**ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ**
**ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ**
**ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ**
**«ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΕΛΕΓΧΟΥ»**

# ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΤΟΥ ΕΚΘΕΤΙΚΟΥ ΠΙΝΑΚΑ $e^{At}$ ΓΙΑ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΧΡΟΝΟΥ

## ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΜΕ MATHEMATICA

**ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ**

**ΔΩΡΟΘΕΑ Α. ΠΕΤΡΑΚΗ**

**Επιβλέπουσα : Μαρία Γουσίδου – Κουτίτα**
**Αναπληρώτρια Καθηγήτρια Α.Π.Θ.**

**ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ, ΟΚΤΩΒΡΙΟΣ 2008**

**ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ**
**ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ**
**ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ**
**«ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΕΛΕΓΧΟΥ»**

# ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΤΟΥ ΕΚΘΕΤΙΚΟΥ ΠΙΝΑΚΑ $e^{At}$ ΓΙΑ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΧΡΟΝΟΥ

## ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΜΕ MATHEMATICA

## ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

## ΔΩΡΟΘΕΑ Α. ΠΕΤΡΑΚΗ

**Επιβλέπουσα : Μαρία Γουσίδου – Κουτίτα**
**Αναπληρώτρια Καθηγήτρια Α.Π.Θ.**

**Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 10 Νοεμβρίου 2008**

| | | |
|---|---|---|
| **Μ. Γουσίδου-Κουτίτα** | **Α. Βαρδουλάκης** | **Ν. Καραμπετάκης** |
| **Αν. Καθηγήτρια Α.Π.Θ.** | **Καθηγητής Α.Π.Θ.** | **Επ. Καθηγητής Α.Π.Θ.** |

Δωροθέα Α. Πετράκη
Πτυχιούχος Μαθηματικός Α.Π.Θ.

# Περιεχόμενα

# Πρόλογος

Σκοπός της εργασίας μου αυτής είναι να παρουσιάσω τρόπους υπολογισμού του πίνακα $e^{At}$. Ο πίνακας αυτός εμφανίζεται στην λύση των γραμμικών συστημάτων συνεχούς χρόνου.

Υπάρχουν διάφοροι μέθοδοι υπολογισμού του πίνακα $e^{At}$, με κυριότερες, την μέθοδο των ιδιοτιμών, την μέθοδο των σειρών και τις μεθόδους παραγοντοποίησης πίνακα με βασικότερη την μέθοδο της Jordan παραγοντοποίησης.

Η εργασία μου ξεκινάει με την παράθεση των βασικών εννοιών που απαιτούνται για την κατανόηση του προβλήματος που διαπραγματεύομαι.

Στη συνέχεια παρουσιάζω τις παραπάνω μεθόδους υπολογισμού του πίνακα $e^{At}$ και παραθέτω ικανοποιητικό αριθμό παραδειγμάτων σε κάθε περίπτωση.

Στο τελευταίο μέρος της εργασίας παραθέτω και πρόγραμμα σε Mathematica ώστε εισάγοντας οποιονδήποτε τετραγωνικό πίνακα με πραγματικά ή μιγαδικά στοιχεία να υπολογίζονται όλα τα απαραίτητα στοιχεία που εμφανίζονται στα διάφορα βήματα.

Η εργασία μου ολοκληρώνεται με τα αποτελέσματα του προγράμματος για διάφορους τύπους πινάκων και διαφόρων διαστάσεων.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω την Αναπληρώτρια Καθηγήτρια Κυρία Μαρία Γουσίδου για την άριστη συνεργασία που είχαμε κατά την διάρκεια της εκπόνησης της εργασίας αυτής.

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

## ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

### 1.1 ΟΡΙΣΜΟΣ

Εάν $A \in \mathbb{R}^{nxn}$ τότε, ονομάζεται **χαρακτηριστικό πολυώνυμο** του πίνακα $A$ το πολυώνυμο

$$p(\lambda) = |A - \lambda I_n| = \begin{vmatrix} (\alpha_{11} - \lambda) & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & (\alpha_{22} - \lambda) & \cdots & \alpha_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & (\alpha_{nn} - \lambda) \end{vmatrix},$$

όπου $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ και $I_n$ ο μοναδιαίος $nxn$ πίνακας.

Πολλοί συγγραφείς ορίζουν ως χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα $A$ το

$$q(\lambda) = |\lambda I_n - A| = \begin{vmatrix} (\lambda - \alpha_{11}) & -\alpha_{12} & \cdots & -\alpha_{1n} \\ -\alpha_{21} & (\lambda - \alpha_{22}) & \cdots & -\alpha_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\alpha_{n1} & -\alpha_{n2} & \cdots & (\lambda - \alpha_{nn}) \end{vmatrix}.$$

Είναι προφανές ότι τα δύο πολυώνυμα έχουν τις ίδιες ακριβώς ρίζες, δηλαδή οι δύο εξισώσεις $p(\lambda) = 0$ και $q(\lambda) = 0$ είναι ισοδύναμες.

***Παράδειγμα 1***

Αν $A = \begin{bmatrix} -6 & 31 & 75 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ τότε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα $A$ είναι

$p(\lambda) = \begin{vmatrix} -6-\lambda & 31 & 75 \\ 2 & -1-\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$ και μετά τις πράξεις παίρνω

$p(\lambda) = -(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)$ .

***Παράδειγμα 2***

Αν $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ τότε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα $A$ είναι

$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix}$ και μετά τις πράξεις παίρνω $p(\lambda) = -(\lambda+1)(\lambda-2)^2$ .

***Παράδειγμα 3***

Αν $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 6 & 4 & -3 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ τότε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα $A$ είναι

$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ 6 & 4-\lambda & -3 \\ 2 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix}$ και μετά τις πράξεις παίρνω $p(\lambda) = -(\lambda-1)(\lambda-4)^2$ .

***Παράδειγμα 4***

Αν $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ τότε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα $A$ είναι

$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$ και μετά τις πράξεις παίρνω $p(\lambda) = (\lambda+2)(\lambda-2)^3$ .

***Παράδειγμα 5***

Αν $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -6 & 0 \\ 4 & 6 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & -6 & 2 \end{bmatrix}$ τότε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα $A$ είναι

$$p(\lambda) = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 4 & -6 & 0 \\ 4 & 6-\lambda & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 4-\lambda & 0 \\ 0 & 4 & -6 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$ και μετά τις πράξεις παίρνω

$p(\lambda) = (\lambda-2)^2(\lambda-4)(\lambda-6)$ .

## 1.2 ΟΡΙΣΜΟΣ

Εάν $A \in \mathbb{R}^{nxn}$ τότε, ονομάζεται **ιδιοτιμή (eigenvalue)** του πίνακα $A$ κάθε ρίζα του χαρακτηριστικού του πολυώνυμου, δηλαδή κάθε πραγματικός ή μιγαδικός αριθμός $\lambda_i$ για τον οποίο ισχύει $p(\lambda_i) = 0$.

Επειδή το χαρακτηριστικό πολυώνυμο ενός πίνακα $A \in \mathbb{R}^{nxn}$ είναι $n-$ οστού βαθμού, θα έχει $n$ ρίζες στο σώμα των μιγαδικών αριθμών.

Τις ρίζες αυτές τις συμβολίζω με $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ .

***Παράδειγμα 1***

Είδαμε ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα $A = \begin{bmatrix} -6 & 31 & 75 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ είναι το

$p(\lambda) = -(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)$ .

Συνεπώς οι ιδιοτιμές του πίνακα $A$ είναι οι αριθμοί $\lambda_1 = -3,\ \lambda_2 = -2,\ \lambda_3 = -1$ .

***Παράδειγμα 2***

Είδαμε ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ είναι το

$p(\lambda) = -(\lambda+1)(\lambda-2)^2$ .

Συνεπώς οι ιδιοτιμές του πίνακα $A$ είναι οι αριθμοί $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 2$ (διπλή).

***Παράδειγμα 3***

Είδαμε ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 6 & 4 & -3 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ είναι το

$p(\lambda) = -(\lambda-1)(\lambda-4)^2$ .

Συνεπώς οι ιδιοτιμές του πίνακα $A$ είναι οι αριθμοί $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 4$ (διπλή).

***Παράδειγμα 4***

Είδαμε ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{bmatrix}$ είναι το

$p(\lambda)=(\lambda+2)(\lambda-2)^3$.

Συνεπώς οι ιδιοτιμές του πίνακα $A$ είναι οι αριθμοί $\lambda_1=-2,\ \lambda_2=2$ (τριπλή).

***Παράδειγμα 5***

Είδαμε ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα $A=\begin{bmatrix}2 & 4 & -6 & 0\\ 4 & 6 & -3 & -4\\ 0 & 0 & 4 & 0\\ 0 & 4 & -6 & 2\end{bmatrix}$ είναι το

$p(\lambda)=(\lambda-2)^2(\lambda-4)(\lambda-6)$.

Συνεπώς οι ιδιοτιμές του πίνακα $A$ είναι οι αριθμοί $\lambda_1=2$ (διπλή), $\lambda_2=4$ και $\lambda_3=6$.

## 1.3 ΟΡΙΣΜΟΣ

Εάν $A\in\mathbb{R}^{nxn}$ τότε, ονομάζεται **φάσμα** του πίνακα $A$ και συμβολίζεται $\sigma(A)$, το σύνολο όλων των ιδιοτιμών του, δηλαδή $\sigma(A)=\{\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n\}$.

## 1.4 ΟΡΙΣΜΟΣ

Εάν $A\in\mathbb{R}^{nxn}$ τότε, ονομάζεται **δεξιό ιδιοδιάνυσμα (eigenvector)** του πίνακα $A$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_i$ κάθε μη μηδενικό διάνυσμα $\underline{x_i}$ του χώρου $\mathbb{R}^n$ για το οποίο ισχύει $Ax_i=\lambda_i\underline{x_i}$ ή ισοδύναμα $(A-\lambda_i I_n)\underline{x_i}=0$.

Αν $\underline{x_i}=\begin{pmatrix}x_{i1}\\ x_{i2}\\ \vdots\\ x_{in}\end{pmatrix}$ τότε η ισότητα $\left(A-\lambda_i I_n\right)\underline{x_i}=0$ είναι ισοδύναμη με το ομογενές *nxn*

γραμμικό σύστημα

$$\begin{cases}\left(a_{11}-\lambda\right)x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0\\ a_{21}x_1+\left(a_{22}-\lambda\right)x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+\left(a_{nn}-\lambda\right)x_n=0\end{cases}$$

***Παράδειγμα 1***

Είδαμε ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα $A=\begin{bmatrix} -6 & 31 & 75 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ είναι το $p(\lambda)=-(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)$ και ιδιοτιμές του είναι οι αριθμοί $\lambda_1=-3,\ \lambda_2=-2,\ \lambda_3=-1$.

Ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_1=-3$ είναι κάθε μη μηδενική λύση του γραμμικού και ομογενούς συστήματος $\left(A+3I_3\right)x=0$ ή ισοδύναμα

$$\begin{cases} -3x_1+31x_2+75x_3=0 \\ \ \ 2x_1+2x_2+x_3=0 \\ \ \ -x_1+x_2+4x_3=0 \end{cases}$$

Το σύστημα αυτό έχει άπειρες λύσεις και το σύνολο των λύσεών του είναι $L_1=\left\{t(7,-9,4)/t\in R\right\}$. Άρα η $(x_1,x_2,x_3)=(7,-9,4)$ είναι μια μη μηδενική λύση του συστήματος, συνεπώς το $v_1=\begin{pmatrix} 7 \\ -9 \\ 4 \end{pmatrix}$ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του πίνακα $A$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_1=-3$.

Όμοια εργαζόμενοι βρίσκουμε ότι το $v_2=\begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix}$ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του πίνακα $A$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_2=-2$.

Τέλος το $v_3=\begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του πίνακα $A$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_3=-1$.

***Παράδειγμα 2***

Είδαμε ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ είναι το $p(\lambda)=-(\lambda+1)(\lambda-2)^2$ και ιδιοτιμές του είναι οι αριθμοί $\lambda_1=-1,\ \lambda_2=2$ (διπλή).

Ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_2=2$ είναι κάθε μη μηδενική λύση του γραμμικού και ομογενούς συστήματος $\left(A-2I_3\right)x=0$ ή ισοδύναμα του συστήματος

$$\begin{cases} 0x_1 + x_2 + 0x_3 = 0 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \end{cases}.$$

Το σύστημα αυτό έχει άπειρες λύσεις και το σύνολο των λύσεών του είναι $L_2 = \{t(1,0,1) / t \in R\}$.

Άρα η $(x_1, x_2, x_3) = (1,0,1)$ είναι μια μη μηδενική λύση του συστήματος, συνεπώς το $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του πίνακα $A$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_2 = 2$.

Όμοια εργαζόμενοι βρίσκουμε ότι το $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του πίνακα $A$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_1 = -1$.

***Παράδειγμα 3***

Είδαμε ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 6 & 4 & -3 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ είναι το $p(\lambda) = -(\lambda - 1)(\lambda - 4)^2$ και ιδιοτιμές του είναι οι αριθμοί $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 4$ (διπλή).

Ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_2 = 4$ είναι κάθε μη μηδενική λύση του γραμμικού και ομογενούς συστήματος $(A - 4I_3)x = 0$ ή ισοδύναμα

$$\begin{cases} -2x_1 + 0x_2 + x_3 = 0 \\ 6x_1 + 0x_2 - 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 0x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

Το σύστημα αυτό έχει άπειρες λύσεις και το σύνολο των λύσεών του είναι $L_2 = \{t_1(1,0,2) + t_2(0,1,0) / t_1, t_2 \in R\}$.

Άρα οι τριάδες $(x_1, x_2, x_3) = (1,0,2)$ και $(y_1, y_2, y_3) = (0,1,0)$ είναι δύο μη μηδενικές λύσεις του συστήματος και μάλιστα είναι γραμμικά ανεξάρτητες, συνεπώς τα διανύσματα $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ και $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ είναι δύο γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιάνυσμα του πίνακα $A$ που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda_2 = 4$.

Όμοια εργαζόμενοι βρίσκουμε ότι το

$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του πίνακα $A$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_1 = 1$.

***Παράδειγμα 4***

Είδαμε ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ είναι το $p(\lambda) = (\lambda+2)(\lambda-2)^3$ και ιδιοτιμές του είναι οι αριθμοί $\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = 2$ (τριπλή).
Ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_1 = -2$ είναι κάθε μη μηδενική λύση του γραμμικού και ομογενούς συστήματος $(A + 2I_4)x = 0$.

Δουλεύοντας ανάλογα βρίσκουμε ότι το $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του πίνακα $A$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_1 = -2$.
Τέλος στην ιδιοτιμή $\lambda_2 = 2$ αντιστοιχούν τα ιδιοδιανύσματα

$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ και $v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

***Παράδειγμα 5***

Είδαμε ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -6 & 0 \\ 4 & 6 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & -6 & 2 \end{bmatrix}$ είναι το $p(\lambda) = (\lambda-2)^2(\lambda-4)(\lambda-6)$ και ιδιοτιμές του είναι οι αριθμοί $\lambda_1 = 2$ (διπλή), $\lambda_2 = 4$ και $\lambda_3 = 6$.
Ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_1 = 2$ είναι κάθε μη μηδενική λύση του γραμμικού και ομογενούς συστήματος $(A - 2I_4)x = 0$.

Δουλεύοντας ανάλογα βρίσκουμε ότι το $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του πίνακα $A$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_1 = 2$.

Στην ιδιοτιμή $\lambda_2 = 4$ αντιστοιχεί το ιδιοδιάνυσμα $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, και τέλος

στην ιδιοτιμή $\lambda_3 = 6$ αντιστοιχεί το ιδιοδιάνυσμα $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

## 1.5 ΟΡΙΣΜΟΣ

Ονομάζουμε **αλγεβρική πολλαπλότητα** μιας ιδιοτιμής $\lambda_i$ ενός πίνακα $A \in \mathbb{R}^{nxn}$ και την συμβολίζω με $n_i$, την πολλαπλότητα του αριθμού $\lambda_i$ ως ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $p(\lambda)$.

Χωρίς περιορισμό της γενικότητας συμβολίζω με $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ $(1 \le k \le n)$ τις διαφορετικές μεταξύ τους ιδιοτιμές του πίνακα $A$ και με $n_1, n_2, \ldots, n_k$ τις αντίστοιχες αλγεβρικές τους πολλαπλότητες.

Είναι φανερό ότι, επειδή το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $p(\lambda)$ του $A$ είναι βαθμού $n$, θα είναι $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$ και $p(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)^{n_1} (\lambda - \lambda_2)^{n_2} ... (\lambda - \lambda_k)^{n_k}$

***Παράδειγμα 1***

Είδαμε ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα $A = \begin{bmatrix} -6 & 31 & 75 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ είναι το $p(\lambda) = -(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)$ και ιδιοτιμές του είναι οι αριθμοί $\lambda_1 = -3,\ \lambda_2 = -2,\ \lambda_3 = -1$.

Η ιδιοτιμή $\lambda_1 = -3$ έχει αλγεβρική πολλαπλότητα $n_1 = 1$ (απλή).

Η ιδιοτιμή $\lambda_2 = -2$ έχει αλγεβρική πολλαπλότητα $n_2 = 1$ (απλή).

Η ιδιοτιμή $\lambda_3 = -1$ έχει αλγεβρική πολλαπλότητα $n_1 = 1$ (απλή).

***Παράδειγμα 2***

Είδαμε ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ είναι το $p(\lambda) = -(\lambda+1)(\lambda-2)^2$ και ιδιοτιμές του είναι οι αριθμοί $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 2$ (διπλή).

Η ιδιοτιμή $\lambda_1 = -1$ έχει αλγεβρική πολλαπλότητα $n_1 = 1$ (απλή).

Η ιδιοτιμή $\lambda_2 = 2$ έχει αλγεβρική πολλαπλότητα $n_2 = 2$ (διπλή).

***Παράδειγμα 3***

Είδαμε ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα $A=\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\ 6 & 4 & -3\\ 2 & 0 & 3\end{bmatrix}$ είναι το $p(\lambda)=-(\lambda-1)(\lambda-4)^2$ και ιδιοτιμές του είναι οι αριθμοί $\lambda_1=1,\ \lambda_2=4$ (διπλή).

Η ιδιοτιμή $\lambda_1=1$ έχει αλγεβρική πολλαπλότητα $n_1=1$ (απλή).

Η ιδιοτιμή $\lambda_2=4$ έχει αλγεβρική πολλαπλότητα $n_2=2$ (διπλή).

***Παράδειγμα 4***

Είδαμε ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{bmatrix}$ είναι το $p(\lambda)=(\lambda+2)(\lambda-2)^3$ και ιδιοτιμές του είναι οι αριθμοί $\lambda_1=-2,\ \lambda_2=2$ (τριπλή).

Η ιδιοτιμή $\lambda_1=-2$ έχει αλγεβρική πολλαπλότητα $n_1=1$ (απλή).

Η ιδιοτιμή $\lambda_2=2$ έχει αλγεβρική πολλαπλότητα $n_2=3$ (τριπλή).

***Παράδειγμα 5***

Είδαμε ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα $A=\begin{bmatrix}2 & 4 & -6 & 0\\ 4 & 6 & -3 & -4\\ 0 & 0 & 4 & 0\\ 0 & 4 & -6 & 2\end{bmatrix}$ είναι το $p(\lambda)=(\lambda-2)^2(\lambda-4)(\lambda-6)$ και ιδιοτιμές του είναι οι αριθμοί $\lambda_1=2$ (διπλή), $\lambda_2=4$ και $\lambda_3=6$.

Η ιδιοτιμή $\lambda_1=2$ έχει αλγεβρική πολλαπλότητα $n_1=2$ (διπλή).

Η ιδιοτιμή $\lambda_2=4$ έχει αλγεβρική πολλαπλότητα $n_2=1$ (απλή).

Η ιδιοτιμή $\lambda_3=6$ έχει αλγεβρική πολλαπλότητα $n_3=1$ (απλή).

## 1.6 ΟΡΙΣΜΟΣ

Ονομάζουμε **γεωμετρική πολλαπλότητα** μιας ιδιοτιμής $\lambda_i$ ενός πίνακα $A\in\mathbb{R}^{nxn}$ και την συμβολίζω με $m_i$ την διάσταση του διανυσματικού υποχώρου $V_i=\left\{x\in\mathbb{R}^n \,/ (A-\lambda_i I_n)x=0\right\}$ του χώρου $\mathbb{R}^n$.

Ο $V_i$ λέγεται **δεξιός ιδιόχωρος (eigenspace)** της ιδιοτιμής $\lambda_i$.

***Παράδειγμα 1***

Είδαμε ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα $A=\begin{bmatrix} -6 & 31 & 75 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ είναι το $p(\lambda)=-(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)$ και ιδιοτιμές του είναι οι αριθμοί $\lambda_1=-3,\ \lambda_2=-2,\ \lambda_3=-1$.

Επίσης είδαμε ότι

το $v_1=\begin{pmatrix} 7 \\ -9 \\ 4 \end{pmatrix}$ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του πίνακα $A$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_1=-3$,

το $v_2=\begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix}$ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του πίνακα $A$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_2=-2$ και

το $v_3=\begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του πίνακα $A$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_3=-1$.

