριτού χρόνου.

Μικτά ή υβριδικά συστήματα (sampled systems) ονομάζονται εκείνα τα συστήματα τα οποία περιέχουν μεταβλητές, από τις οποίες κάποιες είναι συνεχείς και κάποιες είναι διακριτές. •

Επειδή οι υπολογιστές είναι ψηφιακά συστήματα πρέπει όλα τα δεδομένα τα οποία εισέρχονται σε αυτούς να είναι σε ψηφιακή μορφή, δηλαδή να είναι ψηφιακά σήματα. Τα σήματα όμως στον κόσμο είναι συνεχούς χρόνου (π.χ. θερμοκρασία, χρόνος) άρα για να τα επεξεργαστεί ο υπολογιστής θα πρέπει να μετατραπούν σε ψηφιακά [1].

1.2 Γενικά για τα δισδιάστατα συστήματα

Η έρευνα των δυναμικών συστημάτων στις επιστήμες των μηχανολόγων, ηλεκτρολόγων και χημικών μηχανικών συχνά απαιτεί τη δημιουργία ενός μαθηματικού μοντέλου το οποίο θα αναπαριστά πλήρως τη δυναμική συμπεριφορά του συστήματος. Η συνεχώς αυξανόμενη πολυπλοκότητα τέτοιων διαδικασιών μας οδήγησε στην ανάπτυξη προγραμμάτων υπολογιστών που σχεδιάζουν, αναπτύσσουν αλλά και αναλύουν το μοντέλο το οποίο αποτελείται από υποσυστήματα τα οποία συνθέτουν το ολοκληρωμένο σύστημα. Η αλληλοσύνδεση μεταξύ των υποσυστημάτων και του ολοκληρωμένου συστήματος πραγματοποιείται ως εξής: Η δυναμική συμπεριφορά των μεμονωμένων υποσυστημάτων περιγράφεται μέσω διαφορικών εξισώσεων και η ενοποίηση αυτών των συμπεριφορών πραγματοποιείται μέσω αλγεβρικών εξισώσεων. Συνολικά το μαθηματικό μοντέλο που περιγράφει πλήρως το ολοκληρωμένο σύστημα είναι ένας συνδυασμός διαφορικών-αλγεβρικών εξισώσεων.

Τα τελευταία χρόνια παρατηρήθηκε τεράστιο ενδιαφέρον και ανάπτυξη σε προβλήματα με συστήματα και σήματα που περιλαμβάνουν περισσότερες από μία μεταβλητές. Τα πολυδιάστατα σήματα και συστήματα έχουν μελετηθεί ειδικότερα σε σχέση με διάφορους σύγχρονους τομείς της εφαρμοσμένης μηχανικής. Τα πολυδιάστατα ψηφιακά φίλτρα, η πολυμεταβλητή πραγμάτωση δικτύων, η επεξεργασία δεδομένων, η επαύξηση εικόνας ακτίνων-X, η αύξηση στην ανάλυση των αεροφωτογραφιών για την ανίχνευση της ζημίας δασικής πυρκαγιάς, η ανάλυση των δορυφορικών καιρικών φωτογραφιών για την πρόβλεψη καιρού, η επεξεργασία συσκευών ραδιοναυτιλίας (ραντάρ) και υποβρυχίων ηχητικών επεξεργαστών (σόναρ), είναι λίγοι από τους τομείς που εφαρμόζονται τα πολυδιάστατα σήματα και συστήματα. Τα πιο σημαντικά αποτελέσματα, που έχουν σχέση με τα πολυδιάστατα σήματα και συστήματα, έχουν αναπτυχθεί για τα δισδιάστατα (2-D).

Τα γραμμικά διακριτά μοντέλα στο χώρο των καταστάσεων έχουν γενικευθεί από μονοδιάστατα-χρόνου σε δισδιάστατα-χώρου. Η γενίκευση περιλαμβάνει και την επέκταση βασικών εννοιών των μονοδιάστατων συστημάτων, σε αντίστοιχες έννοιες στα δισδιάστατα συστήματα. Όπως για παράδειγμα αυτή της γενικής απόκρισης, της ευστάθειας, του πίνακα μετάβασης και το θεώρημα των Caley-Hamilton. Στα δισδιάστατα (2-Dimensional) γραμμικά συστήματα τα σημαντικότερα γραμμικά διακριτά μοντέλα έχουν προταθεί από τους Robert P. Roesser (1975), Ettore Fornasini και Giovanni Marchesini (1976,1978) και Kurek (1985).

Μία ανάλυση των μοντέλων αυτών δίνεται στην ενότητα που ακολουθεί [2] [3].

1.2.1 Τα πιο γνωστά δισδιάστατα μοντέλα

Το 2-D Roesser μοντέλο

Το δισδιάστατο Roesser μοντέλο (RM) γενικεύει την ανάλυση, τη δομή και τα αποτελέσματα των μονοδιάστατων (1-D) συστημάτων χώρου καταστάσεων. Το τοπικό διάνυσμα κατάστασης του μοντέλου διαιρείται σε οριζόντιο και κάθετο διάνυσμα κατάστασης που μας δείχνει την εξέλιξη του συστήματος οριζόντια και κάθετα αντίστοιχα στο επίπεδο.

Ο Roesser το 1975 πρότεινε το ομώνυμο δισδιάστατο μοντέλο χώρου καταστάσεων το οποίο ορίζεται από τις παρακάτω εξισώσεις:

$$\begin{bmatrix} x^h(i+1, j) \\ x^v(i, j+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(i, j) \quad (1.a)$$

$$y(i, j) = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix} + Du(i, j)$$

Διακριτοποίηση, συνεχών γραμμικών, χρονικά αμετάβλητων, πολυδιάστατων, πολυμεταβλητών συστημάτων

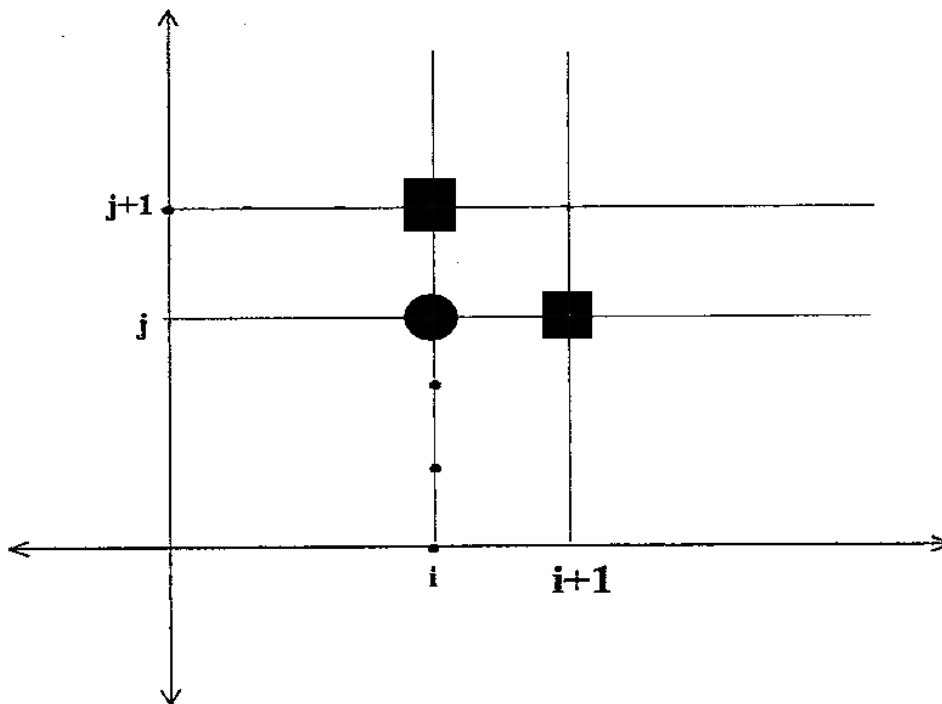
όπου $i, j \geq 0$ να είναι ακέραιοι αριθμοί που δηλώνουν κάθετες και οριζόντιες συντεταγμένες αντίστοιχα, $u(i, j) \in R^m$ είναι το διάνυσμα εισόδου, $y(i, j) \in R^l$ είναι το διάνυσμα εξόδου, $x^h(i, j) \in R^{n_1}$, $x^v(i, j) \in R^{n_2}$ είναι το οριζόντιο και κάθετο διάνυσμα κατάστασης αντίστοιχα και

$$A_{11} \in R^{n_1 \times n_1}, A_{12} \in R^{n_1 \times n_2}, A_{21} \in R^{n_2 \times n_1}, A_{22} \in R^{n_2 \times n_2},$$

$$B_1 \in R^{n_1 \times m}, B_2 \in R^{n_2 \times m}, C_1 \in R^{l \times n_1}, C_2 \in R^{l \times n_2}, D \in R^{l \times nm}$$

Οι οριακές συνθήκες για το δισδιάστατο Roesser μοντέλο δίνονται από τις:

$$x^h(0, j), x^v(i, 0) \text{ για } i, j = 0, 1, 2, \dots$$



Σχήμα 3: Διάγραμμα για τις αρχικές συνθήκες στο Roesser μοντέλο

Τα Fornasini-Marchesini μοντέλα

Δύο εξίσου σημαντικά μοντέλα με το Roesser μοντέλο, έχουν προταθεί από τους Fornasini-Marchesini (1976,1978).

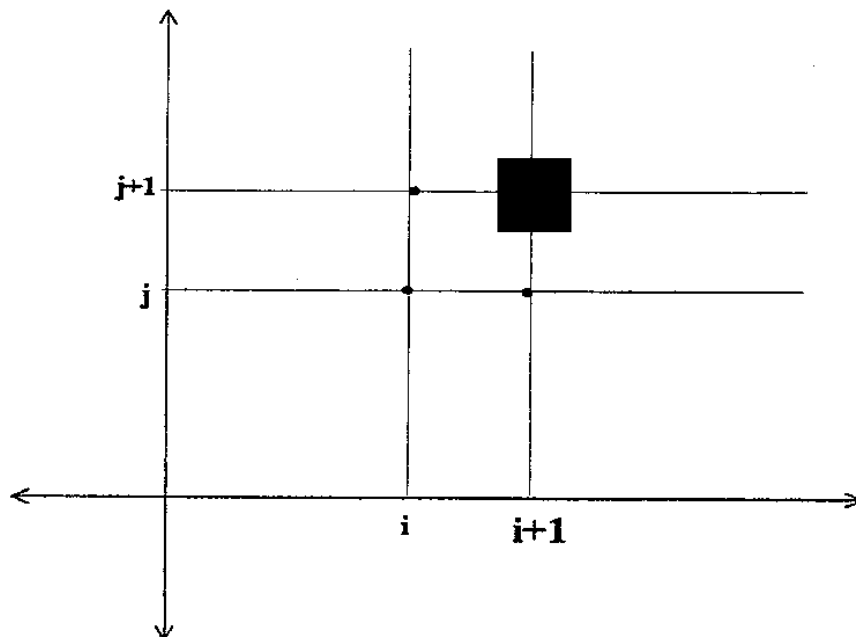
Το πρώτο Fornasini-Marchesini μοντέλο (F-MM I) ορίζεται ως εξής:

$$x(i+1, j+1) = \hat{A}_0 x(i, j) + \hat{A}_1 x(i+1, j) + \hat{A}_2 x(i, j+1) + \hat{B}u(i, j) \quad (1.\beta)$$

$$y(i, j) = \hat{C} x(i, j)$$

όπου $x(i, j) \in R^n$ είναι το τοπικό διάνυσμα κατάστασης στο (i, j) , $u(i, j) \in R^m$ και $y(i, j) \in R^l$ είναι αντίστοιχα τα διανύσματα εισόδου και εξόδου και $\hat{A}_0, \hat{A}_1, \hat{A}_2 \in R^n$, $\hat{B} \in R^{n \times m}$, $\hat{C} \in R^{l \times n}$.

Οριακές συνθήκες για το πρώτο F-MM I θεωρούμε τις: $x(i, 0), x(0, j)$ για $i, j = 0, 1, 2, \dots$



Σχήμα 4: Διάγραμμα για τις αρχικές συνθήκες στο F-MM I

Διακριτοποίηση, συνεχών γραμμικών, χρονικά αμετάβλητων, πολυδιάστατων, πολυμεταβλητών συστημάτων

Οι εξισώσεις που αναπαραστούν το δεύτερο Fornasini-Marchesini μοντέλο (F-MM II) είναι οι:

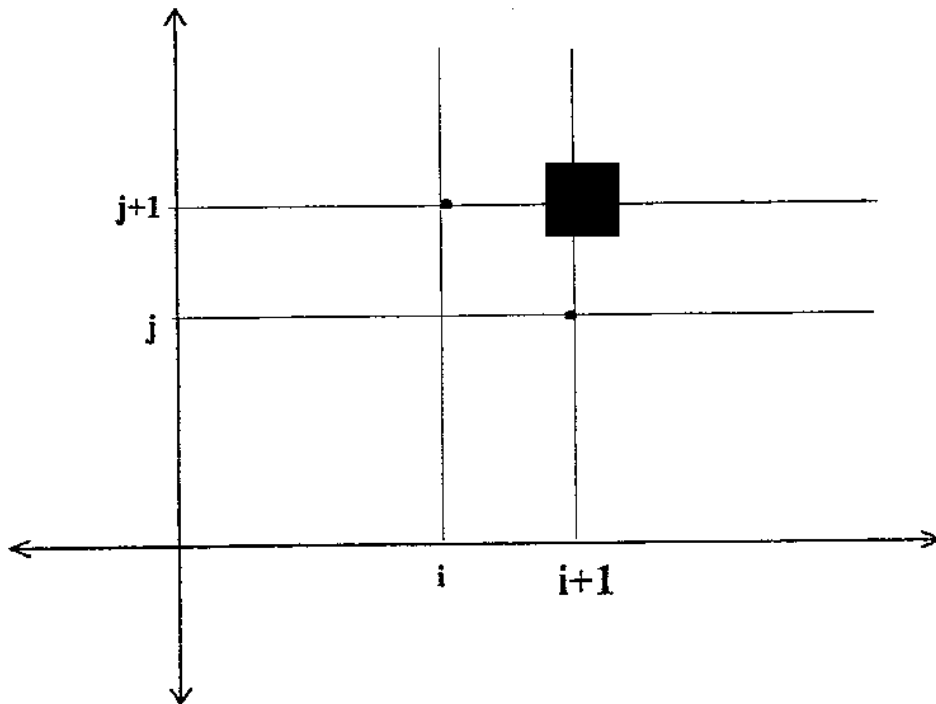
$$x(i+1, j+1) = A_1 x(i, j+1) + A_2 x(i+1, j) + B_{01} u(i+1, j) + B_{10} u(i, j+1) \quad (1.γ)$$

$$y(i, j) = Cx(i, j) + Du(i, j) \quad (i, j \geq 0)$$

όπου $x(i, j) \in R^n$ είναι το τοπικό διάνυσμα κατάστασης στο (i, j) , $u(i, j) \in R^m$, $y(i, j) \in R^l$ είναι αντίστοιχα τα διανύσματα εισόδου και εξόδου και $A_1, A_2 \in R^n$, $B_{10}, B_{01} \in R^{n \times m}$, $C \in R^{l \times n}$, $D \in R^{l \times m}$.

Οι οριακές συνθήκες για το F-MM II δίνονται από τις σχέσεις:

$$x(0, j), x(i, 0) \text{ για } i, j = 0, 1, 2, \dots$$



Σχήμα 5: Διάγραμμα για τις αρχικές συνθήκες στο F-MM II

Από την σύγκριση των εξισώσεων του Roesser μοντέλου και του F-MM I βλέπουμε πως το Roesser είναι μια ειδική περίπτωση του F-MM I με $\hat{A}_0 = -A_1 A_2 = -A_2 A_1$.

1.2.2 Ισοδυναμία δισδιάστατων μοντέλων

Όλα τα μοντέλα (RS, F-MM I, F-MM II) είναι μεταξύ τους ισοδύναμα, δηλαδή μέσω σχέσεων ισοδυναμίας μπορούμε να πάμε από το ένα στο άλλο και αντίστροφα. Η ισοδυναμία των μοντέλων βοηθά στην επέκταση των εννοιών και αποτελεσμάτων από το ένα μοντέλο στο άλλο. Μια τέτοια σχέση είναι χρήσιμη δεδομένου ότι συχνά στα αρχικά στάδια της διαμόρφωσης ενός δοσμένου φυσικού συστήματος λαμβάνεται ένα Roesser μοντέλο, ενώ ένα ισοδύναμο πρώτης τάξεως μοντέλο FM θα απλοποιούσε την ανάλυση.

Παρακάτω παρουσιάζουμε τις συναρτήσεις μεταφοράς των τριών μοντέλων για τα δισδιάστατα συστήματα.

Η συνάρτηση μεταφοράς του Roesser είναι:

$$G(z_1, z_2) = C[Z - A]^{-1} B + D$$

όπου

$$Z = \begin{bmatrix} I_{n_1} z_1 & 0 \\ 0 & I_{n_2} z_2 \end{bmatrix}$$

και A, B, C, D οι πίνακες των μοντέλων

Η συνάρτηση μεταφοράς του F-MM I είναι:

$$G(z_1, z_2) = C[I_n z_1 z_2 - A_0 - A_1 z_1 - A_2 z_2]^{-1} B$$

και η συνάρτηση μεταφοράς του F-MM II είναι:

Διακριτοποίηση, συνεχών γραμμικών, χρονικά αμετάβλητων, πολυδιάστατων,
πολυμεταβλητών συστημάτων

$$G(z_1, z_2) = C[I_n z_1 z_2 - A_0 - A_2 z_1 - A_1 z_2]^{-1} [B_{01} z_1 + B_{10} z_2] + D$$

Για παράδειγμα η συνάρτηση μεταφοράς του Roesser μπορεί να προκύψει από αυτή του F-MM II αν αντικαταστήσουμε

$$A_1 = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, B_{01} = \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \end{bmatrix}, B_{10} = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

με $A_1 + A_2 = A$ και $B_{10} + B_{01} = B$.

Άρα η συνάρτηση μεταφοράς του F-MM II θα γίνει:

$$\begin{aligned} G(z_1, z_2) &= C \left[\begin{bmatrix} I_{n_1} z_1 z_2 & 0 \\ 0 & I_{n_2} z_1 z_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A_{11} z_2 & A_{12} z_2 \\ A_{21} z_1 & A_{22} z_1 \end{bmatrix} \right]^{-1} \begin{bmatrix} B_1 z_2 \\ B_2 z_1 \end{bmatrix} + D = \\ &= C \left[\begin{bmatrix} I_{n_1} z_1 & 0 \\ 0 & I_{n_2} z_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \right]^{-1} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} + D = C[z - A]^{-1} B + D \end{aligned}$$

Με ανάλογο τρόπο μπορούμε να μετατρέψουμε τη συνάρτηση μεταφοράς οποιουδήποτε μοντέλου σ' ένα άλλο ισοδύναμο.

1.2.3 Οι λύσεις των μοντέλων

Για το Roesser μοντέλο η λύση δίνεται από τον τύπο [5]:

$$\begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix} = \sum_{k_1=0}^i A^{i-k_1, j} \begin{bmatrix} 0 \\ x^v(k_1, 0) \end{bmatrix} + \sum_{k_2=0}^j A^{i, j-k_2} \begin{bmatrix} x^h(0, k_2) \\ 0 \end{bmatrix} +$$

Διακριτοποίηση, συνεχών γραμμικών, χρονικά αμετάβλητων, πολυδιάστατων, πολυμεταβλητών συστημάτων

$$+ \sum_{(0,0) \leq (k_1, k_2) < (i, j)} [A^{i-k_1-1, j-k_2} B^{1,0} + A^{i-k_1, j-k_2-1} B^{0,1}] u(k_1, k_2)$$

όπου

$$B^{1,0} = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B^{0,1} = \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

Η λύση του F-MM I έχει την μορφή:

$$x(i, j) = \sum_{k=0}^i A_{22}^{i-k, j} x(k, 0) + \sum_{l=0}^j A_{21}^{i, j-l} \left\{ x(0, l+1) - \hat{A}_1 x(0, l) \right\} + \sum_{(0,0) \leq (k, l) < (i, j)} A_{21}^{i-k-1, j-l} \hat{B} u(k, l)$$

για $(i, j) \geq (0, 0)$, και όπου $\begin{bmatrix} A_{11}^{k, l} & A_{12}^{k, l} \\ A_{21}^{k, l} & A_{22}^{k, l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{A}_2 & \hat{A}_0 + \hat{A}_2 \hat{A}_1 \\ I_n & \hat{A}_1 \end{bmatrix}^{k, l} = A^{k, l}$

όπου $A^{i, j}$ είναι ο πίνακας μετάβασης του πίνακα A (state- transition matrix) που ορίζεται ως εξής:

- $A^{0,0} = I,$
- $A^{1,0} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^{0,1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},$
- $A^{i, j} = 0$ για $i < 0$ ή $j < 0,$
- $A^{i, j} = A^{1,0} A^{i-1, j} + A^{0,1} A^{i, j-1}$ για κάθε $(i, j) > (0, 0)$

Η λύση του F-MM II δίνεται από τη σχέση:

$$x(i, j) = \sum_{k=1}^i A^{i-k, j-1} [A_2 x(k, 0) + B_{01} u(k, 0)] +$$

Διακριτοποίηση, συνεχών γραμμικών, χρονικά αμετάβλητων, πολυδιάστατων, πολυμεταβλητών συστημάτων

$$+ \sum_{l=1}^j A^{i-1, j-l} [A_l x(0, l) + B_{l0} u(0, l)] +$$
$$+ \sum_{k=1}^i \sum_{l=1}^j [A^{i-k-1, j-1} B_{l0} + A^{i-k, j-l-1} B_{0l}] u(k, l)$$

για $(i, j) \geq (0, 0)$

Παρακάτω θα δούμε πως ο παλμός Dirac και ο μετασχηματισμός Fourier ορίζονται για τα δισδιάστατα συστήματα [4].

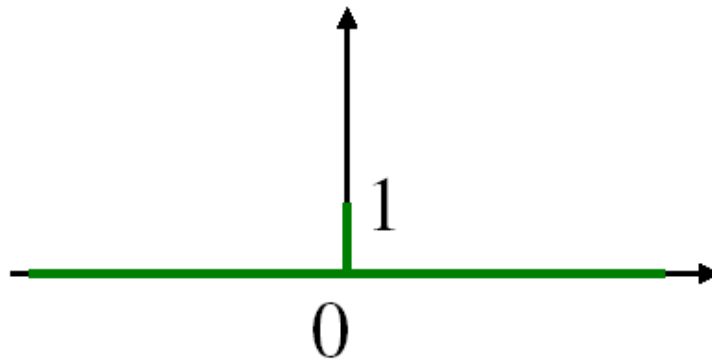
1.2.4 Παλμός Dirac και μετασχηματισμός Fourier για δισδιάστατα συστήματα

Ο παλμός Dirac $\delta(t)$ (μοναδιαία κρουστική συνάρτηση) ορίζεται (γενικευμένη συνάρτηση του συνεχούς χρόνου t ή κατανομή):

Για 1D

$$\delta(x) = 0 \text{ για } t \neq 0$$

$$\forall \varepsilon > 0: \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(t) = 1$$



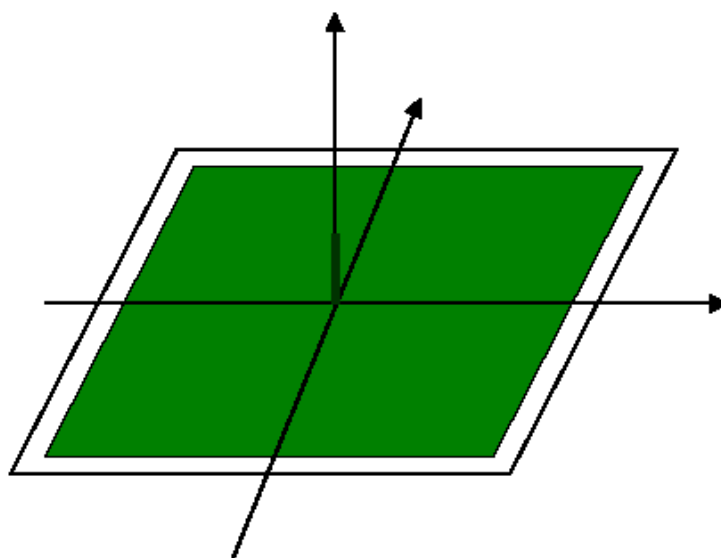
Σχήμα 7

Για 2-D

$$\delta(x, y) = 1 \text{ αν } x = 0 \text{ και } y = 0$$

$$\delta(x, y) = 0 \text{ αλλού}$$

που ανταποκρίνεται σε $\delta(x, y) = \delta(x)\delta(y)$



Σχήμα 8

Ο μετασχηματισμός Fourier (Fourier transform) είναι ο μετασχηματισμός μίας συνάρτησης χρόνου $f(x,y)$, στο πεδίο της συχνότητας και για τα 2-D ο μετασχηματισμός Fourier ορίζεται:

$$F(u,v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) e^{-j(ux+vy)} dx dy$$

και ο αντίστροφος 2D μετασχηματισμός Fourier:

$$f(x,y) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u,v) e^{j(ux+vy)} du dv$$

1.3 Η ευστάθεια των 2-D συστημάτων

Ένα από τα πιο σημαντικά ζητήματα ενός συστήματος αυτομάτου ελέγχου αποτελεί ο έλεγχος της ευστάθειας του. Ένα ασταθές σύστημα δεν παρουσιάζει γενικά πρακτικό ενδιαφέρον. Ένα ευσταθές σύστημα (stable system) παράγει μία πεπερασμένη έξοδο, όταν η αντίστοιχη είσοδος του είναι επίσης πεπερασμένη. Η βασική αυτή πρόταση είναι γνωστή ως κριτήριο ευστάθειας φραγμένης (πεπερασμένης) εισόδου- φραγμένης (πεπερασμένης) εξόδου (bounded-input bounded-output- **BIBO**) [5].