Ο διανυσματικός υπόχωρος $L_1=\{t\cdot v_1 / t\in R\}$ του $\mathbb{R}^3$ που παράγεται από το μη μηδενικό ιδιοδιάνυσμα $v_1$ είναι ταυτόσημος με διανυσματικό χώρο $V_1=\{x\in\mathbb{R}^3 /(A-\lambda_1 I_3)x=0\}$, έχει διάσταση 1 συνεπώς η γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής $\lambda_1=-3$ είναι $m_1=1$.

Όμοια η γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής $\lambda_2=-2$ είναι $m_2=1$ και τέλος γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής $\lambda_3=-1$ είναι $m_3=1$

***Παράδειγμα 2***

Είδαμε ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ είναι το $p(\lambda)=-(\lambda+1)(\lambda-2)^2$ και ιδιοτιμές του είναι οι αριθμοί $\lambda_1=-1,\ \lambda_2=2$ (διπλή).

Επίσης είδαμε ότι

το $v_1=\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του πίνακα $A$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_1=-1$ και το $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του πίνακα $A$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_2 = 2$.

Ο διανυσματικός υπόχωρος $L_1 = \{ t \cdot v_1 / t \in R \}$ του $\mathbb{R}^3$ που παράγεται από το μη μηδενικό ιδιοδιάνυσμα $v_1$ είναι ταυτόσημος με διανυσματικό χώρο $V_1 = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 / (A - \lambda_1 I_3)x = 0 \right\}$, έχει διάσταση 1 συνεπώς η γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής $\lambda_1 = -1$ είναι $m_1 = 1$.
Όμοια η γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής $\lambda_2 = 2$ είναι $m_2 = 1$.
Παρατηρώ ότι η ιδιοτιμή $\lambda_2 = 2$ ενώ έχει αλγεβρική πολλαπλότητα $n_2 = 2$ έχει γεωμετρική πολλαπλότητα $m_2 = 1$.

***Παράδειγμα 3***

Είδαμε ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 6 & 4 & -3 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ είναι το $p(\lambda) = -(\lambda - 1)(\lambda - 4)^2$ και ιδιοτιμές του είναι οι αριθμοί $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 4$ (διπλή).
Επίσης είδαμε ότι

το $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του πίνακα $A$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή

$\lambda_1 = 1$ και

τα διανύσματα $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ και $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ είναι δύο γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα

του πίνακα $A$ που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda_2 = 4$.
Ο διανυσματικός υπόχωρος $L_1 = \{ t \cdot v_1 / t \in R \}$ του $\mathbb{R}^3$ που παράγεται από το μη μηδενικό ιδιοδιάνυσμα $v_1$ είναι ταυτόσημος με διανυσματικό χώρο $V_1 = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 / (A - \lambda_1 I_3)x = 0 \right\}$, έχει διάσταση 1 συνεπώς η γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής $\lambda_1 = 1$ είναι $m_1 = 1$.
Ο διανυσματικός υπόχωρος $L_2 = \{ t_1 \cdot v_2 + t_2 \cdot v_3 / t_1, t_2 \in R \}$ του $\mathbb{R}^3$ που παράγεται από τα μη μηδενικά ιδιοδιανύσματα $v_2, v_3$ είναι ταυτόσημος με διανυσματικό χώρο

$V_2 = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 / (A - \lambda_2 I_3)x = 0 \right\}$, έχει διάσταση 2, συνεπώς η γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής $\lambda_2 = 4$ είναι $m_2 = 2$.
Παρατηρώ ότι η ιδιοτιμή $\lambda_2 = 4$ έχει αλγεβρική πολλαπλότητα $n_2 = 2$ και επίσης γεωμετρική πολλαπλότητα $m_2 = 2$.

***Παράδειγμα 4***

Είδαμε ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ είναι το

$p(\lambda) = (\lambda + 2)(\lambda - 2)^3$ και ιδιοτιμές του είναι οι αριθμοί $\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = 2$ (τριπλή).
Επίσης είδαμε ότι

το $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του πίνακα $A$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή

$\lambda_1 = -2$ και

τα διανύσματα $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ και $v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ είναι δύο γραμμικά ανεξάρτητα

ιδιοδιανύσματα του πίνακα $A$ που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda_2 = 2$.

Ο διανυσματικός υπόχωρος $L_1 = \left\{ t \cdot v_1 / t \in R \right\}$ του $\mathbb{R}^4$ που παράγεται από το μη μηδενικό ιδιοδιάνυσμα $v_1$ είναι ταυτόσημος με διανυσματικό χώρο $V_1 = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 / (A - \lambda_1 I_4)x = 0 \right\}$, έχει διάσταση 1 συνεπώς η γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής $\lambda_1 = -2$ είναι $m_1 = 1$.
Ο διανυσματικός υπόχωρος $L_2 = \left\{ t_1 \cdot v_2 + t_2 \cdot v_3 + t_3 \cdot v_4 / t_1, t_2, t_3 \in R \right\}$ του $\mathbb{R}^3$ που παράγεται από τα μη μηδενικά ιδιοδιανύσματα $v_2, v_3$ είναι ταυτόσημος με διανυσματικό χώρο $V_2 = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 / (A - \lambda_2 I_4)x = 0 \right\}$, έχει διάσταση 2, συνεπώς η γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής $\lambda_2 = 2$ είναι $m_2 = 3$.
Παρατηρώ ότι η ιδιοτιμή $\lambda_2 = 2$ έχει αλγεβρική πολλαπλότητα $n_2 = 3$ και επίσης γεωμετρική πολλαπλότητα $m_2 = 3$.

***Παράδειγμα 5***

Είδαμε ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -6 & 0 \\ 4 & 6 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & -6 & 2 \end{bmatrix}$ είναι το $p(\lambda) = (\lambda - 2)^2(\lambda - 4)(\lambda - 6)$ και ιδιοτιμές του είναι οι αριθμοί $\lambda_1 = 2$ (διπλή), $\lambda_2 = 4$ και $\lambda_3 = 6$.

Επίσης είδαμε ότι

το $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του πίνακα $A$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_1 = 2$ και

το διανύσμα $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του πίνακα $A$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_2 = 4$ και

το διανύσμα $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του πίνακα $A$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_3 = 6$.

Παρατηρώ ότι η ιδιοτιμή $\lambda_1 = 2$ έχει αλγεβρική πολλαπλότητα $n_1 = 2$ και γεωμετρική πολλαπλότητα $m_1 = 1$.

## 1.7 ΟΡΙΣΜΟΣ

Λέμε ότι ένας τετραγωνικός πίνακας $A \in \mathbb{R}^{nxn}$ είναι **κανονικός**, αν ισχύει $A^T \cdot A = A \cdot A^T$.

***Παράδειγμα 1***

Ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ είναι κανονικός γιατί ισχύει

$$A^T \cdot A = \begin{bmatrix} 17 & 1 \\ 1 & 10 \end{bmatrix} \text{ και } A \cdot A^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 17 & 1 \\ 1 & 10 \end{bmatrix}.$$

***Παράδειγμα 2***

Ο πίνακας $A=\begin{bmatrix}2 & 4\\ 1 & 3\end{bmatrix}$ δεν είναι κανονικός γιατί ισχύει

$A^T\cdot A=\begin{bmatrix}5 & 11\\ 11 & 25\end{bmatrix}$ και $A\cdot A^T=\begin{bmatrix}20 & 14\\ 14 & 10\end{bmatrix}$.

## 1.8 ΟΡΙΣΜΟΣ

Λέμε ότι ένας τετραγωνικός πίνακας $A\in\mathbb{R}^{nxn}$ είναι **διαγωνοποιήσιμος** ή **διαγωνοποιείται,** αν υπάρχει, αντιστρέψιμος πίνακας $P\in\mathbb{R}^{nxn}$ τέτοιος ώστε ο πίνακας $B=P^{-1}AP$ να είναι διαγώνιος.

***Παράδειγμα 1***

Ο πίνακας $A=\begin{bmatrix}-6 & 31 & 75\\ 2 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 1\end{bmatrix}$ είναι διαγωνοποιήσιμος, γιατί υπάρχει ο πίνακας

$P=\begin{bmatrix}7 & 2 & -1\\ -9 & -7 & -5\\ 4 & 3 & 2\end{bmatrix}$ ο οποίος είναι αντιστρέψιμος με $P^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2}\\ -1 & 9 & 22\\ \frac{1}{2} & -\frac{13}{2} & -\frac{31}{2}\end{bmatrix}$ και

ισχύει $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}-3 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$ που είναι διαγώνιος πίνακας.

***Παράδειγμα 2***

Ο πίνακας $A=\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\ 6 & 4 & -3\\ 2 & 0 & 3\end{bmatrix}$ είναι διαγωνοποιήσιμος, γιατί υπάρχει ο πίνακας

$P=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 3 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 0\end{bmatrix}$ ο οποίος είναι αντιστρέψιμος με $P^{-1}=\begin{bmatrix}-\frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3}\\ 2 & 1 & -1\end{bmatrix}$ και ισχύει

$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}$ που είναι διαγώνιος πίνακας.

***Παράδειγμα 3***

Ο πίνακας $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{bmatrix}$ είναι διαγωνοποιήσιμος, γιατί υπάρχει ο πίνακας

$P=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$ ο οποίος είναι αντιστρέψιμος, με αντίστροφο τον πίνακα

$P^{-1}=\begin{bmatrix}-1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4\\ 1/4 & -1/4 & -1/4 & 3/4\\ 1/4 & -1/4 & 3/4 & -1/4\\ 1/4 & 3/4 & -1/4 & -1/4\end{bmatrix}$ και ισχύει $P^{-1}\cdot A\cdot P=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$

που είναι διαγώνιος πίνακας.

## 1.9 ΠΡΟΤΑΣΗ

Έστω $A\in K^{nxn}$, όπου $K=\mathbb{R}$ ή $K=\mathbb{C}$.
Ο πίνακας $A$ **διαγωνοποιείται** αν και μόνο αν ισχύουν συγχρόνως οι επόμενες δύο προϋποθέσεις.
$\alpha)$ Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του $p(\lambda)=\det(A-\lambda I)$ να έχει όλες τις ιδιοτιμές του στο $K$.
$\beta)$ Η αλγεβρική πολλαπλότητα καθεμιάς ιδιοτιμής είναι ίση με τη γεωμετρική πολλαπλότητα της .

## 1.10 ΠΡΟΤΑΣΗ

Αν ο πίνακας $A\in K^{nxn}$, όπου $K=\mathbb{R}$ ή $K=\mathbb{C}$ διαγωνοποιείται, $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$ είναι οι ιδιοτιμές του και $v_1,v_2,...,v_n$ είναι τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματά του, που αποτελούν βάση του χώρου $K^n$, τότε ο **πίνακας μετάβασης** $P$ είναι ο

$P=\begin{bmatrix}v_{11} & v_{21} & \dots & v_{n1}\\ v_{12} & v_{22} & \dots & v_{n2}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ v_{1n} & v_{2n} & \dots & v_{nn}\end{bmatrix}$, όπου $v_i=\begin{bmatrix}v_{i1}\\ v_{i2}\\ \vdots\\ v_{in}\end{bmatrix}$, $i=1,2,...,n$.

Επίσης ισχύει $P^{-1} \cdot A \cdot P = B$, όπου $B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$.

***Παράδειγμα 1***

Είδαμε ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα $A = \begin{bmatrix} -6 & 31 & 75 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3x3}$ είναι το $p(\lambda) = -(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)$, ιδιοτιμές του είναι οι αριθμοί $\lambda_1 = -3,\ \lambda_2 = -2,\ \lambda_3 = -1$ οι οποίοι ανήκουν στο σώμα $\mathbb{R}$ και για όλες είναι ίσες, η αλγεβρική και η γεωμετρική πολλαπλότητα. Άρα ο πίνακας αυτός διαγωνοποιείται.

Επίσης είδαμε ότι $v_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ -9 \\ 4 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix}$ και $v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$ είναι τρία ιδιοδιανύσματά του που αντιστοιχούν στις τρεις παραπάνω ιδιοτιμές του. Προφανώς είναι γραμμικά ανεξάρτητα και συνεπώς αποτελούν βάση του χώρου $\mathbb{R}^3$, συνεπώς ο πίνακας μετάβασης $P$ είναι ο $P = \begin{bmatrix} 7 & 2 & -1 \\ -9 & -7 & -5 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ και ισχύει $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

***Παράδειγμα 2***

Είδαμε ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 6 & 4 & -3 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ είναι το

$p(\lambda) = -(\lambda-1)(\lambda-4)^2$, ιδιοτιμές του είναι οι αριθμοί $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 4$ (διπλή) οι οποίοι ανήκουν στο σώμα $\mathbb{R}$ και για όλες είναι ίσες, η αλγεβρική και η γεωμετρική πολλαπλότητα. Άρα ο πίνακας αυτός διαγωνοποιείται.

Επίσης είδαμε ότι $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ και $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ είναι τρία ιδιοδιανύσματά του

που αντιστοιχούν στις παραπάνω ιδιοτιμές του. Προφανώς είναι γραμμικά ανεξάρτητα και συνεπώς αποτελούν βάση του χώρου $\mathbb{R}^3$, συνεπώς ο πίνακας μετάβασης $P$ είναι ο $P=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 3 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 0\end{bmatrix}$ και ισχύει $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}$.

***Παράδειγμα 3***

Είδαμε ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{bmatrix}$ είναι το

$p(\lambda)=(\lambda+2)(\lambda-2)^3$ και ιδιοτιμές του είναι οι αριθμοί $\lambda_1=-2,\ \lambda_2=2$ (τριπλή).
Όλες οι ιδιοτιμές ανήκουν στο σώμα $\mathbb{R}$ και για όλες είναι ίσες, η αλγεβρική και η γεωμετρική πολλαπλότητα. Άρα ο πίνακας αυτός διαγωνοποιείται.
Επίσης είδαμε ότι

το $v_1=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του πίνακα $A$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή

$\lambda_1=-2$ και

τα διανύσματα $v_2=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$, $v_3=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$ και $v_4=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$ είναι τρία γραμμικά ανεξάρτητα

ιδιοδιάνυσμα του πίνακα $A$ που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda_2=2$.
Προφανώς τα παραπάνω διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα και συνεπώς αποτελούν βάση του χώρου $\mathbb{R}^4$, συνεπώς ο πίνακας μετάβασης $P$ είναι ο

$P=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$ ο οποίος είναι αντιστρέψιμος, με αντίστροφο τον πίνακα

$P^{-1}=\begin{bmatrix}-1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4\\ 1/4 & -1/4 & -1/4 & 3/4\\ 1/4 & -1/4 & 3/4 & -1/4\\ 1/4 & 3/4 & -1/4 & -1/4\end{bmatrix}$ και ισχύει $P^{-1}\cdot A\cdot P=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$.

## 1.11 ΟΡΙΣΜΟΣ

Ένας πίνακας $A \in K^{nxn}$ ονομάζεται **ελλιπής**, αν υπάρχει ιδιοτιμή του $\lambda_i$ για την οποία ισχύει $m_i < n_i$, δηλαδή η γεωμετρική της πολλαπλότητα είναι μικρότερη της αλγεβρικής της πολλαπλότητας.

***Παράδειγμα***

Είδαμε ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -6 & 0 \\ 4 & 6 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & -6 & 2 \end{bmatrix}$ είναι το

$p(\lambda) = (\lambda - 2)^2 (\lambda - 4)(\lambda - 6)$ και ιδιοτιμές του είναι οι αριθμοί $\lambda_1 = 2$ (διπλή), $\lambda_2 = 4$ και $\lambda_3 = 6$.

Η ιδιοτιμή $\lambda_1 = 2$ έχει αλγεβρική πολλαπλότητα $n_1 = 2$ και γεωμετρική πολλαπλότητα $m_1 = 1$, συνεπώς είναι $m_1 < n_1$ άρα ο πίνακας αυτός είναι ελλιπής

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

## ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΥ ΤΟΥ ΠΙΝΑΚΑ $e^{At}$

Υπάρχει ευρύς ποικιλία μεθόδων για τον υπολογισμό του εκθετικού πίνακα $e^A$ . Μερικές από αυτές είναι :

- Η μέθοδος των ***«Ιδιοτιμών»***.
- Η μέθοδος των ***«Σειρών»*** .
- Η μέθοδος της ***«Παραγοντοποίησης Πίνακα», κλπ***

### 2.1 ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΙΔΙΟΤΙΜΩΝ

Έστω ο τετραγωνικός nxn πίνακας $A$ και $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ οι ιδιοτιμές του, πραγματικές ή μιγαδικές, απλές ή πολλαπλές. Θεωρώ την συνάρτηση $f(x) = e^x$ .

**Διακρίνω τις περιπτώσεις**

**Ι)** *Οι ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ του πίνακα $A$ έχουν όλες αλγεβρική πολλαπλότητα 1.*
Στην περίπτωση αυτή υπολογίζω τους αριθμούς $f(\lambda_1), f(\lambda_2), ..., f(\lambda_n)$ ,όπου $f(x) = e^x$ και έστω $g(x)$ το πολυώνυμο παρεμβολής για τα σημεία $(\lambda_1, f(\lambda_1)), (\lambda_2 f(\lambda_2)), ..., (\lambda_\nu, f(\lambda_n))$, δηλαδή το $g(\lambda)$ είναι το μικρότερου δυνατού βαθμού πολυώνυμο που διέρχεται από τα σημεία αυτά.
Το πολυώνυμο $g(\lambda)$ μπορεί να βρεθεί με μια από τις γνωστές μεθόδους αριθμητικής παρεμβολής της Αριθμητικής Ανάλυσης (μέθοδος ορίζουσας, μέθοδος Lagrange, μέθοδος διαιρεμένων διαφορών, Hermite , κλπ).
Αφού προσδιοριστεί το πολυώνυμο $g(\lambda)$ , είναι $e^A = g(A)$ .

***Παράδειγμα 1***

Έστω ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα Α είναι $p(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1$, συνεπώς οι ιδιοτιμές του πίνακα Α είναι $\lambda_1 = i$ και $\lambda_2 = -i$ .

Θεωρώ την συνάρτηση $f(x)=e^x$, είναι $f(\lambda_1)=f(i)=e^i=\cos 1+i\sin 1$ και $f(\lambda_2)=f(-i)=e^{-i}=\cos 1-i\sin 1$.

Βρίσκω με την μέθοδο παρεμβολής του Lagrange το πολυώνυμο παρεμβολής για τα σημεία $\left(\lambda_1, f(\lambda_1)\right),\left(\lambda_2 f(\lambda_2)\right)$.

Είναι $L_1(\lambda)=\dfrac{\lambda-\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}=\dfrac{\lambda+i}{2i}$ και $L_2(\lambda)=\dfrac{\lambda-\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}=\dfrac{\lambda-i}{-2i}$, οπότε είναι $g(\lambda)=L_1(\lambda)f(\lambda_1)+L_2(\lambda)f(\lambda_2)=\lambda\sin 1+\cos 1$. Τελικά είναι $e^A=g(A)=A\sin 1+I_2\cos 1=\begin{bmatrix}\cos 1 & \sin 1\\ -\sin 1 & \cos 1\end{bmatrix}$.

***Παράδειγμα 2***

Έστω ο πίνακας $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$ τότε είναι $At=\begin{bmatrix}0 & t\\ -t & 0\end{bmatrix}$. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα $At$ είναι $p(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda & -t\\ t & \lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+t^2$, συνεπώς οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι $\lambda_1=it$ και $\lambda_2=-it$.

Θεωρώ την συνάρτηση $f(x)=e^x$, είναι $f(\lambda_1)=f(it)=e^{it}=\cos t+i\sin t$ και $f(\lambda_2)=f(-it)=e^{-it}=\cos t-i\sin t$.

Βρίσκω με την μέθοδο παρεμβολής του Lagrange το πολυώνυμο παρεμβολής για τα σημεία $\left(\lambda_1, f(\lambda_1)\right),\left(\lambda_2 f(\lambda_2)\right)$.

Είναι $L_1(\lambda)=\dfrac{\lambda-\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}=\dfrac{\lambda+it}{2it}$ και $L_2(\lambda)=\dfrac{\lambda-\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}=\dfrac{\lambda-it}{-2it}$, οπότε είναι $g(\lambda)=L_1(\lambda)f(\lambda_1)+L_2(\lambda)f(\lambda_2)=\lambda\dfrac{\sin t}{t}+\cos t$.

Τελικά είναι

$$e^{At}=g(At)=At\frac{\sin t}{t}+I_2\cos t=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\sin t+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\cos t=\begin{bmatrix}\cos t & \sin t\\ -\sin t & \cos t\end{bmatrix}.$$

***Παράδειγμα 3***

Έστω ο πίνακας $A=\begin{bmatrix}a & b\\ -b & a\end{bmatrix}$. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα $A$ είναι $p(\lambda)=\begin{vmatrix}a-\lambda & b\\ -b & a-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-2a\lambda+(a^2+b^2)$, συνεπώς οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι $\lambda_1=a+bi$ και $\lambda_2=a-bi$.

Θεωρώ την συνάρτηση $f(x)=e^x$, είναι $f(\lambda_1)=f(a+bi)=e^{a+bi}=e^a(\cos b+i\sin b)$ και $f(\lambda_2)=f(a-bi)=e^{a-bi}=e^a(\cos b-i\sin b)$.

Βρίσκω με την μέθοδο παρεμβολής του Lagrange το πολυώνυμο παρεμβολής για τα σημεία $\left(\lambda_1, f(\lambda_1)\right),\left(\lambda_2 f(\lambda_2)\right)$.