Έστω ένα σύστημα εισόδου-εξόδου που περιγράφεται από την εξίσωση:

$$y(h,k) = \sum_{i=0}^h \sum_{j=0}^k g(h-i,k-j) u(i,j) \quad h,k \geq 0 \quad (1.1)$$

όπου $u(i,j) \in R^m$ είναι το διάνυσμα εισόδου στο (i,j) ,

$y(i,j) \in R^l$ είναι το διάνυσμα εξόδου,

$g(i, j) \in R^{l \times m}$ είναι η κρουστική απόκριση (η έξοδος όταν η είσοδος είναι ο μοναδιαίος παλμός).

Ένα σύστημα είναι **αιτιατό** (εξαρτάται από τις προηγούμενες τιμές και όχι από τις επόμενες) αν $g(i, j) = 0$ για $i < 0$ ή $j < 0$.

Ορισμός 1.3: Το σύστημα (1.1) είναι ευσταθές *φραγμένης εισόδου- φραγμένης εξόδου* (bounded-input bounded-output- **BIBO** ευσταθές) αν και μόνο αν για κάθε $M > 0$ υπάρχει ένα $N > 0$ τέτοιο ώστε, αν $\|u(i, j)\| \leq M$ για όλα τα (i, j) , τότε $\|y(h, k)\| \leq N$ για όλα τα (h, k) , με το $\|v\|$ να είναι η ευκλείδεια νόρμα του v . •

Θεώρημα 1.1: Το σύστημα (1.1) είναι BIBO ευσταθές αν και μόνο αν

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \|g(i, j)\| < \infty \quad (1.2)$$

Απόδειξη: Από (1.1) έχουμε:

$$\begin{aligned} \|y(h, k)\| &= \left\| \sum_{i=0}^h \sum_{j=0}^k g(h-i, k-j) u(i, j) \right\| = \left\| \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} g(h-i, k-j) u(i, j) \right\| \leq \\ &\leq \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \|g(h-i, k-j)\| \|u(i, j)\| \leq M \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \|g(h-i, k-j)\| \end{aligned} \quad (1.3)$$

όπου $M \geq \|u(i, j)\|$.

Αν η (1.2) ισχύει τότε $\|y(h, k)\| \leq N$ για όλα τα (h, k) και το σύστημα είναι BIBO ευσταθές. Για να αποδείξουμε το αναγκαίο ας υποθέσουμε πως $\|u(i, j)\| = 1$ για όλα τα (i, j) . Τότε από την (1.3) βλέπουμε πως το σύστημα είναι BIBO ευσταθές μόνο αν η (1.2) ισχύει. •

Έστω τώρα μία συνάρτηση μεταφοράς $G(z_1, z_2)$

Διακριτοποίηση, συνεχών γραμμικών, χρονικά αμετάβλητων, πολυδιάστατων,
πολυμεταβλητών συστημάτων

$$G(z_1, z_2) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} g(i, j) z_1^{-i} z_2^{-j} = \frac{N(z_1, z_2)}{d(z_1, z_2)} \quad (1.4)$$

Όπου $N(z_1, z_2) \in R[z_1, z_2]^{l \times m}$ πολυωνυμικός πίνακας στο z_1, z_2

και

$$d(z_1, z_2) = \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} d_{ij} z_1^i z_2^j \quad (1.5)$$

Υποθέτουμε πως τα $N(z_1, z_2)$ και $d(z_1, z_2)I$ είναι πρώτα (factor coprime, δηλαδή δεν έχουν κοινό διαιρέτη πολυωνυμικό πίνακα) μεταξύ τους.

Θεώρημα 1.2: Το σύστημα που έχει ως συνάρτηση μεταφοράς την (1.4) είναι BIBO ευσταθές αν:

$$d(z_1, z_2) \neq 0 \text{ για } |z_1| \geq 1, |z_2| \geq 1. \quad (1.6)$$

Απόδειξη: Αν (1.6) και (1.4) είναι αναλυτικές για $|z_1| \geq 1, |z_2| \geq 1$ και η

$$G(z_1, z_2) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} g(i, j) z_1^{-i} z_2^{-j}$$

είναι απόλυτα συγκλίνουσα για $|z_1| \geq 1, |z_2| \geq 1$, αυτό σημαίνει πως ισχύει η (1.2) και το σύστημα μας είναι BIBO ευσταθές. •

Η (1.6) δεν είναι αναγκαία συνθήκη για την BIBO ευστάθεια κάποιου συστήματος, λόγω της πιθανότητας ύπαρξης ιδιόμορφων σημείων τύπου δύο (nonessential singularities of the second kind) πάνω στο μοναδιαίο κύκλο, δηλαδή $|z_1| = 1, |z_2| = 1$.

Ένα σημείο (z_1, z_2) τέτοιο ώστε ο πίνακας $[d(z_1, z_2)I \ N(z_1, z_2)]$ να χάνει τάξη ονομάζεται ιδιόμορφο σημείο τύπου δύο [η (1.4) σε αυτή τη περίπτωση δεν ορίζεται].

BIBO ευστάθεια για το Roesser μοντέλο.

Έστω ένα Roesser μοντέλο που διέπεται από τις εξισώσεις του (1.α) με $D = 0$. Η συνάρτηση μεταφοράς του RM (Roesser μοντέλο) είναι:

$$G(z_1^{-1}, z_2^{-1}) = C \begin{bmatrix} I_{n_1} - z_1^{-1}A_{11} & -z_1^{-1}A_{12} \\ -z_2^{-1}A_{21} & I_{n_2} - z_2^{-1}A_{22} \end{bmatrix} B = \frac{N(z_1^{-1}, z_2^{-1})}{d(z_1^{-1}, z_2^{-1})}$$

με

$$N(z_1^{-1}, z_2^{-1}) = C \text{adj} \begin{bmatrix} I_{n_1} - z_1^{-1}A_{11} & -z_1^{-1}A_{12} \\ -z_2^{-1}A_{21} & I_{n_2} - z_2^{-1}A_{22} \end{bmatrix} B$$

και

$$d(z_1^{-1}, z_2^{-1}) = \det \begin{bmatrix} I_{n_1} - z_1^{-1}A_{11} & -z_1^{-1}A_{12} \\ -z_2^{-1}A_{21} & I_{n_2} - z_2^{-1}A_{22} \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

Υποθέτουμε πως $N(z_1^{-1}, z_2^{-1})$ και $d(z_1^{-1}, z_2^{-1})I$ είναι πρώτοι (factor coprime, δηλαδή δεν έχουν κοινό διαιρέτη πολωνυμικό πίνακα) μεταξύ τους πολωνυμικοί πίνακες και δεν έχουν ιδιόμορφα σημεία τύπου δύο πάνω στο μοναδιαίο κύκλο $|z_1^{-1}| = |z_2^{-1}| = 1$.

Λόγω του ότι ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις

Διακριτοποίηση, συνεχών γραμμικών, χρονικά αμετάβλητων, πολυδιάστατων,
πολυμεταβλητών συστημάτων

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 \\ z_2^{-1}A_{21}[I_{n_1} - z_1^{-1}A_{11}]^{-1} & I_{n_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{n_1} - z_1^{-1}A_{11} & -z_1^{-1}A_{12} \\ -z_2^{-1}A_{21} & I_{n_2} - z_2^{-1}A_{22} \end{bmatrix} = \\ & = \begin{bmatrix} I_{n_1} - z_1^{-1}A_{11} & -z_1^{-1}A_{12} \\ 0 & I_{n_2} - z_2^{-1} \left[A_{22} + A_{21} [I_{n_1} z_1 - A_{11}]^{-1} A_{12} \right] \end{bmatrix} \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} I_{n_1} & -z_1^{-1}A_{12}[I_{n_2}z_2^{-1} - A_{22}]^{-1} \\ 0 & I_{n_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{n_1} - z_1^{-1}A_{11} & -z_1^{-1}A_{12} \\ -z_2^{-1}A_{21} & I_{n_2} - z_2^{-1}A_{22} \end{bmatrix} = \\ & \begin{bmatrix} I_{n_1} - z_1^{-1} \left[A_{11} + A_{12} [I_{n_2}z_2 - A_{22}]^{-1} A_{21} \right] & 0 \\ z_2^{-1} - A_{21} & I_{n_2} - z_2^{-1}A_{22} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

η (1.7) μπορεί να πάρει την μορφή:

$$d(z_1^{-1}, z_2^{-1}) = \det [I_{n_1} - z_1^{-1}A_{11}] \det \left\{ I_{n_2} - z_2^{-1} \left[A_{22} + A_{21} [I_{n_1} z_1 - A_{11}]^{-1} A_{12} \right] \right\} \quad (1.8\alpha)$$

ή

$$d(z_1^{-1}, z_2^{-1}) = \det [I_{n_2} - z_2^{-1}A_{22}] \det \left\{ I_{n_1} - z_1^{-1} \left[A_{11} + A_{12} [I_{n_2}z_2 - A_{22}]^{-1} A_{21} \right] \right\} \quad (1.8\beta)$$

Θεώρημα 1.3: Ένα Roesser μοντέλο είναι BIBO ευσταθές αν ισχύει έστω μία από τις ακόλουθες ιδιότητες:

1. α) A_{11} είναι ευσταθές.

β) $A_{22} + A_{21} [I_{n_1} z_1 - A_{11}]^{-1} A_{12}$ με $|z_1| = 1$ είναι ευσταθές.

Διακριτοποίηση, συνεχών γραμμικών, χρονικά αμετάβλητων, πολυδιάστατων,
πολυμεταβλητών συστημάτων

2. α) A_{22} είναι ευσταθές.

β) $A_{11} + A_{12}[I_{n_2} z_2 - A_{22}]^{-1} A_{21}$ με $|z_2| = 1$ είναι ευσταθές.

3. α) $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ είναι ευσταθές

β) A_{11} δεν έχει χαρακτηριστικές ρίζες στο μοναδιαίο κύκλο.

γ) $A_{22} + A_{21}[I_{n_1} z_1 - A_{11}]^{-1} A_{12}$ με $|z_1| = 1$ δεν έχει χαρακτηριστικές ρίζες μέσα στο μοναδιαίο κύκλο.

4. α) $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ είναι ευσταθές

β) A_{22} δεν έχει χαρακτηριστικές ρίζες στο μοναδιαίο κύκλο.

γ) $A_{11} + A_{12}[I_{n_2} z_2 - A_{22}]^{-1} A_{21}$ με $|z_2| = 1$ δεν έχει χαρακτηριστικές ρίζες μέσα στο μοναδιαίο κύκλο. •

Παράδειγμα: Ας θεωρήσουμε το RM το οποίο περιγράφεται από τον πίνακα:

$$A = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Θα δείξουμε πως αυτό το μοντέλο είναι BIBO ευσταθές

Από τον 1^ο κανόνα έχουμε

$$A_{11} = \frac{1}{2} < 1$$

$$\text{και } |A_{22} + A_{21}[I_{n_1} z_1 - A_{11}]^{-1} A_{12}| = \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{8(2z_1 - 1)} \right| < 1 \text{ για } |z_1| = 1$$

άρα αυτό το RM είναι BIBO ευσταθές. •

Πόρισμα 1.1: Το RM λοιπόν είναι BIBO ασταθές αν τουλάχιστον μία από τις παρακάτω συνθήκες ισχύει:

1. A είναι ασταθής
2. A_{11} είναι ασταθής
3. A_{22} είναι ασταθής

Ασυμπτωτική ευστάθεια Roesser μοντέλου

Ορισμός 1.4: Το RM λέμε πως είναι **ασυμπτωτικά ευσταθές** αν και μόνο αν για μηδενική είσοδο $u(i, j) = 0$ και πεπερασμένες αρχικές συνθήκες

$$x^h = \left\| \sup_j x^h(0, j) \right\| \text{ και } x^v = \left\| \sup_j x^v(i, 0) \right\|,$$

το $\sup \|x(h, k)\|$ είναι πεπερασμένο και $\lim_{\substack{h \rightarrow \infty \\ k \rightarrow \infty}} x(h, k) = 0$.

Θεώρημα 1.4: Το RM είναι ασυμπτωτικά ευσταθές αν και μόνο αν

$$d(z_1^{-1}, z_2^{-1}) = \det \begin{bmatrix} I_{n_1} - z_1^{-1} A_{11} & -z_1^{-1} A_{12} \\ -z_2^{-1} A_{21} & I_{n_2} - z_2^{-1} A_{22} \end{bmatrix} \neq 0$$

για $|z_1^{-1}| \leq 1, |z_2^{-1}| \leq 1$ (1.9)

Απόδειξη: Για $u(i, j) = 0$ και από την λύση του Roesser μοντέλου

$$\begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix} = \sum_{k_1=0}^i A^{i-k_1, j} \begin{bmatrix} 0 \\ x^v(k_1, 0) \end{bmatrix} + \sum_{k_2=0}^j A^{i, j-k_2} \begin{bmatrix} x^h(0, k_2) \\ 0 \end{bmatrix} +$$

Διακριτοποίηση, συνεχών γραμμικών, χρονικά αμετάβλητων, πολυδιάστατων,
πολυμεταβλητών συστημάτων

$$+ \sum_{(0,0) \leq (k_1, k_2) < (i, j)} [A^{i-k_1-1, j-k_2} B^{1,0} + A^{i-k_1, j-k_2-1} B^{0,1}] \mu(k_1, k_2)$$

όπου:

$$B^{1,0} = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B^{0,1} = \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

Αν $u(i, j) = 0$ θα έχουμε:

$$x(h, k) = \sum_{i=0}^h A^{h-i, k} \begin{bmatrix} 0 \\ x^v(i, 0) \end{bmatrix} + \sum_{j=0}^k A^{h, k-j} \begin{bmatrix} x^h(0, j) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

Σύμφωνα με την παρακάτω σχέση [5]

$$\begin{bmatrix} I_{n_1} - z_1^{-1} A_{11} & -z_1^{-1} A_{12} \\ -z_2^{-1} A_{21} & I_{n_2} - z_2^{-1} A_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} A^{i, j} z_1^{-i} z_2^{-j}$$

από τον ορισμό (1.4) και την (1.10) συμπεραίνουμε πως το RM είναι ασυμπτωτικά ευσταθές αν

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \|A^{i, j}\| |z_1|^{-i} |z_2|^{-j} \quad (1.11)$$

συγκλίνει για $|z_1| \leq 1, |z_2| \leq 1$. Αντίστροφα αν η (1.11) συγκλίνει τότε η (1.9) ισχύει. Άρα το RM είναι ασυμπτωτικά ευσταθές αν και μόνο αν η (1.9) ικανοποιείται.

Ο τρόπος ανίχνευσης της BIBO ευστάθειας μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να βρούμε την ασυμπτωτική ευστάθεια του RM.

Θεώρημα 1.5: Το RM είναι ασυμπτωτικά (BIBO) ευσταθές αν

$$\|A_{11}\| < 1 \quad \text{και} \quad \|A_{22}\| + \|A_{21}\| (1 - \|A_{11}\|)^{-1} \|A_{12}\| < 1$$

ή

$$\|A_{22}\| < 1 \quad \text{και} \quad \|A_{11}\| + \|A_{12}\| (1 - \|A_{22}\|)^{-1} \|A_{21}\| < 1$$

Απόδειξη: Από την (1.8α)

$$d(z_1^{-1}, z_2^{-1}) = \det[I_{n_1} - z_1^{-1}A_{11}] \det\left\{I_{n_2} - z_2^{-1}\left[A_{22} + A_{21}[I_{n_1}z_1 - A_{11}]^{-1}A_{12}\right]\right\}$$

είναι φανερό πως η (1.9) ισχύει αν $\|A_{11}\| < 1$ και

$$\|A_{22} + A_{21}(I_{n_1}z_1 - A_{11})^{-1}A_{12}\| < 1 \quad \text{με} \quad |z_1| = 1 \quad (1.12)$$

Από την $\|A - B\| \geq \|A\| - \|B\|$ στην σχέση

$$z_1[I_{n_1}z_1 - A_{11}]^{-1} - [I_{n_2}z_2 - A_{11}]^{-1}A_{11} = I_{n_1} \quad \text{με} \quad |z_1| = 1$$

θα έχουμε

$$\|[I_{n_1}z_1 - A_{11}]^{-1}\| - \|[I_{n_1}z_1 - A_{11}]^{-1}\| \|A_{11}\| \leq 1$$

και

$$\|[I_{n_1}z_1 - A_{11}]^{-1}\| \leq [\|1 - A_{11}\|]^{-1} \quad \text{με} \quad |z_1| = 1$$

έτσι θα έχουμε

$$\|A_{22} + A_{21}[I_{n_1}z_1 - A_{11}]^{-1}A_{12}\| \leq \|A_{22}\| + \|A_{21}\| [\|1 - A_{11}\|]^{-1} \|A_{12}\|$$

και η (1.12) θα ικανοποιείται αν:

$$\|A_{11}\| < 1 \quad \text{και} \quad \|A_{22}\| + \|A_{21}\| (1 - \|A_{11}\|)^{-1} \|A_{12}\| < 1$$

η απόδειξη για το 2^ο μέρος είναι παρόμοια [5].

Θεώρημα 1.6: Ένα RM με $A \geq 0$, (δηλαδή με μη αρνητικά στοιχεία $a_{i,j} \geq 0$) είναι ασυμπτωτικά ευσταθές αν και μόνο αν:

$$A_{11} \text{ και } A_{22} + A_{21}[I_{n_1} - A_{11}]^{-1}A_{12} \text{ είναι ευσταθή}$$

ή

$$A_{22} \text{ και } A_{11} + A_{12}[I_{n_1} - A_{22}]^{-1}A_{21} \text{ είναι ευσταθή}$$

Απόδειξη: Από το θεώρημα (1.5) συνεπάγεται πως είναι επαρκές να δείξουμε πως για $A \geq 0$ ο πίνακας $A_{22} + A_{21}[I_{n_1} - A_{11}]^{-1}A_{12}$ είναι ευσταθής αν και μόνο αν $A_{22} + A_{21}[I_{n_1}z_1 - A_{11}]^{-1}A_{12}$ με $|z_1|=1$ είναι ευσταθές.

Πρέπει να σημειώσουμε πως από την ευστάθεια του

$$A_{22} + A_{21}[I_{n_1}z_1 - A_{11}]^{-1}A_{12} \text{ με } |z_1|=1$$

συνεπάγεται η ευστάθεια του

$$A_{22} + A_{21}[I_{n_1} - A_{11}]^{-1}A_{12}$$

Από τη σχέση:

$$[I_{n_1}z_1 - A_{11}]^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A_{11}^i}{z_1^{i+1}}$$

συνεπάγεται πως για $A_{11} \geq 0$ και $z_1=1$ ότι $[I_{n_1} - A_{11}]^{-1} \geq 0$.

Γι' αυτό η ευστάθεια του $A_{22} + A_{21}[I_{n_1} - A_{11}]^{-1}A_{12}$ έχει ως αποτέλεσμα την ευστάθεια του $A_{22} + A_{21}[I_{n_1}z_1 - A_{11}]^{-1}A_{12}$ με $|z_1|=1$. •

Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύεται το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 1.7: Ένα RM με $A^{1,0} \leq 0$ και $A^{0,1} \geq 0$ είναι ασυμπτωτικά-BIBO ευσταθές αν και μόνο αν

$$A_{11} \text{ και } A_{22} - A_{21}[I_{n_1} + A_{11}]^{-1}A_{12} \text{ είναι ευσταθή}$$

ή

$$A_{22} \text{ και } A_{11} + A_{12}[I_{n_2} - A_{22}]^{-1}A_{21} \text{ είναι ευσταθή.}$$

Ασυμπτωτική ευστάθεια για τα Fornasini Marchesini μοντέλα

Έστω το F-MM II που περιγράφεται από τις εξισώσεις του.

Ορισμός 1.5: Το F-MM II είναι ασυμπτωτικά ευσταθές αν και μόνο αν με μηδενική είσοδο $u(i, j) = 0$ και $\|X_0\|$ πεπερασμένο, $\|X_i\| \rightarrow 0$ όταν $i \rightarrow +\infty$ με $\|x\|$ να είναι η Ευκλείδεια νόρμα του x στο X και

$$\|X_r\| = \sup_{n \in \mathbb{Z}} \|x(r-n, n)\|$$

Θεώρημα 1.8: Το F-MM II είναι ασυμπτωτικά ευσταθές αν και μόνο αν

$$d(z_1^{-1}, z_2^{-1}) = \det[I_n - A_1 z_1^{-1} - A_2 z_2^{-1}] \neq 0 \text{ για } |z_1^{-1}| \leq 1, |z_2^{-1}| \leq 1$$

Η απόδειξη είναι παρόμοια με αυτή του θεωρήματος (1.4) •

Αξίζει να σημειώσουμε πως για να ελέγξουμε την ασυμπτωτική ευστάθεια για το F-MM II μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε όλους τους τρόπους ελέγχου της BIBO ευστάθειας.

Αφού το F-MM I είναι ειδική περίπτωση του RM τότε για τον έλεγχο της ευστάθειάς του όλοι οι έλεγχοι ευστάθειας του RM μπορούν να χρησιμοποιηθούν.

Έστω F-MM II με μηδενική είσοδο $u(i, j) = 0$ το οποίο περιγράφεται από την εξίσωση:

$$x(i+1, j+1) = A_1 x(i, j+1) + A_2 x(i+1, j)$$

με οριακές συνθήκες

$$x(i, 0), x(0, j) \text{ για } i, j > 0$$

όπου $x(i, j) \in R^n$ είναι το τοπικό διάνυσμα κατάστασης στο (i, j) και A_1, A_2 είναι $n \times n$ πίνακες.

Ορισμός 1.6: Το F-MM II είναι εκθετικά ευσταθές αν και μόνο αν είναι δυνατόν να $\exists M > 0, a \in [0, 1)$ τέτοιοι ώστε:

$$\|x(i, j)\| \leq M \{a^j \max_{0 \leq h \leq j} \|x(0, h)\| + a^i \max_{0 \leq k \leq i} \|x(k, 0)\|\} \text{ για } i, j > 0$$

Συγκρίνοντας τους ορισμούς (1.5) και (1.6) συμπεραίνουμε πως η εκθετική ευστάθεια έχει ως αποτέλεσμα την ασυμπτωτική ευστάθεια.

Θεώρημα 1.9: Το F-MM II είναι εκθετικά ευσταθές αν και μόνο αν

$$d(z_1^{-1}, z_2^{-1}) = \det[I_n - z_1^{-1} A_1 - z_2^{-1} A_2] \neq 0 \text{ για } |z_1^{-1}| \leq 1, |z_2^{-1}| \leq 1.$$

Ευστάθεια γραμμικών επαναλαμβανόμενων διαδικασιών

Ας πούμε τώρα όμως μερικά πράγματα για την ευστάθεια των συστημάτων που θα μελετήσουμε, των 2D συστημάτων δηλαδή που η μία μεταβλητή είναι

συνεχής και η άλλη διακριτή (γραμμικές επαναλαμβανόμενες διαδικασίες- linear repetitive process)[8].

Θεώρημα 1.10: Μία γραμμική επαναλαμβανόμενη διαδικασία της μορφής

$$\begin{aligned} \dot{x}_{k+1}(t) &= Ax_{k+1}(t) + Bu_{k+1}(t) + \sum_{j=1}^M B_{j-1}y_{k+1-j} \\ y_{k+1}(t) &= Cx_{k+1}(t) + Du_{k+1}(t) + \sum_{j=1}^M D_{j-1}y_{k+1-j} \end{aligned} \quad (\text{A})$$

με οριακές συνθήκες:

$$x_{k+1}(0) = d_{k+1}, \quad k \geq 0 \quad (\text{B})$$

$$y_{i-j}(t) = \hat{y}_{1-j}(t), \quad 0 \leq t \leq a, \quad 1 \leq j \leq M$$

είναι ευσταθής αν και μόνο αν,

$$r(D) < 1$$

όπου

$$D = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & I & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & I \\ D_{M-1} & D_{M-2} & D_{M-3} & \dots & D_0 \end{bmatrix}$$

Θεώρημα 1.11: Μία γραμμική επαναλαμβανόμενη διαδικασία της μορφής (A) με $M = 1$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθής αν και μόνο αν:

$$r(D_0) < 1$$

Θεώρημα 1.12: Μία γραμμική επαναλαμβανόμενη διαδικασία είναι BIBO ευσταθής αν και μόνο αν είναι και ασυμπτωτικά ευσταθής.

Θεώρημα 1.13: Μία γραμμική επαναλαμβανόμενη διαδικασία είναι ευσταθής κατά την διάρκεια των επαναλήψεων (stable along the pass) αν και μόνο αν:

(α) Όλες οι χαρακτηριστικές ρίζες του πίνακα D έχουν αυστηρά αρνητικό πραγματικό μέρος, δηλαδή:

$$r(D) < 1$$

(β) Όλες οι χαρακτηριστικές ρίζες του πίνακα A έχουν αυστηρά αρνητικό πραγματικό μέρος, δηλαδή:

$$r(A) < 1$$

(γ) Όλες οι χαρακτηριστικές ρίζες του πίνακα

$$G := \begin{bmatrix} 0 & I_m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & I_m & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & I_m \\ G_M(z_1^{-1}) & G_{M-1}(z_1^{-1}) & G_{M-2}(z_1^{-1}) & \dots & G_1(z_1^{-1}) \end{bmatrix}$$

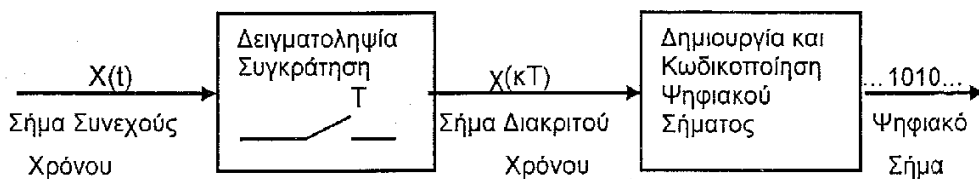
με

$$G_j(z_1^{-1}) = C(z_1^{-1}I_n - A)^{-1}B_{j-1} + D_j, \quad 1 \leq j \leq M$$

να έχει μέτρο αυστηρά μικρότερο από τη μονάδα $\forall |z_1^{-1}| = 1$.

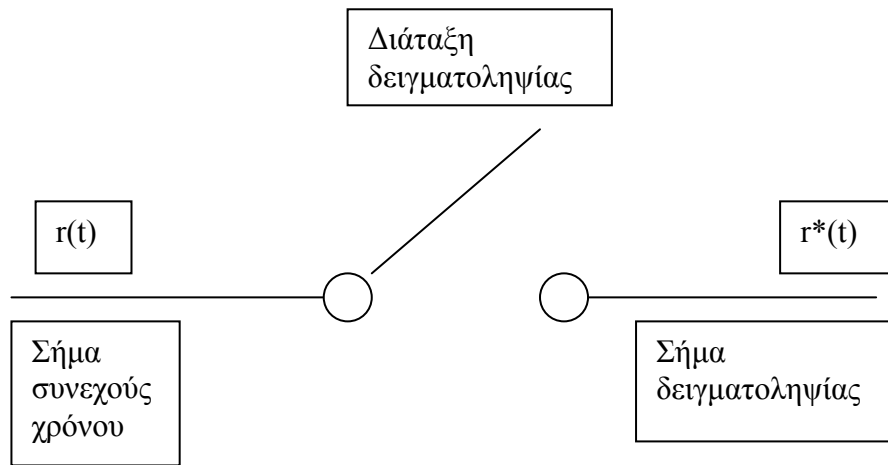
1.4 Ψηφιοποίηση συνεχών σημάτων- Δειγματοληψία

Η μετατροπή ενός αναλογικού σήματος σε ψηφιακό προϋποθέτει τη δειγματοληψία του σήματος και έπειτα την κωδικοποίηση των δειγμάτων $x(kT)$ σε ψηφιακή μορφή (quantization). Ο μετασχηματισμός του σήματος πάντοτε λαμβάνει χώρα σε μη-μηδενικό χρόνο, ο οποίος σε πολλές περιπτώσεις είναι σημαντικός αναφορικά με την περίοδο δειγματοληψίας T ή σχετικά με το ρυθμό μεταβολής του σήματος. Επειδή στην πράξη η κατασκευή του δειγματοληπτημένου σήματος είναι σχεδόν αδύνατη αλλά και για να είναι όσο το δυνατόν πιο ακριβής η αναπαράσταση του σήματος $x(t)$ από τα δείγματα του $x(kT)$ στις χρονικές στιγμές kT , η δειγματοληψία του σήματος πραγματοποιείται χρησιμοποιώντας ένα κύκλωμα δειγματοληψίας και συγκράτησης της τιμής της δειγματοληψίας για όλο το χρονικό διάστημα της περιόδου δειγματοληψίας T (sample and hold circuit (SHC)) το οποίο προηγείται του μετατροπέα Α/Ψ. Μία διάταξη δειγματοληψίας είναι ουσιαστικά ένας διακόπτης που κλείνει κάθε T δευτερόλεπτα για μία χρονική στιγμή.

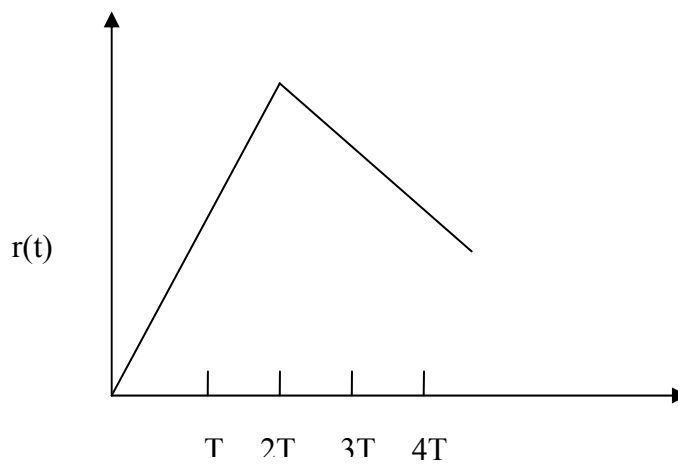


Σχήμα 6

Διακριτοποίηση, συνεχών γραμμικών, χρονικά αμετάβλητων, πολυδιάστατων, πολυμεταβλητών συστημάτων



Σχήμα 6(α)



Σχήμα 6(β)

Ας εξετάσουμε τη διάταξη δειγματοληψίας που φαίνεται στο σχήμα 6(α). Η είσοδος είναι το σήμα $r(t)$ και η έξοδος το $r^*(t)$, όπου nT είναι ο τρέχων χρόνος δειγματοληψίας και η τρέχουσα τιμή του $r^*(t)$ είναι $r(nT)$. Θα έχουμε $r^*(t) = y(nT)\delta(t - nT)$, όπου δ είναι η μοναδιαία κρουστική συνάρτηση. Έστω λοιπόν πως εφαρμόζουμε τη δειγματοληψία σε ένα σήμα $r(t)$ και προκύπτει το σήμα

$r^*(t)$, όπως στο σχήμα 6(α). Στη συνέχεια παρουσιάζουμε την ακολουθία δειγμάτων για το $r^*(t)$ με τη μορφή μίας ακολουθίας κρουστικών παλμών που αρχίζουν από την στιγμή $t=0$, με απόσταση μεταξύ τους ίση με T δευτερόλεπτα και πλάτος $r(kT)$. Για παράδειγμα, ας πάρουμε το σήμα εισόδου $r(t)$, που φαίνεται στο σχήμα 6(α). Το σήμα που υπέστη δειγματοληψία παρουσιάζεται στο σχήμα 6(β), όπου ο αντίστοιχος κρουστικός παλμός παρουσιάζεται με τη μορφή κατακόρυφου βέλους μεγέθους $r(kT)$.

Μέσω της δειγματοληψίας για παράδειγμα οι φωτογραφίες (συνεχές σήμα) μετατρέπονται σε ψηφιακή μορφή για να επεξεργαστούν κατάλληλα, να οπτικοποιηθούν, και να αποθηκευτούν για ενδεχόμενη χρήση στο μέλλον [6].

Για να περιγράψουμε μαθηματικά τη διαδικασία περιοδικών δειγμάτων $x(kT)$ από το σήμα συνεχούς χρόνου $x(t)$ χρησιμοποιούμε τη συνάρτηση δειγματοληψίας $p_T(t)$.

1.4.1 Επεξεργασία εικόνας μέσω δειγματοληψίας

Ο ήχος και η εικόνα μπορούν να θεωρηθούν σαν σήματα σε μία και δύο διαστάσεις αντίστοιχα. Ο ήχος μπορεί να περιγραφεί σαν τη διακύμανση ακουστικής πίεσης με το χρόνο, ενώ οι εικόνες είναι χωρικές διανομές των τιμών της φωτεινότητας ή του χρώματος (σε αναλογίες κόκκινου, πράσινου και μπλε). Οποιοδήποτε σήμα, για να μπορέσει να μεταφερθεί σε υπολογιστικές μηχανές, πρέπει να αναχθεί σε μία σειρά από διακριτά δείγματα και κάθε δείγμα με τη σειρά του πρέπει να αναπαριστάνεται με πεπερασμένο αριθμό ψηφίων. Η πρώτη διαδικασία αποκαλείται *sampling* (δειγματοληψία) και η δεύτερη *quantization* (ψηφιοποίηση).

Έτσι λοιπόν η δειγματοληψία είναι η διαδικασία εκείνη που μετατρέπει ένα συνεχούς χρόνου σήμα σε ένα διακριτού χρόνου σήμα το οποίο είναι μία ακολουθία αριθμών. Το αντίστροφο κλάσμα της περιόδου δειγματοληψίας T (περίοδος

δειγματοληψίας: Το χρονικό διάστημα στο οποίο όλοι οι αριθμοί εξέρχονται ή εισέρχονται στον υπολογιστή) ονομάζεται sampling rate $F_s = \frac{1}{T}$.

Έστω πως έχουμε μία συνεχή διανομή σε ένα επίπεδο των τιμών της φωτεινότητας, ή για να το πούμε πιο απλά, μια εικόνα. Για να την επεξεργαστούμε πρέπει να την ανάγουμε σε μία ακολουθία απο αριθμούς με την έννοια της δειγματοληψίας.

Υπάρχουν διάφοροι τρόποι για τη δειγματοληψία μιας εικόνας, η καλύτερα των τιμών φωτεινότητάς της σε διακεκριμένα σημεία. Ο πιο απλός από αυτούς είναι να χρησιμοποιήσουμε ένα απλό πλέγμα με βήματα X και Y . Με τον ίδιο τρόπο που κάνουμε και στα 1-D ορίζουμε σαν patial sampling rates: $F_x = \frac{1}{X}$ και $F_y = \frac{1}{Y}$.

Όπως και στην περίπτωση των μονοδιάστατων η δειγματοληψία και στα διδιάστατα σήματα μπορεί να περιγραφεί από τρεις προτάσεις και ένα θεώρημα.

1. Ο μετασχηματισμός Fourier ενός διακριτού σήματος είναι μια συνάρτηση από δύο συνεχείς μεταβλητές ω_x και ω_y , και είναι περιοδική με περίοδο 2π . Στο ζευγάρι μεταβλητών ω_x και ω_y , ο μετασχηματισμός Fourier δίνει ένα σύνθετο αριθμό που μπορεί να μεταφραστεί σε ποσότητα και φάση της ημιτονοειδούς συνιστώσας σε τέτοιες συχνότητες του χώρου.

2. Η δειγματοληψία ενός συνεχούς σήματος $s(x, y)$, με κανονικό πλέγμα των βημάτων X και Y , δίνει ένα διακριτό σήμα $s(m, n) = s(mX, nY)$ που είναι μια συνάρτηση διακριτών μεταβλητών m και n .

3. Η δειγματοληψία ενός συνεχούς σήματος με spatial συχνότητες F_x και F_y δίνει ένα διακριτό σήμα του οποίου το ηλεκτρομαγνητικό φάσμα είναι περιοδική αντιγραφή του grid των βημάτων F_x και F_y του αρχικού ηλεκτρομαγνητικού σήματος. Οι μεταβλητές Fourier ω_x και ω_y αντιστοιχούν σε συχνότητες που αναπαριστούνται από τις μεταβλητές $f_x = \frac{\omega_x}{2\pi X}$ και $f_y = \frac{\omega_y}{2\pi Y}$.

Θεώρημα δειγματοληψίας για 2-D [7]: Ένα σήμα συνεχούς χρόνου $s(x,y)$, το φασματικό περιεχόμενο του οποίου περιορίζεται σε συγκεκριμένες συχνότητες που ανήκουν στους τετραγωνικούς ημιάξονες (rectangle having semi-edges) F_{bx} και F_{by} , μπορεί να αναπαραχθεί από τα δείγματά του $s(m,n)$ αν οι ρυθμοί δειγματοληψίας στο χώρο είναι μεγαλύτεροι από το διπλάσιο του φασματικού εύρους ($F_x > 2F_{bx}$ και $F_y > 2F_{by}$).

1.5 Μέθοδοι διακριτοποίησης για τα 1-D συστήματα

Πριν μελετήσουμε τις μεθόδους διακριτοποίησης για τα διδιάστατα συστήματα (2-D) θα παρουσιάσουμε μερικές από τις μεθόδους διακριτοποίησης στα 1-D συστήματα [1].

1.5.1 Διακριτοποίηση με χρήση αριθμητικών μεθόδων

Από τη σχέση $\int_0^t \frac{dy}{dt} dt = -a \int_0^t y dt + \int_0^t u dt$ και με κατάλληλους υπολογισμούς προκύπτει:

$$y(kT) - y((k-1)T) = -a \int_{(k-1)T}^{kT} y(t) dt + \int_{(k-1)T}^{kT} u(t) dt \quad (1.13)$$

και ανάλογα με τον τρόπο που θα προσεγγίσουμε αριθμητικά τα εμβαδά που ορίζονται από τα ολοκληρώματα $\int_{(k-1)T}^{kT} y(t) dt$ και $\int_{(k-1)T}^{kT} u(t) dt$ προκύπτουν διαφορετικές μέθοδοι διακριτοποίησης.

1.5.1.1. Μέθοδος διαφοράς προς τα πίσω (Euler's backward method)

Στην ολοκλήρωση με την μέθοδο διαφοράς προς τα πίσω σημαίνει ότι προσεγγίζουμε τις περιοχές των ολοκληρωμάτων ως εξής:

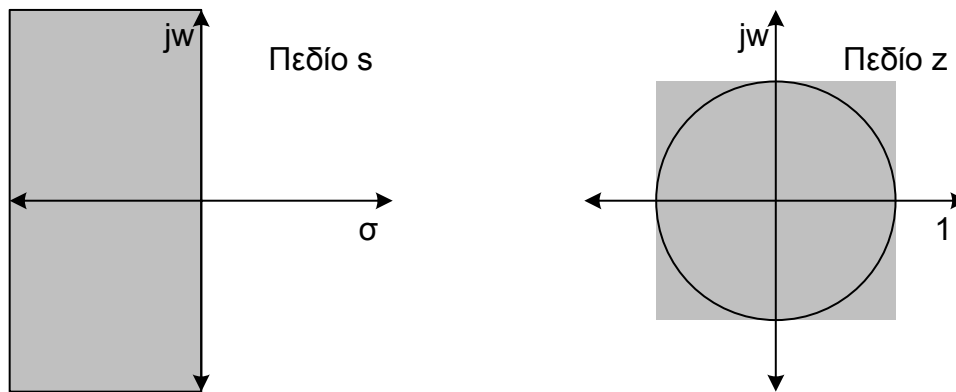
$$\int_{(k-1)T}^{kT} y(t)dt = y(kT) \times T, \quad \int_{(k-1)T}^{kT} u(t)d(t) = u(kT) \times T$$

με αντικατάσταση στην (1.13) έχουμε:

$$y(kT) = y((k-1)T) - aT[y(kT) - u(kT)]$$

ή ισοδύναμα
$$y(kT) = \frac{y((k-1)T) + aTu(kT)}{1 + aT}$$

Με τη μέθοδο διαφοράς προς τα πίσω διατηρείται η ευστάθεια.



σχήμα 9: Η περιοχή ευστάθειας του πεδίου του s απεικονίζεται στο μοναδιαίο κύκλο με κέντρο $(0,0)$ που είναι η περιοχή ευστάθειας στο πεδίο του z .

1.5.1.2. Μέθοδος της διαφοράς προς τα εμπρός (Euler's forward method)

Σε αυτή τη μέθοδο προσεγγίζουμε τα ολοκληρώματα $\int_{(k-1)T}^{kT} y(t)dt$ και $\int_{(k-1)T}^{kT} u(t)dt$ με τους όρους $y((k-1)T) \times T$ και $u((k-1)T) \times T$ αντίστοιχα.

Με αντικατάσταση στην (1.13) θα έχουμε:

$$y(kT) = (1 - aT)y((k-1)T) + aTu((k-1)T)$$

Με τη μέθοδο διαφοράς προς τα εμπρός δε διατηρείται η ευστάθεια και γι' αυτό και η συγκεκριμένη μέθοδος δεν είναι αποδεκτή και δε χρησιμοποιείται στην πράξη.

1.5.1.3. Μέθοδος διγραμμικού μετασχηματισμού (Μέθοδος τραπεζίου ή Μέθοδος μετασχηματισμού Tustin)

Αν προσεγγίσουμε τα ολοκληρώματα $\int_{(k-1)T}^{kT} y(t)dt$ και $\int_{(k-1)T}^{kT} u(t)dt$ με τους όρους

$$\frac{T}{2} \times [y(kT) + y((k-1)T)] \text{ και } \frac{T}{2} \times [u(kT) + u((k-1)T)] \text{ αντίστοιχα,}$$

και τα αντικαταστήσουμε στην (1.13) προκύπτει:

$$\left(1 + \frac{aT}{2}\right)y(kT) = \left(1 - \frac{aT}{2}\right)y((k-1)T) + \frac{aT}{2}u(kT) + \frac{aT}{2}u((k-1)T)$$

Η διακριτοποίηση ενός συστήματος με τη μέθοδο μετασχηματισμού Tustin διατηρεί την ευστάθεια (σχήμα 9).

1.5.1.4. Μέθοδος διγραμμικού μετασχηματισμού με αλλαγή συχνότητας.

(Frequency prewarping)

Η διαδικασία που ακολουθούμε αν εφαρμόσουμε την μέθοδο μετασχηματισμού Tustin με αλλαγή συχνότητας έχει ως εξής:

I. Από την συνάρτηση μεταφοράς του συνεχούς συστήματος $G_c(s)$ με

$G_{C(s)} = \frac{a}{s+a} \left(= \frac{Y(s)}{U(s)} \right)$ παίρνουμε μία καινούργια $G_c'(s)$ μεταβάλλοντας τους πόλους

και τα μηδενικά της αρχικής με τον εξής τρόπο:

$$(s+a) \rightarrow (s+a') \mid a' = \frac{2}{T} \tan \frac{aT}{2} \text{ αν } a \text{ είναι πραγματική ρίζα και}$$

$$s^2 + 2j\omega_n s + \omega_n^2 \rightarrow s^2 + 2j\omega_n' s + \omega_n'^2 \mid \omega_n' = \frac{2}{T} \tan \frac{\omega_n T}{2} \text{ για τις μιγαδικές ρίζες.}$$

II. Εφαρμόζουμε τη μέθοδο Tustin στην $G_c'(s)$ αντικαθιστώντας κάθε s στην $G_c'(s)$

$$\text{με } s = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

III. Προσαρμόζουμε το σταθερό όρο k της συνάρτησης μεταφοράς του διακριτού συστήματος $G_D(z)$ με

$$G_D(z) = \frac{aT}{1 - z^{-1} + aT} = \frac{a}{\frac{1 - z^{-1}}{T} + a} = \frac{Y(z)}{U(z)}$$

χρησιμοποιώντας τη σχέση $G_D(1) = G_c(s)$.

1.5.2 Μέθοδοι ταύτισης των αποκρίσεων των συστημάτων

Με αυτόν τον τρόπο προσεγγίζουμε τη συμπεριφορά ενός αναλογικού ελεγκτή μέσω ενός ψηφιακού και συγκρίνουμε τις αποκρίσεις τους για συγκεκριμένες εισόδους, όπως την κρουστική και βηματική, στις χρονικές στιγμές kT , $k=0,1,2,3,\dots,T$ (T περίοδος δειγματοληψίας).

1.5.2.1. Μέθοδος του αναλλοίωτου της κρουστικής απόκρισης (Impulse-Invariance Method ή Z-transform Method)

Αν $g(t) = L^{-1}[G_C(s)]$ είναι η κρουστική απόκριση του αναλογικού ελεγκτή και $g_D(kT) = z^{-1}[G_D(z)]$ η κρουστική απόκριση του ψηφιακού ελεγκτή θέλουμε

$$g_D(kT) = g(t)|_{t=kT}$$

Αν εφαρμόσουμε μετασχηματισμό Z στην παραπάνω εξίσωση έχουμε:

$$\begin{aligned} Z\{g_D(kT)\} &= Z\{g(t)|_{t=kT}\} \Leftrightarrow G_D(z) = Z\{g(kT)\} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow G_D(z) = Z\{[L^{-1}\{G_C(s)\}]_{t=kT}\} \end{aligned}$$

Επειδή ο μετασχηματισμός Z απεικονίζει πάντα έναν ευσταθή πόλο του πεδίου του s σε ευσταθή πόλο στο πεδίο του Z , συμπεραίνουμε ότι το διακριτό φίλτρο θα είναι ευσταθές αν και το αρχικό αναλογικό φίλτρο είναι ευσταθές.

1.5.2.2. Μέθοδος του αναλλοίωτου της βηματικής απόκρισης

(Step-Invariance Method ή Z-transform method with sample and hold)

$$G_D(z) = Z\left\{\frac{1-e^{-Ts}}{s}G_C(s)\right\}$$

Αν το αρχικό αναλογικό φίλτρο είναι ευσταθές τότε και το ισοδύναμο διακριτό, που προκύπτει με τη μέθοδο του αναλλοίωτου της βηματικής απόκρισης, θα είναι ευσταθές.

1.5.3 Διακριτοποίηση της συνάρτησης μεταφοράς ενός συστήματος με συγκράτηση n-τάξης

1.5.3.1. Διακριτοποίηση της συνάρτησης μεταφοράς ενός συστήματος με συγκράτηση μηδενικής τάξης (η είσοδος για $[t, t+T]$ διατηρείται σταθερή)

Η συνάρτηση μεταφοράς διακριτού χρόνου προκύπτει από τη σχέση:

$$G(z) = Z[G_{h0}(s)G(s)] = (1-z^{-1})Z\left[\frac{G(s)}{s}\right]$$

1.5.3.2. Διακριτοποίηση της συνάρτησης μεταφοράς ενός συστήματος με συγκράτηση πρώτης τάξης

Δοθείσας της συνάρτησης μεταφοράς συνεχούς χρόνου $G(s)$ η ισοδύναμη συνάρτηση μεταφοράς διακριτού χρόνου $G(z)$, που προκύπτει με εφαρμογή της μεθόδου συγκράτησης 1-τάξης, δίνεται από τη σχέση:

$$G(z) = Z[G_{h1}(s)G(s)] = (1-z^{-1})^2 Z\left[\frac{(Ts+1)G(s)}{Ts^2}\right]$$

1.5.4 Διακριτοποίηση των συστημάτων στο χώρο των καταστάσεων

Έστω το σύστημα συνεχούς χρόνου:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \quad (1.14)$$

1.5.4.1. Διακριτοποίηση των Συστημάτων Συνεχούς Χρόνου στο Χώρο των καταστάσεων με χρήση αριθμητικών μεθόδων ολοκλήρωσης.

I. Μέθοδος διαφοράς προς τα εμπρός (Euler's forward method)

Από το σύστημα συνεχούς χρόνου (1.14) και μετά την διακριτοποίηση το σύστημα που θα προκύψει με τη μέθοδο διαφοράς προς τα εμπρός δίνεται από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} x((k+1)T) &= \tilde{A}x(kT) + \tilde{B}u(kT) \\ y(kT) &= \tilde{C}x(kT) + \tilde{D}u(kT) \end{aligned}$$

με

$$\tilde{A} = I + AT, \quad \tilde{B} = BT, \quad \tilde{C} = C, \quad \tilde{D} = D$$

II. Μέθοδος διαφοράς προς τα πίσω (Euler's backward method)

Το σύστημα που θα προκύψει εφαρμόζοντας διακριτοποίηση στο (1.14) με τη μέθοδο διαφοράς προς τα πίσω δίνεται από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} \bar{x}((k+1)T) &= \tilde{A}\bar{x}(kT) + \tilde{B}u(kT) \\ y(kT) &= \tilde{C}\bar{x}(kT) + \tilde{D}u(kT) \end{aligned}$$

όπου

$$\begin{aligned}\tilde{A} &= [I - AT]^{-1}, \quad \tilde{B} = [I - AT]^{-1}BT, \quad \tilde{C} = C[I - AT]^{-1}, \\ \tilde{D} &= C[I - AT]^{-1}BT + D\end{aligned}$$

III. Μέθοδος του τραπεζίου (Trapezoidal Method)

Το σύστημα που θα προκύψει εφαρμόζοντας την τραπεζοειδή μέθοδο στο σύστημα (1.14) δίνεται από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned}\bar{x}((k+1)T) &= \tilde{A}\bar{x}(kT) + \tilde{B}u(kT) + B^*u(kT-T) \\ y(kT) &= \tilde{C}\bar{x}(kT) + \tilde{D}u(kT) + D^*u(kT-T)\end{aligned}$$

όπου

$$\begin{aligned}\tilde{A} &= [I - \frac{AT}{2}]^{-1}[I + \frac{AT}{2}], \quad \tilde{B} = [I - \frac{AT}{2}]^{-1} \frac{BT}{2}, \\ B^* &= [I - \frac{AT}{2}]^{-1} \frac{BT}{2} \\ \tilde{C} &= C[I - \frac{AT}{2}]^{-1}[I + \frac{AT}{2}], \quad \tilde{D} = C[I - \frac{AT}{2}]^{-1} \frac{BT}{2} + D, \\ D^* &= C[I - \frac{AT}{2}]^{-1} \frac{BT}{2}\end{aligned}$$

1.5.4.2. Διακριτοποίηση των Συστημάτων Συνεχούς Χρόνου στο Χώρο των καταστάσεων με χρήση αριθμητικών μεθόδων παραγωγής.

I. Μέθοδος διαφοράς προς τα εμπρός (Euler's forward method)

Το σύστημα που θα προκύψει εφαρμόζοντας τη διακριτοποίηση στη σχέση (1.14) με τη μέθοδο της διαφοράς προς τα εμπρός δίνεται από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned}x(kT + T) &= \tilde{A}x(kT) + \tilde{B}u(kT) \\y(kT) &= \tilde{C}x(kT) + \tilde{D}u(kT)\end{aligned}$$

με

$$\tilde{A} = I + AT, \quad \tilde{B} = BT, \quad \tilde{C} = C, \quad \tilde{D} = D$$

II. Μέθοδος διαφοράς προς τα πίσω (Euler's backward method)

Το σύστημα που θα προκύψει εφαρμόζοντας τη διακριτοποίηση με τη μέθοδο της διαφοράς προς τα πίσω δίνεται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned}\bar{x}(kT + T) &= \tilde{A}\bar{x}(kT) + \tilde{B}u(kT) \\y(kT) &= \tilde{C}[I - AT]^{-1}\bar{x}(kT) + (C[I - AT]^{-1}BT + D)u(kT)\end{aligned}$$

όπου

$$\begin{aligned}\tilde{A} &= [I - AT]^{-1}, \quad \tilde{B} = [I - AT]^{-1}BT, \quad \tilde{C} = C[I - AT]^{-1}, \\ \tilde{D} &= C[I - AT]^{-1}BT + D\end{aligned}$$

III. Μέθοδος του τραπεζίου (Trapezoidal Method)

Το σύστημα που θα προκύψει εφαρμόζοντας την τραπεζοειδή μέθοδο δίνεται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned}\bar{x}(kT+T) &= \tilde{A}\bar{x}(kT) + \tilde{B}u(kT) + \tilde{B}^*u(kT-T) \\ y(kT) &= \tilde{C}\bar{x}(kT) + \tilde{C}^*u(kT-T) + \tilde{D}u(kT)\end{aligned}$$

όπου

$$\begin{aligned}\tilde{A} &= [I - \frac{AT}{2}]^{-1} [I + \frac{AT}{2}], \quad \tilde{B} = [I - \frac{AT}{2}]^{-1} \frac{BT}{2}, \quad \tilde{B}^* = [I - \frac{AT}{2}]^{-1} \frac{BT}{2} \\ \tilde{C} &= C [I - \frac{AT}{2}]^{-1} [I + \frac{AT}{2}], \quad \tilde{C}^* = C [I - \frac{AT}{2}]^{-1} \frac{BT}{2}, \\ \tilde{D} &= C [I - \frac{AT}{2}]^{-1} \frac{BT}{2} + D\end{aligned}$$

3. Διακριτοποίηση με τη μέθοδο συγκράτησης n-τάξης

I. Διακριτοποίηση με τη μέθοδο συγκράτησης μηδενικής τάξης

Το σύστημα που θα προκύψει εφαρμόζοντας τη διακριτοποίηση με τη συγκράτηση μηδενικής τάξης δίνεται από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned}x[(k+1)T] &= \tilde{A}x(kT) + \tilde{B}u(kT) \\ y(kT) &= \tilde{C}x(kT) + \tilde{D}u(kT)\end{aligned}$$

όπου

$$\tilde{A} = e^{AT}, \quad \tilde{B} = \left[\int_0^T e^{Aw} dw \right] B, \quad \tilde{C} = C, \quad \tilde{D} = D$$

ή

$$\tilde{B} = (e^{AT} - I)A^{-1}B$$

αν ο A είναι αντιστρέψιμος.