Είναι $L_1(\lambda)=\dfrac{\lambda-\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}=\dfrac{\lambda-(a-bi)}{2bi}$ και $L_2(\lambda)=\dfrac{\lambda-\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}=\dfrac{\lambda-(a+bi)}{-2bi}$, οπότε είναι $g(\lambda)=L_1(\lambda)f(\lambda_1)+L_2(\lambda)f(\lambda_2)$ και μετά τις πράξεις προκύπτει ότι $g(\lambda)=\dfrac{e^a\sin b}{b}x+\dfrac{e^a(b\cos b-a\sin b)}{b}$.

Τελικά είναι $e^A=g(A)=\begin{bmatrix} e^a\cos b & e^a\sin b \\ -e^a\sin b & e^a\cos b \end{bmatrix}$.

**II)** *Τουλάχιστον μια από τις ιδιοτιμές $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$ του πίνακα $A$ έχει αλγεβρική πολλαπλότητα μεγαλύτερη του 1.*

Κάθε ιδιοτιμή $\lambda_i$ με αλγεβρικό βαθμό πολλαπλότητας $n_i$ μας δίνει το «σημείο» $\left(\lambda_i,\{f(\lambda_i),f^{(1)}(\lambda_i),...,f^{(n_i-1)}(\lambda_i)\}\right)$.

Εφαρμόζοντας την μέθοδο παρεμβολής του Hermite στα σημεία που προκύπτουν προσδιορίζω το πολυώνυμο παρεμβολής $g(\lambda)$.

Αφού προσδιοριστεί του πολυώνυμο $g(\lambda)$, είναι $e^A=g(A)$.

***Παράδειγμα 1***

Έστω ο πίνακας $A=\begin{bmatrix} 1 & 9 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}$. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A είναι $p(\lambda)=\begin{vmatrix} \lambda-1 & -9 \\ 1 & \lambda+5 \end{vmatrix}=\lambda^2+4\lambda+4=(\lambda+2)^2$, συνεπώς οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι $\lambda_1=-2$ και $\lambda_2=-2$ (διπλή ρίζα το -2).

Θεωρώ την συνάρτηση $f(x)=e^x$, είναι $f'(x)=e^x$ και $f(-2)=e^{-2}$ και $f'(-2)=e^{-2}$.

Βρίσκω με την μέθοδο των διαιρεμένων διαφορών του Hermite το πολυώνυμο παρεμβολής για το σημείο $\left(-2,\{f(-2),f'(-2)\}\right)$.

Είναι $g(\lambda)=e^{-2}(\lambda+3)$. Τελικά είναι $e^A=g(A)=e^{-2}(A+I_2)=e^{-2}\begin{bmatrix} 2 & 9 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2e^{-2} & 9e^{-2} \\ -e^{-2} & -4e^{-2} \end{bmatrix}$.

***Παράδειγμα 2***

Έστω ο πίνακας $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, τότε είναι $At=\begin{bmatrix} 0 & t \\ -t & 2t \end{bmatrix}$. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα $At$ είναι $p(\lambda)=\begin{vmatrix} \lambda & -t \\ t & \lambda-2t \end{vmatrix}=\left(\lambda-t\right)^2$, συνεπώς οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι $\lambda_1=t$ και $\lambda_2=t$ (t διπλή).

Θεωρώ την συνάρτηση $f(x)=e^x$, είναι $f'(x)=e^x$ και $f(t)=e^t$ και $f'(t)=e^t$.

Βρίσκω με την μέθοδο των διαιρεμένων διαφορών του Hermite το πολυώνυμο παρεμβολής $g(\lambda)$ για το «σημείο» $\left(t,\{f(t),f'(t)\}\right)$.

Είναι $g(\lambda) = e^t(\lambda + 1 - t)$. Τελικά είναι $e^{At} = g(At) = e^t(A + (1-t)I_2) = e^t \begin{bmatrix} 1-t & 1 \\ -1 & 3-t \end{bmatrix}$.

## 2.2 ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΣΕΙΡΩΝ

Αν $A \in M^{nxn}$ τότε ο εκθετικός πίνακας $e^A \in M^{nxn}$ ορίζεται από την δυναμοσειρά πίνακα : $e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = I_n + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \cdots + \frac{A^k}{k!} + \cdots$
η οποία συγκλίνει για κάθε πίνακα $A$.

Ο $e^A$ έχει τις εξής ιδιότητες:
i) Για κάθε $t, s \in M$ είναι $e^{A(t+s)} = e^{At} \cdot e^{As}$

ii) Ο πίνακας $e^A$ είναι ομαλός, δηλαδή είναι αντιστρέψιμος και ισχύει $\left(e^A\right)^{-1} = e^{-A}$

iii) Ο $e^{At}$ είναι παραγωγίσιμος και ισχύει $\frac{d}{dt}\left(e^{At}\right) = A \cdot e^{At} = e^{At} \cdot A$.

iv) Αν για τους πίνακες $A, B \in M^{nxn}$ ισχύει $A \cdot B = B \cdot A$ (δηλαδή οι πίνακες αντιμετατίθενται) τότε ισχύει $e^{A+B} = e^A \cdot e^B$.

v) Αν ο πίνακας $A \in M^{nxn}$ είναι μηδενοδύναμος (Nilpotent Matrix) δηλαδή ισχύει $A^p = 0$, τότε είναι $e^A = I_n + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \cdots + \frac{A^{p-1}}{(p-1)!}$.

vi) Αν ο πίνακας $A$ είναι διαγώνιος, δηλαδή είναι $A = \begin{bmatrix} x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_n \end{bmatrix}$, τότε από

τον ορισμό του πίνακα $e^A$ προκύπτει ότι $e^A = \begin{bmatrix} e^{x_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{x_2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{x_n} \end{bmatrix}$.

vii) Αν ο πίνακας $A \in M^{nxn}$, έχει την μορφή $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

τότε ισχύει $A^n = 0$ (ο Α είναι μηδενοδύναμος) άρα $e^A = I_n + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \cdots + \frac{A^{n-1}}{(n-1)!}$ και μετά τις πράξεις προκύπτει ότι

$$e^A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2!} & \frac{1}{3!} & \cdots & \frac{1}{(n-4)!} & \frac{1}{(n-3)!} & \frac{1}{(n-2)!} & \frac{1}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2!} & \cdots & \frac{1}{(n-5)!} & \frac{1}{(n-4)!} & \frac{1}{(n-3)!} & \frac{1}{(n-2)!} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & \frac{1}{(n-6)!} & \frac{1}{(n-5)!} & \frac{1}{(n-4)!} & \frac{1}{(n-3)!} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & \frac{1}{(n-7)!} & \frac{1}{(n-6)!} & \frac{1}{(n-5)!} & \frac{1}{(n-4)!} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & \frac{1}{2!} & \frac{1}{3!} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2!} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

viii) Αν $A, S, B \in M^{nxn}$ και ο $S$ είναι αντιστρέψιμος και ισχύει $A = S \cdot B \cdot S^{-1}$ τότε είναι $e^A = S \cdot e^B \cdot S^{-1}$.

vii) Αν ο $nxn$ πίνακας $A$ έχει την μορφή $A = \begin{bmatrix} x & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{bmatrix}$ τότε θέτω

$$A_1 = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{bmatrix} \text{ και } A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ισχύουν οι ιδιότητες

Α) $A_1 \cdot A_2 = A_2 \cdot A_1$ και $A = A_1 + A_2$.

Β) $e^A = e^{A_1 + A_2} = e^{A_1} \cdot e^{A_2}$, όπου $e^{A_1} = \begin{bmatrix} e^x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^x & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^x \end{bmatrix}$ και

$$e^{A_2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2!} & \frac{1}{3!} & \cdots & \frac{1}{(n-4)!} & \frac{1}{(n-3)!} & \frac{1}{(n-2)!} & \frac{1}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2!} & \cdots & \frac{1}{(n-5)!} & \frac{1}{(n-4)!} & \frac{1}{(n-3)!} & \frac{1}{(n-2)!} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & \frac{1}{(n-6)!} & \frac{1}{(n-5)!} & \frac{1}{(n-4)!} & \frac{1}{(n-3)!} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & \frac{1}{(n-7)!} & \frac{1}{(n-6)!} & \frac{1}{(n-5)!} & \frac{1}{(n-4)!} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & \frac{1}{2!} & \frac{1}{3!} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2!} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

άρα τελικά από την ισότητα $e^A = e^{A_1} \cdot e^{A_2}$ προκύπτει ότι

$$e^A = \begin{bmatrix} e^x & e^x & \frac{e^x}{2!} & \frac{e^x}{3!} & \cdots & \frac{e^x}{(n-4)!} & \frac{e^x}{(n-3)!} & \frac{e^x}{(n-2)!} & \frac{e^x}{(n-1)!} \\ 0 & e^x & e^x & \frac{e^x}{2!} & \cdots & \frac{e^x}{(n-5)!} & \frac{e^x}{(n-4)!} & \frac{e^x}{(n-3)!} & \frac{e^x}{(n-2)!} \\ 0 & 0 & e^x & e^x & \cdots & \frac{e^x}{(n-6)!} & \frac{e^x}{(n-5)!} & \frac{e^x}{(n-4)!} & \frac{e^x}{(n-3)!} \\ 0 & 0 & 0 & e^x & \cdots & \frac{e^x}{(n-7)!} & \frac{e^x}{(n-6)!} & \frac{e^x}{(n-5)!} & \frac{e^x}{(n-4)!} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & e^x & e^x & \frac{e^x}{2!} & \frac{e^x}{3!} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & e^x & e^x & \frac{e^x}{2!} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & e^x & e^x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & e^x \end{bmatrix}$$

ή

$$e^A = e^x \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2!} & \frac{1}{3!} & \cdots & \frac{1}{(n-4)!} & \frac{1}{(n-3)!} & \frac{1}{(n-2)!} & \frac{1}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2!} & \cdots & \frac{1}{(n-5)!} & \frac{1}{(n-4)!} & \frac{1}{(n-3)!} & \frac{1}{(n-2)!} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & \frac{1}{(n-6)!} & \frac{1}{(n-5)!} & \frac{1}{(n-4)!} & \frac{1}{(n-3)!} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & \frac{1}{(n-7)!} & \frac{1}{(n-6)!} & \frac{1}{(n-5)!} & \frac{1}{(n-4)!} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & \frac{1}{2!} & \frac{1}{3!} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2!} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

***Παράδειγμα 1***

Έστω ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix}$. Να βρεθεί ο πίνακας $e^A$.

**Απάντηση**

Θέτω $A_1 = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix}$, τότε είναι $e^{A_1} = \begin{bmatrix} e^x & 0 & 0 \\ 0 & e^x & 0 \\ 0 & 0 & e^x \end{bmatrix}$.

Επίσης θέτω $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Προφανώς είναι $A_2^{\,2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ και

$A_2^{\,3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$.

Συνεπώς $e^{A_2} = I_3 + \frac{1}{1!}A + \frac{1}{2!}A^2$ και μετά τις πράξεις παίρνω $e^{A_2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Έχω $A = A_1 + A_2$ με $A_1 \cdot A_2 = A_2 \cdot A_1$ επομένως σύμφωνα με γνωστή ιδιότητα θα ισχύει

$e^A = e^{A_1} \cdot e^{A_2}$ και μετά τις πράξεις $e^A = \begin{bmatrix} e^x & e^x & e^x/2 \\ 0 & e^x & e^x \\ 0 & 0 & e^x \end{bmatrix}$.

***Παράδειγμα 2***

Έστω ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 0 & x & z \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Να δειχθεί ότι είναι μηδενοδύναμος και να βρεθεί ο πίνακας $e^A$.

**Απάντηση**

Είναι $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & xy \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ και $A^3 = 0$, άρα ο πίνακας $A$ είναι μηδενοδύναμος.

Είναι $e^A = I_3 + A + \frac{1}{2}A^2$ και αντικαθιστώντας τους πίνακες προκύπτει

$$e^A = \begin{bmatrix} 1 & x & z + xy/2 \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

***Παράδειγμα 3***

Έστω ο πίνακας $A=\begin{bmatrix}1 & x & z\\ 0 & 1 & y\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$. Να βρεθεί ο πίνακας $e^A$.

**Απάντηση**

Θέτω $A_1=\begin{bmatrix}0 & x & z\\ 0 & 0 & y\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$, τότε έχω $A=I_3+A_1$ με $I_3\cdot A_1=A_1\cdot I_3$.

Σύμφωνα με γνωστή ιδιότητα θα ισχύει $e^A=e^{I_3}\cdot e^{A_1}$.

Αλλά είναι $e^{I_3}=\begin{bmatrix}e & 0 & 0\\ 0 & e & 0\\ 0 & 0 & e\end{bmatrix}$ και $e^{A_1}=\begin{bmatrix}1 & x & \frac{xy}{2}+z\\ 0 & 1 & y\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ άρα

$$e^A=\begin{bmatrix}e & 0 & 0\\ 0 & e & 0\\ 0 & 0 & e\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & x & \frac{xy}{2}+z\\ 0 & 1 & y\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e & ex & e(\frac{xy}{2}+z)\\ 0 & e & ey\\ 0 & 0 & e\end{bmatrix},$$

τελικά $e^A=e\begin{bmatrix}1 & x & \frac{xy}{2}+z\\ 0 & 1 & y\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

## 2.3 ΜΕΘΟΔΟΙ ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗΣ ΠΙΝΑΚΑ

Η βασική ιδέα της μεθόδου αυτής είναι να μετατρέψει τον πίνακα $A$ σε κανονική μορφή $R$, ώστε ο $e^R$ να μπορεί εύκολα να υπολογιστεί. Στη συνέχεια μπορούμε να υπολογίσουμε τον πίνακα $e^A$ μέσω του $e^R$. Συγκεκριμένα αν ο πίνακας $X$ είναι ο πίνακας μετασχηματισμού θα ισχύει: $X^{-1}AX = R$, τότε $e^A = Xe^R X^{-1}$ .
Υπάρχουν πολλές μέθοδοι παραγοντοποίησης πίνακα . Οι σημαντικότερες είναι

- **Jordan παραγοντοποίηση (Jordan Decomposition)**
- **LU παραγοντοποίηση (LU Decomposition)**
- **Hessenberg παραγοντοποίηση (Hessenberg Decomposition)**
- **Schur παραγοντοποίηση (Schur Decomposition)**

Θα παρουσιάσω στο επόμενο κεφάλαιο την σημαντικότερη από αυτές, την μέθοδο Jordan .
Ακολουθεί μια σύντομη παρουσίαση των υπόλοιπων μεθόδων παραγοντοποίησης τετραγωνικού πίνακα.

### 2.3.1 LU παραγοντοποίηση πίνακα

Αν $A$ είναι ένας $nxn$ πίνακας, τότε υπάρχουν, ένας τριγωνικός κάτω $nxn$ πίνακας

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix}$$ και ένας τριγωνικός άνω $nxn$ πίνακας

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix}$$ τέτοιοι ώστε $L \cdot U = A$

Από την ισότητα $L \cdot U = A$ προκύπτουν $n^2$ εξισώσεις με αγνώστους τους $n^2 + n$ συντελεστές των δύο πινάκων $L$ και $U$ .
Συνεπώς το σύστημα δεν έχει μοναδική λύση, συνεπώς η ανάλυση δεν είναι μοναδική, δηλαδή οι πίνακες $L$ και $U$ δεν είναι μοναδικοί.

***Παράδειγμα 1***

Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -6 & 0 \\ 4 & 6 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & -6 & 2 \end{bmatrix}$ τότε υπάρχουν,

ο τριγωνικός κάτω $4x4$ πίνακας $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

και ο τριγωνικός άνω $4x4$ πίνακας $U = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -6 & 0 \\ 0 & -2 & 9 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$

για τους οποίους ισχύει $L \cdot U = A$.

***Παράδειγμα 2***

Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ τότε υπάρχουν,

ο τριγωνικός κάτω $4x4$ πίνακας $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

και ο τριγωνικός άνω $4x4$ πίνακας $U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

για τους οποίους ισχύει $L \cdot U = A$.

## 2.3.2 Hessenberg παραγοντοποίηση πίνακα

**2.1 ΟΡΙΣΜΟΣ**

Ένας τετραγωνικός πίνακας $U$ λέγεται **ορθοκανονικός** (unitary) αν ισχύει $U^* = U^{-1}$ ή ισοδύναμα $U^* \cdot U = U \cdot U^* = I_n$, όπου με $U^*$ συμβολίζουμε **τον ανάστροφο του συζυγή** (conjugate transpose) του πίνακα $U$ και με $U^{-1}$ τον αντίστροφο του.

**2.2 ΟΡΙΣΜΟΣ**

Ένας τετραγωνικός πίνακας $A$ λέγεται πίνακας **Hessenberg** αν έχει την μορφή

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots & a_{1,n-2} & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots & a_{2,n-2} & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdots & a_{3,n-2} & a_{3,n-1} & a_{3,n} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} & \cdots & a_{4,n-2} & a_{4,n-1} & a_{4,n} \\ 0 & 0 & 0 & a_{54} & \cdots & a_{5,n-2} & a_{5,n-1} & a_{5,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n-2} & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

Αν $A$ είναι ένας *nxn* πίνακας, τότε υπάρχουν, ένας ορθοκανονικός (unitary) *nxn* πίνακας $P$ και ένας Hessenberg πίνακας $H$ τέτοιοι ώστε $P \cdot H \cdot P^* = A$, όπου με $P^*$ συμβολίζουμε τον ανάστροφο του συζυγή (conjugate transpose) του πίνακα $P$.

***Παράδειγμα 1***

Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{bmatrix}$ τότε υπάρχουν,

ο ορθοκανονικός (unitary) $4x4$ πίνακας

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5774 & 0.7746 & 0.1826 - 0.1826i \\ 0 & -0.5774 & -0.6109 & 0.3831 - 0.3831i \\ 0 & -0.5774 & -0.1637 & -0.5656 + 0.5656i \end{bmatrix}$$

και ο Hessenberg $4x4$ πίνακας $U = \begin{bmatrix} 1 & -1.7321 & 0 & 0 \\ -1.7321 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.1196+0.8804i & 1.4041i \\ 0 & 0 & -1.4041 & 0.8804+1.1196i \end{bmatrix}$

για τους οποίους ισχύει $P \cdot H \cdot P^{*} = A$.

***Παράδειγμα 2***

Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ τότε υπάρχουν,

ο ορθοκανονικός (unitary) $4x4$ πίνακας

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5774 & 0.8165 & 0 \\ 0 & -0.5774 & -0.4082 & -0.7071 \\ 0 & -0.5774 & -0.4082 & 0.7071 \end{bmatrix}$$

και ο Hessenberg $4x4$ πίνακας $U = \begin{bmatrix} 1 & -1.7321 & 0 & 0 \\ -1.7321 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

για τους οποίους ισχύει $P \cdot H \cdot P^{*} = A$.

***Παράδειγμα 3***

Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -5 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ τότε υπάρχουν,

ο ορθοκανονικός (unitary) $3x3$ πίνακας

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.1961 & -0.9806 \\ 0 & -0.9806 & 0.1961 \end{bmatrix}$$

και ο Hessenberg $3x3$ πίνακας $U = \begin{bmatrix} -4 & -2.7456 & -3.5301 \\ 5.0990 & 3.8846 & 3.4231 \\ 0 & 0.4231 & 0.1154 \end{bmatrix}$

για τους οποίους ισχύει $P \cdot H \cdot P^* = A$ .

## 2.3.3 Schur παραγοντοποίηση πίνακα

Αν $A$ είναι ένας $nxn$ πίνακας, τότε η Schur παραγοντοποίηση του πίνακα αυτού έχει την μορφή $Q^* \cdot A \cdot Q = T$ ,
όπου
$Q$ είναι ένας ορθοκανονικός (unitary) πίνακας $nxn$, $Q^*$ είναι ο ανάστροφος του συζυγή του (conjugate transpose), και $T$ είναι ένας τριγωνικός άνω πίνακας της μορφής

$$T = \begin{bmatrix} \lambda_1 & b_{12} & \cdots & b_{1,n-1} & b_{1,n} \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & b_{2,n-1} & b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n-1} & b_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

ο οποίος έχει στην κύρια διαγώνιό του τις ιδιοτιμές του πίνακα $A$ .
Προφανώς η παραπάνω σχέση γράφεται και ως $A = Q \cdot T \cdot Q^*$ .

***Παράδειγμα 1***

Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -6 & 0 \\ 4 & 6 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 4 & -6 & 2 \end{bmatrix}$ .

Οι ιδιοτιμές του πίνακα αυτού είναι οι αριθμοί 6, 4, 2, 2.
Υπάρχουν, ο ορθοκανονικός (unitary) $4x4$ πίνακας

$$Q = \begin{bmatrix} 0.5774 & -0.4082 & -0.7071 & 0 \\ 0.5774 & 0.8165 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.5774 & -0.4082 & 0.7071 & 0 \end{bmatrix}$$

και ο $4x4$ τριγωνικός άνω πίνακας $T = \begin{bmatrix} 6 & 5.6569 & -3.2660 & -8.6603 \\ 0 & 2 & -4.6188 & 2.4495 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

για τους οποίους ισχύει $A = Q \cdot T \cdot Q^*$.