II. Διακριτοποίηση με τη μέθοδο συγκράτησης πρώτης τάξης

Το σύστημα που θα προκύψει εφαρμόζοντας τη διακριτοποίηση με συγκράτηση πρώτης τάξης δίνεται από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned}x[(k+1)T] &= \tilde{A}x(kT) + \tilde{B}u(kT) + \tilde{B}^*u((k-1)T) \\y(kT) &= \tilde{C}x(kT)\end{aligned}$$

όπου

$$\begin{aligned}\tilde{A} &= e^{AT}, \tilde{B} = \left[\int_0^T e^{Aw} \left[2 - \frac{w}{T} \right] dw \right] B, \tilde{B}^* = \left[\int_0^T e^{Aw} \left[\frac{w}{A} - 1 \right] dw \right] B, \\ \tilde{C} &= C\end{aligned}$$

1.5.5 Adams-Moulton μέθοδος

Ανάμεσα στις πιο δημοφιλείς μεθόδους για τη διακριτοποίηση 1-D συστημάτων είναι η Adams-Moulton μέθοδος.

Οι αρχικές μεταβλητές μπορούν να βρεθούν από μία μέθοδο βηματικότητας ένα (π.χ. Runge-Kutta), η οποία θα είναι της ίδιας τάξης με την Adams-Moulton μέθοδο. Η τάξη της Adams-Moulton μεθόδου (λάθος αποκοπής) είναι ένα βαθμό πάνω από τον αριθμό των βημάτων της μεθόδου.

I. Μέθοδος Adams-Moulton τρίτης τάξης (με βήμα δύο)

Το y_0 δίνεται από τις συνθήκες για την κανονική διαφορική εξίσωση (ODE).

Το y_1 μπορεί να βρεθεί από μία μέθοδο βηματικότητας ένα π.χ. η τρίτης τάξης Runge-Kutta μέθοδος.

Έτσι λοιπόν για $i = 1, \dots, n-1$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{12} [5f_{i+1} + 8f_i - f_{i-1}]$$

αν συγκρίνουμε τώρα αυτή τη μέθοδο με τη γενική μορφή μίας μεθόδου βηματικότητας δύο θα παρατηρήσουμε πως:

$$a_1 = 0, a_2 = 0, b_0 = 5/12, b_1 = 8/12, b_2 = -1/12$$

II. Μέθοδος Adams-Moulton τέταρτης τάξης (με βήμα τρία)

Το y_0 δίνεται από τις αρχικές συνθήκες.

Τα y_1 και y_2 υπολογίζονται από την μέθοδο βηματικότητας ένα.

Έτσι λοιπόν για $i = 1, \dots, n-1$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24} [9f_{i+1} + 19f_i - 5f_{i-1} + f_{i-2}]$$

III. Μέθοδος Adams-Moulton πέμπτης τάξης (με βήμα τέσσερα)

Το y_0 δίνεται από τις αρχικές συνθήκες.

Τα y_1 και y_2 και y_3 υπολογίζονται από την μέθοδο βηματικότητας ένα.

άρα:

Διακριτοποίηση, συνεχών γραμμικών, χρονικά αμετάβλητων, πολυδιάστατων,
πολυμεταβλητών συστημάτων

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{720} [251f_{i+1} + 646f_i - 264f_{i-1} + 106f_{i-2} - 19f_{i-3}]$$

Διακριτοποίηση, συνεχών γραμμικών, χρονικά αμετάβλητων, πολυδιάστατων,
πολυμεταβλητών συστημάτων

ΚΕΦΑΛΑΙΟ II

ΜΕΘΟΔΟΙ ΔΙΑΚΡΙΤΟΠΟΙΗΣΗΣ ΥΒΡΙΔΙΚΩΝ ΔΙΣΔΙΑΣΤΑΤΩΝ (ΣΥΝΕΧΗ-ΔΙΑΚΡΙΤΑ) ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

2.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με τη διακριτοποίηση συνεχών-διακριτών 2-D συστημάτων, συστημάτων δηλαδή που η μία μεταβλητή τους είναι συνεχής και η άλλη διακριτή. Τέτοιες διαφορικές γραμμικές επαναλαμβανόμενες διαδικασίες αποτελούν μία ξεχωριστή κατηγορία στα 2-D γραμμικά συστήματα και μπορούν να χρησιμοποιηθούν στη βιομηχανία, όπως για παράδειγμα σε βιομηχανικές διεργασίες που συντελούν στην κοπή μεγάλων κομματιών άνθρακα και στη μετατροπή μετάλλων σε φύλλα.

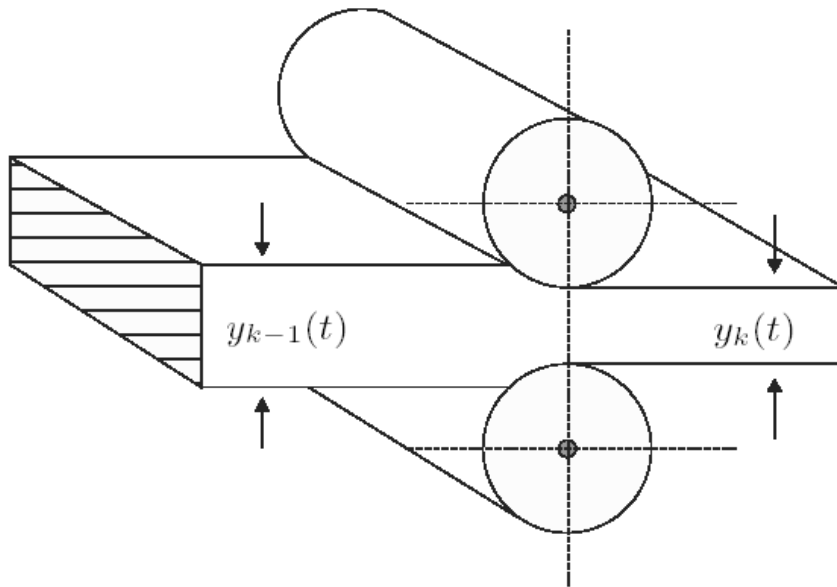
Στα διακριτά 2-D γραμμικά συστήματα, τα πιο γνωστά μοντέλα που χρησιμοποιούνται είναι δύο. Το Roesser μοντέλο που έχει την καλύτερη δομή και το Fornasini-Marchesini μοντέλο που τα έχουμε παρουσιάσει στο προηγούμενο κεφάλαιο. Βέβαια υπάρχουν και άλλα μοντέλα πολλά από τα οποία προκύπτουν από τα προηγούμενα δύο. Αξίζει να θυμηθούμε πως το Roesser και το Fornasini-Marchesini δε διαφέρουν πολύ μεταξύ τους και είναι δυνατόν να μεταβούμε από το ένα στο άλλο. Ο Kaczorek μελέτησε συστήματα στο χώρο των καταστάσεων, τα οποία έχουν μία διακριτή και μία συνεχή μεταβλητή. Τα δισδιάστατα συνεχή-διακριτά συστήματα, σε αντίθεση με τα γνωστά συστήματα κατάστασης των 2-D μοντέλων δεν απαιτούν καμία γνώση της causality (αιτιότητας) και της recursibility (αναδρομικότητας), αντί αυτών απαιτούν την γνώση της regularity (κανονικότητας) [10]. Για το λόγο αυτό τα συνεχή-διακριτά μοντέλα είναι πιο βολικά στην περιγραφή των δισδιάστατων συστημάτων, όπως αυτών που περιγράφονται από υπερβολικές

εξισώσεις και την εξίσωση θερμότητας καθώς και τις εφαρμογές στην επεξεργασία εικόνας. Ακόμα, οι περισσότερες διαδικασίες στην πράξη και τα πολύπλοκα συστήματα μπορούν να περιγραφούν από υβριδικά συστήματα (συνεχή-διακριτά) στα οποία υπάρχουν ανάμικτα συνεχή και διακριτά υποσυστήματα. Σε αυτό το κεφάλαιο θα μελετήσουμε μία κατηγορία υβριδικών συστημάτων, στην οποία η μία μεταβλητή είναι συνεχής και η άλλη διακριτή. Είναι δύσκολο να αναλύσουμε και να σχεδιάσουμε απευθείας ένα τέτοιο υβριδικό 2-D σύστημα. Για την πιο αποτελεσματική ανάλυση και σχεδίασή του είναι αναγκαίο να το μετατρέψουμε σε καθαρά 2-D διακριτό μοντέλο έτσι, ώστε να μπορούμε άμεσα να εφαρμόσουμε τα θεωρήματα και την τεχνογνωσία που έχουμε γι'αυτά. Έτσι λοιπόν η μετατροπή μοντέλων σε 2-D διακριτά καθίσταται απαραίτητη από πολλές απόψεις.

Βασικός μας στόχος είναι να παρουσιάσουμε κατάλληλες τεχνικές διακριτοποίησης που μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε 2-D συστήματα αλλά και γενικότερα σε n-D. Τις τελευταίες δύο με τρεις δεκαετίες υπάρχει ένα συνεχώς αυξανόμενο ενδιαφέρον για τις τεχνικές αυτές και σημαντική ήταν η συμβολή των Artur Gramacki, Jaroslaw Graamacki, Krzysztof Galkowski, Eric Rogers και David H. Owens στην τελειοποίηση τους [9].

Πρώτα όμως ας παρουσιάσουμε περιληπτικά ένα παράδειγμα στο οποίο έχουν εφαρμογή τα 2-D συστήματα στη πράξη [8].

Η μετατροπή μετάλλων σε φύλλα είναι μία πολύ συνηθισμένη βιομηχανική διαδικασία όπου στη ουσία ένα παραμορφωμένο κομμάτι μετάλλου τοποθετείται ανάμεσα σε δύο κυλίνδρους, όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα.



Η πρώτη μας προτεραιότητα είναι να αναπτύξουμε ένα μοντέλο που θα συσχετίζει το πάχος του μετάλλου κατά την τρέχουσα και την προηγούμενη κατάσταση μεταξύ των κυλίνδρων. Αυτές δηλώνονται με $y_k(t)$ και $y_{k-1}(t)$ αντίστοιχα. Παρακάτω φαίνονται καλύτερα σχηματικά αυτές αλλά και άλλες μεταβλητές οι οποίες ορίζονται ως εξής:

$F_M(t)$ είναι η δύναμη που αναπτύσσεται από τη μηχανή

$F_s(t)$ είναι η δύναμη που αναπτύσσεται από το ελατήριο

\tilde{M} είναι η μάζα του μηχανισμού ρύθμισης του κυλίνδρου

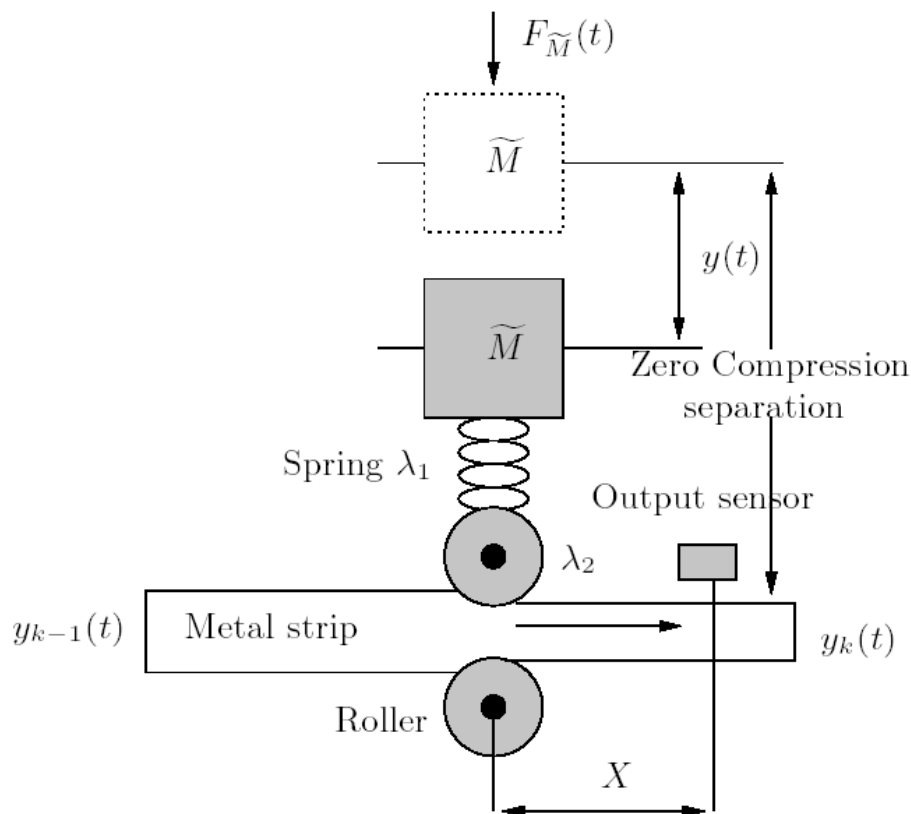
λ_1 είναι η σκληρότητα του ελατηρίου

λ_2 είναι η σκληρότητα του μετάλλου

$\lambda = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$ είναι η σκληρότητα του μετάλλου και του κυλινδρικού μηχανισμού

$y(t)$ είναι μία ενδιάμεση μεταβλητή που δηλώνει τη μετατόπιση της μάζας όταν ασκείται η δύναμη που αναπτύσσει η μηχανή.

Η εξίσωση του μοντέλου είναι: $y(t) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} y_{k-1}(t) - \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_2} y_k(t)$



Ας προχωρήσουμε όμως τώρα στη λεπτομερέστερη παρουσίαση των μεθόδων διακριτοποίησης.

2.2 Μέθοδοι διακριτοποίησης

Οι διαφορικές γραμμικές επαναλαμβανόμενες διαδικασίες αποτελούν μία διακεκριμένη τάξη από 2-D γραμμικά συστήματα τα οποία θέτουν προβλήματα που δεν μπορούν (εκτός από πολύ λίγες αυστηρά περιοριστικές περιπτώσεις) να λυθούν από τις σημερινές γνώσεις της θεωρίας συστημάτων. Γι' αυτό το λόγο χρησιμοποιούμε πολλά από τα διαθέσιμα σήμερα εργαλεία του υπολογιστή που υποβοηθούν την ανάλυση και την προσομοίωση.

Τα αρχικά συστήματά μας όπως είπαμε είναι υβριδικά, δηλαδή έχουν μία μεταβλητή συνεχούς χρόνου και μία μεταβλητή διακριτού χρόνου. Σκοπός μας είναι

μετά τη διακριτοποίηση και οι δύο μεταβλητές να είναι διακριτού χρόνου, δηλαδή να έχουμε ένα διακριτό 2-D σύστημα.

Το μοντέλο στο χώρο των καταστάσεων μίας διαφορικής γραμμικής επαναλαμβανόμενης διαδικασίας έχει την ακόλουθη μορφή με:

$$0 \leq t \leq a, k = 0, 1, \dots$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_{k+1}(t) &= \hat{A}x_{k+1}(t) + \hat{B}u_{k+1}(t) + \hat{B}_0 y_k(t) \\ y_{k+1}(t) &= \hat{C}x_{k+1}(t) + \hat{D}u_{k+1}(t) + \hat{D}_0 y_k(t) \end{aligned} \quad (2.1)$$

και $k, x_k(t)$ να είναι $n \times 1$ διάνυσμα κατάστασης, $y_k(t)$ $m \times 1$ διάνυσμα εξόδου, $u_k(t)$ $l \times 1$ διάνυσμα ελέγχου των εισόδων. Για να ολοκληρώσουμε τη διαδικασία της περιγραφής του συστήματος, είναι αναγκαίο να δώσουμε τις οριακές συνθήκες. Εδώ θα αρκεστούμε στην πιο απλή δυνατή μορφή:

$$\begin{aligned} x_{k+1}(0) &= d_{k+1}, k = 0, 1, \dots \\ y_0(t) &= f(t), 0 \leq t \leq a \end{aligned} \quad (2.2)$$

με d_{k+1} $n \times 1$ διάνυσμα που σταθεροποιεί τις γνωστές εισόδους και $f(t)$ $m \times 1$ διάνυσμα του οποίου οι εισοδοί είναι γνωστές συναρτήσεις του t .

Το βασικό πρόβλημα που προκύπτει εδώ είναι το εξής:

Δεδομένης μίας επαναλαμβανόμενης διαδικασίας της μορφής (2.1) και (2.2), να κατασκευαστεί μία διακριτή προσέγγιση της ακόλουθης μορφής με $0 \leq p \leq a, k = 0, 1, \dots$

$$\begin{aligned} x_{k+1}(p+1) &= Ax_{k+1}(p) + Bu_{k+1}(p) + B_0 y_k(p) \\ y_{k+1}(p) &= Cx_{k+1}(p) + Du_{k+1}(p) + D_0 y_k(p) \end{aligned} \quad (2.3)$$

και οριακές συνθήκες:

$$\begin{aligned}x_{k+1}(0) &= d_{k+1}, k = 0, 1, \dots \\y_0(p) &= f(p), 0 \leq p \leq a\end{aligned}\tag{2.4}$$

Οι πίνακες στο μοντέλο (2.3) μπορούν να υπολογιστούν από αυτούς της σχέσης (2.1), αφού γίνουν πρώτα οι κατάλληλες αριθμητικές προσεγγίσεις και προκύψουν νέες σχέσεις που συνδέουν τους πίνακες της (2.1) με αυτούς της (2.3). Η κατάλληλη λύση που παράγεται από την (2.3) και (2.4) θα πρέπει να είναι όσο το δυνατόν πιο κοντά στην ακριβή λύση των (2.1) και (2.2) (υποθέτοντας πως είναι γνωστή ή ότι μπορεί να υπολογιστεί με αμελητέα λάθη). Εκτός αυτού σημαντικές ιδιότητες του συστήματος (2.1) και (2.2), όπως η ευστάθεια, θα πρέπει να διατηρούνται στην (2.3) και (2.4). (Ο λόγος για τον οποίο γίνεται ρητή αναφορά στις οριακές συνθήκες και στη διαφορική και στη διακριτή περίπτωση είναι πως ξέρουμε ότι η δομή των οριακών συνθηκών μόνο μπορεί να καταστρέψει τις ιδιότητες της ευστάθειας αυτών των διαδικασιών. Για παράδειγμα, αν ένα μοντέλο που περιγράφεται από τις (2.1) και (2.2) είναι ευσταθές, αυτή η ιδιότητα μπορεί να μην ισχύει αν το pass state initial (διάνυσμα αρχικών συνθηκών μετάβασης) μέρος της (2.2) αντικατασταθεί με ένα άλλο το οποίο είναι μία ρητή συνάρτηση σημείων κατά μήκος του προηγούμενου διανύσματος κατάστασης).

Οι διαφορικές και διακριτές γραμμικές επαναλαμβανόμενες διαδικασίες έχουν φανερές ομοιότητες στη δομή με τα 1-D διαφορικά γραμμικά συστήματα. Γι' αυτό το λόγο είναι φυσικό για να ξεκινήσουμε (την ανάπτυξη διακριτών προσεγγίσεων σε δυναμικές από διαδικασίες που περιγράφονται από την (2.1)) να χρησιμοποιήσουμε τις γνωστές μεθόδους από τα 1-D συστήματα. Έτσι λοιπόν θα ξεκινήσουμε μελετώντας αυτές τις μεθόδους με τη σειρά. Μέθοδοι όπως ο συγκρατητής μηδενικής τάξης (Zero-Order Hold ή ZOH), η μέθοδος προς τα εμπρός, προς τα πίσω και οι κανόνες του τραπεζίου θα μελετηθούν πρώτες. Όπου χρειάζεται, θα προτείνουμε την τροποποίηση αυτών για να είναι σε θέση να βελτιώσει την απόδοσή τους όταν αυτές χρησιμοποιούνται. Στο τέλος όλες οι μέθοδοι θα συγκριθούν μεταξύ τους με αριθμητικά παραδείγματα.

2.2.1 ZOH προσέγγιση

Η μέθοδος του συγκρατητή μηδενικής τάξης (zero order hold- ZOH) είναι πολύ γνωστή και είναι η περισσότερο χρησιμοποιούμενη στα 1-D συστήματα, αφού δίνει πολύ καλά αποτελέσματα σε πολλές περιπτώσεις. Για να εφαρμόσουμε αυτήν τη μέθοδο σε διαφορικές επαναλαμβανόμενες διαδικασίες, που περιγράφονται από την (2.1), είναι αναγκαίο να υποθέσουμε πως τα διανύσματα εισόδου είναι βηματικά, δηλαδή:

$$u_k(t+\tau) = u_k(t) \quad \text{για} \quad \tau \in [0, T) \quad (2.5)$$

$$y_k(t+\tau) = y_k(t) \quad \text{για} \quad \tau \in [0, T) \quad (2.6)$$

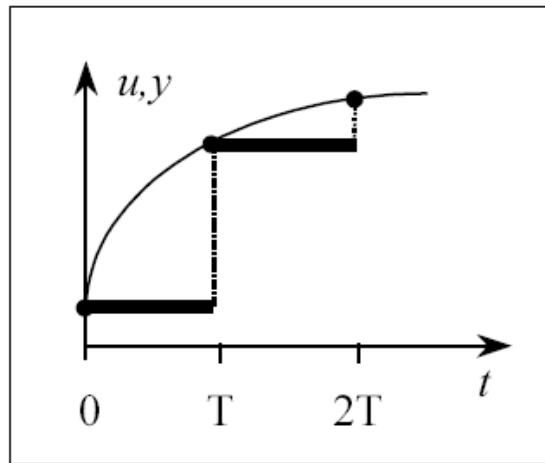
με T να δηλώνει την περίοδο δειγματοληψίας.

Έτσι λοιπόν με δεδομένες τις (2.5) και (2.6), με εφαρμογή της ZOH μεθόδου στην (2.1) θα προκύψει το παρακάτω μοντέλο διακριτού χρόνου:

$$\begin{aligned} x_{k+1}(p+1) &= e^{\hat{A}T} x_{k+1}(p) + \left\{ \int_0^T e^{\hat{A}\tau} \hat{B} d\tau \right\} u_{k+1}(p) + \left\{ \int_0^T e^{\hat{A}\tau} \hat{B}_0 d\tau \right\} y_k(p) = \\ &= Ax_{k+1}(p) + Bu_{k+1}(p) + B_0 y_k(p) \end{aligned} \quad (2.7)$$

όπου

$$\begin{aligned} A &= e^{\hat{A}T} \\ B &= \hat{A}^{-1} (e^{\hat{A}T} - I) \hat{B} \\ B_0 &= \hat{A}^{-1} (e^{\hat{A}T} - I) \hat{B}_0 \end{aligned} \quad (2.8)$$



Σχήμα 1: Βηματική προσέγγιση

Παρά την ικανοποιητική μορφή και την ευκολία της στον υπολογισμό η υπόθεση της βηματικότητας στις τιμές που παίρνει το διάνυσμα εισόδου είναι πολύ περιοριστική για πολλές περιπτώσεις που έχουν πρακτικό ενδιαφέρον. Αυτό συμβαίνει γιατί το (y_k) αναπαριστά την έξοδο του μοντέλου της επαναλαμβανόμενης διαδικασίας και κάτι τέτοιο δεν μπορεί να ελεγχθεί πλήρως. Γι'αυτό το λόγο είναι πιο ρεαλιστικό να ισχυριστούμε πως μόνο οι εισοδοί στο διάνυσμα εισόδου είναι βηματικές. Σε αυτήν την περίπτωση η (2.7) δεν ισχύει, όπως θα δούμε αργότερα και από τα αριθμητικά παραδείγματα. Άρα η ZOH προσέγγιση χωρίς την (2.6) δίνει πολύ φτωχά και όχι ικανοποιητικά αποτελέσματα.

2.2.2 Βελτιώσεις για τη ZOH προσέγγιση

Για τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων στην (2.7) πρέπει να υποθέσουμε πως τόσο το διάνυσμα εισόδου όσο και το διάνυσμα εξόδου είναι βηματικά, δηλαδή ότι η (2.5) και η (2.6) ισχύουν. Όπως είπαμε και πριν αυτοί είναι αυστηροί περιορισμοί και οριοθετούν τη χρησιμότητα αυτής της μεθόδου. Σαν εναλλακτική, η οποία διατηρεί

την απλότητα της ΖΟΗ μεθόδου, μπορούμε να αντικαταστήσουμε τη βηματική προσέγγιση με την τραπεζοειδή προσέγγιση.

Έτσι λοιπόν αντί της (2.6) τώρα θα έχουμε:

$$y_k(t+\tau) = y_k(t) + [y_k(t+T) - y_k(t)] \frac{\tau}{T} \quad \text{για } \tau \in [0, T] \quad (2.9)$$

είναι φανερό λοιπόν, πως η λύση της πρώτης εξίσωσης στην (2.1) μπορεί να γραφεί με την παρακάτω γενική μορφή:

$$x_{k+1}(t+T) = e^{\hat{A}T} x_{k+1}(t) + \int_0^T e^{\hat{A}\tau} \hat{B} u_{k+1}(t+\tau) d\tau + \int_0^T e^{\hat{A}\tau} \hat{B}_0 u_{k+1}(t+\tau) d\tau \quad (2.10)$$

και με αντικατάσταση της (2.9) στη (2.10) θα έχουμε:

$$\begin{aligned} x_{k+1}(t+T) &= e^{\hat{A}T} x_{k+1}(t) + \int_0^T e^{\hat{A}\tau} \hat{B} d\tau u_{k+1}(t) + \int_0^T e^{\hat{A}\tau} \hat{B}_0 d\tau y_k(t) + \\ &\int_0^T e^{\hat{A}\tau} \hat{B}_0 d\tau \frac{y_k(t+T) - y_k(t)}{T} \end{aligned} \quad (2.11)$$

και λύνοντας την (2.11) λαμβάνουμε την παρακάτω διακριτού χρόνου περιγραφή στο χώρο των καταστάσεων:

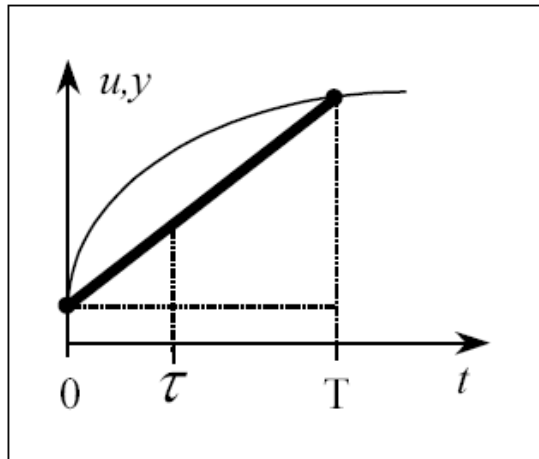
$$\begin{aligned} x_{k+1}(p+1) &= \bar{A} x_{k+1}(p) + \bar{B} u_{k+1}(p) + \bar{B}_0 y_k(p) + \bar{B}_1 y_k(p+1) \\ y_{k+1}(p) &= \bar{C} x_{k+1}(p) + \bar{D} u_{k+1}(p) + \bar{D}_0 y_k(p) \end{aligned} \quad (2.12)$$

με

$$\begin{aligned} \bar{A} &= e^{\hat{A}T} \\ \bar{B} &= \hat{A}^{-1} [e^{\hat{A}T} - I] \hat{B} \\ \bar{B}_0 &= \hat{A}^{-1} \left[\frac{1}{T} \hat{A}^{-1} (e^{\hat{A}T} - I) - I \right] \hat{B}_0 \\ \bar{B}_1 &= \hat{A}^{-1} \left[e^{\hat{A}T} - \frac{1}{T} \hat{A}^{-1} (e^{\hat{A}T} - I) \right] \hat{B}_0 \\ \bar{C} &= \hat{C}, \bar{D} = \hat{D}, \bar{D}_0 = \hat{D}_0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

Για να απομακρύνουμε τον αλλαγμένο όρο $y_k(p+1)$ στην πρώτη εξίσωση της (2.12), ορίζουμε το διάνυσμα κατάστασης w_{k+1} ως

$$w_{k+1}(p+1) = x_{k+1}(p+1) - \bar{B}_1 y_k(p+1) \quad (2.14)$$



Σχήμα 2: Τραπεζοειδής προσέγγιση

Έτσι, όταν γράψουμε την (2.12) με τους κανόνες του w , έχουμε την ακόλουθη διακριτή γραμμική επαναλαμβανόμενη διαδικασία με το εξής μοντέλο στο χώρο των καταστάσεων:

$$\begin{aligned} w_{k+1}(p+1) &= Aw_{k+1}(p) + Bu_{k+1}(p) + B_0 y_k(p) \\ y_{k+1}(p) &= Cw_{k+1}(p) + Du_{k+1}(p) + D_0 y_k(p) \end{aligned} \quad (2.15)$$

με

$$\begin{aligned} A &= \bar{A}, B = \bar{B}, \\ B_0 &= \bar{B}_0 + \bar{A} \bar{B}_1, \\ C &= \hat{C}, D = \hat{D}, \\ D_0 &= \hat{D}_0 + \hat{C} \bar{B}_1 \end{aligned} \quad (2.16)$$

Διαπιστώνουμε ακόμα, πως η εισαγωγή της (2.14) σημαίνει πως η state initial vector sequence (ακολουθία διανυσμάτων αρχικής κατάστασης) $\{x_k(0)\}_{k \geq 1}$ στη διακριτή επαναλαμβανόμενη διαδικασία πρέπει να αντικατασταθεί από την:

$$w_{k+1}(0) = x_{k+1}(0) - \bar{B}_1 y_k(0) \quad (2.17)$$

Στη θεωρία των 1-D συστημάτων, η βασική ιδιότητα της ZOH μεθόδου είναι πως αν το αρχικό συνεχές σύστημα είναι ευσταθές (όλοι οι πόλοι βρίσκονται στο αριστερό ανοικτό ημιεπίπεδο) τότε και το τελικό διακριτό σύστημα είναι ευσταθές (όλοι οι πόλοι βρίσκονται εντός του μοναδιαίου κύκλου), δηλαδή η ευστάθεια διατηρείται. Επόμενο λοιπόν είναι να αναρωτηθούμε αν κάτι τέτοιο συμβαίνει και στα 2-D συστήματα. Ας δούμε τώρα μερικά πράγματα από τη θεωρία της ευστάθειας για τις γραμμικές επαναλαμβανόμενες διαδικασίες σταθερού μήκους.

Στη θεωρία της ευστάθειας γι' αυτές τις καταστάσεις υπάρχουν δύο αρχές, που ορίζονται σαν την ασυμπτωτική ευστάθεια και την ευστάθεια along the pass (κατά το πέρασμα). Η ασυμπτωτική ευστάθεια είναι μία μορφή φραγμένης-εισόδου φραγμένης-εξόδου (bounded input bounded output-BIBO) ευστάθειας. Ακόμα η ασυμπτωτική ευστάθεια εγγυάται τη σύγκλιση από pass-to-pass (πέραςμα σε πέρασμα) κατεύθυνση σε ένα σταθερό περιορισμένο προφίλ (limit profile) το οποίο σαν αποτέλεσμα έχει να παρέχει πληροφορίες, όταν υπάρχει αιφνίδια αλλαγή στη συμπεριφορά της pass-to-pass κατεύθυνσης.

Στην περίπτωση των διαφορικών και διακριτών γραμμικών επαναλαμβανόμενων διαδικασιών, οι ικανές και αναγκαίες συνθήκες για την ύπαρξη της ασυμπτωτικής ευστάθειας είναι $\gamma(\hat{D}_0) < 1$ και $\gamma(D_0) < 1$ αντίστοιχα [8]. Ακόμα, αν αυτή η ιδιότητα ισχύει το αποτέλεσμα του περιορισμένου προφίλ μπορεί να περιγραφεί από ένα 1-D (αυστηρά διακριτό) γραμμικό επαναλαμβανόμενο μοντέλο. Έτσι λοιπόν σε ένα παράδειγμα, που είναι ασυμπτωτικά ευσταθές, οι επαναλαμβανόμενες δυναμικές του μπορούν μετά από ένα μεγάλο αριθμό από επαναλήψεις να αντικατασταθούν από αυτές ενός 1-D γραμμικού συστήματος.

Στην περίπτωση του μοντέλου (2.15) φαίνεται άμεσα πως έχουμε ένα μοντέλο ασυμπτωτικά ασταθές ακόμα και αν αυτό προήλθε από ευσταθές συνεχές μοντέλο.

Αυτό συμβαίνει γιατί κατά την κατασκευή της διακριτής προσέγγισης ο πίνακας \hat{D}_0 μετατράπηκε σε $\hat{D}_0 + \hat{C}\hat{B}_1$. Γι' αυτό το λόγο διαπιστώνουμε πως η διατήρηση των ιδιοτήτων της ευστάθειας κατά την κατασκευή διακριτών προσεγγίσεων σε δυναμικές διαφορικών γραμμικών επαναλαμβανόμενων διαδικασιών είναι πιο σύνθετη από ότι στην περίπτωση των 1-D συστημάτων.

2.2.3 Μέθοδος διαφοράς προς τα εμπρός

Μία από τις απλούστερες μεθόδους για τη διακριτοποίηση είναι η μέθοδος διαφοράς προς τα εμπρός που ορίζεται από ένα σήμα $x(t)$ με:

$$x(pT) = x[(p-1)T] + T \dot{x}[(p-1)T] \quad (2.19)$$

Η εφαρμογή της στην (2.1) δίνει:

$$x_{k+1}(p+1) = x_{k+1}(p) + T[\hat{A}x_{k+1}(p) + \hat{B}u_{k+1}(p) + \hat{B}_0 y_k(p)] \quad (2.20)$$

ή αλλιώς

$$x_{k+1}(p+1) = [I + \hat{A}T]x_{k+1}(p) + \hat{B}Tu_{k+1}(p) + \hat{B}_0 Ty_k(p) \quad (2.21)$$

$$y_{k+1}(p) = \hat{C}x_{k+1}(p) + \hat{D}u_{k+1}(p) + \hat{D}_0 y_k(p) \quad (2.22)$$

δηλαδή έχουμε ένα μοντέλο σαν αυτό της μορφής (2.3) με

$$\begin{aligned} A &= I + \hat{A}T, B = \hat{B}T, B_0 = \hat{B}_0 T, \\ C &= \hat{C}, D = \hat{D}, D_0 = \hat{D}_0 \end{aligned} \quad (2.23)$$

το τελικό διακριτό μοντέλο είναι πολύ απλό αλλά έχει το μειονέκτημα πως χρειάζονται πολύ μικρές τιμές στην περίοδο διακριτοποίησης για να προκύψουν αποδεκτά αποτελέσματα. Διατηρεί την ασυμπτωτική ευστάθεια (αφού $D_0 = \hat{D}_0$) αλλά όχι και την ευστάθεια κατά τη διάρκεια των επαναλήψεων (pass to pass). Για να επαληθεύσουμε το τελευταίο γεγονός αρκεί να παρατηρήσουμε πως η αναγκαία

συνθήκη για την ευστάθεια κατά τη διάρκεια των επαναλήψεων της (2.1) είναι, όλες οι χαρακτηριστικές ρίζες του πίνακα \hat{A} να έχουν αυστηρά αρνητικό πραγματικό μέρος και για την (2.3) να ισχύει $r(A) < 1$.

2.2.4 Μέθοδος διαφοράς προς τα πίσω

Η μέθοδος της διαφοράς προς τα πίσω προσδιορίζεται από ένα σήμα $x(t)$ με:

$$x(pT) = x[(p-1)T] + T \dot{x}(pT), \quad (2.24)$$

και εφαρμόζοντας αυτή στην (2.1) θα έχουμε:

$$x_{k+1}(p+1) = x_{k+1}(p) + T[\hat{A}x_{k+1}(p+1) + \hat{B}u_{k+1}(p+1) + \hat{B}_0 y_k(p+1)] \quad (2.25)$$

έστω τώρα η περίπτωση που η (2.5) και η (2.6) ισχύουν. Τότε η (2.25) μπορεί να πάρει τη μορφή:

$$x_{k+1}(p+1) = x_{k+1}(p) + T[\hat{A}x_{k+1}(p+1) + \hat{B}u_{k+1}(p) + \hat{B}_0 y_k(p)] \quad (2.26)$$

και μαζί με την αναλλοίωτη εξίσωση για το pass profile διάνυσμα θα οδηγηθούμε στο μοντέλο (2.3) με:

$$\begin{aligned} A &= [I - \hat{A}T]^{-1} \\ B &= [I - \hat{A}T]^{-1} \hat{B}T \\ B_0 &= [I - \hat{A}T]^{-1} \hat{B}_0 T \\ C &= \hat{C}, D = \hat{D}, D_0 = \hat{D}_0 \end{aligned} \quad (2.27)$$

παρατηρούμε πως από την στιγμή που $D_0 = \hat{D}_0$, το διακριτό μοντέλο που προκύπτει είναι ασυμπτωτικά ευσταθές. Το γεγονός ότι $A \neq \hat{A}$ σημαίνει πως η ευστάθεια κατά τη διάρκεια των επαναλήψεων του (2.3) δεν έχει ως αποτέλεσμα το διακριτό μοντέλο να διατηρεί αυτή την ιδιότητα. Το διακριτό μοντέλο εδώ είναι ευσταθές κατά τη διάρκεια των επαναλήψεων αν και μόνο αν $r(\hat{D}_0) < 1, r(A) < 1$ και

$$\det(C(z_1, z_2)) \neq 0, \forall (z_1, z) \in \bar{U}^2 \quad (2.28)$$

με

$$C(z_1, z) = \begin{bmatrix} I_n - z_1 A & -z_1 B_0 \\ -zC & I_m - zD_0 \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

και

$$\bar{U}^2 = \{z_1, z) : |z_1| \leq 1, |z| \leq 1\}$$

στην περίπτωση που η (2.5) και η (2.6) δεν ισχύουν, έχουμε:

$$x_{k+1}(p+1) = x_{k+1}(p) + T[\hat{A}x_{k+1}(p+1) + \hat{B}u_{k+1}(p+1) + \hat{B}_0 y_k(p+1)] \quad (2.30)$$

ή

$$x_{k+1}(p) = x_{k+1}(p+1) - \hat{A}Tx_{k+1}(p+1) - \hat{B}Tu_{k+1}(p+1) - \hat{B}_0 Ty_k(p+1) \quad (2.31)$$

Ορίζουμε τώρα το διάνυσμα κατάστασης w_{k+1} σαν

$$w_{k+1}(p+1) \triangleq x_{k+1}(p) \quad (2.32)$$

τότε θα έχουμε:

$$[I - \hat{A}T]x_{k+1}(p+1) = \hat{B}Tu_{k+1}(p+1) + \hat{B}_0 Ty_k(p+1) + w_{k+1}(p+1) \quad (2.33)$$

και γι' αυτό:

Διακριτοποίηση, συνεχών γραμμικών, χρονικά αμετάβλητων, πολυδιάστατων,
πολυμεταβλητών συστημάτων

$$\begin{aligned} x_{k+1}(p+1) &= [I - \hat{A}T]^{-1} w_{k+1}(p+1) + [I - \hat{A}T]^{-1} \hat{B}T u_{k+1}(p+1) + \\ &+ [I - \hat{A}T]^{-1} \hat{B}_0 T y_k(p+1) \end{aligned} \quad (2.34)$$

και αφού όλοι οι όροι στην (2.34) εκφράζονται με $(p+1)$, έχουμε:

$$x_{k+1}(p) = [I - \hat{A}T]^{-1} w_{k+1}(p) + [I - \hat{A}T]^{-1} \hat{B}T u_{k+1}(p) + [I - \hat{A}T]^{-1} \hat{B}_0 T y_k(p) \quad (2.35)$$

με αντικατάσταση της (2.35) στην (2.32) έχουμε:

$$w_{k+1}(p+1) = [I - \hat{A}T]^{-1} w_{k+1}(p) + [I - \hat{A}T]^{-1} \hat{B}T u_{k+1}(p) + [I - \hat{A}T]^{-1} \hat{B}_0 T y_k(p) \quad (2.36)$$

και η εξίσωση εξόδου της (2.1) με αντικατάσταση της (2.35) θα είναι:

$$\begin{aligned} y_{k+1}(p) &= \hat{C}[I - \hat{A}T]^{-1} w_{k+1}(p) + \{\hat{C}[I - \hat{A}T]^{-1} \hat{B}T + \hat{D}\} u_{k+1}(p) + \\ &+ \{\hat{C}[I - \hat{A}T]^{-1} \hat{B}_0 T + \hat{D}_0\} y_k(p) \end{aligned} \quad (2.37)$$

έτσι λοιπόν έχουμε ένα μοντέλο σαν το (2.3) με πίνακες:

$$\begin{aligned} A &= [I - \hat{A}T]^{-1} \\ B &= [I - \hat{A}T]^{-1} \hat{B}T \\ B_0 &= [I - \hat{A}T]^{-1} \hat{B}_0 T \\ C &= \hat{C}[I - \hat{A}T]^{-1} \\ D &= \hat{C}[I - \hat{A}T]^{-1} \hat{B}T + \hat{D} \\ D_0 &= \hat{C}[I - \hat{A}T]^{-1} \hat{B}_0 T + \hat{D}_0 \end{aligned} \quad (2.38)$$

η δομή αυτών των πινάκων δείχνει άμεσα πως η ασυμπτωτική ευστάθεια (και κατά επέκταση η ευστάθεια κατά τη διάρκεια των επαναλήψεων) του αρχικού συνεχούς μοντέλου δεν εγγυάται την ευστάθεια και στο διακριτό μοντέλο.

2.2.5 Κανόνας του τραπεζίου

Αυτή η προσέγγιση ορίζεται από ένα σήμα $x(t)$ με:

$$x(pT) = x[(p-1)T] + \frac{T}{2} [\dot{x}(pT) + \dot{x}(p-1)T] \quad (2.39)$$

και με τις υποθέσεις της (2.5) και (2.6), οι δυναμικές της διαφορικής επαναλαμβανόμενης διαδικασίας μπορεί να προσεγγιστούν από μία διακριτή επαναλαμβανόμενη διαδικασία της μορφής (2.3) με πίνακες:

$$\begin{aligned} A &= \left[I + \frac{\hat{A}T}{2} \right] \left[I - \frac{\hat{A}T}{2} \right]^{-1} \\ B &= \left[I - \frac{\hat{A}T}{2} \right]^{-1} \hat{B}T \\ B_0 &= \left[I - \frac{\hat{A}T}{2} \right]^{-1} \hat{B}_0T \\ C &= \hat{C}, D = \hat{D}, D_0 = \hat{D}_0 \end{aligned} \quad (2.40)$$

δηλαδή οι πίνακες εξόδου παραμένουν σταθεροί.

Προσέχουμε πως $D_0 = \hat{D}_0$ και γι'αυτό το λόγο η διακριτή προσέγγιση είναι ασυμπτωτικά ευσταθής, αν βέβαια και το αρχικό συνεχές μοντέλο είναι ευσταθές. Οι συνθήκες για την ευστάθεια κατά τη διάρκεια των επαναλήψεων του διακριτού μοντέλου προκύπτουν αν εφαρμόσουμε την (2.28) στο τελικό μοντέλο του χώρου των καταστάσεων.

Όπως και πριν η υπόθεση της βηματικότητας στο διάνυσμα εισόδου (σχέση (2.6)) είναι πολύ περιοριστική σε πολλές περιπτώσεις που έχουν πρακτικό ενδιαφέρον. Έτσι πιο ρεαλιστικό είναι να υποθέσουμε πως μόνο οι εισοδοί στο διάνυσμα εισόδου είναι βηματικές (δηλαδή ότι μόνο η (2.5) ισχύει). Σ' αυτήν την

περίπτωση εφαρμόζοντας τον κανόνα του τραπεζίου στην (2.1) προκύπτει η ακόλουθη διακριτή επαναλαμβανόμενη διαδικασία στο χώρο καταστάσεων:

$$\begin{aligned}x_{k+1}(p+1) &= Ax_{k+1}(p) + Bu_{k+1}(p) + B'_0 y_k(p+1) + B'_0 y_k(p) \\ y_{k+1}(p) &= Cx_{k+1}(p) + Du_{k+1}(p) + D_0 y_k(p)\end{aligned}\quad (2.41)$$

όπου οι πίνακες του μοντέλου αυτού δίνονται από την σχέση (2.4) με τη διαφορά ότι ο πίνακας B_0 έχει αντικατασταθεί από τον B'_0 με:

$$B'_0 = \frac{1}{2}(B_0) \quad (2.42)$$

Το εξέχον χαρακτηριστικό αυτού του μοντέλου είναι πως η εξίσωση κατάστασης περιέχει έναν επιπρόσθετο όρο του οποίου ο δείκτης αλλάζει για κάθε επανάληψη ($y_k(p+1)$) και γι'αυτό είναι πιο κοντά στο Fornasini-Marchesini μοντέλο για 2-D διακριτά γραμμικά συστήματα περιοδικά επαναλαμβανόμενα στο θετικό τεταρτημόριο.

2.2.6 Βελτιωμένος κανόνας του τραπεζίου

Για την αποφυγή των παραπάνω μειονεκτημάτων του τραπεζοειδούς κανόνα χρησιμοποιούμε την παρακάτω τροποποίησή του (η γενική ιδέα είναι ίδια όπως και στα 1-D).

Αρχικά εφαρμόζουμε τον κανόνα του τραπεζίου όπως περιγράφεται και στην (2.39) και μετά αναπροσαρμόζουμε την εξίσωση έτσι ώστε όλοι οι $(p+1)$ όροι να βρίσκονται από τα αριστερά και όλοι οι (p) όροι να βρίσκονται από δεξιά. Έτσι θα έχουμε:

Διακριτοποίηση, συνεχών γραμμικών, χρονικά αμετάβλητων, πολυδιάστατων,
πολυμεταβλητών συστημάτων

$$\begin{aligned}
 x_{k+1}(p+1) - \frac{\hat{A}T}{2} x_{k+1}(p+1) - \frac{\hat{B}_0 T}{2} y_k(p+1) - \frac{\hat{B}T}{2} u_{k+1}(p+1) &= \\
 = x_{k+1}(p) + \frac{\hat{A}T}{2} x_{k+1}(p) + \frac{\hat{B}_0 T}{2} y_k(p) + \frac{\hat{B}T}{2} u_{k+1}(p) &
 \end{aligned} \tag{2.49}$$

Ορίζουμε τώρα το νέο διάνυσμα κατάστασης w_{k+1} ως:

$$w_{k+1}(p+1) \triangleq x_{k+1}(p) + \frac{\hat{A}T}{2} x_{k+1}(p) + \frac{\hat{B}_0 T}{2} y_k(p) + \frac{\hat{B}T}{2} u_{k+1}(p) \tag{2.50}$$

Ακόμα

$$\begin{aligned}
 x_{k+1}(p) &= \left[I - \frac{\hat{A}T}{2} \right]^{-1} w_{k+1}(p) + \left[I - \frac{\hat{A}T}{2} \right]^{-1} \frac{\hat{B}_0 T}{2} y_k(p) + \\
 &+ \left[I - \frac{\hat{A}T}{2} \right]^{-1} \frac{\hat{B}T}{2} u_{k+1}(p)
 \end{aligned} \tag{2.51}$$

Με αντικατάσταση της (2.51) στην (2.50) έχουμε:

$$\begin{aligned}
 w_{k+1}(p+1) &= \left[I - \frac{\hat{A}T}{2} \right]^{-1} w_{k+1}(p) + \left[I - \frac{\hat{A}T}{2} \right]^{-1} \frac{\hat{B}_0 T}{2} y_k(p) + \left[I - \frac{\hat{A}T}{2} \right]^{-1} \frac{\hat{B}T}{2} u_{k+1}(p) + \\
 &+ \frac{\hat{A}T}{2} \left\{ \left[I - \frac{\hat{A}T}{2} \right]^{-1} w_{k+1}(p) + \left[I - \frac{\hat{A}T}{2} \right]^{-1} \frac{\hat{B}_0 T}{2} y_k(p) + \left[I - \frac{\hat{A}T}{2} \right]^{-1} \frac{\hat{B}T}{2} u_{k+1}(p) \right\} + \\
 &+ \frac{\hat{B}_0 T}{2} y_k(p) + \frac{\hat{B}T}{2} u_{k+1}(p)
 \end{aligned} \tag{2.52}$$

Δηλαδή πιο απλά:

$$w_{k+1}(p+1) = \left[I + \frac{\hat{A}T}{2} \right] \left[I - \frac{\hat{A}T}{2} \right]^{-1} w_{k+1}(p) +$$

Διακριτοποίηση, συνεχών γραμμικών, χρονικά αμετάβλητων, πολυδιάστατων,
πολυμεταβλητών συστημάτων

$$+ \left[I - \frac{\hat{A}T}{2} \right]^{-1} \hat{B}T u_{k+1}(p) + \left[I - \frac{\hat{A}T}{2} \right]^{-1} \hat{B}_0 T y_k(p) \quad (2.53)$$

έτσι λοιπόν η καινούρια εξίσωση σε αυτή την περίπτωση δίνεται από:

$$y_{k+1}(p) = \hat{C} \left[I - \frac{\hat{A}T}{2} \right]^{-1} w_{k+1}(p) + \left\{ \hat{D} + \hat{C} \left[I - \frac{\hat{A}T}{2} \right]^{-1} \frac{\hat{B}T}{2} \right\} u_{k+1}(p) + \left\{ \hat{D}_0 + \hat{C} \left[I - \frac{\hat{A}T}{2} \right]^{-1} \frac{\hat{B}_0 T}{2} \right\} y_k(p) \quad (2.54)$$

και τελικά οι πίνακες που ορίζουν το χώρο των καταστάσεων της διακριτής επαναλαμβανόμενης διαδικασίας είναι:

$$\begin{aligned} A &= \left[I + \frac{\hat{A}T}{2} \right] \left[I - \frac{\hat{A}T}{2} \right]^{-1} \\ B &= \left[I - \frac{\hat{A}T}{2} \right]^{-1} \hat{B}T \\ B_0 &= \left[I - \frac{\hat{A}T}{2} \right]^{-1} \hat{B}_0 T \\ C &= \hat{C} \left[I - \frac{\hat{A}T}{2} \right]^{-1} \\ D &= \hat{D} + \hat{C} \left[I - \frac{\hat{A}T}{2} \right]^{-1} \frac{\hat{B}T}{2} \\ D_0 &= \hat{D}_0 + \hat{C} \left[I - \frac{\hat{A}T}{2} \right]^{-1} \frac{\hat{B}_0 T}{2} \end{aligned} \quad (2.55)$$

Πρέπει να σημειώσουμε πως στη σχέση (2.50) η ακολουθία του διανύσματος αρχικών συνθηκών $\{x_k(0)\}_{k \geq 1}$ στο χώρο των καταστάσεων μίας γραμμικής επαναλαμβανόμενης διαδικασίας πρέπει να αντικατασταθεί από:

$$w_{k+1}(0) = x_{k+1}(0) - \frac{\hat{A}T}{2} x_{k+1}(0) - \frac{\hat{B}_0 T}{2} y_k(0) - \frac{\hat{B}T}{2} u_{k+1}(0) \quad (2.56)$$

Το μοντέλο που ορίζεται από την (2.53) και (2.54) δε χρειάζεται τις υποθέσεις βηματικότητας (2.5) και (2.6), ούτε χρησιμοποιεί περίπλοκους όρους, όπως η (2.41), και αυτό είναι και το μεγάλο πλεονέκτημα αυτής της προσέγγισης. Πρέπει ακόμα να παρατηρήσουμε πως $D_0 \neq \hat{D}_0$, δηλαδή η μέθοδος αυτή δεν εγγυάται πως οι ιδιότητες της ευστάθειας (ασυμπτωτικής και along the pass) που ισχύουν για το συνεχές μοντέλο θα ισχύσουν και στο διακριτό μετά τη διακριτοποίηση.