***Παράδειγμα 2***

Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Οι ιδιοτιμές του πίνακα αυτού είναι οι αριθμοί -2, 2, 2, 2.
Υπάρχουν, ο ορθοκανονικός (unitary) $4x4$ πίνακας

$$Q = \begin{bmatrix} 0.8660 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.2887 & -0.5 & 0.8165 & 0 \\ 0.2887 & -0.5 & -0.4082 & -0.7071 \\ 0.2887 & -0.5 & -0.4082 & 0.7071 \end{bmatrix}$$

και ο $4x4$ πίνακας $T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

για τους οποίους ισχύει $A = Q \cdot T \cdot Q^*$.

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

## JORDAN ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΠΙΝΑΚΑ

Η Jordan κανονική μορφή ενός $n \times n$ πίνακα $A$ είναι ένας διαγώνιος κατά μπλοκ πίνακας.
Έστω $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ $(1 \le k \le n)$ είναι οι διαφορετικές μεταξύ τους ιδιοτιμές του πίνακα $A$ και $n_1, n_2, \ldots, n_k$ είναι οι αλγεβρικές τους πολλαπλότητες.
Αν συμβολίσουμε με $J_i$ το Jordan block που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_i$ τότε αυτό είναι ένας $n_i x n_i$ πίνακας ο οποίος ορίζεται ως εξής

**Διακρίνω τις περιπτώσεις**

**1)** $A \in R^{nxn}$ τότε υπάρχουν οι εξής υποπεριπτώσεις

Α) Αν η ιδιοτιμή $\lambda_i$ είναι πραγματικός αριθμός και έχει την ίδια αλγεβρική και γεωμετρική πολλαπλότητα ($n_i = m_i$) τότε είναι $J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_i \end{bmatrix}$.

Β) Αν ιδιοτιμή $\lambda_i$ είναι πραγματική και έχει διαφορετική αλγεβρική και γεωμετρική πολλαπλότητα ($n_i \neq m_i$) τότε το $J_i$ έχει την μορφή

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & \delta_{i1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & \delta_{i2} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i & \delta_{i,n_i-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}, \text{ όπου } \delta_{ij} = 0 \text{ ή } 1.$$

Ειδικότερα το Jordan block $J_i$ σχηματίζεται από $m_i$ υπο-block τα οποία έχουν είτε την μορφή $\begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & & \\ 0 & 0 & \lambda_i & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}$ αν έχουν διάσταση μεγαλύτερη του 1, (η διάστασή

τους καθορίζεται από την πτώση των τάξεων των πινάκων $(A-\lambda_i I_n)^s$, όπου $s=1,2,3,...$), είτε την μορφή $[\lambda_i]$ αν έχουν διάσταση 1.

Γ) Αν η ιδιοτιμή $\lambda_i$ είναι μιγαδικός αριθμός τότε και ο $\overline{\lambda_i}$ είναι επίσης ιδιοτιμή του πίνακα και αν $\lambda_i = a+bi$ τότε οι δύο συζυγείς ιδιοτιμές $\lambda_i, \overline{\lambda_i}$ μας δίνουν το Jordan block $J_i = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$.

2) $A \in C^{nxn}$ τότε υπάρχουν μόνο οι περιπτώσεις Α και Β που είδαμε στην περίπτωση 1 που ο πίνακας έχε πραγματικά στοιχεία.

Σε όλες τις περιπτώσεις η Jordan μορφή του πίνακα $A$ είναι $J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_k \end{bmatrix}$.

## 3.1 ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΗΣ JORDAN ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

Για κάθε πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, υπάρχει ένας αντιστρέψιμος πίνακας $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ τέτοιος ώστε: $X^{-1}AX = J$.
Αν ο πίνακας $A$ διαγωνοποιείται τότε $X = P$, όπου $P$ ο πίνακας μετάβασης.
Αν ο πίνακας $A$ δεν διαγωνοποιείται, δηλαδή είναι ελλιπής, τότε $X = L$, όπου $L$ ο πίνακας μετασχηματισμού.

## 3.2 ΑΛΥΣΙΔΕΣ JORDAN

Στην περίπτωση ελλιπούς πίνακα $A \in K^{nxn}$, τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές του, δεν είναι αρκετά για να αποτελέσουν βάση του χώρου $K^n$.
Ας συμβολίσουμε με $s$ το πλήθος των ιδιοδιανυσμάτων που προέκυψαν από την ιδιοτιμή $\lambda_i$ του πίνακα της οποίας η αλγεβρική πολλαπλότητα είναι ίση με την γεωμετρική.
Προφανώς είναι $s<n$ και συνεπώς τα $s$ αυτά ιδιοδιανύσματα δεν αποτελούν βάση του χώρου $K^n$.

Έστω ότι $\psi(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{h_1}(\lambda-\lambda_2)^{h_2}...(\lambda-\lambda_k)^{h_k}$ είναι το ελάχιστο πολυώνυμο του τετραγωνικού πίνακα $A\in K^{nxn}$.

**3.2.1 ΟΡΙΣΜΟΣ**

Ονομάζεται **αλυσίδα Jordan μήκους s** που αντιστοιχεί στον στοιχειώδη διαιρέτη $(\lambda-\lambda_i)^{h_i}$ του τετραγωνικού πίνακα $A\in K^{nxn}$ κάθε σύνολο s ($s\le h_i$) διανυσμάτων του χώρου $K^n$ που επαληθεύουν τις σχέσεις

$(A-\lambda_i I)^s u_s=0$ και $(A-\lambda_i I)^{s-1}u_s\neq 0$,
$u_{s-1}=(A-\lambda_i I)^{s-1}u_s$,
$u_{s-2}=(A-\lambda_i I)^{s-2}u_{s-1}$,
………………………..
$u_1=(A-\lambda_i I)^1 u_2$

Αποδεικνύεται ότι τα διανύσματα κάθε αλυσίδας Jordan είναι γραμμικά ανεξάρτητα μεταξύ τους.

**ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ**

Αν η ιδιοτιμή $\lambda_i$ έχει γεωμετρική πολλαπλότητα $m_i$ ($m_i<n_i$) τότε δημιουργούμε $m_i$ αλυσίδες Jordan των οποίων το άθροισμα των μηκών τους είναι $n_i$ και τα διανύσματα που προκύπτουν από αυτές είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Τότε τα διανύσματα αυτά αποτελουν βάση του ιδιόχωρου της ιδιοτιμής $\lambda_i$ και καλύπτουν $n_i$ στήλες στον πίνακα μετασχηματισμού $L$.

***Παράδειγμα 1***

Να δειχθεί ότι ο πίνακας $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 0\\ 2 & -2 & 0\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times 3}$, διαγωνοποιείται και να βρεθούν η Jordan μορφή του πίνακα καθώς και ο πίνακας μετάβασης.

**Απάντηση**

Αρχικά θα υπολογίσω το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο του πίνακα $A$. Είναι

$$p(\lambda)=\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}1-\lambda & 2 & -1\\ 1 & -1-\lambda & 0\\ 2 & -2 & -\lambda\end{vmatrix}=$$

$$=(1-\lambda)\begin{vmatrix}-1-\lambda & 0\\ -2 & -\lambda\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & -\lambda\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}1 & -1-\lambda\\ 2 & -2\end{vmatrix}=$$

$$=(1-\lambda)(-1-\lambda)(-\lambda)-2(-\lambda)-\left[-2-2(-1-\lambda)\right]=$$

$$=\lambda-\lambda^3=\lambda(1-\lambda)(1+\lambda)$$

Άρα οι ιδιοτιμές του πίνακα $A$ είναι $p(\lambda)=0 \Leftrightarrow \lambda(1-\lambda)(1+\lambda)=0$ $\Leftrightarrow \lambda=0,\lambda=1,\lambda=-1$ που είναι τρεις άνισοι πραγματικοί αριθμοί. Αυτό σημαίνει ότι και οι τρεις ιδιοτιμές έχουν αλγεβρική πολλαπλότητα 1.
Στη συνέχεια βρίσκω τον ιδιοχώρο κάθε ιδιοτιμής

- Για $\lambda=-1$ έχω :

$$Ax=\lambda x \Leftrightarrow \begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 0\\ 2 & -2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=-1\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1+2x_2-x_3=-x_1\\ x_1-x_2=-x_2\\ 2x_1-2x_2=-x_3\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2x_1+2x_2-x_3=0\\ x_1=0\\ 2x_1-2x_2+x_3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_3=2x_2\\ x_1=0\\ x_3=2x_2\end{cases}$$

Άρα ο ιδιοχώρος της ιδιοτιμής $\lambda=-1$ είναι

$$V(-1)=\left\{k\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 2\end{pmatrix}: k\in\mathbb{R}\right\}$$ και η διάσταση του είναι $\dim V(-1)=1$,

δηλαδή η γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής $\lambda=-1$ είναι 1, όσο και η αλγεβρική της πολλαπλότητα .

- Για $\lambda=0$ έχω:

$$Ax=\lambda x \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+2x_2-x_3=0 \\ x_1-x_2=0 \\ 2x_1-2x_2=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1+2x_2-x_3=0 \\ x_1=x_2 \\ 2x_1-2x_2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3=3x_1 \\ x_1=x_2 \\ x_1=x_2 \end{cases}$$

Άρα ο ιδιοχώρος για $\lambda=0$ είναι

$V(0)=\left\{k\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} : k\in\mathbb{R}\right\}$ και η διάσταση του είναι: $\dim V(0)=1$, δηλαδή

και η γεωμετρική πολλαπλότητα και αυτής της ιδιοτιμής είναι όσο και η αλγεβρική της, δηλαδή 1.

- Για $\lambda=1$ έχω :

$$Ax=\lambda x \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+2x_2-x_3=x_1 \\ x_1-x_2=x_2 \\ 2x_1-2x_2=x_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_2-x_3=0 \\ x_1-2x_2=0 \\ 2x_1-2x_2-x_3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3=2x_2 \\ x_1=2x_2 \\ x_1=2x_2 \end{cases}$$

Άρα ο ιδιοχώρος για την τρίτη και τελευταία μας ιδιοτιμή $\lambda=1$ είναι

$V(1)=\left\{k\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} : k\in\mathbb{R}\right\}$ και η διάσταση του είναι $\dim V(1)=1$ , ομοίως και σε

αυτήν την περίπτωση η γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής μας ισούται με 1 δηλαδή όσο και η αλγεβρική της πολλαπλότητα .

Άρα ο πίνακας $A$ διαγωνοποιείται, η Jordan μορφή του είναι $J(A)=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, ο πίνακας μετάβασης είναι ο $P=\begin{bmatrix}0&1&2\\1&1&1\\2&3&2\end{bmatrix}$ και ισχύει $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}=J(A)$

***Παράδειγμα 2***

Να δειχθεί ότι ο πίνακας $A=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{4\times4}$, διαγωνοποιείται και να βρεθούν η Jordan μορφή του πίνακα καθώς και ο πίνακας μετάβασης.

**Απάντηση**

Αρχικά θα υπολογίσω το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο του πίνακα $A$. Είναι

$p(\lambda)=\begin{vmatrix}1-\lambda&1&1&1\\1&1-\lambda&-1&-1\\1&-1&1-\lambda&-1\\1&-1&-1&1-\lambda\end{vmatrix}$ και μετά τις πράξεις έχω $p(\lambda)=(\lambda+2)(\lambda-3)^3$.

Άρα οι ιδιοτιμές του πίνακα $A$ είναι $p(\lambda)=0 \Leftrightarrow \lambda_1=-2$ $(\alpha\pi\lambda\acute{\eta})$, $\lambda_2=2$ $(\tau\rho\iota\pi\lambda\acute{\eta})$

Στη συνέχεια βρίσκω τον ιδιοχώρο κάθε ιδιοτιμής

- Για $\lambda=-2$ έχω :

  $V(-2)=\left\{k\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\1\end{pmatrix}:k\in\mathbb{R}\right\}$ και η διάσταση του είναι $\dim V(-2)=1$,

  δηλαδή η γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής $\lambda=-2$ είναι 1, όσο και η αλγεβρική της πολλαπλότητα .

- Για $\lambda=2$ έχω:

  $V(2)=\left\{k_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}:k_1,k_2,k_3\in\mathbb{R}\right\}$ και η διάσταση του είναι $\dim V(2)=3$, δηλαδή και η γεωμετρική πολλαπλότητα και αυτής της ιδιοτιμής είναι όσο και η αλγεβρική της, δηλαδή 3.

Άρα ο πίνακας $A$ διαγωνοποιείται, η Jordan μορφή του είναι $J(A)=\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$,

ο πίνακας μετάβασης είναι ο $P=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ και ισχύει $P^{-1}AP=J(A)$.

***Παράδειγμα 3***

Να δειχθεί ότι ο πίνακας $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times 3}$ δεν διαγωνοποιείται, να βρεθεί η Jordan κανονική μορφή του πίνακα καθώς και ο πίνακας μετασχηματισμού $L$.

**Απάντηση**

Αρχικά θα υπολογίσω το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο του πίνακα $A$. Είναι

$$p(\lambda)=\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix}=$$

$$=(2-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix}-1\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}+0\begin{vmatrix} -1 & -\lambda \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=$$

$$=(2-\lambda)\left[(1-\lambda)(-\lambda)-3\right]-\left[-1(1-\lambda)-1\right]=$$

$$=-\lambda^3+3\lambda^2-4=-(\lambda-2)^2(\lambda+1)$$

Άρα οι ιδιοτιμές του πίνακα $A$ είναι

$$p(\lambda)=0\Leftrightarrow-(\lambda-2)^2(\lambda+1)=0\Leftrightarrow\lambda=-1,\lambda=2 \text{ (διπλή)}$$

Επομένως η ιδιοτιμή

- $\lambda=-1$ είναι απλή πραγματική ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου, άρα η αλγεβρική πολλαπλότητα της είναι $1$.

- $\lambda=2$ είναι διπλή πραγματική ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου, άρα η αλγεβρική πολλαπλότητα της είναι $2$.

Στην συνέχεια θα εξετάσω αν η αλγεβρική πολλαπλότητα κάθε ιδιοτιμής ισούται με την γεωμετρική της πολλαπλότητα .

Υπολογίζω τον ιδιοχώρο της ιδιοτιμής :

- Για $\lambda = -1$ έχω :

$$Ax = \lambda x \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = -1 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + 1x_2 = -x_1 \\ -x_1 + x_3 = -x_2 \\ 1x_1 + 3x_2 + x_3 = -x_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 + x_2 = 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -3x_1 \\ x_3 = 4x_1 \end{cases}$$

Άρα ο ιδιοχώρος για $\lambda = -1$ είναι

$$V(-1) = \left\{ k \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} : k \in \mathbb{R} \right\}$$ και η διάσταση του είναι $\dim V(-1) = 1$ ,

δηλαδή η γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής $\lambda = -1$ είναι ίση με την αλγεβρική της πολλαπλότητα .

- Για $\lambda = 2$ έχω:

$$Ax = \lambda x \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + 1x_2 = 2x_1 \\ -x_1 + x_3 = 2x_2 \\ 1x_1 + 3x_2 + x_3 = 2x_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

Άρα ο ιδιοχώρος για την διπλή ιδιοτιμή $\lambda = 2$ είναι

$$V(1) = \left\{ k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : k \in \mathbb{R} \right\}$$ και η διάσταση του είναι $\dim V(1) = 1$.

Επομένως για αυτή την ιδιοτιμή μας δεν πληρείται η δεύτερη προϋπόθεση διαγωνοποίησης, δηλαδή η αλγεβρική πολλαπλότητα είναι διαφορετική από την γεωμετρική πολλαπλότητα .

Άρα ο πίνακας $A$ δεν είναι διαγωνοποιήσιμος.
Συνεπώς για να βρω τώρα την Jordan κανονική μορφή του πίνακα πρέπει να υπολογίσω τα Jordan Block.

Είναι $J_1 = \left[-1\right]$ και $J_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, οπότε η Jordan μορφή του πίνακα $A$ είναι

$$J(A) = \begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{bmatrix} \text{ ή } J(A) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Θα υπολογίσω τώρα τον πίνακα μετασχηματισμού $L$
Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι : $p(\lambda) = -(\lambda-2)^2(\lambda+1)$ , άρα το ελάχιστο χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι το $\psi(\lambda) = -(\lambda-2)(\lambda+1)$ ή το $\psi(\lambda) = -(\lambda-2)^2(\lambda+1)$ .

Είναι

$$-(A-2I)(A+I) = -\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

και προφανώς είναι $-(A-2I)^2(A+I) = 0$.
Τελικά το ελάχιστο πολυώνυμο είναι το $\psi(\lambda) = -(\lambda-2)^2(\lambda+1)$.

- Η ιδιοτιμή $\lambda = -1$ είδαμε ότι έχει ιδιοχώρο $V(-1) = \left\{ k \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} : k \in \mathbb{R} \right\}$

Το $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην πρώτη ιδιοτιμή.

- Η ιδιοτιμή $\lambda = 2$ έχει στο ελάχιστο πολυώνυμο αλγεβρική πολλαπλότητα 2 και είδαμε ότι έχει ιδιοχώρο $V(1) = \left\{ k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : k \in \mathbb{R} \right\}$,

άρα έχει γεωμετρική πολλαπλότητα 1.

Για την ιδιοτιμή αυτή θα δημιουργήσω μια Jordan αλυσίδα μήκους 2 από την οποία θα προσδιορίσω δύο διανύσματα τα οποία θα αποτελέσουν ένα πλήρες σύστημα αντιπροσώπων της ιδιοτιμής $\lambda = 2$.

Για να βρούμε το πρώτο διάνυσμα της αλυσίδας Jordan μήκους 2 λύνουμε το σύστημα

$(A-2I)^2 u_2 = 0$ και $(A-2I)u_2 \neq 0$ .

Είναι: $$A-2I = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(A-2I)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 3 & 6 & -3 \\ -4 & -8 & 4 \end{bmatrix}$$

Άρα:

$$(A-2I)^2 u_2 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 3 & 6 & -3 \\ -4 & -8 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -c_1 - 2c_2 + c_3 = 0 \\ 3c_1 + 6c_2 - 3c_3 = 0 \\ -4c_1 - 8c_2 + 4c_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow c_1 + 2c_2 - c_3 = 0$$

και

$$(A-2I)u_2 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} c_2 \neq 0 \\ c_1 - 3c_2 - c_3 \neq 0 \end{cases}$$

Βρίσκω μια λύση της $c_1 + 2c_2 - c_3 = 0$ με $c_2 \neq 0$ και $c_1 + 3c_2 - c_3 \neq 0$.

Για $c_1 = 0$ και $c_2 = 1$ παίρνω $c_3 = 2$ οπότε έχω $u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Το δεύτερο διάνυσμα της αλυσίδας Jordan μήκους 2, το βρίσκουμε από την ισότητα

$$(A-2I)u_2 = u_1 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = u_1$$

Επομένως ο πίνακας αλυσίδων ή μετασχηματισμού $L$ είναι $L=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ και ισχύει $L^{-1}\cdot A\cdot L = J(A)$

***Παράδειγμα 4***

Δίνεται ο πίνακας $A=\begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & -13 & -2 \end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times 3}$. Να βρεθούν η Jordan μορφή του πίνακα καθώς και ο πίνακας μετασχηματισμού.

**Απάντηση**

Μετά από πράξεις προκύπτει εύκολα ότι το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο του πίνακα $A$ είναι το $p(\lambda)=-(\lambda+4)(\lambda^2-2\lambda+5)$

Άρα οι ιδιοτιμές του πίνακα $A$ είναι : $p(\lambda)=0 \Leftrightarrow \lambda_1=-4,\ \lambda_2=1+2i,\ \lambda_3=1-2i$.

Η ρίζα $\lambda_1=-4$ έχει αλγεβρική και γεωμετρική πολλαπλότητα 1 άρα παράγει το Jordan block $J_1=[-4]$.

Οι ρίζες $\lambda_2=1+2i,\ \lambda_3=1-2i$ είναι συζυγείς με αλγεβρική πολλαπλότητα 1 και παράγουν το Jordan block $J_2=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$.

Συνεπώς η Jordan μορφή του πίνακα $A$ είναι $J=\begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

Στην ιδιοτιμή $\lambda_1=-4$ αντιστοιχεί το ιδιοδιάνυσμα $v_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Στις ιδιοτιμές $\lambda_2=1+2i,\ \lambda_3=1-2i$ αντιστοιχούν τα ιδιοδιανύσματα

$$v_2=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3-2i \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}i \text{ και } v_3=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3-2i \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}i$$

αντίστοιχα, άρα ο πίνακας μετασχηματισμού είναι ο $L=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 \end{bmatrix}$ και ισχύει $L^{-1}\cdot A\cdot L = J$.

# 3.3 ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΧΡΟΝΟΥ

### 3.3.1 ΟΡΙΣΜΟΣ

Ένα σύστημα είναι μία απεικόνιση : $y[t]=F\left[x[t]\right]$, $t\in\mathbb{R}$, όπου $y[t]$ η έξοδος, $x[t]$ η είσοδος.

### 3.3.2 ΟΡΙΣΜΟΣ

Ένα σύστημα λέγεται γραμμικό αν είναι προσθετικό και ομογενές δηλαδή : $F\left[ax_1[t]+bx_2[t]\right]=aF\left[x_1[t]\right]+bF\left[x_2[t]\right]$ για κάθε $a,b\in\mathbb{C}$.