2.2.7 Higher Order (Υψηλότερης Τάξης) Μέθοδος

Για να βελτιώσουμε την ποιότητα της διακριτοποίησης (με την έννοια των σφαλμάτων της διακριτοποίησης) θα παρουσιάσουμε την υψηλότερης τάξης (higher order), με βήμα ένα (single step) μέθοδο αριθμητικής ολοκλήρωσης. Αυτή η προσέγγιση ορίζεται από ένα σήμα $x(t)$ με:

$$\begin{aligned} x[(p+1)T] &= x(pT) + \frac{T}{2} [\dot{x}(pT) + \dot{x}(p+1)T] + \\ &+ \frac{T^2}{12} [\ddot{x}(pT) - \ddot{x}(p+1)T] \end{aligned} \quad (2.57)$$

και με εφαρμογή αυτής της μεθόδου στην (2.1) προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned}
 x_{k+1}(p+1) &= x_{k+1}(p) + & (2.58) \\
 &+ \frac{T}{2} \left\{ \hat{A}x_{k+1}(p+1) + \hat{B}u_{k+1}(p+1) + \hat{B}_0 y_k(p+1) + \hat{A}x_{k+1}(p) + \hat{B}u_{k+1}(p) + \hat{B}_0 y_k(p) \right\} - \\
 &- \frac{T^2}{12} \left\{ \hat{A}\dot{x}_{k+1}(p+1) + \hat{B}\dot{u}_{k+1}(p+1) + \hat{B}_0 \dot{y}_k(p+1) - \hat{A}\dot{x}_{k+1}(p) - \hat{B}\dot{u}_{k+1}(p) - \hat{B}_0 \dot{y}_k(p) \right\}
 \end{aligned}$$

Ακόμα αν υποθέσουμε πως οι παράγωγοι από τις εισόδους στο διάνυσμα κατάστασης και στο διάνυσμα κατάστασης σε κάθε βήμα είναι βηματικές, τότε η (58) μπορεί να γραφεί με την μορφή:

$$\begin{aligned}
 x_{k+1}(p+1) &= x_{k+1}(p) + & (2.59) \\
 &+ \frac{T}{2} \left\{ \hat{A}x_{k+1}(p+1) + \hat{B}u_{k+1}(p+1) + \hat{B}_0 y_k(p+1) + \hat{A}x_{k+1}(p) + \hat{B}u_{k+1}(p) + \hat{B}_0 y_k(p) \right\} + \\
 &\quad + \frac{T^2}{12} \left\{ \hat{A}\dot{x}_{k+1}(p) - \hat{A}\dot{x}_{k+1}(p+1) \right\}
 \end{aligned}$$

και με τη βοήθεια της (2.1):

$$\begin{aligned}
 x_{k+1}(p+1) &= x_{k+1}(p) + & (2.60) \\
 &+ \frac{T}{2} \left\{ \hat{A}x_{k+1}(p+1) + \hat{B}u_{k+1}(p+1) + \hat{B}_0 y_k(p+1) + \hat{A}x_{k+1}(p) + \hat{B}u_{k+1}(p) + \hat{B}_0 y_k(p) \right\} + \\
 &\quad + \frac{T^2}{12} \left\{ \hat{A}^2 x_{k+1}(p) + \hat{A}\hat{B}_0 y_k(p) + \hat{A}\hat{B}u_{k+1}(p) - \right. \\
 &\quad \left. - \hat{A}^2 x_{k+1}(p+1) - \hat{A}\hat{B}_0 y_k(p+1) - \hat{A}\hat{B}u_{k+1}(p+1) \right\}
 \end{aligned}$$

έτσι λοιπόν από την (2.60) προκύπτει το ακόλουθο διακριτό μοντέλο:

$$x_{k+1}(p+1) = A_1 x_{k+1}(p) + B_1 u_{k+1}(p+1) + B_2 u_{k+1}(p) + B_{01} y_k(p+1) + B_{02} y_k(p) \quad (2.61)$$

$$y_{k+1}(p) = C x_{k+1}(p) + D u_{k+1}(p) + D_0 y_k(p) \quad (2.62)$$

με τους πίνακες:

$$\begin{aligned} A_1 &= \left[I - \frac{\hat{A}T}{2} + \frac{\hat{A}^2 T^2}{12} \right]^{-1} \left[I + \frac{\hat{A}T}{2} + \frac{\hat{A}^2 T^2}{12} \right] \\ B_1 &= \left[I - \frac{\hat{A}T}{2} + \frac{\hat{A}^2 T^2}{12} \right]^{-1} \left[\frac{\hat{B}T}{2} - \frac{\hat{A}\hat{B}T^2}{12} \right] \\ B_2 &= \left[I - \frac{\hat{A}T}{2} + \frac{\hat{A}^2 T^2}{12} \right]^{-1} \left[\frac{\hat{B}T}{2} + \frac{\hat{A}\hat{B}T^2}{12} \right] \\ B_{01} &= \left[I - \frac{\hat{A}T}{2} + \frac{\hat{A}^2 T^2}{12} \right]^{-1} \left[\frac{\hat{B}_0 T}{2} - \frac{\hat{A}\hat{B}_0 T^2}{12} \right] \\ B_{02} &= \left[I - \frac{\hat{A}T}{2} + \frac{\hat{A}^2 T^2}{12} \right]^{-1} \left[\frac{\hat{B}_0 T}{2} + \frac{\hat{A}\hat{B}_0 T^2}{12} \right] \\ C &= \hat{C}, D = \hat{D}, D_0 = \hat{D}_0. \end{aligned} \quad (2.63)$$

2.2.8 Βελτιωμένη higher order προσέγγιση

Στο μοντέλο (2.63) υπάρχουν δύο επιπλέον όροι σε σχέση με το (2.3), οι $u_{k+1}(p+1)$ και $y_k(p+1)$. Για να απομακρύνουμε αυτούς τους όρους μπορούμε να εφαρμόσουμε μία παρόμοια προσέγγιση που χρησιμοποιήσαμε και στο βελτιωμένο κανόνα του τραπεζίου. Πιο συγκεκριμένα, μπορούμε να παρατηρήσουμε πως η (2.60) μπορεί να γραφεί ως:

Διακριτοποίηση, συνεχών γραμμικών, χρονικά αμετάβλητων, πολυδιάστατων,
πολυμεταβλητών συστημάτων

$$\begin{aligned}
 & x_{k+1}(p+1) - \frac{\hat{A}T}{2} x_{k+1}(p+1) - \frac{\hat{B}_0 T}{2} y_k(p+1) - \frac{\hat{B}T}{2} u_{k+1}(p+1) - \\
 & - \frac{\hat{A}^2 T^2}{2} x_{k+1}(p+1) - \frac{\hat{A} \hat{B}_0 T}{12} y_k(p+1) - \frac{\hat{A} \hat{B} T^2}{12} u_{k+1}(p+1) = \\
 & = x_{k+1}(p) + \frac{\hat{A}T}{2} x_{k+1}(p) + \frac{\hat{B}_0 T}{2} y_k(p) + \frac{\hat{B}T}{2} u_{k+1}(p) + \\
 & + \frac{\hat{A}^2 T^2}{12} x_k(p) + \frac{\hat{A}^2 \hat{B}_0 T^2}{12} y_k(p) + \frac{\hat{A}^2 \hat{B} T^2}{12} u_{k+1}(p)
 \end{aligned} \tag{2.64}$$

Αν εισάγουμε ένα νέο διάνυσμα κατάστασης w_{k+1} με τη μορφή:

$$\begin{aligned}
 w_{k+1}(p+1) \triangleq & x_{k+1}(p) + \frac{\hat{A}T}{2} x_{k+1}(p) + \frac{\hat{B}_0 T}{2} y_k(p) + \\
 & \frac{\hat{B}T}{2} u_{k+1}(p) + \frac{\hat{A}^2 T^2}{12} x_k(p) + \frac{\hat{A} \hat{B}_0 T^2}{12} y_k(p) + \frac{\hat{A} \hat{B} T^2}{12} u_{k+1}(p)
 \end{aligned} \tag{2.65}$$

το διακριτό μοντέλο σ' αυτήν την περίπτωση έχει την μορφή της (2.3) με:

$$\begin{aligned}
 A &= QP \\
 B &= QPR + \frac{\hat{B}T}{2} + \frac{\hat{A} \hat{B} T^2}{12} \\
 B_0 &= QPS + \frac{\hat{B}_0 T}{2} + \frac{\hat{A} \hat{B}_0 T^2}{12} \\
 C &= \hat{C}P \\
 D &= \hat{D} + \hat{C}PR \\
 D_0 &= \hat{D}_0 + \hat{C}PS
 \end{aligned} \tag{2.66}$$

όπου:

$$\begin{aligned}
 P &= \left[I - \frac{\hat{A}T}{2} + \frac{\hat{A}^2 T^2}{12} \right]^{-1} \\
 Q &= \left[I + \frac{\hat{A}T}{2} + \frac{\hat{A}^2 T^2}{12} \right] \\
 R &= \left[\frac{\hat{B}T}{2} - \frac{\hat{A}\hat{B}T^2}{12} \right] \\
 S &= \left[\frac{\hat{B}_0 T}{2} - \frac{\hat{A}\hat{B}_0 T^2}{12} \right]
 \end{aligned} \tag{2.67}$$

Πρέπει να σημειώσουμε πως η μορφή της (2.65) σημαίνει πως η ακολουθία του διανύσματος αρχικών συνθηκών $\{x_k(0)\}_{k \geq 1}$ στο χώρο καταστάσεων της γραμμικής επαναλαμβανόμενης διαδικασίας πρέπει να αντικατασταθεί από:

$$\begin{aligned}
 w_{k+1}(0) &= \left[I - \frac{\hat{A}T}{2} + \frac{\hat{A}^2 T^2}{12} \right] x_{k+1}(0) - \left[\frac{\hat{B}T}{2} - \frac{\hat{A}\hat{B}T^2}{12} \right] u_{k+1}(0) - \\
 &\quad - \left[\frac{\hat{B}_0 T}{2} - \frac{\hat{A}\hat{B}_0 T^2}{12} \right] y_k(0)
 \end{aligned} \tag{2.68}$$

Βλέπουμε πως $D_0 \neq \hat{D}_0$, δηλαδή ότι οι ιδιότητες της ευστάθειας (ασυμπτωτικής και along the pass) του αρχικού συνεχούς μοντέλου δε διατηρούνται κατ'ανάγκη και στο διακριτό.

2.3 Παραδείγματα και συμπεράσματα για τις μεθόδους διακριτοποίησης δισδιάστατων συστημάτων

Τώρα θα μελετήσουμε δύο αριθμητικά παραδείγματα τα οποία θα μας βοηθήσουν στην καλύτερη κατανόηση των μεθόδων διακριτοποίησης που είδαμε στο κεφάλαιο αυτό.

Στο πρώτο παράδειγμα θα δούμε την περίπτωση όπου οι πίνακες στην (2.1) είναι:

$$\begin{aligned} \hat{A} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -24 & -26 & -9 \end{bmatrix}, \hat{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \hat{B}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ \hat{C} &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \hat{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \hat{D}_0 = \begin{bmatrix} -0.1 & 0 & 0 \\ -1 & 0.6 & 0 \\ 1 & 1 & -0.1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.71)$$

με οριακές συνθήκες:

$$\begin{aligned} x_{k+1}^1(0) &= 1, k \geq 0 \\ x_{k+1}^2(0) &= 0, k \geq 0 \\ x_{k+1}^3(0) &= 1, k \geq 0 \\ y_0^1(t) &= 1, 0 \leq t \leq 2 \\ y_0^2(t) &= \sin(2\pi t / a), 0 \leq t \leq 2 \\ y_0^3(t) &= 0, 0 \leq t \leq 2 \end{aligned} \quad (2.72)$$

και ακολουθία εισόδων:

$$\begin{aligned} u_k^1(t) &= 1, k \geq 1, 0 \leq t \leq 2 \\ u_k^2(t) &= 1, k \geq 1, 0 \leq t \leq 2 \\ u_k^3(t) &= 0, k \geq 1, 0 \leq t \leq 2 \end{aligned} \quad (2.73)$$

Ένας τρόπος σύγκρισης των μεθόδων που είδαμε είναι η ακρίβεια. Για παράδειγμα έχει αποδειχτεί πως από τις δυναμικές διακριτών επαναλαμβανόμενων διαδικασιών μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα ισοδύναμο 1-D γραμμικό σύστημα στο χώρο καταστάσεων.

Στην ουσία αυτό το ισοδύναμο 1-D μοντέλο αναπαριστά τις δυναμικές αυτών των διαδικασιών σε ένα 1-D διακριτού χρόνου γραμμικό σύστημα στο χώρο καταστάσεων της μορφής (2.74). Το εξέχον θέμα είναι πως τα διανύσματα που ορίζονται έχουν σταθερές διαστάσεις και οι αντίστοιχοι πίνακες έχουν σταθερές εισόδους.

$$\begin{aligned} Y(l+1) &= \Phi Y(l) + \Delta U(l) + \Theta x_l(0) \\ X(l) &= \Gamma Y(l) + \Sigma U(l) + \Psi x_l(0) \end{aligned} \quad (2.74)$$

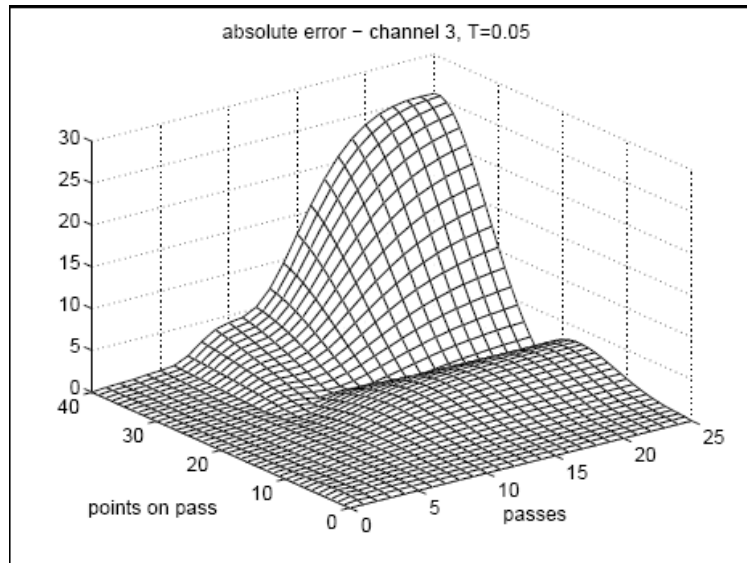
με

$$x_l(0) = d_l(0), l = 1, 2, \dots \quad (2.75)$$

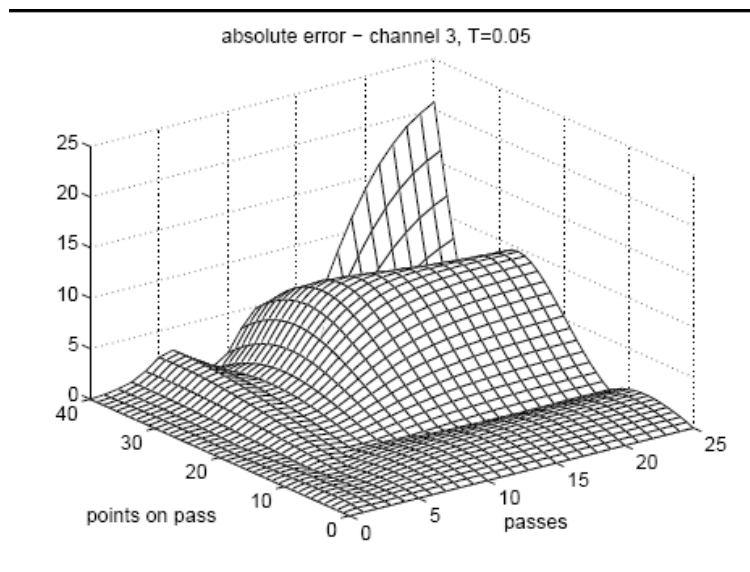
Έστω τώρα, πως το συγκεκριμένο διακριτό μοντέλο έχει κατασκευαστεί, από μία δοσμένη επαναλαμβανόμενη διαδικασία, και μας ζητείται να χρησιμοποιήσουμε το χώρο καταστάσεων του ισοδύναμου 1-D μοντέλου για ανάλυση. Το μειονέκτημα αυτής της προσέγγισης είναι πως οι διαστάσεις των πινάκων που εμπλέκονται θα είναι πολύ μεγάλες. Αυτό συμβαίνει γιατί, όταν διακριτοποιούμε ένα παράδειγμα, οι διαστάσεις των πινάκων $\Phi, \Delta, \Theta, \Gamma, \Sigma, \Psi$ στο 1-D ισοδύναμο μοντέλο που προκύπτει, θα εξαρτώνται άμεσα από την περίοδο διακριτοποίησης T που χρησιμοποιήθηκε. Για περαιτέρω διευκρίνιση, ας παρατηρήσουμε πως αν διακριτοποιήσουμε τις σχέσεις (2.71)-(2.73) για $T = 0.05$ και $T = 0.01$, τότε στο ισοδύναμο 1-D μοντέλο (2.74) οι διαστάσεις των πινάκων $\Phi, \Delta, \Gamma, \Sigma$ θα είναι 123×123 και 603×603 αντίστοιχα ενώ των Θ, Ψ θα είναι 123×123 και 603×603 αντίστοιχα.

Διακριτοποίηση, συνεχών γραμμικών, χρονικά αμετάβλητων, πολυδιάστατων, πολυμεταβλητών συστημάτων

Στα παρακάτω σχήματα γίνεται σύγκριση ανάμεσα στις μεθόδους διακριτοποίησης που μελετήσαμε σ' αυτό το κεφάλαιο (όλες έχουν εφαρμοστεί με περίοδο $T = 0.05$).

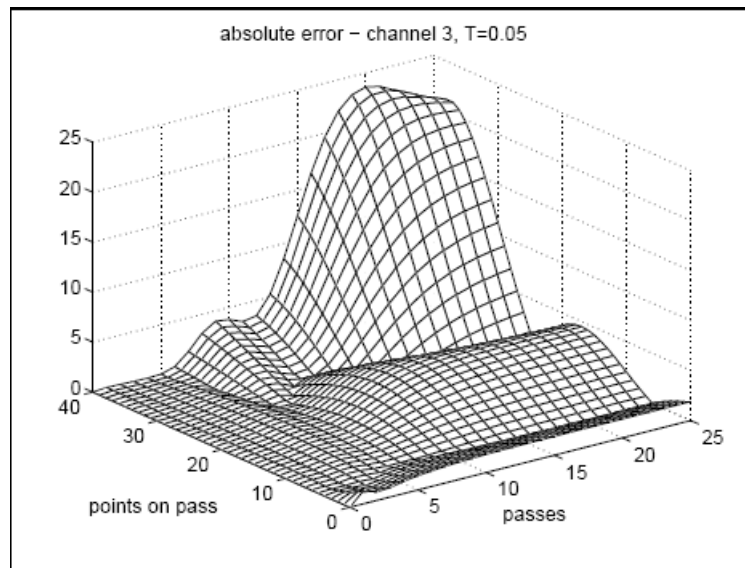


(α) Μέθοδος προς τα εμπρός

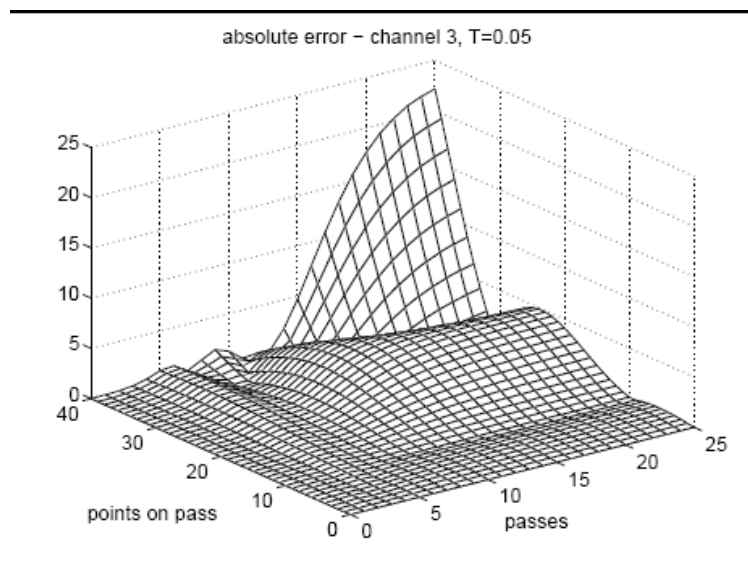


(β) Μέθοδος προς τα πίσω από (27)

Διακριτοποίηση, συνεχών γραμμικών, χρονικά αμετάβλητων, πολυδιάστατων, πολυμεταβλητών συστημάτων

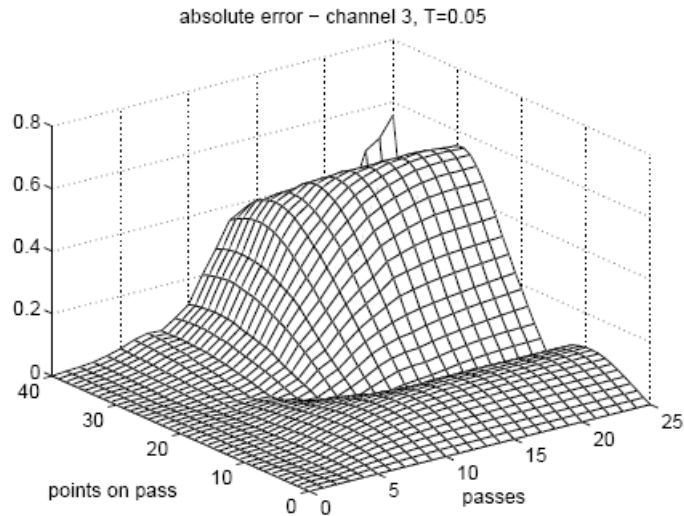


(γ) Μέθοδος προς τα πίσω από (38)

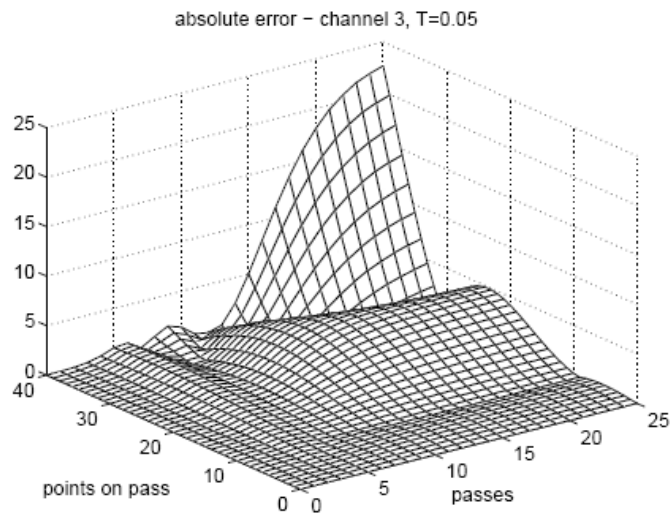


(δ) Με συγκρατητή μηδενικής τάξης (ZOH)

Διακριτοποίηση, συνεχών γραμμικών, χρονικά αμετάβλητων, πολυδιάστατων, πολυμεταβλητών συστημάτων

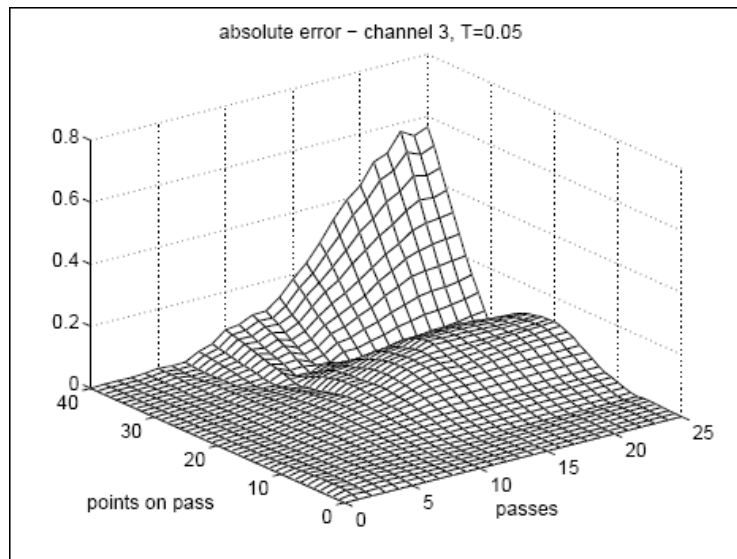


(ε) Βελτιωμένη ZOH

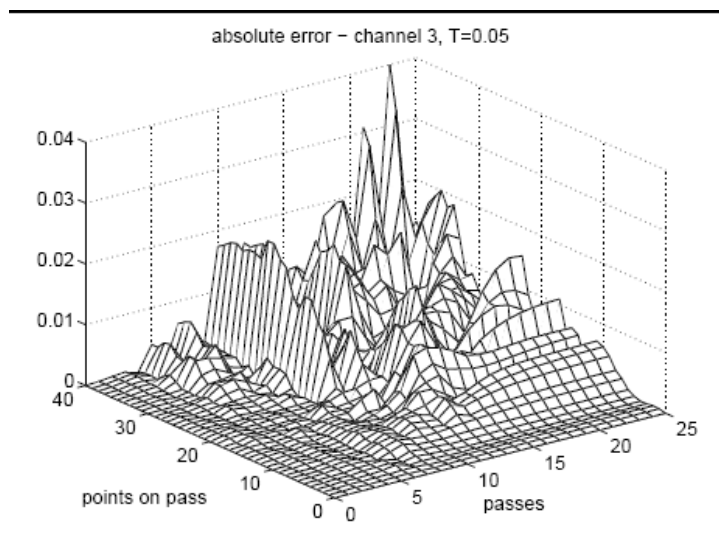


(στ) Κανόνας του τραπέζιου

Διακριτοποίηση, συνεχών γραμμικών, χρονικά αμετάβλητων, πολυδιάστατων, πολυμεταβλητών συστημάτων

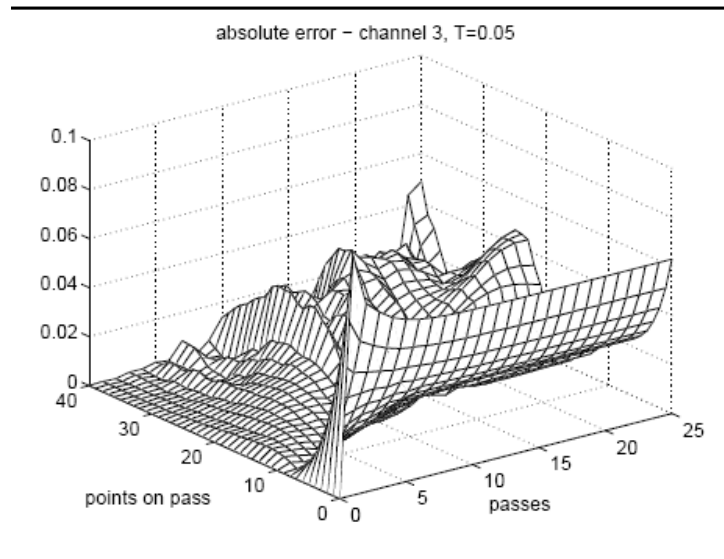


(ζ) Βελτιωμένος κανόνας του τραπέζιου



(η) Υψηλότερης τάξης με βήμα ένα

Διακριτοποίηση, συνεχών γραμμικών, χρονικά αμετάβλητων, πολυδιάστατων, πολυμεταβλητών συστημάτων

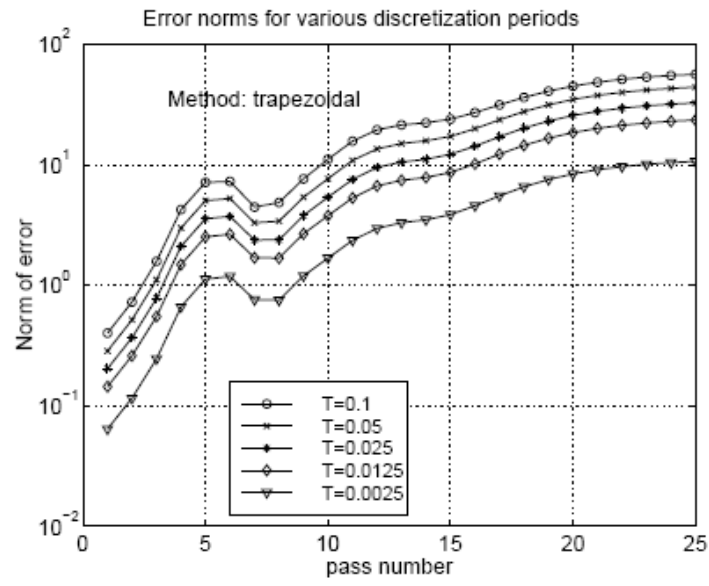


(θ) Βελτιωμένη μέθοδος υψηλότερης τάξης με βήμα ένα

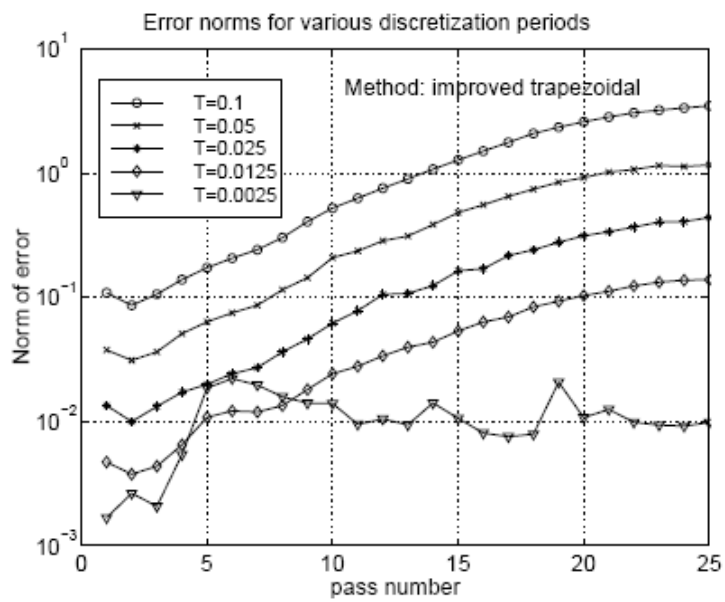
Από τα διαγράμματα αυτά είναι φανερό πως η ZOH, προς τα εμπρός και προς τα πίσω μέθοδοι, αποδίδουν λιγότερο από τις άλλες. Γι'αυτό συμπεραίνουμε πως αυτές οι τρεις μέθοδοι δεν είναι κατάλληλες για τη διακριτοποίηση. Όλες οι άλλες δίνουν πολύ καλύτερα αποτελέσματα και γι'αυτό είναι προτιμότερες.

Ακόμα πρέπει να παρατηρήσουμε πως τα παρακάτω δισδιάστατα διαγράμματα δε δίνουν επαρκείς πληροφορίες ως προς την αποτελεσματικότητα των μεθόδων. Αντιθέτως, τα τρισδιάστατα διαγράμματα είναι κατάλληλα μόνο για τη γενικότερη επιθεώρηση των μεθόδων. Τα δισδιάστατα διαγράμματα είναι καταλληλότερα για τον εντοπισμό των σφαλμάτων της κάθε μεθόδου.

Διακριτοποίηση, συνεχών γραμμικών, χρονικά αμετάβλητων, πολυδιάστατων, πολυμεταβλητών συστημάτων

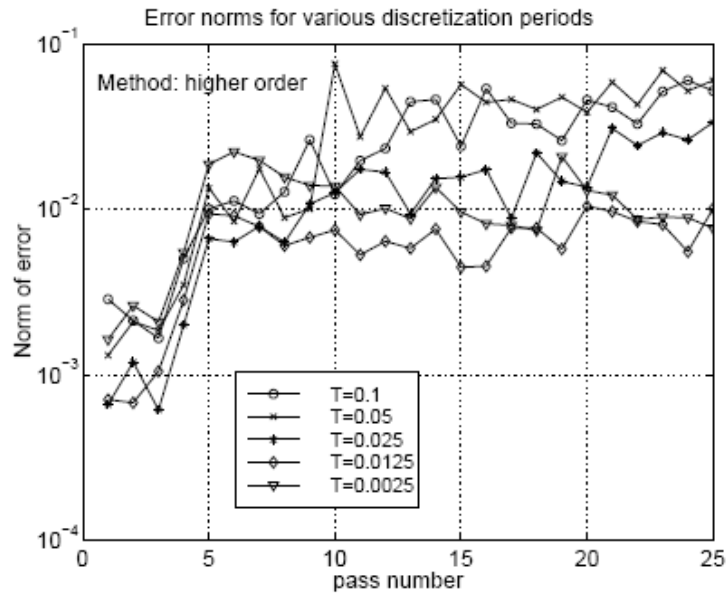


(a)

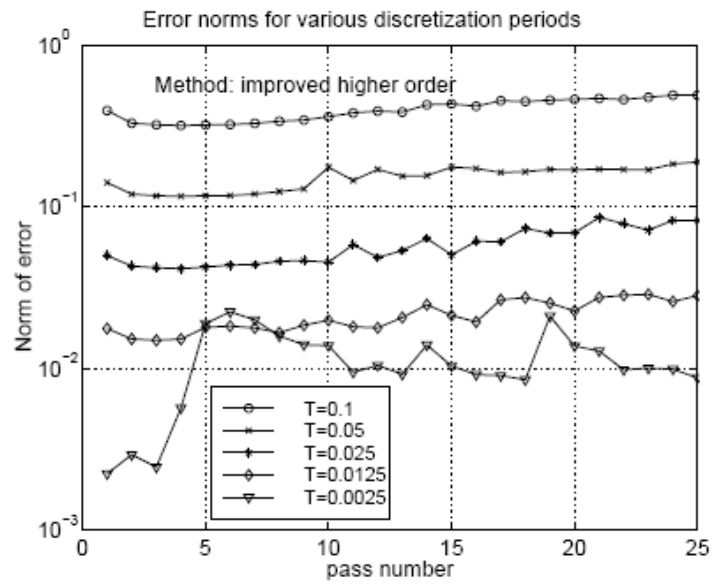


(b)

Διακριτοποίηση, συνεχών γραμμικών, χρονικά αμετάβλητων, πολυδιάστατων, πολυμεταβλητών συστημάτων

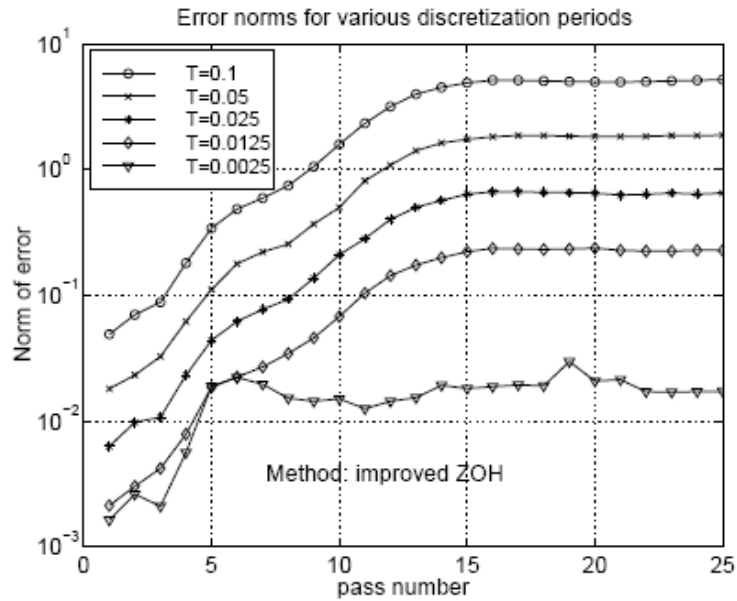


(γ)



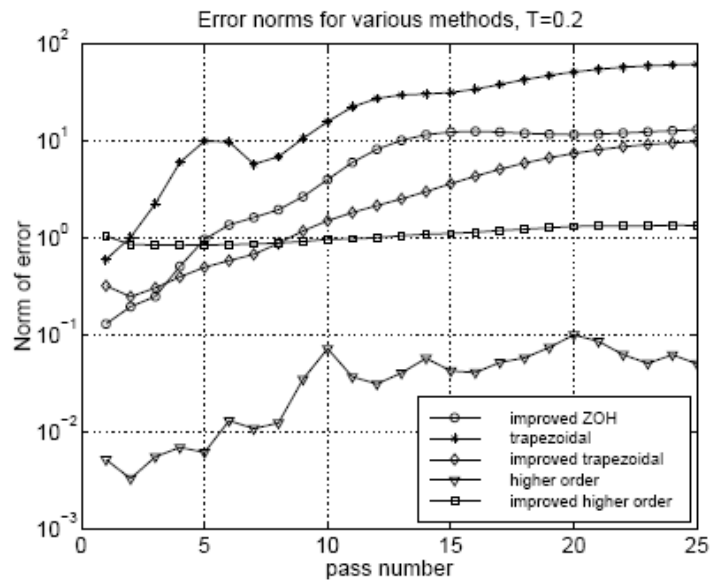
(δ)

Διακριτοποίηση, συνεχών γραμμικών, χρονικά αμετάβλητων, πολυδιάστατων, πολυμεταβλητών συστημάτων



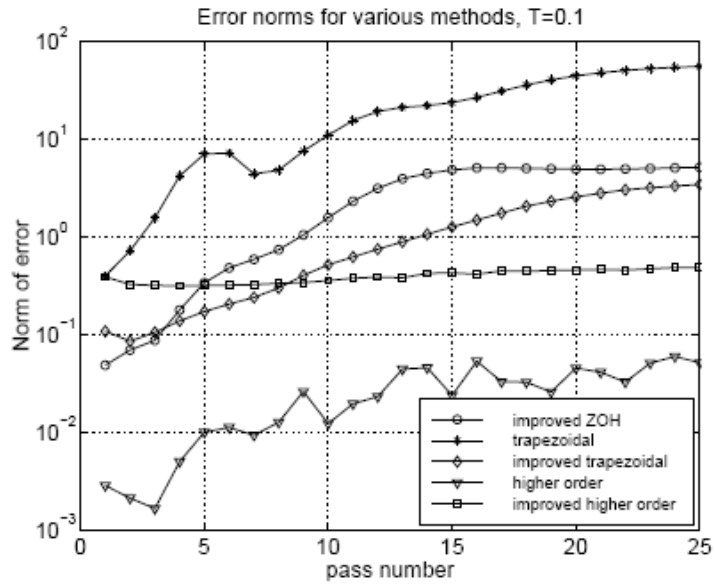
(ε)

Τα παραπάνω διαγράμματα δείχνουν τα σφάλματα του διακριτού μοντέλου ως προς το συνεχές με δεδομένες διάφορες μεθόδους διακριτοποίησης σε διαφορετικές περιόδους T .

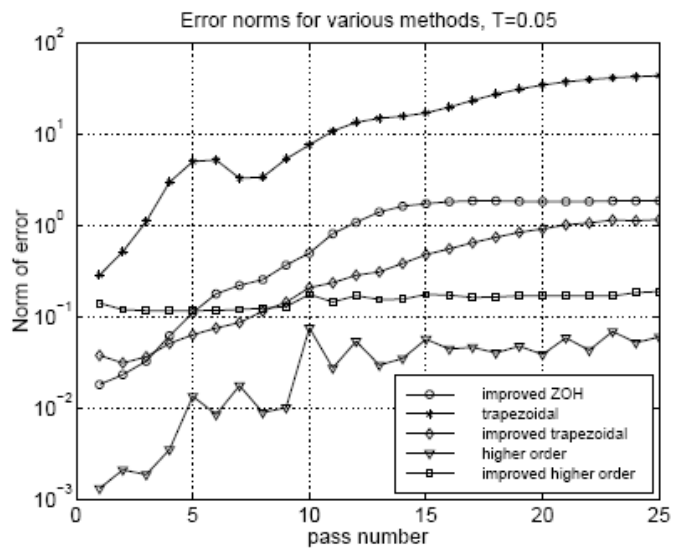


(α)

Διακριτοποίηση, συνεχών γραμμικών, χρονικά αμετάβλητων, πολυδιάστατων, πολυμεταβλητών συστημάτων

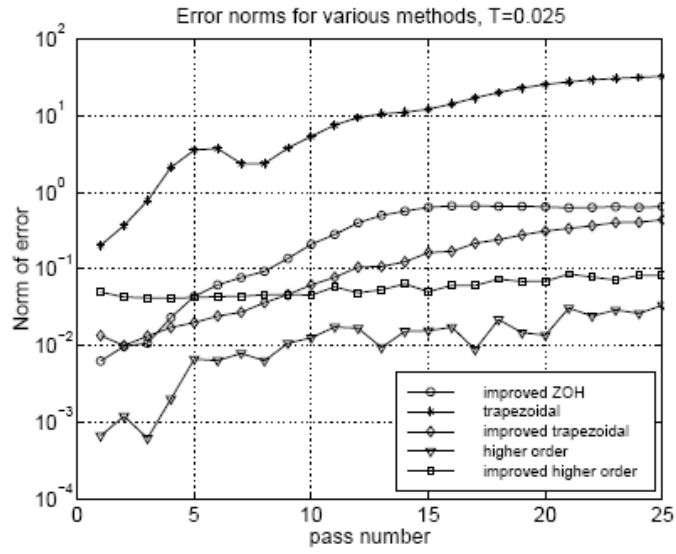


(β)

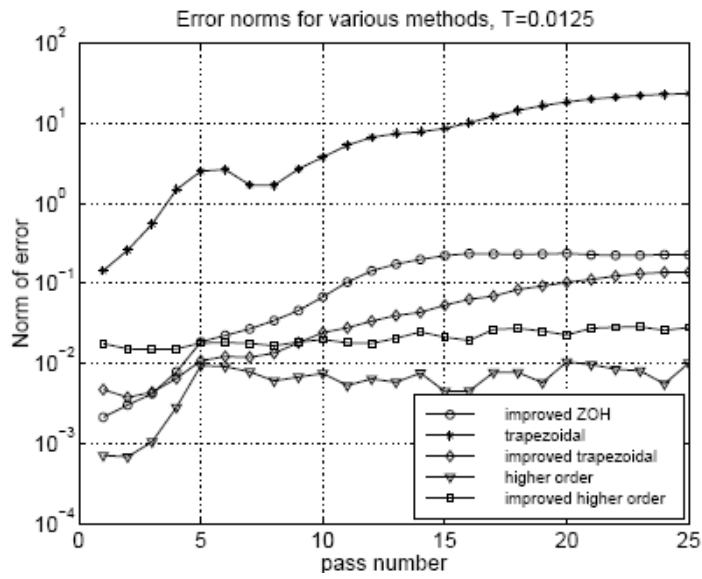


(γ)

Διακριτοποίηση, συνεχών γραμμικών, χρονικά αμετάβλητων, πολυδιάστατων, πολυμεταβλητών συστημάτων

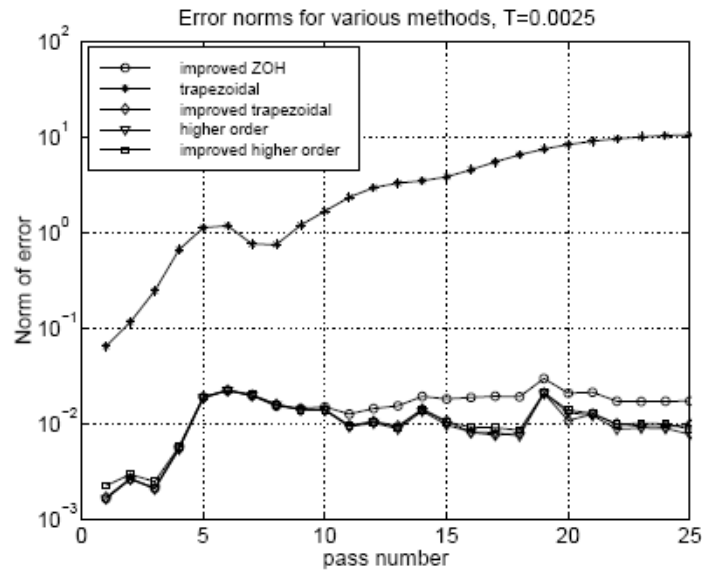


(δ)



(ε)

Διακριτοποίηση, συνεχών γραμμικών, χρονικά αμετάβλητων, πολυδιάστατων, πολυμεταβλητών συστημάτων



(στ)

Τα παραπάνω διαγράμματα δείχνουν τα σφάλματα για τις νόρμες για δεδομένη περίοδο διακριτοποίησης T και διαφορετικές μεθόδους διακριτοποίησης έτσι ώστε να είναι εύκολη η σύγκρισή τους.

Όλα τα παραπάνω διδιάστατα διαγράμματα χρησιμοποίησαν την σχέση (2.70) για τον υπολογισμό της νόρμας των σφαλμάτων.

Τα μικρότερα σφάλματα τα δίνει η μέθοδος υψηλότερης τάξης και η επόμενη μέθοδος που δίνει μικρά σφάλματα είναι η βελτιωμένη μέθοδος υψηλότερης τάξης.

Πρέπει να σημειώσουμε πως η βελτιωμένη μέθοδος υψηλότερης τάξης παράγει επίπεδες καμπύλες στα διαγράμματά της ενώ η μέθοδος υψηλότερης τάξης παράγει άνισες (κυματιστές) καμπύλες. Όταν η περίοδος T ελαττώνεται (όπως στο τελευταίο διάγραμμα) όλες οι μέθοδοι (εκτός από αυτήν του τραπεζίου) παρουσιάζουν παρόμοια συμπεριφορά και σ'αυτήν την περίπτωση η βελτιωμένη μέθοδος του τραπεζίου είναι η πιο απλή για να υπολογιστεί αριθμητικά άρα και η προτιμότερη. Για μεγάλες περιόδους διακριτοποίησης ($T = 0.2$ και $T = 0.1$) οι υψηλότερης τάξης μέθοδοι είναι προτιμότερες.

Είναι σημαντικό να τονίσουμε τη βασική διαφορά ανάμεσα στη διαδικασία αριθμητικής λύσης μίας διαφορικής εξίσωσης με τη διαδικασία διακριτοποίησης ενός συνεχούς χρόνου μοντέλου σε ένα ισοδύναμο διακριτού χρόνου μοντέλο. Στην πρώτη περίπτωση, η περίοδος διακριτοποίησης μπορεί να ρυθμιστεί ανάλογα με την τοπική αριθμητική κανονικοποίηση (numerical conditioning) του μοντέλου. Αν το μοντέλο δεν είναι αριθμητικά κανονικοποιημένο (numerical badly conditioning), τότε η περίοδος διακριτοποίησης μπορεί να ελαττωθεί. Αν όμως συμβεί το αντίθετο, η περίοδος διακριτοποίησης μπορεί να αυξηθεί με αποτέλεσμα ο χρόνος υπολογισμού να γίνει ταχύτερος. Σαν αποτέλεσμα τα σημεία πλέγματος (mesh points) δεν μπορούν να εντοπιστούν εξίσου.

Κατά τη διαδικασία της διακριτοποίησης, για κάποια δοσμένη διαφορική γραμμική επαναλαμβανόμενη διαδικασία στο χώρο καταστάσεων, πρέπει πρώτα να διαλέξουμε την περίοδο διακριτοποίησης και μετά να υπολογίσουμε το απαιτούμενο ισοδύναμο μοντέλο διακριτού χρόνου. Μετά το μοντέλο διακριτού χρόνου θα πρέπει να προσομοιωθεί και τα αποτελέσματα στα οποία έχουμε καταλήξει να συγκριθούν με αυτά της ακριβής λύσης. Αν στα αποτελέσματά μας τα σφάλματα δεν είναι αποδεκτά τότε θα πρέπει να επαναλάβουμε την προηγούμενη διαδικασία με μικρότερη περίοδο διακριτοποίησης. Αυτή η διαδικασία επαναλαμβάνεται συνεχώς μέχρι να αποκτήσουμε την επιθυμητή ακρίβεια.

Είναι λοιπόν εύλογο τώρα να αναρωτηθούμε το εξής: είναι δυνατόν να επιλέξουμε περίοδο διακριτοποίησης για την κατασκευή ισοδύναμου διακριτού μοντέλου βασιζόμενοι στην ακριβή αριθμητική λύση της διαφορικής επαναλαμβανόμενης διαδικασίας; Σε γενικές γραμμές είναι πολύ δύσκολο να δώσουμε απάντηση σε αυτό το ερώτημα. Μία πρώτη προσπάθεια είναι να επιλέξουμε τη μικρότερη τοπική περίοδο διακριτοποίησης με τη βοήθεια του λύτη κανονικών διαφορικών εξισώσεων (MATLAB ODE solver). Μετά να υποθέσουμε πως, όταν διακριτοποιούμε μία δοσμένη διαφορική επαναλαμβανόμενη διαδικασία με τόσο μικρή περίοδο διακριτοποίησης, τότε αποκομίζουμε τη διακριτή γραμμική επαναλαμβανόμενη διαδικασία με περίπου την ίδια ακρίβεια. Πρακτικά η εμπειρία μας έχει δείξει πως αυτή η υπόθεση μας οδηγεί σε αρκετά καλά αποτελέσματα. Θα πρέπει να τονίσουμε βέβαια πως σε κάποιες περιπτώσεις αυτή η προσέγγιση δεν μπορεί να

Διακριτοποίηση, συνεχών γραμμικών, χρονικά αμετάβλητων, πολυδιάστατων, πολυμεταβλητών συστημάτων

χρησιμοποιηθεί, γιατί αυτή η μικρότερη περίοδος διακριτοποίησης διαλεγμένη από τον ODE solver είναι τόσο μικρή που δεν έχει καμία πρακτική εφαρμογή.