### 3.3.3 ΧΩΡΟΣ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΩΝ

Ένα γραμμικό σύστημα και χρονικά αμετάβλητο στο χώρο καταστάσεων περιγράφεται από ένα ζευγάρι εξισώσεων, μια διαφορική και μία αλγεβρική, που μας δίνουν την χρονική εξέλιξη του συστήματος σε συνεχές χρόνο $t$ έχει την μορφή

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)$$
$$y(t)=Cx(t)+Du(t)$$

όπου : $x(t)$ διάνυσμα κατάστασης, $x(t)\in\mathbb{R}^{n\times 1}$
$u(t)$ διάνυσμα εισόδου, $u(t)\in\mathbb{R}^{m\times 1}$
$y(t)$ διάνυσμα εξόδου, $y(t)\in\mathbb{R}^{p\times 1}$
$A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $B\in\mathbb{R}^{n\times m}$, $C\in\mathbb{R}^{p\times n}$, $D\in\mathbb{R}^{p\times m}$.

### 3.3.4 ΟΡΙΣΜΟΣ

***Τάξη (order)*** **του χώρου κατάστασης είναι ο αριθμός** $n$ **των συνιστωσών του διανύσματος κατάστασης** $x(t)$ **.**

### 3.4.5 ΠΙΝΑΚΑΣ ΜΕΤΑΒΑΣΗΣ ΤΗΣ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ

Αν το διάνυσμα εισόδου $u(t)=0$ τότε η πρώτη εξίσωση του παραπάνω συστήματος γίνεται $\dot{x}(t)=Ax(t)$. Αν $x(0)=x_0$ τότε η λύση αυτής της διαφορικής εξίσωσης δίνεται από την σχέση $x(t)=e^{At}x_0$.

Ο εκθετικός πίνακας $e^{At}$ ονομάζεται και **«πίνακας μετάβασης κατάστασης»** (State Transition Matrix) .

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

## ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΠΙΝΑΚΑ $e^{At}$

### Περίπτωση 1. Ο πίνακας A διαγωνοποιείται

Αν ο πίνακας $A \in K^{nxn}$ διαγωνοποιείται, τότε η Jordan μορφή του πίνακα θα είναι

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \text{ οπότε θα είναι } e^J = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n} \end{bmatrix}.$$

Επίσης είναι $Jt = \begin{bmatrix} \lambda_1 t & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 t & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n t \end{bmatrix}$ άρα θα είναι $e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$.

Αν $P \in K^{nxn}$ είναι ο πίνακας μετάβασης του πίνακα $A$ τότε θα ισχύει
$P^{-1} \cdot A \cdot P = J \Leftrightarrow A = P \cdot J \cdot P^{-1}$ και συνεπώς $P^{-1} \cdot (At) \cdot P = Jt \Leftrightarrow At = P \cdot (Jt) \cdot P^{-1}$.
Είναι $e^{At} = e^{P\cdot(Jt)\cdot P^{-1}} \Leftrightarrow e^{At} = P \cdot e^{Jt} \cdot P^{-1}$.

***Παράδειγμα 1***

Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Να υπολογιστεί ο πίνακας $e^{At}$ **.**

**Απάντηση**

Ο πίνακας $A$ έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο $p(\lambda) = -\lambda(\lambda+1)(\lambda-1)$.
Η ιδιοτιμή $\lambda_1 = -1$ έχει αλγεβρική πολλαπλότητα $n_1 = 1$ και γεωμετρική $m_i = 1$,
η ιδιοτιμή $\lambda_2 = 0$ έχει αλγεβρική πολλαπλότητα $n_2 = 1$ και γεωμετρική $m_2 = 1$,
η ιδιοτιμή $\lambda_3 = 1$ έχει αλγεβρική πολλαπλότητα $n_3 = 1$ και γεωμετρική $m_2 = 1$.
Συνεπώς ο πίνακας $A$ διαγωνοποιείται.

Τα Jordan μπλοκ είναι $J_1 = [-1]$, $J_2 = [0]$ και $J_3 = [1]$, συνεπώς η Jordan μορφή του είναι $J = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Ο πίνακας μετάβασης είναι ο $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ με αντίστροφο τον πίνακα

$P^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -2 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ και ισχύει $P^{-1}AP = J$, άρα είναι $A = P \cdot J \cdot P^{-1}$

Είναι $e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{t} \end{bmatrix}$, άρα έχω $e^{At} = P \cdot e^{Jt} \cdot P^{-1} \Leftrightarrow$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -2 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{t} & 2(e^{t}-1) & -(e^{t}-1) \\ \dfrac{e^{t}-e^{-t}}{2} & e^{t}+2e^{-t}-2 & -\dfrac{e^{t}+e^{-t}-2}{2} \\ e^{t}-e^{-t} & 2e^{t}+4e^{-t}-6 & -(e^{t}+e^{-t}-3) \end{bmatrix}.$$

***Παράδειγμα 2***

Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 6 & 4 & -3 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Να υπολογιστεί ο πίνακας $e^{At}$.

**Απάντηση**

Ο πίνακας $A$ έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο $p(\lambda) = -(\lambda-1)(\lambda-4)^2$.

Η ιδιοτιμή $\lambda_1 = 1$ έχει αλγεβρική πολλαπλότητα $n_1 = 1$ και γεωμετρική $m_i = 1$,

η ιδιοτιμή $\lambda_2 = 4$ έχει αλγεβρική πολλαπλότητα $n_2 = 2$ και γεωμετρική $m_2 = 2$. Συνεπώς ο πίνακας $A$ διαγωνοποιείται.

Τα Jordan μπλοκ είναι $J_1=[1]$, $J_2=[4]$ και $J_3=[4]$, συνεπώς ο πίνακας $A$ διαγωνοποιείται, η Jordan μορφή του είναι $J=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&4&0\\0&0&4\end{bmatrix}$.

Ο πίνακας μετάβασης είναι ο $P=\begin{bmatrix}-1&1&0\\3&0&1\\1&2&0\end{bmatrix}$ με αντίστροφο τον πίνακα

$P^{-1}=\begin{bmatrix}-\frac{2}{3}&0&\frac{1}{3}\\ \frac{1}{3}&0&\frac{1}{3}\\ 2&1&-1\end{bmatrix}$ και ισχύει $P^{-1}AP=J$ , άρα είναι $A=P\cdot J\cdot P^{-1}$.

Είναι $e^{Jt}=\begin{bmatrix}e^t&0&0\\0&e^{4t}&0\\0&0&e^{4t}\end{bmatrix}$, άρα έχω $e^{At}=P\cdot e^{Jt}\cdot P^{-1}$ $\Leftrightarrow$

$$e^{At}=\begin{bmatrix}-1&1&0\\3&0&1\\1&2&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}e^t&0&0\\0&e^{4t}&0\\0&0&e^{4t}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-\frac{2}{3}&0&\frac{1}{3}\\ \frac{1}{3}&0&\frac{1}{3}\\ 2&1&-1\end{bmatrix}\Leftrightarrow$$

$$e^{At}=\begin{bmatrix}\frac{2e^t+e^{4t}}{3}&0&\frac{-e^t+e^{4t}}{3}\\ -2e^t+2e^{4t}&e^{4t}&e^t-e^{4t}\\ \frac{-2e^t+2e^{4t}}{3}&0&\frac{e^t+2e^{4t}}{3}\end{bmatrix}.$$

***Παράδειγμα 3***

Δίνεται ο πίνακας $A=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{4\times4}$. Να υπολογιστεί ο πίνακας $e^{At}$ **.**

**Απάντηση**

Ο πίνακας $A$ έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο $p(\lambda)=(\lambda+2)(\lambda-2)^3$.

Η ιδιοτιμή $\lambda_1=-2$ έχει αλγεβρική πολλαπλότητα $n_1=1$ και γεωμετρική $m_i=1$, η ιδιοτιμή $\lambda_2 = 2$ έχει αλγεβρική πολλαπλότητα $n_2 = 3$ και γεωμετρική $m_2 = 3$. Συνεπώς ο πίνακας $A$ διαγωνοποιείται.

Τα Jordan μπλοκ είναι $J_1 = \left[-2\right]$, $J_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, συνεπώς η Jordan μορφή του είναι

$$J = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ο πίνακας μετάβασης είναι ο $P = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ με αντίστροφο τον πίνακα

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} -1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & -1/4 & -1/4 & 3/4 \\ 1/4 & -1/4 & 3/4 & -1/4 \\ 1/4 & 3/4 & -1/4 & -1/4 \end{bmatrix}$$ και ισχύει $P^{-1}AP = J$, άρα είναι $A = P \cdot J \cdot P^{-1}$.

Είναι $e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$, άρα έχω $e^{At} = P \cdot e^{Jt} \cdot P^{-1} \Leftrightarrow$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & -1/4 & -1/4 & 3/4 \\ 1/4 & -1/4 & 3/4 & -1/4 \\ 1/4 & 3/4 & -1/4 & -1/4 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} \frac{e^{-2t}(3e^{4t}+1)}{4} & \frac{e^{-2t}(e^{4t}-1)}{4} & \frac{e^{-2t}(e^{4t}-1)}{4} & \frac{e^{-2t}(e^{4t}-1)}{4} \\ \frac{e^{-2t}(e^{4t}-1)}{4} & \frac{e^{-2t}(3e^{4t}+1)}{4} & -\frac{e^{-2t}(e^{4t}-1)}{4} & -\frac{e^{-2t}(e^{4t}-1)}{4} \\ \frac{e^{-2t}(e^{4t}-1)}{4} & -\frac{e^{-2t}(e^{4t}-1)}{4} & \frac{e^{-2t}(3e^{4t}+1)}{4} & \frac{e^{-2t}(e^{4t}-1)}{4} \\ \frac{e^{-2t}(e^{4t}-1)}{4} & -\frac{e^{-2t}(e^{4t}-1)}{4} & -\frac{e^{-2t}(e^{4t}-1)}{4} & \frac{e^{-2t}(3e^{4t}+1)}{4} \end{bmatrix}.$$

***Παράδειγμα 4***

Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{4\times 4}$. Να υπολογιστεί ο πίνακας $e^{At}$ **.**

**Απάντηση**

Ο πίνακας $A$ έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο $p(\lambda) = (\lambda+2)(\lambda-2)^2(\lambda-2i)$.
Η ιδιοτιμή $\lambda_1 = -2$ έχει αλγεβρική πολλαπλότητα $n_1 = 1$ και γεωμετρική $m_1 = 1$,
η ιδιοτιμή $\lambda_2 = 2i$ έχει αλγεβρική πολλαπλότητα $n_2 = 1$ και γεωμετρική $m_2 = 1$,
η ιδιοτιμή $\lambda_3 = 2$ έχει αλγεβρική πολλαπλότητα $n_3 = 2$ και γεωμετρική $m_3 = 2$.

Συνεπώς ο πίνακας $A$ διαγωνοποιείται.

Τα Jordan μπλοκ είναι $J_1 = \left[-2\right]$, $J_2 = \left[2i\right]$ και $J_3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, συνεπώς η Jordan

μορφή του είναι $J = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Ο πίνακας μετάβασης είναι ο $P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ με αντίστροφο τον πίνακα

$P^{-1} = \begin{bmatrix} -1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & -1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 & -1/4 & 1/4 \\ 1/4 & -1/4 & 3/4 & -1/4 \end{bmatrix}$ και ισχύει $P^{-1}AP = J$, άρα είναι $A = P\cdot J\cdot P^{-1}$.

Είναι $e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2it} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$ ή $e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2t + i\sin 2t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$,

άρα έχω $e^{At} = P\cdot e^{Jt}\cdot P^{-1} \Leftrightarrow$

$$e^{At}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 2 & 1\\ 1 & -1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}e^{-2t} & 0 & 0 & 0\\ 0 & e^{2it} & 0 & 0\\ 0 & 0 & e^{2t} & 0\\ 0 & 0 & 0 & e^{2t}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4\\ 0 & -1/2 & 0 & 1/2\\ 1/4 & 1/4 & -1/4 & 1/4\\ 1/4 & -1/4 & 3/4 & -1/4\end{bmatrix}\Leftrightarrow$$

$$e^{At}=\begin{bmatrix}\frac{e^{-2t}(3e^{4t}+1)}{4} & \frac{e^{-2t}(e^{4t}-1)}{4} & \frac{e^{-2t}(e^{4t}-1)}{4} & \frac{e^{-2t}(e^{4t}-1)}{4}\\ \frac{e^{-2t}(e^{4t}-1)}{4} & \frac{e^{-2t}(e^{4t}+1+2e^{2t}(\cos 2t+i\sin 2t))}{4} & -\frac{e^{-2t}(e^{4t}-1)}{4} & \frac{e^{-2t}(e^{4t}+1-2e^{2t}(\cos 2t+i\sin 2t))}{4}\\ \frac{e^{-2t}(e^{4t}-1)}{4} & -\frac{e^{-2t}(e^{4t}-1)}{4} & \frac{e^{-2t}(3e^{4t}+1)}{4} & \frac{e^{-2t}(e^{4t}-1)}{4}\\ \frac{e^{-2t}(e^{4t}-1)}{4} & \frac{e^{-2t}(e^{4t}+1-2e^{2t}(\cos 2t+i\sin 2t))}{4} & -\frac{e^{-2t}(e^{4t}-1)}{4} & \frac{e^{-2t}(e^{4t}+1+2e^{2t}(\cos 2t+i\sin 2t))}{4}\end{bmatrix}.$$

## Περίπτωση 2. Ο πίνακας Α δεν διαγωνοποιείται

Αυτό μπορεί να συμβεί σε δύο περιπτώσεις

I) Όλες οι ιδιοτιμές ανήκουν στο σώμα $K$ και υπάρχει ιδιοτιμή $\lambda_i$ η οποία έχει διαφορετική αλγεβρική και γεωμετρική πολλαπλότητα ($n_i \neq m_i$). Στην περίπτωση αυτή το $J_i$ έχει την μορφή

$$J_i t = \begin{bmatrix} \lambda_i t & \delta_{i1} t & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i t & \delta_{i2} t & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i t & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i t & \delta_{i,n_i-1} t \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_i t \end{bmatrix}, \text{ όπου } \delta_{ij} = 0 \text{ ή } 1.$$

Ειδικότερα το Jordan block $J_i$ σχηματίζεται από $m_i$ υπο-block τα οποία έχουν είτε

την μορφή $\begin{bmatrix} \lambda_i t & t & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i t & t & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i t & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i t & t \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_i t \end{bmatrix}$, αν έχουν διάσταση μεγαλύτερη του 1, είτε

την μορφή $\left[\lambda_i t\right]$ αν έχουν διάσταση 1.

Στη περίπτωση αυτή ο πίνακας $A \in K^{nxn}$ δεν διαγωνοποιείται, και η Jordan μορφή

του πίνακα θα είναι $Jt = \begin{bmatrix} J_1 t & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & J_2 t & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_{k-1} t & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & J_k t \end{bmatrix}$, όπου οι πίνακες $J_i$ είναι $n_i x n_i$ πίνακες.

Για κάθε $n_i x n_i$ μπλοκ της μορφής $J_i t = \begin{bmatrix} \lambda_i t & t & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i t & t & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i t & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i t & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_i t & t \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda_i t \end{bmatrix}$ είναι

$$e^{J_i t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_i t} & e^{\lambda_i t} t & \frac{e^{\lambda_i t} t^2}{2!} & \frac{e^{\lambda_i t} t^3}{3!} & \cdots & \frac{e^{\lambda_i t} t^{n_i-4}}{(n_i-4)!} & \frac{e^{\lambda_i t} t^{n_i-3}}{(n_i-3)!} & \frac{e^{\lambda_i t} t^{n_i-2}}{(n_i-2)!} & \frac{e^{\lambda_i t} t^{n_i-1}}{(n_i-1)!} \\ 0 & e^{\lambda_i t} & e^{\lambda_i t} t & \frac{e^{\lambda_i t} t^2}{2!} & \cdots & \frac{e^{\lambda_i t} t^{n_i-5}}{(n_i-5)!} & \frac{e^{\lambda_i t} t^{n_i-4}}{(n_i-4)!} & \frac{e^{\lambda_i t} t^{n_i-3}}{(n_i-3)!} & \frac{e^{\lambda_i t} t^{n_i-2}}{(n_i-2)!} \\ 0 & 0 & e^{\lambda_i t} & e^{\lambda_i t} t & \cdots & \frac{e^{\lambda_i t} t^{n_i-6}}{(n_i-6)!} & \frac{e^{\lambda_i t} t^{n_i-5}}{(n_i-5)!} & \frac{e^{\lambda_i t} t^{n_i-4}}{(n_i-4)!} & \frac{e^{\lambda_i t} t^{n_i-3}}{(n_i-3)!} \\ 0 & 0 & 0 & e^{\lambda_i t} & \cdots & \frac{e^{\lambda_i t} t^{n_i-7}}{(n_i-7)!} & \frac{e^{\lambda_i t} t^{n_i-6}}{(n_i-6)!} & \frac{e^{\lambda_i t} t^{n_i-5}}{(n_i-5)!} & \frac{e^{\lambda_i t} t^{n_i-4}}{(n_i-4)!} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_i t} & e^{\lambda_i t} t & \frac{e^{\lambda_i t} t^2}{2!} & \frac{e^{\lambda_i t} t^3}{3!} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & e^{\lambda_i t} & e^{\lambda_i t} t & \frac{e^{\lambda_i t} t^2}{2!} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & e^{\lambda_i t} & e^{\lambda_i t} t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & e^{\lambda_i t} \end{bmatrix}$$

Προφανώς για κάθε μπλοκ της μορφής $J_i t = \begin{bmatrix} \lambda_i t & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i t & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i t & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_i t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda_i t \end{bmatrix}$ είναι

$$e^{J_i t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_i t} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_i t} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_i t} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_i t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & e^{\lambda_i t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & e^{\lambda_i t} \end{bmatrix}$$

Και τελικά $e^{Jt}=\begin{bmatrix} e^{J_1t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{J_2t} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{J_kt} \end{bmatrix}$.

***Παράδειγμα 1***

Δίνεται ο πίνακας $A=\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times 3}$. Να υπολογιστεί ο πίνακας $e^{At}$ **.**

**Απάντηση**

Ο πίνακας $A$ έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο $p(\lambda)=-(\lambda-3)^2(\lambda-6)$.

Η ιδιοτιμή $\lambda_1=3$ έχει αλγεβρική πολλαπλότητα $n_1=2$ και γεωμετρική $m_1=1$,

η ιδιοτιμή $\lambda_2=6$ έχει αλγεβρική πολλαπλότητα $n_2=1$ και γεωμετρική $m_2=1$.

Συνεπώς ο πίνακας $A$ δεν διαγωνοποιείται. Τα Jordan μπλοκ είναι $J_1=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ και $J_2=\begin{bmatrix} 6 \end{bmatrix}$, και η Jordan μορφή του είναι $J=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$.

Ο πίνακας μετασχηματισμού είναι ο $L=\begin{bmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ με αντίστροφο τον πίνακα

$L^{-1}=\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{4}{9} & \frac{7}{9} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{9} & \frac{2}{9} \end{bmatrix}$ και ισχύει $L^{-1}\cdot A\cdot L=J$, άρα είναι $A=L\cdot J\cdot L^{-1}$

Είναι $e^{Jt}=\begin{bmatrix} e^{J_1t} & 0 \\ 0 & e^{J_2t} \end{bmatrix}$, με $J_1t=\begin{bmatrix} 3t & t \\ 0 & 3t \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3t & 0 \\ 0 & 3t \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Επειδή οι πίνακες

$B_1=\begin{bmatrix} 3t & 0 \\ 0 & 3t \end{bmatrix}, B_2=\begin{bmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ αντιμετατίθενται και είναι $B_2^2=0$ θα είναι

$$e^{J_1 t} = e^{B_1+B_2} = e^{B_1}\cdot e^{B_2}\text{, όπου } e^{B_1} = \begin{bmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix} \text{ και } e^{B_2} = I_2 + B_2 = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Συνεπώς $e^{J_1 t} = \begin{bmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{3t} & te^{3t} \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix}$.

Επίσης είναι $e^{J_2 t} = \begin{bmatrix} e^{6t} \end{bmatrix}$, άρα $e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^{3t} & te^{3t} & 0 \\ 0 & e^{3t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{6t} \end{bmatrix}$

Τελικά $e^{At} = L \cdot e^{Jt} \cdot L^{-1} \Leftrightarrow$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^{3t} & te^{3t} & 0 \\ 0 & e^{3t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{6t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{4}{9} & \frac{7}{9} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{9} & \frac{2}{9} \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} \frac{e^{3t}(e^{3t}+2)}{3} & \frac{2e^{3t}(2e^{3t}+3t-2)}{9} & \frac{2e^{3t}(e^{3t}-3t-1)}{9} \\ \frac{e^{3t}(e^{3t}-1)}{3} & \frac{e^{3t}(4e^{3t}-3t+5)}{9} & \frac{e^{3t}(2e^{3t}+3t-2)}{9} \\ \frac{e^{3t}(e^{3t}-1)}{3} & \frac{e^{3t}(4e^{3t}-3t-4)}{9} & \frac{e^{3t}(2e^{3t}+3t+7)}{9} \end{bmatrix}.$$

***Παράδειγμα 2***

Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 6 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Να υπολογιστεί ο πίνακας $e^{At}$**.**

**Απάντηση**

Ο πίνακας $A$ έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο $p(\lambda) = -(\lambda-4)^2(\lambda-2)$.
Η ιδιοτιμή $\lambda_1 = 4$ έχει αλγεβρική πολλαπλότητα $n_1 = 2$ και γεωμετρική $m_i = 1$,
η ιδιοτιμή $\lambda_2 = 2$ έχει αλγεβρική πολλαπλότητα $n_2 = 1$ και γεωμετρική $m_2 = 1$.
Συνεπώς ο πίνακας $A$ δεν διαγωνοποιείται. Τα Jordan μπλοκ είναι $J_1 = \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}$ και $J_2 = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$, και η Jordan μορφή του είναι $J = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

Ο πίνακας μετασχηματισμού είναι ο $L=\begin{bmatrix} -1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ με αντίστροφο τον πίνακα

$L^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ και ισχύει $L^{-1}\cdot A\cdot L=J$ , άρα είναι $A=L\cdot J\cdot L^{-1}$

Είναι $e^{J_1 t}=\left[e^{2t}\right]$, επίσης είναι $J_2 t=\begin{bmatrix} 4t & t \\ 0 & 4t \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4t & 0 \\ 0 & 4t \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Επειδή οι πίνακες $B_1=\begin{bmatrix} 4t & 0 \\ 0 & 4t \end{bmatrix}$, $B_2=\begin{bmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ αντιμετατίθενται και είναι $B_2^2=0$ θα είναι $e^{J_2 t}=e^{B_1+B_2}=e^{B_1}\cdot e^{B_2}$ , όπου $e^{B_1}=\begin{bmatrix} e^{4t} & 0 \\ 0 & e^{4t} \end{bmatrix}$ και $e^{B_2}=I_2+B_2=\begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Άρα $e^{J_2 t}=\begin{bmatrix} e^{4t} & 0 \\ 0 & e^{4t} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} e^{4t} & te^{4t} \\ 0 & e^{4t} \end{bmatrix}$.

Συνεπώς θα είναι $e^{Jt}=\begin{bmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{4t} & te^{4t} \\ 0 & 0 & e^{4t} \end{bmatrix}$

Τελικά $e^{At}=L\cdot e^{Jt}\cdot L^{-1} \Leftrightarrow$

$$e^{At}=\begin{bmatrix} -1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{4t} & te^{4t} \\ 0 & 0 & e^{4t} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}\Leftrightarrow$$

$$e^{At}=\begin{bmatrix} (1-2t)e^{4t} & e^{4t}-e^{2t}-2te^{4t} & -2te^{4t} \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 2te^{4t} & 2te^{4t} & (2t+1)e^{4t} \end{bmatrix}.$$

***Παράδειγμα 3***

Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -6 & 0 \\ 4 & 6 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & -6 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$. Να υπολογιστεί ο πίνακας $e^{At}$ **.**

**Απάντηση**

Ο πίνακας $A$ έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο $p(\lambda) = (\lambda-2)^2(\lambda-4)(\lambda-6)$.

Η ιδιοτιμή $\lambda_1 = 2$ έχει αλγεβρική πολλαπλότητα $n_1 = 2$ και γεωμετρική $m_i = 1$,

η ιδιοτιμή $\lambda_2 = 4$ έχει αλγεβρική πολλαπλότητα $n_2 = 1$ και γεωμετρική $m_2 = 1$,

η ιδιοτιμή $\lambda_3 = 6$ έχει αλγεβρική πολλαπλότητα $n_3 = 1$ και γεωμετρική $m_3 = 1$.

Συνεπώς ο πίνακας $A$ δεν διαγωνοποιείται. Τα Jordan μπλοκ είναι $J_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$,

$J_2 = [4]$, $J_3 = [6]$ και η Jordan μορφή του είναι $J = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$.

Ο πίνακας μετασχηματισμού είναι ο $L = \begin{bmatrix} 1 & -1/4 & 0 & 1 \\ 0 & 1/4 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ με αντίστροφο τον πίνακα

$L^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 3/2 & 2 \\ -4 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & 1 & -3/2 & -1 \end{bmatrix}$ και ισχύει $L^{-1} \cdot A \cdot L = J$, άρα είναι $A = L \cdot J \cdot L^{-1}$

Είναι $J_1 t = \begin{bmatrix} 2t & t \\ 0 & 2t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2t & 0 \\ 0 & 2t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Επειδή οι πίνακες $B_1 = \begin{bmatrix} 2t & 0 \\ 0 & 2t \end{bmatrix}$, $B_2 = \begin{bmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ αντιμετατίθενται και είναι $B_2^2 = 0$ θα είναι $e^{J_1 t} = e^{B_1 + B_2} = e^{B_1} \cdot e^{B_2}$, όπου $e^{B_1} = \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$ και $e^{B_2} = I_2 + B_2 = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Άρα $e^{J_1 t} = \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$.

Επίσης είναι $e^{J_2 t} = \left[ e^{4t} \right]$ και $e^{J_3 t} = \left[ e^{6t} \right]$. Συνεπώς θα είναι $e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^{2t} & te^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{4t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{6t} \end{bmatrix}$

Τελικά $e^{At} = L \cdot e^{Jt} \cdot L^{-1} \Leftrightarrow$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & -1/4 & 0 & 1 \\ 0 & 1/4 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^{2t} & te^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{4t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{6t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -1 & 3/2 & 2 \\ -4 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & 1 & -3/2 & -1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{2t}(e^{4t}-4t) & e^{2t}(e^{4t}-1) & -\dfrac{3e^{2t}(e^{4t}-1)}{2} & -e^{2t}(e^{4t}-4t-1) \\ e^{2t}(e^{4t}-1) & e^{6t} & -\dfrac{3e^{2t}(e^{4t}-1)}{2} & -e^{2t}(e^{4t}-1) \\ 0 & 0 & e^{4t} & 0 \\ e^{2t}(e^{4t}-4t-1) & e^{2t}(e^{4t}-1) & -\dfrac{3e^{2t}(e^{4t}-1)}{2} & -e^{2t}(e^{4t}-4t-2) \end{bmatrix}.$$

***Παράδειγμα 4***

Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 6 & 1 & -1 & 1 \\ -6 & -1 & 4 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$. Να υπολογιστεί ο πίνακας $e^{At}$**.**

**Απάντηση**

Ο πίνακας $A$ έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο $p(\lambda) = (\lambda+2)(\lambda-3)^3$.
Η ιδιοτιμή $\lambda_1 = -2$ έχει αλγεβρική πολλαπλότητα $n_1 = 1$ και γεωμετρική $m_i = 1$,
η ιδιοτιμή $\lambda_2 = 3$ έχει αλγεβρική πολλαπλότητα $n_2 = 3$ και γεωμετρική $m_2 = 2$.
Συνεπώς ο πίνακας $A$ δεν διαγωνοποιείται. Τα Jordan μπλοκ είναι $J_1 = \left[-2\right]$,

$J_2 = [3]$ και $J_3 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$και η Jordan μορφή του είναι $J = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

Ο πίνακας μετασχηματισμού είναι ο $L=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ με αντίστροφο τον πίνακα

$L^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ και ισχύει $L^{-1}\cdot A\cdot L=J$, άρα είναι $A=L\cdot J\cdot L^{-1}$

Είναι $J_1t=\left[-2t\right]$, άρα $e^{J_1t}=\left[e^{-2t}\right]$ επίσης $J_2t=\left[2t\right]$, άρα $e^{J_2t}=\left[e^{3t}\right]$. Τέλος είναι $J_3t=\begin{bmatrix} 3t & t \\ 0 & 3t \end{bmatrix}$, άρα $e^{J_3t}=\begin{bmatrix} e^{3t} & e^{t} \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix}$

Επειδή οι πίνακες $B_1=\begin{bmatrix} 3t & 0 \\ 0 & 3t \end{bmatrix}$, $B_2=\begin{bmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ αντιμετατίθενται και είναι $B_2^2=0$ θα είναι

$e^{J_2t}=e^{B_1+B_2}=e^{B_1}\cdot e^{B_2}$, όπου $e^{B_1}=\begin{bmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix}$ και $e^{B_2}=I_3+B_2=\begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Άρα $e^{J_2t}=\begin{bmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} e^{3t} & te^{3t} \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix}$.

Συνεπώς θα είναι $e^{Jt}=\begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{3t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{3t} & te^{3t} \\ 0 & 0 & 0 & e^{3t} \end{bmatrix}$

Τελικά $e^{At}=L\cdot e^{Jt}\cdot L^{-1} \Leftrightarrow$

$$e^{At}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{3t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{3t} & te^{3t} \\ 0 & 0 & 0 & e^{3t} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\Leftrightarrow$$

$$e^{At}=\begin{bmatrix} e^{3t}(t+1) & te^{3t} & te^{3t} & te^{3t} \\ -te^{3t} & -e^{3t}(t-1) & -te^{3t} & -te^{3t} \\ te^{3t}+e^{3t}-e^{-2t} & te^{3t} & e^{4t} & te^{3t} \\ -(te^{3t}+e^{3t}-e^{-2t}) & -te^{3t} & -(te^{3t}+e^{3t}-e^{-2t}) & -e^{3t}(t-1) \end{bmatrix}.$$

**II)** Υπάρχει μιγαδική ιδιοτιμή $\lambda_i$ του πίνακα και τα στοιχεία του πίνακα είναι πραγματικοί αριθμοί.

Επειδή η ιδιοτιμή $\lambda_i$ είναι μιγαδικός αριθμός και το χαρακτηριστικό πολυώνυμο έχει πραγματικούς συντελεστές τότε και ο $\overline{\lambda_i}$ είναι επίσης ιδιοτιμή του πίνακα και αν είναι $\lambda_i = a + bi$ τότε οι δύο συζυγείς ιδιοτιμές $\lambda_i, \overline{\lambda_i}$ μας δίνουν το Jordan block $J_i = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$ και ο εκθετικός πίνακας $e^{J_i t}$ είναι $e^{J_i t} = \begin{bmatrix} e^{at}\cos bt & e^{at}\sin bt \\ -e^{at}\sin bt & e^{at}\cos bt \end{bmatrix}$.

Αν τέλος η ιδιοτιμή $\lambda_i$ έχει αλγεβρική πολλαπλότητα $n_i$ το ίδιο θα συμβαίνει και με την $\overline{\lambda_i}$ και το παραπάνω Jordan μπλοκ θα επαναληφθεί $n_i$ φορές.

***Παράδειγμα 1***

Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -13 & -2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Να υπολογιστεί ο πίνακας $e^{At}$.

**Απάντηση**

Ο πίνακας $A$ έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 5$.

Οι ιδιοτιμές του είναι $\lambda_1 = 1 + 2i$ και $\lambda_2 = 1 - 2i$ με αλγεβρική πολλαπλότητα $n_1 = n_2 = 1$.

Συνεπώς ο πίνακας $A$ δεν διαγωνοποιείται. Η Jordan μορφή είναι $J = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$.

Ένα ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_1 = 1+2i$ είναι το $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} i$,

συνεπώς ο πίνακας μετασχηματισμού είναι ο $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ με αντίστροφο τον πίνακα $L^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3/2 & 1/2 \end{bmatrix}$ και ισχύει $L^{-1} \cdot A \cdot L = J$, άρα είναι $A = L \cdot J \cdot L^{-1}$

Είναι $e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^t \cos 2t & e^t \sin 2t \\ -e^t \sin 2t & e^t \cos 2t \end{bmatrix}$

Τελικά $e^{At} = L \cdot e^{Jt} \cdot L^{-1} \Leftrightarrow e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^t \cos 2t & e^t \sin 2t \\ -e^t \sin 2t & e^t \cos 2t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3/2 & 1/2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} \dfrac{e^t (2cos2t + 3sin2t)}{2} & \dfrac{1}{2} e^t sin2t \\ -\dfrac{13e^t sin2t}{2} & \dfrac{e^t (2\cos 2t - 3sin2t)}{2} \end{bmatrix}.$$

***Παράδειγμα 2***

Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & -13 & -2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Να υπολογιστεί ο πίνακας $e^{At}$.

**Απάντηση**

Το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο του πίνακα $A$ είναι το $p(\lambda) = -(\lambda+4)(\lambda^2 - 2\lambda + 5)$

Άρα οι ιδιοτιμές του πίνακα $A$ είναι : $\lambda_1 = -4,\ \lambda_2 = 1+2i,\ \lambda_3 = 1-2i$.

Η ρίζα $\lambda_1 = -4$ έχει αλγεβρική και γεωμετρική πολλαπλότητα 1 άρα παράγει το Jordan block $J_1 = [-4]$.

Οι ρίζες $\lambda_2 = 1+2i,\ \lambda_3 = 1-2i$ είναι συζυγείς με αλγεβρική πολλαπλότητα 1 και παράγουν το Jordan block $J_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$.

Συνεπώς η Jordan μορφή του πίνακα $A$ είναι $J = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

Στην ιδιοτιμή $\lambda_1 = -4$ αντιστοιχεί το ιδιοδιάνυσμα $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Στις ιδιοτιμές $\lambda_2 = 1+2i,\ \lambda_3 = 1-2i$ τα διανύσματα

$$v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3-2i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} i \text{ και } v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3-2i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} i$$

αντίστοιχα, άρα ο πίνακας μετασχηματισμού είναι ο $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 \end{bmatrix}$ με

$L^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3/2 & -1/2 \end{bmatrix}$ και ισχύει $L^{-1} \cdot A \cdot L = J$, άρα είναι $A = L \cdot J \cdot L^{-1}$.

Είναι $e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^{-4t} & 0 & 0 \\ 0 & e^t \cos 2t & e^t \sin 2t \\ 0 & -e^t \sin 2t & e^t \cos 2t \end{bmatrix}$

Τελικά $e^{At} = L \cdot e^{Jt} \cdot L^{-1} \Leftrightarrow$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-4t} & 0 & 0 \\ 0 & e^t \cos 2t & e^t \sin 2t \\ 0 & -e^t \sin 2t & e^t \cos 2t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3/2 & -1/2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-4t} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{e^t(2\cos 2t - 3\sin 2t)}{2} & -e^t \cos t \sin t \\ 0 & 13\cos t \sin t & \dfrac{e^t(2\cos 2t + 3\sin 2t)}{2} \end{bmatrix}.$$

## ▪ JordanDecomposition[*m*]

Πραγματοποιεί την Jordan παραγοντοποίηση ενός τετραγωνικού πίνακα ***m***.
Το αποτέλεσμα είναι μια λίστα **{*s*, *j*}** όπου *s* είναι ο πίνακας μετασχηματισμού ή μετάβασης και ***j*** είναι η Jordan κανονική μορφή του πίνακα ***m.***

***Παράδειγμα***

$$\textbf{\{s, j\} = JordanDecomposition}\left[\begin{pmatrix} 2 & 4 & -6 & 0 \\ 4 & 6 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & -6 & 2 \end{pmatrix}\right];$$

**Print["s = ", s // MatrixForm]**
**Print["j = ", j // MatrixForm]**

$$\mathrm{s} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{4} & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{4} & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{j} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

## ▪ LUDecomposition[*m*]

Πραγματοποιεί την LU παραγοντοποίηση ενός τετραγωνικού πίνακα *m*.
Το αποτέλεσμα είναι μια λίστα από τρία στοιχεία. Το πρώτο στοιχείο είναι μια ταυτόχρονη παρουσίαση των δύο άνω και κάτω τριγωνικών πινάκων. Το δεύτερο στοιχείο είναι ένα διάνυσμα και δείχνει ποιες γραμμές του πίνακα χρησιμοποιήθηκαν κατά την διάρκεια εφαρμογής της μεθόδου. Τέλος το τρίτο στοιχείο είναι η $L^{\infty}$ νόρμα των στοιχείων του πίνακα, και αφορά μόνο πίνακες με προσεγγιστικά στοιχεία (approximate numerical matrices).

***Παράδειγμα***

$$\{\text{lu, rows, norm}\} = \text{LUDecomposition}\left[\begin{pmatrix} 2 & 4 & -6 & 0 \\ 4 & 6 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & -6 & 2 \end{pmatrix}\right];$$

**Print["lu = ", MatrixForm[lu]];**
**Print["rows = ", MatrixForm[rows]];**
**Print["L$^{\infty}$ norm = ", norm];**

$$\text{lu} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -6 & 0 \\ 2 & -2 & 9 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\text{rows} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

**L$^{\infty}$ norm = 1**

## ▪ LUMatrices[*lu*]

Μας διαχωρίζει και μας δίνει τους πίνακες L και U που προέρχονται από τον πίνακα ***lu*** της εντολής LU Decomposition.

***Παράδειγμα***

```
{lu, rows, norm} = LUDecomposition[(2  4  -6   0
                                    4  6  -3  -4
                                    0  0   4   0
                                    0  4  -6   2)];

{l, u} = LUMatrices[lu];
Print["L = ", MatrixForm[l]];
Print["U = ", MatrixForm[u]];
```

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -6 & 0 \\ 0 & -2 & 9 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

## ▪ SchurDecomposition[*m*]

Πραγματοποιεί την Schur παραγοντοποίηση ενός τετραγωνικού πίνακα ***m***. Το αποτέλεσμα είναι μια λίστα **{*q*, *t*}** όπου ***q*** είναι ένας ορθοκανονικός πίνακας και ***t*** είναι ένας άνω τριγωνικός πίνακας.

***Παράδειγμα***

$$\{q,\ t\} = \mathbf{SchurDecomposition}\left[\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1. \end{pmatrix}\right];$$

```
Print["\nThe Unitary matrix Q is :"];
Print["Q=", Chop[q] // MatrixForm];
Print["\nThe Uper triangular matrix T is :"];
Print["T=", Chop[t] // MatrixForm];
```

**The Unitary matrix Q is :**

$$Q=\begin{pmatrix} 0.881656 & 0.471892 & 0 & 0 \\ 0.272447 & -0.509025 & 0.816497 & 0 \\ 0.272447 & -0.509025 & -0.408248 & -0.707107 \\ 0.272447 & -0.509025 & -0.408248 & 0.707107 \end{pmatrix}$$

**The Uper triangular matrix T is :**

$$T=\begin{pmatrix} 2.23607 & -0.57735 & -0.359935 & 0.623425 \\ 0 & -2.23607 & -0.192649 & 0.333678 \\ 0 & 0 & 2. & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2. \end{pmatrix}$$

## ▪ HessenbergDecomposition[*m*]

Δίνει την Hessenberg παραγοντοποίηση του πίνακα ***m***.
Το αποτέλεσμα είναι μια λίστα **{*p*, *h*}** όπου ***p*** είναι ένας ορθοκανονικός πίνακας και ***h*** είναι ένας Hessenberg πίνακας.

***Παράδειγμα***

$$\{p, h\} = \text{HessenbergDecomposition}\left[\begin{pmatrix} -4 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -5 & 4 & 3. \end{pmatrix}\right];$$

```
Print["\nThe Unitary matrix P is :"];
Print["P=", Chop[p] // MatrixForm];
Print["\nThe Hessenberg matrix H is :"];
Print["H=", Chop[h] // MatrixForm];
Print["\nThe product P.H.P* is :"];
Print["P.H.P*=", Chop[p.h.ConjugateTranspose[p]] // MatrixForm]
```

**The Unitary matrix P is :**

$$P=\begin{pmatrix} 1. & 0 & 0 \\ 0 & -0.196116 & -0.980581 \\ 0 & -0.980581 & 0.196116 \end{pmatrix}$$

**The Hessenberg matrix H is :**

$$H=\begin{pmatrix} -4. & -2.74563 & -3.53009 \\ 5.09902 & 3.88462 & 3.42308 \\ 0 & 0.423077 & 0.115385 \end{pmatrix}$$

**The product P.H.P* is :**

$$P.H.P^*=\begin{pmatrix} -4. & 4. & 2. \\ -1. & 1. & 1. \\ -5. & 4. & 3. \end{pmatrix}$$

## ▪ MatrixExp[*mat*]

Δίνει τον πίνακα $e^{mat}$.