Για να γίνει πιο διαφωτιστική η παραπάνω προσέγγιση, αρκεί να θεωρήσουμε ένα μοντέλο, όπως αυτό που περιγράφεται από τις σχέσεις (2.71)-(2.73). Μετά επιλύοντας τις εξισώσεις αυτές για $k = 0, 1, \dots, 25$ λαμβάνουμε τα αποτελέσματα του παρακάτω πίνακα 1:

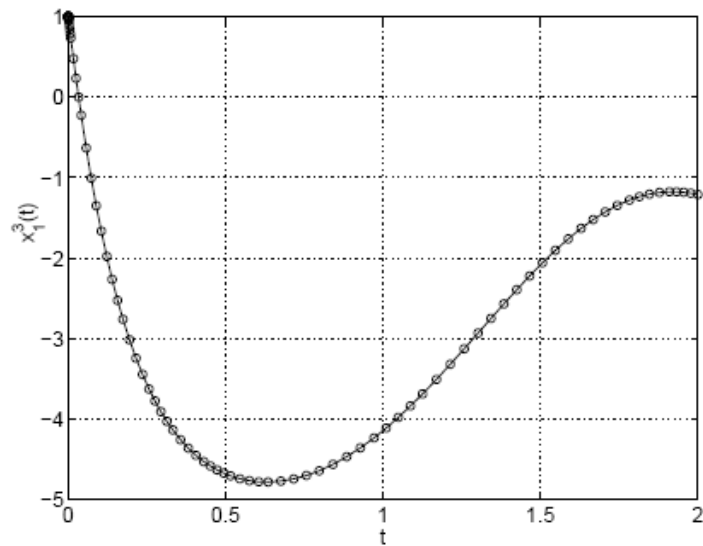
pass number	min. T	max. T	pass number	min. T	max. T
1	1.0566e-007	0.044160	14	2.061e-007	0.032488
2	1.5849e-007	0.046186	15	2.057e-007	0.03238
3	6.3396e-007	0.051286	16	2.0546e-007	0.032596
4	1.0225e-006	0.051212	17	2.0532e-007	0.032844
5	3.9376e-007	0.056399	18	2.0523e-007	0.039174
6	2.8787e-007	0.053819	19	2.0518e-007	0.033189
7	2.4786e-007	0.051949	20	2.0515e-007	0.033247
8	2.2878e-007	0.046634	21	2.0513e-007	0.033265
9	2.1868e-007	0.044147	22	2.0512e-007	0.035585
10	2.1304e-007	0.039722	23	2.0511e-007	0.033249
11	2.0979e-007	0.041464	24	2.0511e-007	0.033233
12	2.0789e-007	0.038090	25	2.0511e-007	0.033742
13	2.0677e-007	0.037715			

Πίνακας 1. Στατιστικά για τις αριθμητικές λύσεις που περιγράφονται από τις (2.71)-(2.73)

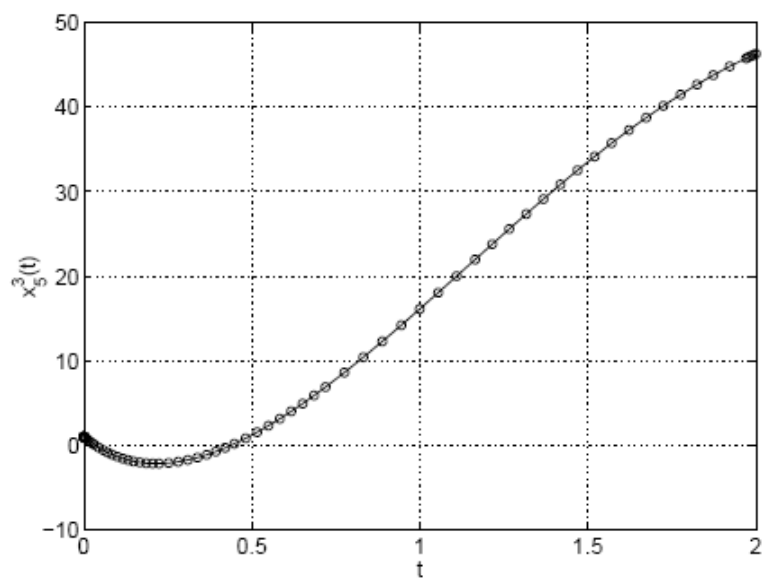
Παρατηρούμε πως οι μικρότερες και οι μεγαλύτερες περίοδοι διακριτοποίησης είναι $T = 1.0566 \times 10^{-7}$ και $T = 0.056399$ αντίστοιχα. Η πρώτη τιμή είναι πάρα πολύ μικρή και από πρακτική σκοπιά, δεν είναι δυνατό να κατασκευαστεί κάποια διακριτή επαναλαμβανόμενη διαδικασία στο χώρο των καταστάσεων με τόσο μικρή περίοδο διακριτοποίησης. Γι'αυτό το λόγο βέβαια καταλήγουμε στο συμπέρασμα πως η παραπάνω ιδέα δεν μπορεί να εφαρμοστεί σε πρακτικά παραδείγματα.

Παρατηρώντας τα παρακάτω διαγράμματα βλέπουμε πως υπάρχει ακατάστατη δομή στα σημεία πλέγματος στην αρχή τους. Ακόμα στο τμήμα στο οποίο έχουμε

εστίασει παρατηρείται συγκέντρωση των σημείων πλέγματος και η τιμή $T = 1.0566 \times 10^{-7}$ γίνεται εύκολα αναγνωρίσιμη.

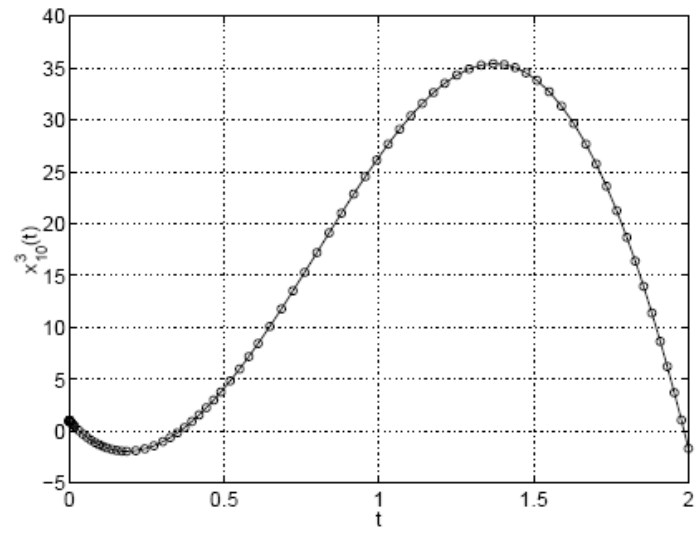


(a)

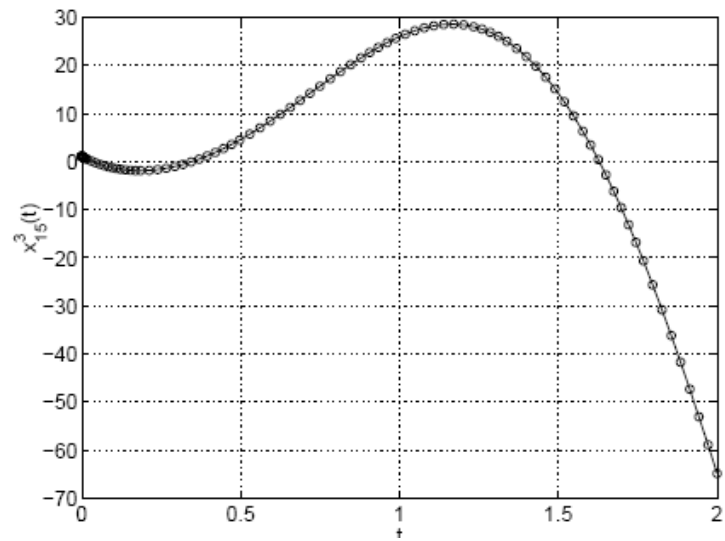


(b)

Διακριτοποίηση, συνεχών γραμμικών, χρονικά αμετάβλητων, πολυδιάστατων, πολυμεταβλητών συστημάτων

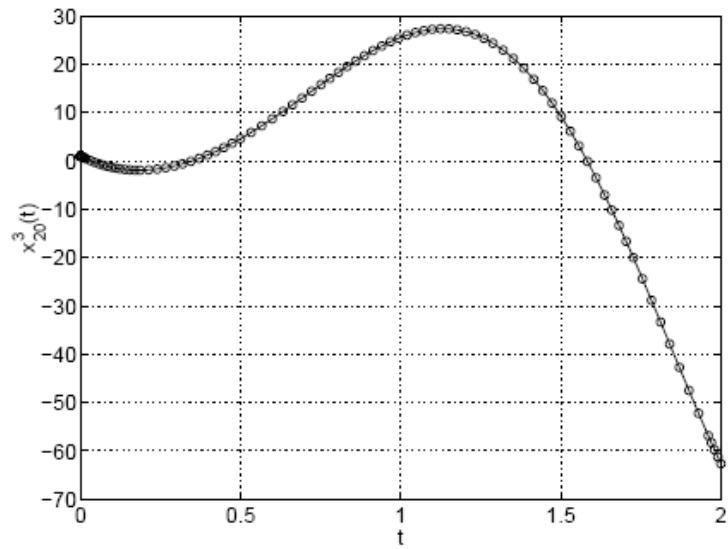


(γ)

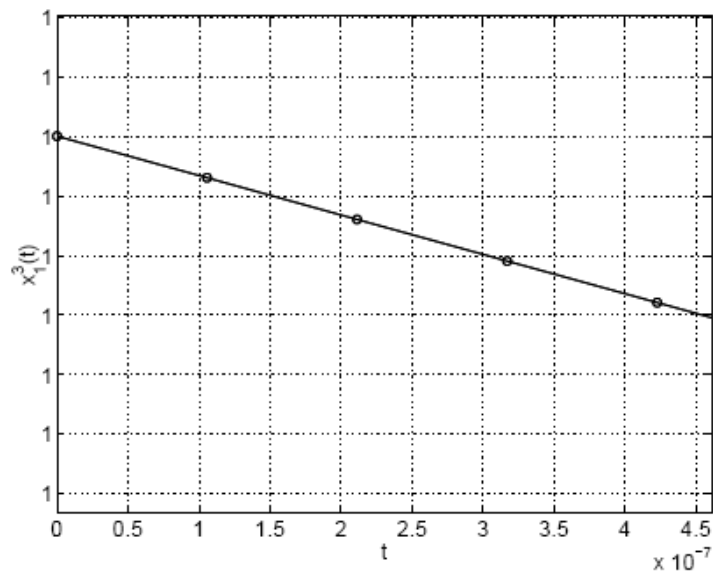


(δ)

Διακριτοποίηση, συνεχών γραμμικών, χρονικά αμετάβλητων, πολυδιάστατων, πολυμεταβλητών συστημάτων



(ε)



(στ)

Παραπάνω βλέπουμε την τοποθέτηση των σημείων πλέγματος κατά τη διάρκεια της αριθμητικής λύσης της διαφορικής επαναλαμβανόμενης διαδικασίας που περιγράφεται από τις (2.71)-(2.73).

Διακριτοποίηση, συνεχών γραμμικών, χρονικά αμετάβλητων, πολυδιάστατων,
πολυμεταβλητών συστημάτων

Αν τώρα διαταράξουμε ελαφρά π.χ. τις οριακές συνθήκες της (2.72) και την ακολουθία της εισόδου (2.73), τότε τα τελικά αποτελέσματα θα είναι πολύ διαφορετικά.

Για να γίνει περισσότερο κατανοητό, έστω πως αλλάζουμε τις οριακές συνθήκες του προηγούμενου παραδείγματος με:

$$\begin{aligned}x_{k+1}^1(0) &= 0, k \geq 0 \\x_{k+1}^2(0) &= 0, k \geq 0 \\x_{k+1}^3(0) &= 0, k \geq 0 \\y_0^1(t) &= 0, 0 \leq t \leq 2 \\y_0^2(t) &= \sin(2\pi t / a), 0 \leq t \leq 2 \\y_0^3(t) &= 0, 0 \leq t \leq 2\end{aligned}\tag{2.76}$$

και

$$\begin{aligned}u_k^1(t) &= 0, k \geq 1, 0 \leq t \leq 2 \\u_k^2(t) &= 0, k \geq 1, 0 \leq t \leq 2 \\u_k^3(t) &= 0, k \geq 1, 0 \leq t \leq 2\end{aligned}\tag{2.77}$$

τότε, η λύση της νέας διαφορικής γραμμικής επαναλαμβανόμενης διαδικασίας στο χώρο των καταστάσεων φαίνεται στον παρακάτω πίνακα με μικρότερη και μεγαλύτερη περίοδο διακριτοποίησης $T = 0.0023282$ και $T = 0.041126$ αντίστοιχα.

Διακριτοποίηση, συνεχών γραμμικών, χρονικά αμετάβλητων, πολυδιάστατων,
πολυμεταβλητών συστημάτων

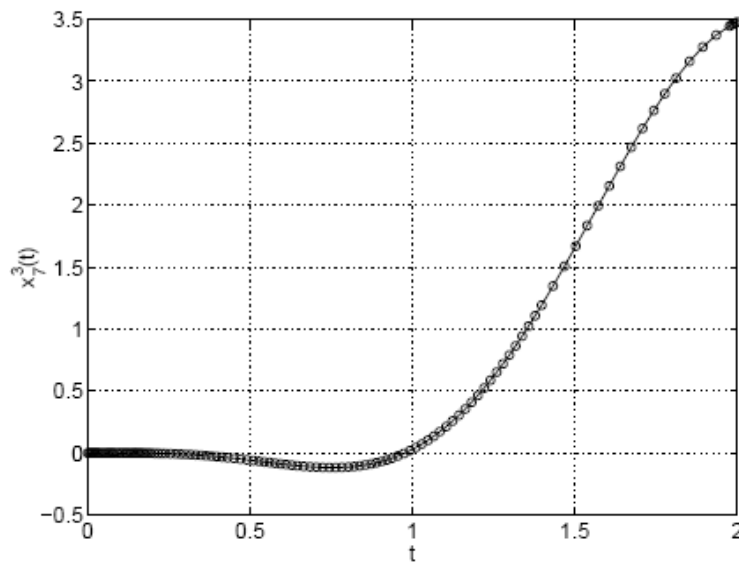
pass number	min. T	max. T	pass number	min. T	max. T
1	0.0042412	0.031965	14	0.0029983	0.023200
2	0.0042405	0.037218	15	0.0031696	0.024512
3	0.0042406	0.031985	16	0.0052475	0.023731
4	0.0042421	0.034013	17	0.0062074	0.024763
5	0.0042452	0.035007	18	0.0074497	0.025614
6	0.0026951	0.032371	19	0.0027985	0.020193
7	0.0041733	0.041126	20	0.0046194	0.020061
8	0.0051301	0.035603	21	0.0059278	0.026259
9	0.0057663	0.034873	22	0.0023282	0.018170
10	0.0032139	0.033368	23	0.0071430	0.025967
11	0.0031260	0.027997	24	0.0102280	0.022779
12	0.0030852	0.029754	25	0.0046091	0.024328
13	0.0030383	0.028869			

Πίνακας 2. Στατιστικά για τις αριθμητικές λύσεις που περιγράφονται από τις (2.71), (2.76), (2.77)

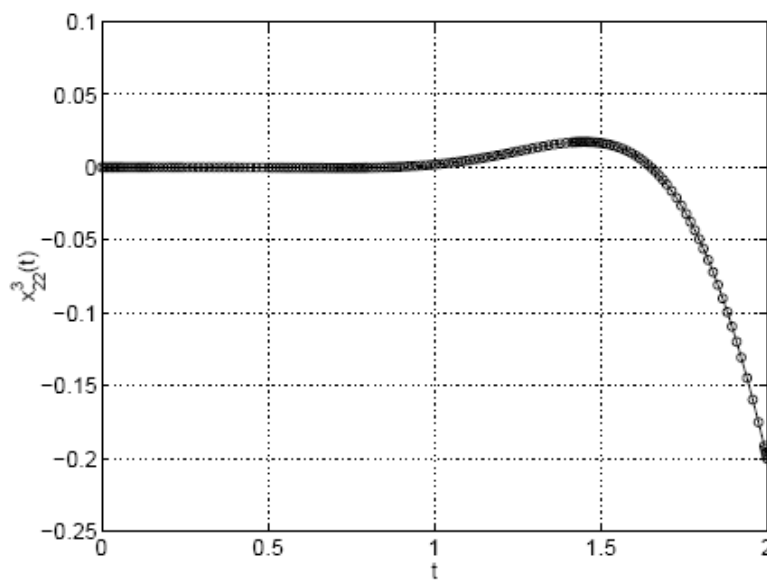
Αυτό που βλέπουμε λοιπόν στον παραπάνω πίνακα είναι τα στατιστικά των αριθμητικών αποτελεσμάτων από τις (2.71), (2.76), (2.77).

Τα αποτελέσματα αυτά, σε σχέση με τα προηγούμενα, μπορούν να είναι χρήσιμα στην πράξη και η μικρότερη περίοδος διακριτοποίησης εδώ, έχει πρακτικό νόημα. Πιο συγκεκριμένα, η περαιτέρω ανάλυση στα παρακάτω διαγράμματα φανερώνει μία ελαφρώς άτακτη διάταξη των σημείων πλέγματος και στην αρχή και στο τέλος των διαγραμμάτων. Πρέπει να τονίσουμε βέβαια πως αυτή η <<αταξία>> δεν είναι σε τόσο μεγάλο βαθμό όπως ήταν στα προηγούμενα διαγράμματα.

Διακριτοποίηση, συνεχών γραμμικών, χρονικά αμετάβλητων, πολυδιάστατων, πολυμεταβλητών συστημάτων

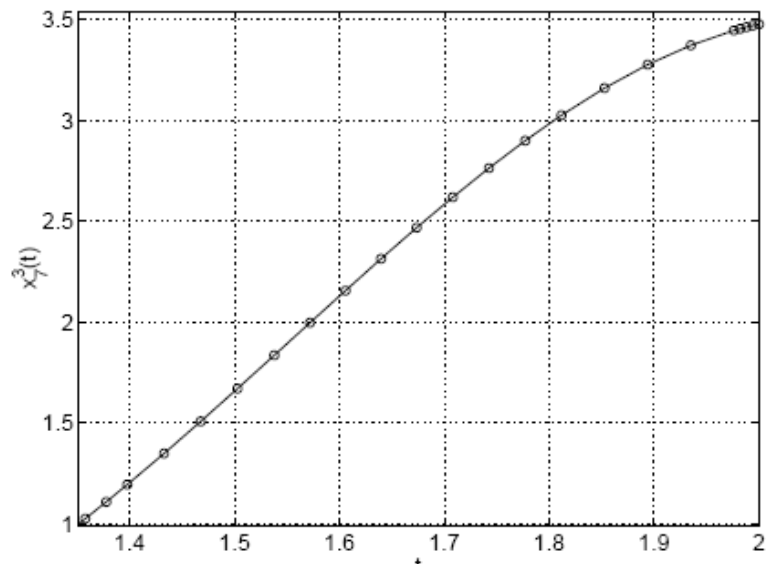


(a)

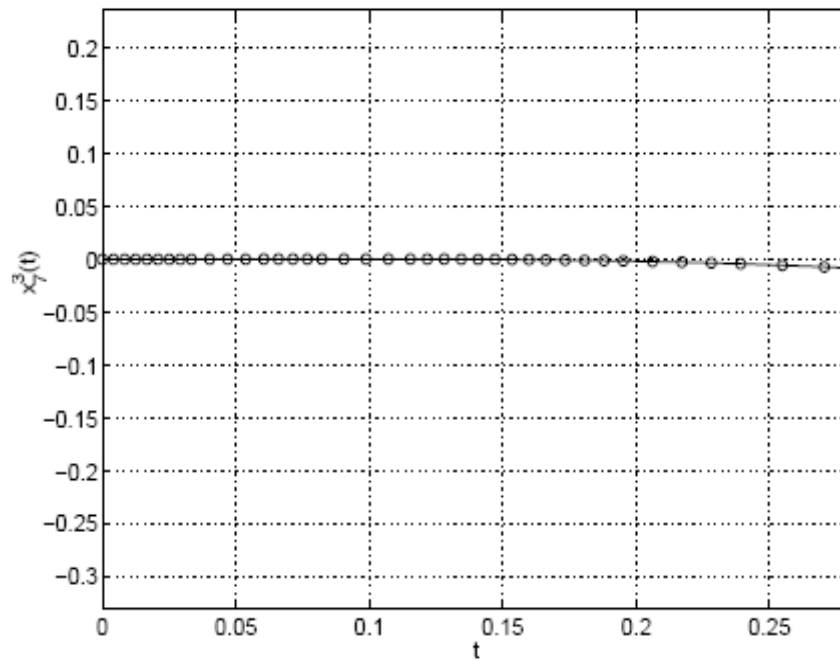


(b)

Διακριτοποίηση, συνεχών γραμμικών, χρονικά αμετάβλητων, πολυδιάστατων, πολυμεταβλητών συστημάτων

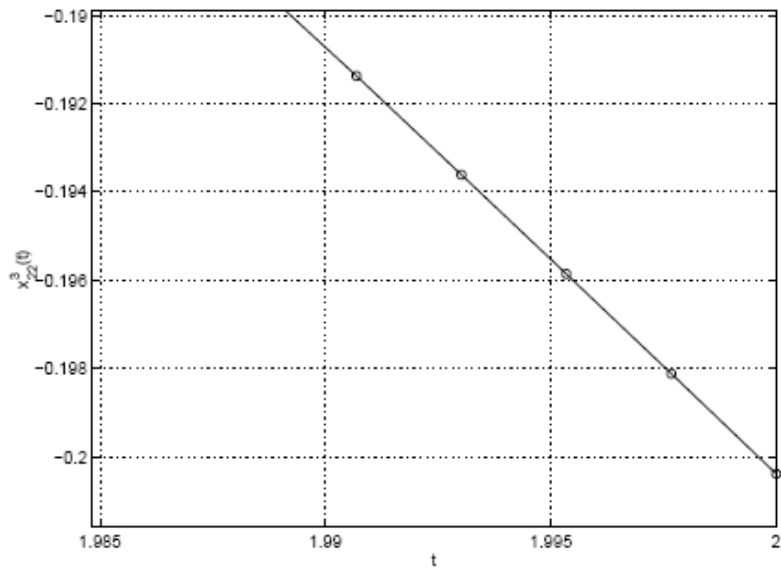


(γ)

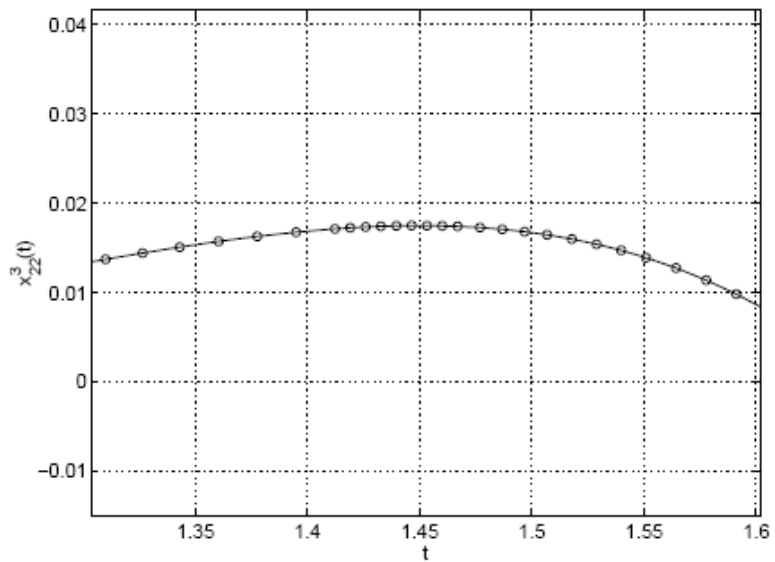


(δ)

Διακριτοποίηση, συνεχών γραμμικών, χρονικά αμετάβλητων, πολυδιάστατων, πολυμεταβλητών συστημάτων



(στ)



(ζ)

Διαπιστώνουμε παραπάνω τη διάταξη των σημείων πλέγματος κατά την αριθμητική λύση της γραμμικής επαναλαμβανόμενης διαδικασίας από τις (2.71), (2.76), (2.77).

Είδαμε λοιπόν ξεχωριστές μεθόδους διακριτοποίησης για την κατασκευή διακριτών προσεγγίσεων από δυναμικές διαφορικών γραμμικών επαναλαμβανόμενων διαδικασιών. Σε αυτές μόνο μία από τις δύο μεταβλητές ήταν συνεχής. Στα συμπεράσματά μας τώρα για τις μεθόδους, η υψηλότερης τάξης μέθοδος δίνει τα μικρότερα σφάλματα αλλά είναι η πιο περίπλοκη στη δομή της, πράγμα που την κάνει απαιτητική στους όρους χρησιμοποίησής της και στο χρόνο υπολογισμού της. Η βελτιωμένη εκδοχή της δίνει ελαφρώς χειρότερα αποτελέσματα αλλά τα σφάλματα κατά τη διακριτοποίηση είναι σχεδόν μηδαμινά. Η βελτιωμένη μέθοδος του τραπεζίου δείχνει να είναι η μέση λύση μεταξύ μικρών σφαλμάτων διακριτοποίησης και απλότητας στους υπολογισμούς. Όταν η περίοδος T μειώνεται όλες οι μέθοδοι πρακτικής αξίας δίνουν την ίδια ακρίβεια. Άρα από τη στιγμή που ο βελτιωμένος κανόνας του τραπεζίου είναι πιο εύκολος στον αριθμητικό υπολογισμό του, λογικό είναι να τον προτιμούμε σε αυτές τις περιπτώσεις. Τελειώνοντας, πρέπει να επισημάνουμε πως στις περισσότερες των περιπτώσεων η ευστάθεια της διαφορικής γραμμικής επαναλαμβανόμενης διαδικασίας δεν οδηγεί απαραίτητα σε ευστάθεια στο νέο διακριτοποιημένο σύστημα που προκύπτει. Σε όλες τις περιπτώσεις όμως είναι δυνατόν να γράψουμε τις συνθήκες κάτω από τις οποίες και το διακριτό μοντέλο θα είναι ευσταθές.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] Γρηγοριάδου Αναστασία, (2005), Διακριτοποίηση γραμμικών χρονικά αμετάβλητων πολυμεταβλητών συστημάτων.
- [2] T. Kaczorek, (1996), Lecture notes in Control and Information Sciences, Two-Dimensional Linear Systems.
- [3] Ζεβλή Μαρία, (2006), Ανάλυση πολυδιάστατων και πολυμεταβλητών συστημάτων.
- [4] Lingrand Diane, (2006), Sampling Application to 2D Transformations, University of the Philippines- Diliman.
- [5] T. Kaczorek, (1996), Lecture notes in Control and Information Sciences, Two-Dimensional Linear Systems.
- [6] Richard C. Dorf, Robert H. Bishop, (2001), Σύγχρονα Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου.
- [7] Davide Rocchesso, Pietro Polotti, Signal Processing in Processing: Sampling and Quantization, <http://cnx.org/content/m13045/latest/> .
- [8] Control Systems Theory and Applications for Linear Repetitive Processes By Eric Rogers, Krzysztof Galkowski, David H. Owens.
- [9] Artur Gramacki, Jaroslaw Gramacki, Krzysztof Galkowski, Eric Rogers, David H. Owens, (2002), From Continuous to Discrete Models of Linear Repetitive Processes, Archives of Control Sciences Vol 12.
- [10] F.L. Lewis and B.G. Mertzios (1992), On the Analysis of Two-Dimensional Discrete singular systems.