***Παράδειγμα***

$$\mathbf{A = MatrixExp}\left[\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}\right] \mathbf{// \ MatrixForm;}$$

**Print["A = ", Simplify[A] // MatrixForm]**

$$A = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ (-1+e)^2 & e^2 & \frac{1}{2}(-1+e^2) \\ 2(-1+e) & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

# ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
# ΕΥΡΕΣΗΣ ΤΗΣ JORDAN ΚΑΝΟΝΙΚΗΣ ΜΟΡΦΗΣ
# ΕΝΟΣ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΟΥ ΠΙΝΑΚΑ

```
(* Jordan Form of a square matrix A *)

Clear[p, r, rd, mo, A, AA, zerokmax, J, JJ, Jstar];
Clear[S, Rerd, Imrd, MatRerd, MatImrd];
A =.; AA =.; rankAA =.; georank =.; r =.;
rd =.; m0 =.; Imrd =.; Rerd =.;
J =.; S =.;
rd =.;

(* The given matrix nxn A is : *)
(* Multiple Real Eigenvalues with Algebraic ≠ Geometric*)
```

(* A= $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$; *)

```
(* Multiple Real Eigenvalues with Algebraic ≠ Geometric*)
```

(* A= $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$;*)

```
(*Multiple Real Eigenvalues with Algebraic ≠ Geometric *)
```

(* A= $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$; *)

```
(* Multiple Real Eigenvalues with Algebraic ≠ Geometric*)
```

(* A= $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; *)

```
(* Multiple Real Eigenvalues with Algebraic ≠ Geometric*)
```

(* A= $\begin{pmatrix} 2 & 4 & -6 & 0 \\ 4 & 6 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & -6 & 2 \end{pmatrix}$; *)

```
(* Multiple Real Eigenvalues with Algebraic ≠ Geometric*)
```

**A** = $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 6 & 1 & -1 & 1 \\ -6 & -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$;

```
(* Multiple Real Eigenvalues with Algebraic ≠ Geometric*)
```

$$(*A=\begin{pmatrix}-4 & 4 & 2\\ -1 & 1 & 1\\ -5 & 4 & 3\end{pmatrix};*)$$

```
(* Single Real and Integer Eigenvalues *)
```

$$(*A=\begin{pmatrix}1 & -5 & -3\\ 0 & 3 & -2\\ 0 & -5 & 0\end{pmatrix};*)$$

```
(* Single Real and no Integer Eigenvalues *)
```

$$(*\ A=\begin{pmatrix}-4 & 4 & 1\\ -1 & 1 & 1\\ -5 & 4 & 3\end{pmatrix};\ *)$$

```
(* Single Real and Integer Eigenvalues *)
```

$$(*\ A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 0\\ 2 & -2 & 0\end{pmatrix};\ *)$$

```
(* Multiple Real Eigenvalues with Algebraic = Geometric*)
```

$$(*\ A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 6 & 4 & -3\\ 2 & 0 & 3\end{pmatrix};\ *)$$

```
(* Multiple Real Eigenvalues with Algebraic = Geometric*)
```

$$(*A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 0 & -2\\ 3 & 0 & -3\end{pmatrix};*)$$

```
(* Multiple Real Eigenvalues with Algebraic = Geometric*)
```

$$(*A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 3 & 1 & 3\end{pmatrix};*)$$

```
(* Multiple Real Eigenvalues with Algebraic = Geometric*)
```

$$(*\ A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix};\ *)$$

```
(* Multiple Real Eigenvalues with Algebraic = Geometric*)
```

$$(*\ A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & i & -1 & -i\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -i & -1 & i\end{pmatrix};\ *)$$

```
(* Complex Eigenvalues *)
```

$$(*\ A=\begin{pmatrix}-4 & 4 & 1.\\ -1 & 1 & 3.\\ 1 & 5 & 13.\end{pmatrix};\ *)$$

```
(* Complex Eigenvalues *)
```

$$(*\ A=\begin{pmatrix}1 & -5 & -3\\ 0 & 3 & -2\\ 0 & 5 & 0\end{pmatrix};\ *)$$

```
nn =.; nn = Dimensions[A][[1]];
IIn =.; IIn = IdentityMatrix[nn];
Onn = Table[0, {i, 1, nn}, {j, 1, nn}];

Print["\nThe given matrix A is :"];
Print["A = ", A // MatrixForm];

(* The Characteristic Polynomial of matrix A *)
p[x_] := CharacteristicPolynomial[A, x];
Print["\nThe Characteristic Polynomial of matrix A is :"];
Print["  p(x) =  ", TraditionalForm[p[x]]];

(* The EigenValues of matrix A and
          their algebric multiplicity *)
eigA =.; eigA = Eigenvalues[A];
eigS =.; eigS = Eigensystem[A];
Do[r[i] = eigA[[i]], {i, 1, nn}];
rd[1] = r[1]; k = 1; mo[k] = 1;
Do[If[r[i] == r[i - 1],
   {rd[k] = r[i]; mo[k] = mo[k] + 1},
   {k = k + 1; rd[k] = r[i]; mo[k] = 1}];
  kmax = k, {i, 2, nn}];

(* The type of the Roots of
             Characteristic Polynomial *)
Do[Rerd[i] = Chop[Re[rd[i]]];
  Imrd[i] = Chop[Im[rd[i]]], {i, 1, kmax}];
MatImrd = Table[Imrd[i], {i, 1, kmax}];
MatRerd = Table[Rerd[i], {i, 1, kmax}];

(* The Rank of the matrices (A-xi*In)^m *)
Do[{AA[i, j] = MatrixPower[A - rd[i] * IIn, j];
   rankAA[i, j] = MatrixRank[AA[i, j]];},
  {i, 1, kmax}, {j, 1, nn}];

(* The Algebraic and Geometric Multiplicity
                            of the EigenValues *)
Print["\nThe Eigenvalues of matrix A are :"];
Do[georank[i] = nn - rankAA[i, nn];
  go[i] = nn - rankAA[i, 1];
  Print["x", i, " = ", rd[i],
   " with Algebraic multiplicity ", mo[i],
   " and Geometric ", go[i] ], {i, 1, kmax}];
```

```
(* The Eigensystem of the matrix A *)
Print["\nThe Eigensystem of matrix A is :"];
Print[Transpose[eigS] // MatrixForm];

(* madif=the matrix of differences
          algebric-geometric multiplicity *)
madif = Table[mo[i] - go[i], {i, 1, kmax}];

(* zerokmax=zero collumn of dim kmax *)
zerokmax = Table[0, {i, 1, kmax}];


(* Case 1 : Single Eigenvalues *)
If[(kmax == nn),
  B =.; B = JordanDecomposition[A];
  J = B[[2]]; S = B[[1]];
  Print["\nThe Eigenvalues of matrix A are Single, so"];
  Print["\nThe Jordan Canonical form is Diagonal and it is :"];
  Print["  J = ", J // MatrixForm]];

(* Case 2 : Multiple Eigenvalues with same
           Algebraic and Geometric Multiplicity *)
If[(kmax < nn) && (madif == zerokmax),
  B =.; B = JordanDecomposition[A];
  J = B[[2]]; S = B[[1]];
  Print["Some of the Eigenvalues of the Matrix A are multiple with the same"];
  Print["Algeraic and Geometric Multiplicity, so"];
  Print["\nThe Jordan Canonical form is Diagonal and it is :"];
  Print["  J = ", J // MatrixForm];];

(* Case 3 : Multiple Eigenvalues with different
           Algebraic and Geometric Multiplicity *)
If[(madif ≠ zerokmax),
  B =.; B = JordanDecomposition[A];
  J = B[[2]]; S = B[[1]];
  Print["\nSome of the Eigenvalues of the matrix A are multiple with different"];
  Print["Algeraic and Geometric Multiplicity, so"];
  Print["The Jordan Canonical form is not Diagonal and it is :"];
  Print["  J = ", J // MatrixForm];];
```

## ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΑΦΟΡΟΥΣ ΠΙΝΑΚΕΣ

### ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

The given matrix A is :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

The Characteristic Polynomial of matrix A is :

$$p(x) = -x^3 + 4x^2 + 7x - 10$$

The Eigenvalues of matrix A are :

x1 = 5 with Algebraic multiplicity 1 and Geometric 1

x2 = −2 with Algebraic multiplicity 1 and Geometric 1

x3 = 1 with Algebraic multiplicity 1 and Geometric 1

The Eigensystem of matrix A is :

$$\begin{pmatrix} 5 & \{1, -2, 2\} \\ -2 & \{25, 6, 15\} \\ 1 & \{1, 0, 0\} \end{pmatrix}$$

The Eigenvalues of matrix A are Single, so

The Jordan Canonical form is Diagonal and it is :

$$J = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2**

The given matrix A has real elements

The Characteristic Polynomial of matrix A is :

$p(x) = -x^3 + 5x^2 - 9x + 5$

The Eigenvalues of matrix A are :

x1 = $2 + i$ with Algebraic multiplicity 1 and Geometric 1

x2 = $2 - i$ with Algebraic multiplicity 1 and Geometric 1

x3 = 1 with Algebraic multiplicity 1 and Geometric 1

The Jordan blocks are

$J_1 = [1]$ and $J_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, so

The Jordan Canonical Form is

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3**

The given matrix A is :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

The Characteristic Polynomial of matrix A is :

$$p(x) = x^4 - 4x^3 + 16x - 16$$

The Eigenvalues of matrix A are :

x1 = −2 with Algebraic multiplicity 1 and Geometric 1

x2 = 2 with Algebraic multiplicity 3 and Geometric 3

The Eigensystem of matrix A is :

$$\begin{pmatrix} -2 & \{-1, 1, 1, 1\} \\ 2 & \{1, 0, 0, 1\} \\ 2 & \{1, 0, 1, 0\} \\ 2 & \{1, 1, 0, 0\} \end{pmatrix}$$

Some of the Eigenvalues of the Matrix A are multiple with the same Algeraic and Geometric Multiplicity, so

The Jordan Canonical form is Diagonal and it is :

$$J = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4**

The given matrix A is :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 6 & 1 & -1 & 1 \\ -6 & -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

The Characteristic Polynomial of matrix A is :

$$p(x) = x^4 - 7x^3 + 9x^2 + 27x - 54$$

The Eigenvalues of matrix A are :

x1 = 3 with Algebraic multiplicity 3 and Geometric 2

x2 = −2 with Algebraic multiplicity 1 and Geometric 1

The Eigensystem of matrix A is :

$$\begin{pmatrix} 3 & \{0, -1, 0, 1\} \\ 3 & \{1, -2, 1, 0\} \\ 3 & \{0, 0, 0, 0\} \\ -2 & \{0, 0, -1, 1\} \end{pmatrix}$$

Some of the Eigenvalues of the matrix A are multiple with different

Algeraic and Geometric Multiplicity, so

The Jordan Canonical form is not Diagonal and it is :

$$J = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5**

The given matrix A is :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix}$$

The Characteristic Polynomial of matrix A is :

$$p(x) = x^4 - (2 + 2i)x^3 - (4 - 4i)x^2 + (8 + 8i)x - 16i$$

The Eigenvalues of matrix A are :

x1 = $-2$ with Algebraic multiplicity 1 and Geometric 1

x2 = $2i$ with Algebraic multiplicity 1 and Geometric 1

x3 = 2 with Algebraic multiplicity 2 and Geometric 2

The Eigensystem of matrix A is :

$$\begin{pmatrix} -2 & \{-1, 1, 1, 1\} \\ 2i & \{0, -1, 0, 1\} \\ 2 & \{2, 1, 0, 1\} \\ 2 & \{1, 0, 1, 0\} \end{pmatrix}$$

Some of the Eigenvalues of the Matrix A are multiple with the same Algeraic and Geometric Multiplicity, so

The Jordan Canonical form is Diagonal and it is :

$$J = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6**

The given matrix A is :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -6 & 0 \\ 4 & 6 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & -6 & 2 \end{pmatrix}$$

The Characteristic Polynomial of matrix A is :

$$p(x) = x^4 - 14x^3 + 68x^2 - 136x + 96$$

The Eigenvalues of matrix A are :

x1 = 6 with Algebraic multiplicity 1 and Geometric 1

x2 = 4 with Algebraic multiplicity 1 and Geometric 1

x3 = 2 with Algebraic multiplicity 2 and Geometric 1

The Eigensystem of matrix A is :

$$\begin{pmatrix} 6 & \{1, 1, 0, 1\} \\ 4 & \{0, 3, 2, 0\} \\ 2 & \{1, 0, 0, 1\} \\ 2 & \{0, 0, 0, 0\} \end{pmatrix}$$

Some of the Eigenvalues of the matrix A are multiple with different

Algeraic and Geometric Multiplicity, so

The Jordan Canonical form is not Diagonal and it is :

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

# ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
# ΕΥΡΕΣΗΣ ΤΟΥ ΠΙΝΑΚΑ $e^{At}$

```
(* Exponential Matrix of the Square matrix At *)

Clear[p, r, rd, mo, A, AA, zerokmax, J, JJ, Jstar];
Clear[S, Rerd, Imrd, MatRerd, MatImrd];
A =.; AA =.; rankAA =.; georank =.; r =.;
rd =.; m0 =.; Imrd =.; Rerd =.;
J =.; S =.;
rd =.;
```

## (* ΔΙΑΦΟΡΟΙ ΠΙΝΑΚΕΣ *)

```
(* The given matrix nxn A is : *)
(* Multiple Real Eigenvalues with Algebraic ≠ Geometric*)
```

(* A= $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$; *)

```
(* Multiple Real Eigenvalues with Algebraic ≠ Geometric*)
```

(* A= $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$;*)

```
(*Multiple Real Eigenvalues with Algebraic ≠ Geometric *)
```

(* A= $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$; *)

```
(* Multiple Real Eigenvalues with Algebraic ≠ Geometric*)
```

(* A= $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; *)

```
(* Multiple Real Eigenvalues with Algebraic ≠ Geometric*)
```

$$(*\quad A=\begin{pmatrix}2&4&-6&0\\4&6&-3&-4\\0&0&4&0\\0&4&-6&2\end{pmatrix};\ *)$$

```
(* Multiple Real Eigenvalues with Algebraic ≠ Geometric*)
```

$$(*\quad A=\begin{pmatrix}4&1&1&1\\-1&2&-1&-1\\6&1&-1&1\\-6&-1&4&2\end{pmatrix};\ *)$$

```
(* Multiple Real Eigenvalues with Algebraic ≠ Geometric*)
```

$$(*A=\begin{pmatrix}-4&4&2\\-1&1&1\\-5&4&3\end{pmatrix};*)$$

```
(* Multiple Real Eigenvalues with Algebraic = Geometric*)
```

$$(*A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\3&1&3\end{pmatrix};*)$$

```
(* Multiple Real Eigenvalues with Algebraic = Geometric*)
```

$$(*\ A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix};\ *)$$

```
(* Complex Eigenvalues with Algebraic = Geometric*)
```

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&i&-1&-i\\1&-1&1&-1\\1&-i&-1&i\end{pmatrix};$$

```
(* Complex Eigenvalues with Algebraic = Geometric**)
```

$$(*\ A=\begin{pmatrix}-4&4&1.\\-1&1&3.\\1&5&13.\end{pmatrix};\ *)$$

```
(* Complex Eigenvalues with Algebraic = Geometric**)
```

$$(*\ A=\begin{pmatrix}1&-5&-3\\0&3&-2\\0&1&1\end{pmatrix};\ *)$$

```
(* Complex Eigenvalues with Algebraic = Geometric**)
```

$$(*\ A=\begin{pmatrix}4&1\\-13&-2\end{pmatrix};\ *)$$

```
(* Complex Eigenvalues with Algebraic = Geometric**)
```

$$(*\ A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & -13 & -2 \end{pmatrix};\ *)$$

```
(* Complex Eigenvalues with Algebraic = Geometric*)
```

$$(*A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ -13 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -13 & -2 \end{pmatrix};\ *)$$

(* ΟΡΙΣΜΟΣ ΜΗΔΕΝΙΚΟΥ ΚΑΙ ΜΟΝΑΔΙΑΙΟΥ ΠΙΝΑΚΑ ΚΑΘΩΣ ΚΑΙ ΕΥΡΕΣΗ, ΤΗΣ ΔΙΑΣΤΑΣΗΣ ΤΟΥ Α, ΤΟ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟ ΚΑΙ ΤΟ ΦΑΝΤΑΣΤΙΚΟ ΤΟΥ ΜΕΡΟΣ*)

```
nn =.; nn = Dimensions[A][[1]];
IIn =.; IIn = IdentityMatrix[nn];
Onn = Table[0, {i, 1, nn}, {j, 1, nn}];
zeronn = Table[0, {i, 1, nn}];
Clear[ReA, ImA];
ReA = Re[A]; ImA = Im[A];

Print["\nThe given matrix A is :"];
Print["A = ", A // MatrixForm];

(* Case 1, The matrix A has real elements *)

If[ImA == Onn,
 {Print["\nThe given matrix A has real elements"];

(* The Characteristic Polynomial of matrix A *)
p[x_] := CharacteristicPolynomial[A, x];
Print["\nThe Characteristic Polynomial of matrix A is :"];
Print["  p(x) =  ", TraditionalForm[p[x]]];
```

```
(* The EigenValues of matrix A and
          their algebric multiplicity *)
Clear[r, rd];
eigA =.; eigA = Eigenvalues[A];
eigS =.; eigS = Eigensystem[A];
Do[r[i] = eigA[[i]], {i, 1, nn}];
rd[1] = r[1]; k = 1; mo[k] = 1;
Do[If[r[i] == r[i - 1],
   {rd[k] = r[i]; mo[k] = mo[k] + 1},
   {k = k + 1; rd[k] = r[i]; mo[k] = 1}];
  kmax = k, {i, 2, nn}];
Do[Prr[i] = Re[r[i]]; Far[i] = Im[r[i]], {i, 1, nn}];
Fanta = Table[Far[i], {i, 1, nn}];

(* The type of the Roots of
             Characteristic Polynomial *)
Do[Rerd[i] = Chop[Re[rd[i]]];
  Imrd[i] = Chop[Im[rd[i]]], {i, 1, kmax}];
MatImrd = Table[Imrd[i], {i, 1, kmax}];
MatRerd = Table[Rerd[i], {i, 1, kmax}];

(* The Rank of the matrices (A-xi*In)^m *)
Do[{AA[i, j] = MatrixPower[A - rd[i] * IIn, j];
   rankAA[i, j] = MatrixRank[AA[i, j]];},
  {i, 1, kmax}, {j, 1, nn}];

(* The Algebraic and Geometric Multiplicity
                            of the EigenValues *)
Print["\nThe Eigenvalues of matrix A are :"];
Do[georank[i] = nn - rankAA[i, nn];
  go[i] = nn - rankAA[i, 1];
  Print["x", i, " = ", rd[i],
   " with Algebraic multiplicity ", mo[i],
   " and Geometric ", go[i] ], {i, 1, kmax}];

(* The Eigensystem of the matrix A *)
Print["\nThe Eigensystem of matrix A is :"];
Print[Transpose[eigS] // MatrixForm];
```

(* ΕΛΕΓΧΟΣ ΑΝ ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΚΑΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΠΟΛΛΑΠΛΟΤΗΤΑ ΕΙΝΑΙ ΙΣΕΣ*)

```
(* madif=the matrix of differences
          algebric-geometric multiplicity *)
madif = Table[mo[i] - go[i], {i, 1, kmax}];

(* zerokmax=zero collumn of dim kmax *)
zerokmax = Table[0, {i, 1, kmax}];

(* Case 1 : Single Eigenvalues *)
If[(kmax == nn) && (Fanta == zeronn),
  B =.; B = JordanDecomposition[A];
  J = B[[2]]; S = B[[1]];
  Print["\nThe Eigenvalues of matrix A are Single, so"];
  Print["The Jordan Canonical form is Diagonal and it is :"];
  Print["  J = ", J // MatrixForm, ", so e^J = ", MatrixExp[J] // MatrixForm];
  Print["and finaly e^Jt = ", MatrixExp[J * t] // MatrixForm];
  (* The Similarity Matrix S which satisfies S^-1.A.S=J *)
  Print["\nThe Similarity Matrix S which satisfies S^-1.A.S = J is :"];
  Print["  S = ", S // MatrixForm, " , so  S^-1 = ", Inverse[S] // MatrixForm];];


(* Case 2 : Multiple Eigenvalues with same
          Algebraic and Geometric Multiplicity *)
If[(kmax < nn) && (madif == zerokmax) && (Fanta == zeronn),
  B =.; B = JordanDecomposition[A];
  J = B[[2]]; S = B[[1]];
  Print["Some of the Eigenvalues of the Matrix A are multiple with the same"];
  Print["Algeraic and Geometric Multiplicity, so"];
  Print["The Jordan Canonical form is Diagonal and it is :"];
  Print["  J = ", J // MatrixForm, ", so e^J = ", MatrixExp[J] // MatrixForm];
  Print["and finaly e^Jt = ", MatrixExp[J * t] // MatrixForm];
  (* The Similarity Matrix S which satisfies S^-1.A.S=J *)
  Print["\nThe Similarity Matrix S which satisfies S^-1.A.S = J is :"];
  Print["  S = ", S // MatrixForm, " , so  S^-1 = ", Inverse[S] // MatrixForm];];
```

```
(* Case 3 : Multiple Eigenvalues with different
           Algebraic and Geometric Multiplicity *)
If[(madif ≠ zerokmax) && (Fanta == zeronn),
  B =.; B = JordanDecomposition[A];
  J = B[[2]]; S = B[[1]];
  Print["Some of Eigenvalues of the matrix A are multiple with different"];
  Print["Algeraic and Geometric Multiplicity, so"];
  Print["The Jordan Canonical form is not Diagonal and it is :"];
  Print["  J = ", J // MatrixForm, ", so e^J = ", MatrixExp[J] // MatrixForm];
  Print["and finaly e^Jt = ", MatrixExp[J * t] // MatrixForm];
  (* The Similarity Matrix S which satisfies S^-1.A.S=J *)
  Print["\nThe Similarity Matrix S which satisfies S^-1.A.S = J is :"];
  Print["  S = ", S // MatrixForm, " , so  S^-1 = ", Inverse[S] // MatrixForm];];

(* Case 4 : Complex Eigenvalues  *)
Clear[JJ];
If[(Fanta ≠ zeronn),
 B =.; B = JordanDecomposition[A];
 J = B[[2]]; S = B[[1]];
 Do[If[Im[r[i]] ≠ 0., JJ[i] = {{Re[r[i]], Im[r[i]]}, {-Im[r[i]], Re[r[i]]}}], {i, 1, nn}];
 Do[If[Im[r[i]] == 0., JJ[i] = {{r[i]}}], {i, 1, nn}];

Print["\nSome of Eigenvalues of the matrix A are complex"];
Print["\nThe Jordan blocks are "];
Do[Print["J", (i + 1) / 2, "=", JJ[i] // MatrixForm,
   "  with  Exp[J", (i + 1) / 2, "*t]=",
   MatrixExp[JJ[i] * t] // MatrixForm], {i, 1, nn, 2}];


Print["\nThe Jordan Canonical form in C is :"];
  Print["  J = ", J // MatrixForm, ", so e^J = ", MatrixExp[J] // MatrixForm];
  Print["and finaly e^Jt = ", MatrixExp[J * t] // MatrixForm];
  (* The Similarity Matrix S which satisfies S^-1.A.S=J *)
  Print["\nThe Similarity Matrix S in C is :"];
  Print["  S = ", S // MatrixForm, " , so  S^-1 = ", Inverse[S] // MatrixForm];];

(* Matrix Exponential of A *)
   Print["\nThe matrix e^At = S.e^Jt.S^-1  is :"];
   Print["e^At = S.e^Jt.S^-1 = ", MatrixExp[A * t] // MatrixForm];
   }];
```

```
(* Case 2, The matrix A has complex elements *)

If[ImA ≠ Onn,
 {Print["\nThe given matrix A has complex elements"];

(* The Characteristic Polynomial of matrix A *)
p[x_] := CharacteristicPolynomial[A, x];
Print["\nThe Characteristic Polynomial of matrix A is :"];
Print["  p(x) =  ", TraditionalForm[p[x]]];

(* The EigenValues of matrix A and
          their algebric multiplicity *)
Clear[r, rd];
eigA =.; eigA = Eigenvalues[A];
eigS =.; eigS = Eigensystem[A];
Do[r[i] = eigA[[i]], {i, 1, nn}];
rd[1] = r[1]; k = 1; mo[k] = 1;
Do[If[r[i] == r[i - 1],
   {rd[k] = r[i]; mo[k] = mo[k] + 1},
   {k = k + 1; rd[k] = r[i]; mo[k] = 1}];
  kmax = k, {i, 2, nn}];
Do[Prr[i] = Re[r[i]]; Far[i] = Im[r[i]], {i, 1, nn}];
Fanta = Table[Far[i], {i, 1, nn}];

(* The type of the Roots of
             Characteristic Polynomial *)
Do[Rerd[i] = Chop[Re[rd[i]]];
  Imrd[i] = Chop[Im[rd[i]]], {i, 1, kmax}];
MatImrd = Table[Imrd[i], {i, 1, kmax}];
MatRerd = Table[Rerd[i], {i, 1, kmax}];

(* The Rank of the matrices (A-xi*In)^m *)
Do[{AA[i, j] = MatrixPower[A - rd[i] * IIn, j];
   rankAA[i, j] = MatrixRank[AA[i, j]];},
  {i, 1, kmax}, {j, 1, nn}];
```

```
(* The Algebraic and Geometric Multiplicity
                              of the EigenValues *)
Print["\nThe Eigenvalues of matrix A are :"];
Do[georank[i] = nn - rankAA[i, nn];
  go[i] = nn - rankAA[i, 1];
  Print["x", i, " = ", rd[i],
   " with Algebraic multiplicity ", mo[i],
   " and Geometric ", go[i] ], {i, 1, kmax}];

(* The Eigensystem of the matrix A *)
Print["\nThe Eigensystem of matrix A is :"];
Print[Transpose[eigS] // MatrixForm];

(* madif=the matrix of differences
          algebric-geometric multiplicity *)
madif = Table[mo[i] - go[i], {i, 1, kmax}];

(* zerokmax=zero collumn of dim kmax *)
zerokmax = Table[0, {i, 1, kmax}];

If[(kmax == nn) && (Fanta == zeronn),
  B =.; B = JordanDecomposition[A];
  J = B[[2]]; S = B[[1]];
  Print["\nThe Eigenvalues of matrix A are Single, so"];
  Print["The Jordan Canonical form is Diagonal and it is :"];
  Print["  J = ", J // MatrixForm, ", so e^J = ", MatrixExp[J] // MatrixForm];
  Print["and finaly e^Jt = ", MatrixExp[J * t] // MatrixForm];
  (* The Similarity Matrix S which satisfies S^-1.A.S=J *)
  Print["\nThe Similarity Matrix S which satisfies S^-1.A.S = J is :"];
  Print["  S = ", S // MatrixForm, " , so  S^-1 = ", Inverse[S] // MatrixForm];];
```

```
(* Case 2 : Multiple Eigenvalues with same
          Algebraic and Geometric Multiplicity *)
If[(kmax < nn) && (madif == zerokmax) && (Fanta == zeronn),
  B =.; B = JordanDecomposition[A];
  J = B[[2]]; S = B[[1]];
  Print["Some of the Eigenvalues of the Matrix A are multiple with the same"];
  Print["Algeraic and Geometric Multiplicity, so"];
  Print["The Jordan Canonical form is Diagonal and it is :"];
  Print["  J = ", J // MatrixForm, ", so e^J = ", MatrixExp[J] // MatrixForm];
  Print["and finaly e^Jt = ", MatrixExp[J * t] // MatrixForm];
  (* The Similarity Matrix S which satisfies S^-1.A.S=J *)
  Print["\nThe Similarity Matrix S which satisfies S^-1.A.S = J is :"];
  Print["  S = ", S // MatrixForm, " , so  S^-1 = ", Inverse[S] // MatrixForm];];

(* Case 3 : Multiple Eigenvalues with different
          Algebraic and Geometric Multiplicity *)
If[(madif ≠ zerokmax) && (Fanta == zeronn),
  B =.; B = JordanDecomposition[A];
  J = B[[2]]; S = B[[1]];
  Print["Some of Eigenvalues of the matrix A are multiple with different"];
  Print["Algeraic and Geometric Multiplicity, so"];
  Print["The Jordan Canonical form is not Diagonal and it is :"];
  Print["  J = ", J // MatrixForm, ", so e^J = ", MatrixExp[J] // MatrixForm];
  Print["and finaly e^Jt = ", MatrixExp[J * t] // MatrixForm];
  (* The Similarity Matrix S which satisfies S^-1.A.S=J *)
  Print["\nThe Similarity Matrix S which satisfies S^-1.A.S = J is :"];
  Print["  S = ", S // MatrixForm, " , so  S^-1 = ", Inverse[S] // MatrixForm];];



(* Jordan Canonical Form *)
B =.; B = JordanDecomposition[A];
J = B[[2]]; S = B[[1]];
Print["\nThe Jordan Canonical form in C is :"];
Print["  J = ", J // MatrixForm, ", so e^J = ", MatrixExp[J] // MatrixForm];
Print["and finaly e^Jt = ", MatrixExp[J * t] // MatrixForm];

(* The Similarity Matrix S which satisfies S^-1.A.S=J *)
Print["\nThe Similarity Matrix S in C is :"];
Print["  S = ", S // MatrixForm, " , so  S^-1 = ", Inverse[S] // MatrixForm];
```

```
(* Matrix Exponential of A *)
  Print["\nThe matrix e^At = S.e^Jt.S^-1  is :"];
  Print["e^At = S.e^Jt.S^-1 = ", MatrixExp[A*t] // MatrixForm];
  }];
```

# ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΑΦΟΡΟΥΣ ΠΙΝΑΚΕΣ

## ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

The given matrix A is :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

The Characteristic Polynomial of matrix A is :

$$p(x) = -x^3 + 4x^2 + 7x - 10$$

The Eigenvalues of matrix A are :

x1 = 5 with Algebraic multiplicity 1 and Geometric 1

x2 = −2 with Algebraic multiplicity 1 and Geometric 1

x3 = 1 with Algebraic multiplicity 1 and Geometric 1

The Eigensystem of matrix A is :

$$\begin{pmatrix} 5 & \{1, -2, 2\} \\ -2 & \{25, 6, 15\} \\ 1 & \{1, 0, 0\} \end{pmatrix}$$

The Eigenvalues of matrix A are Single, so

The Jordan Canonical form is Diagonal and it is :

$$J = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \text{ so } e^J = \begin{pmatrix} \frac{1}{e^2} & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & e^5 \end{pmatrix}$$

$$\text{and finaly } e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{5t} \end{pmatrix}$$

The Similarity Matrix S which satisfies $S^{-1}.A.S = J$ is :

$$S = \begin{pmatrix} 25 & 1 & 1 \\ 6 & 0 & -2 \\ 15 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \text{ so } S^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{21} & \frac{1}{21} \\ 1 & -\frac{5}{6} & -\frac{4}{3} \\ 0 & -\frac{5}{14} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

The matrix $e^{At} = S.e^{Jt}.S^{-1}$ is :

$$e^{At} = S.e^{Jt}.S^{-1} = \begin{pmatrix} e^t & -\frac{5}{42} e^{-2t}(-10 + 7e^{3t} + 3e^{7t}) & \frac{1}{21} e^{-2t}(25 - 28e^{3t} + 3e^{7t}) \\ 0 & \frac{1}{7} e^{-2t}(2 + 5e^{7t}) & -\frac{2}{7} e^{-2t}(-1 + e^{7t}) \\ 0 & -\frac{5}{7} e^{-2t}(-1 + e^{7t}) & \frac{1}{7} e^{-2t}(5 + 2e^{7t}) \end{pmatrix}$$

## ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

The given matrix A is :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

The given matrix A has real elements

The Characteristic Polynomial of matrix A is :

$$p(x) = -x^3 + 5x^2 - 9x + 5$$

The Eigenvalues of matrix A are :

x1 = $2 + i$ with Algebraic multiplicity 1 and Geometric 1

x2 = $2 - i$ with Algebraic multiplicity 1 and Geometric 1

x3 = 1 with Algebraic multiplicity 1 and Geometric 1

The Eigensystem of matrix A is :

$$\begin{pmatrix} 2+i & \left\{-\frac{13}{2} + \frac{3i}{2},\ 1+i,\ 1\right\} \\ 2-i & \left\{-\frac{13}{2} - \frac{3i}{2},\ 1-i,\ 1\right\} \\ 1 & \{1,\ 0,\ 0\} \end{pmatrix}$$

Some of Eigenvalues of the matrix A are complex

The Jordan blocks are

$$J1=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ with } \mathrm{Exp}[J1*t]=\begin{pmatrix} e^{2t}\mathrm{Cos}[t] & e^{2t}\mathrm{Sin}[t] \\ -e^{2t}\mathrm{Sin}[t] & e^{2t}\mathrm{Cos}[t] \end{pmatrix}$$

$$J2=(1) \text{ with } \mathrm{Exp}[J2*t]=(e^{t})$$

The Jordan Canonical form in C is :

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2-i & 0 \\ 0 & 0 & 2+i \end{pmatrix}, \text{ so } e^{J} = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & e^{2-i} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2+i} \end{pmatrix}$$

and finaly $e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{(2-i)t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{(2+i)t} \end{pmatrix}$

The Similarity Matrix S in C is :

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{13}{2} - \frac{3i}{2} & -\frac{13}{2} + \frac{3i}{2} \\ 0 & 1-i & 1+i \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ so } S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & 8 \\ 0 & \frac{i}{2} & \frac{1}{2} - \frac{i}{2} \\ 0 & -\frac{i}{2} & \frac{1}{2} + \frac{i}{2} \end{pmatrix}$$

The matrix $e^{At} = S.e^{Jt}.S^{-1}$ is :

$$e^{At} = S.e^{Jt}.S^{-1} = \begin{pmatrix} e^{t} & \frac{1}{2}e^{t}\left(-3 + 3e^{t}\mathrm{Cos}[t] - 13e^{t}\mathrm{Sin}[t]\right) & -e^{t}\left(-8 + 8e^{t}\mathrm{Cos}[t] - 5e^{t}\mathrm{Sin}[t]\right) \\ 0 & e^{2t}(\mathrm{Cos}[t] + \mathrm{Sin}[t]) & -2e^{2t}\mathrm{Sin}[t] \\ 0 & e^{2t}\mathrm{Sin}[t] & e^{2t}(\mathrm{Cos}[t] - \mathrm{Sin}[t]) \end{pmatrix}$$

## ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3

The given matrix A is :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

The Characteristic Polynomial of matrix A is :

$p(x) = x^4 - 4x^3 + 16x - 16$

The Eigenvalues of matrix A are :

x1 = −2 with Algebraic multiplicity 1 and Geometric 1

x2 = 2 with Algebraic multiplicity 3 and Geometric 3

The Eigensystem of matrix A is :

$$\begin{pmatrix} -2 & \{-1, 1, 1, 1\} \\ 2 & \{1, 0, 0, 1\} \\ 2 & \{1, 0, 1, 0\} \\ 2 & \{1, 1, 0, 0\} \end{pmatrix}$$

Some of the Eigenvalues of the Matrix A are multiple with the same

Algeraic and Geometric Multiplicity, so

The Jordan Canonical form is Diagonal and it is :

$$J = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \text{ so } e^J = \begin{pmatrix} \frac{1}{e^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^2 \end{pmatrix}$$

$$\text{and finaly } e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$$

The Similarity Matrix S which satisfies $S^{-1}$.A.S = J is :

$$S = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ so } S^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

The matrix $e^{At} = S.e^{Jt}.S^{-1}$ is :

$$e^{At} = S.e^{Jt}.S^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}e^{-2t}(1+3e^{4t}) & \frac{1}{4}e^{-2t}(-1+e^{4t}) & \frac{1}{4}e^{-2t}(-1+e^{4t}) & \frac{1}{4}e^{-2t}(-1+e^{4t}) \\ \frac{1}{4}e^{-2t}(-1+e^{4t}) & \frac{1}{4}e^{-2t}(1+3e^{4t}) & -\frac{1}{4}e^{-2t}(-1+e^{4t}) & -\frac{1}{4}e^{-2t}(-1+e^{4t}) \\ \frac{1}{4}e^{-2t}(-1+e^{4t}) & -\frac{1}{4}e^{-2t}(-1+e^{4t}) & \frac{1}{4}e^{-2t}(1+3e^{4t}) & -\frac{1}{4}e^{-2t}(-1+e^{4t}) \\ \frac{1}{4}e^{-2t}(-1+e^{4t}) & -\frac{1}{4}e^{-2t}(-1+e^{4t}) & -\frac{1}{4}e^{-2t}(-1+e^{4t}) & \frac{1}{4}e^{-2t}(1+3e^{4t}) \end{pmatrix}$$

## ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4

The given matrix A is :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix}$$

The Characteristic Polynomial of matrix A is :

$$p(x) = x^4 - (2+2i)x^3 - (4-4i)x^2 + (8+8i)x - 16i$$

The Eigenvalues of matrix A are :

x1 = $-2$ with Algebraic multiplicity 1 and Geometric 1

x2 = $2i$ with Algebraic multiplicity 1 and Geometric 1

x3 = 2 with Algebraic multiplicity 2 and Geometric 2

The Eigensystem of matrix A is :

$$\begin{pmatrix} -2 & \{-1, 1, 1, 1\} \\ 2i & \{0, -1, 0, 1\} \\ 2 & \{2, 1, 0, 1\} \\ 2 & \{1, 0, 1, 0\} \end{pmatrix}$$

Some of the Eigenvalues of the Matrix A are multiple with the same

Algeraic and Geometric Multiplicity, so

The Jordan Canonical form is Diagonal and it is :

$$J = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \text{ so } e^J = \begin{pmatrix} \frac{1}{e^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^2 \end{pmatrix}$$

$$\text{and finaly } e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2it} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$$

The Similarity Matrix S which satisfies $S^{-1}.A.S = J$ is :

$$S = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ so } S^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

The matrix $e^{\mathrm{At}} = \mathrm{S}.e^{\mathrm{Jt}}.S^{-1}$ is :

$$e^{\mathrm{At}} = \mathrm{S}.e^{\mathrm{Jt}}.S^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} e^{-2t}\left(1 + 3 e^{4t}\right) & \frac{1}{4} e^{-2t}\left(-1 + e^{4t}\right) & \frac{1}{4} e^{-2t}\left(-1 + e^{4t}\right) & \frac{1}{4} e^{-2t}\left(-1 + e^{4t}\right) \\ \frac{1}{4} e^{-2t}\left(-1 + e^{4t}\right) & \frac{1}{4}\left(e^{-2t}\left(2 e^{2t}\cos(2t) + e^{4t} + 1\right) + 2 i \sin(2t)\right) & -\frac{1}{4} e^{-2t}\left(-1 + e^{4t}\right) & \frac{1}{4}\left(e^{-2t}\left(-2 e^{2t}\cos(2t) + e^{4t} + 1\right) - 2 i \sin(2t)\right) \\ \frac{1}{4} e^{-2t}\left(-1 + e^{4t}\right) & -\frac{1}{4} e^{-2t}\left(-1 + e^{4t}\right) & \frac{1}{4} e^{-2t}\left(1 + 3 e^{4t}\right) & -\frac{1}{4} e^{-2t}\left(-1 + e^{4t}\right) \\ \frac{1}{4} e^{-2t}\left(-1 + e^{4t}\right) & \frac{1}{4}\left(e^{-2t}\left(-2 e^{2t}\cos(2t) + e^{4t} + 1\right) - 2 i \sin(2t)\right) & -\frac{1}{4} e^{-2t}\left(-1 + e^{4t}\right) & \frac{1}{4}\left(e^{-2t}\left(2 e^{2t}\cos(2t) + e^{4t} + 1\right) + 2 i \sin(2t)\right) \end{pmatrix}$$

## ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5

The given matrix A is :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -6 & 0 \\ 4 & 6 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & -6 & 2 \end{pmatrix}$$

The Characteristic Polynomial of matrix A is :

$$p(x) = x^4 - 14x^3 + 68x^2 - 136x + 96$$

The Eigenvalues of matrix A are :

x1 = 6 with Algebraic multiplicity 1 and Geometric 1

x2 = 4 with Algebraic multiplicity 1 and Geometric 1

x3 = 2 with Algebraic multiplicity 2 and Geometric 1

The Eigensystem of matrix A is :

$$\begin{pmatrix} 6 & \{1, 1, 0, 1\} \\ 4 & \{0, 3, 2, 0\} \\ 2 & \{1, 0, 0, 1\} \\ 2 & \{0, 0, 0, 0\} \end{pmatrix}$$

Some of Eigenvalues of the matrix A are multiple with different

Algeraic and Geometric Multiplicity, so

The Jordan Canonical form is not Diagonal and it is :

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \text{ so } e^J = \begin{pmatrix} e^2 & e^2 & 0 & 0 \\ 0 & e^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^6 \end{pmatrix}$$

and finaly $e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{2t} & e^{2t}t & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{4t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{6t} \end{pmatrix}$

The Similarity Matrix S which satisfies $S^{-1}.A.S = J$ is :

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{4} & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{4} & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ so } S^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & \frac{3}{2} & 2 \\ -4 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 1 & -\frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

The matrix $e^{\mathrm{At}} = \mathrm{S}.e^{\mathrm{Jt}}.S^{-1}$ is :

$$e^{\mathrm{At}} = \mathrm{S}.e^{\mathrm{Jt}}.S^{-1} = \begin{pmatrix} e^{2t}\left(e^{4t} - 4t\right) & e^{2t}\left(-1 + e^{4t}\right) & -\frac{3}{2}\, e^{2t}\left(-1 + e^{4t}\right) & -e^{2t}\left(-4t + e^{4t} - 1\right) \\ e^{2t}\left(-1 + e^{4t}\right) & e^{6t} & -\frac{3}{2}\, e^{4t}\left(-1 + e^{2t}\right) & -e^{2t}\left(-1 + e^{4t}\right) \\ 0 & 0 & e^{4t} & 0 \\ e^{2t}\left(-4t + e^{4t} - 1\right) & e^{2t}\left(-1 + e^{4t}\right) & -\frac{3}{2}\, e^{2t}\left(-1 + e^{4t}\right) & -e^{2t}\left(-4t + e^{4t} - 2\right) \end{pmatrix}$$

## ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6

The given matrix A is :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 6 & 1 & -1 & 1 \\ -6 & -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

The Characteristic Polynomial of matrix A is :

$$p(x) = x^4 - 7x^3 + 9x^2 + 27x - 54$$

The Eigenvalues of matrix A are :

x1 = 3 with Algebraic multiplicity 3 and Geometric 2

x2 = −2 with Algebraic multiplicity 1 and Geometric 1

The Eigensystem of matrix A is :

$$\begin{pmatrix} 3 & \{0, -1, 0, 1\} \\ 3 & \{1, -2, 1, 0\} \\ 3 & \{0, 0, 0, 0\} \\ -2 & \{0, 0, -1, 1\} \end{pmatrix}$$

Some of Eigenvalues of the matrix A are multiple with different

Algeraic and Geometric Multiplicity, so

The Jordan Canonical form is not Diagonal and it is :

$$J = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \text{ so } e^J = \begin{pmatrix} \frac{1}{e^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^3 & e^3 \\ 0 & 0 & 0 & e^3 \end{pmatrix}$$

$$\text{and finaly } e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{3t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{3t} & e^{3t}t \\ 0 & 0 & 0 & e^{3t} \end{pmatrix}$$

The Similarity Matrix S which satisfies $S^{-1}$.A.S = J is :

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ so } S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

The matrix $e^{\mathrm{At}} = \mathrm{S}.e^{\mathrm{Jt}}.S^{-1}$ is :

$$e^{\mathrm{At}} = \mathrm{S}.e^{\mathrm{Jt}}.S^{-1} = \begin{pmatrix} e^{3t}(t+1) & e^{3t}t & e^{3t}t & e^{3t}t \\ -e^{3t}t & -e^{3t}(t-1) & -e^{3t}t & -e^{3t}t \\ e^{-2t}\left(e^{5t}t+e^{5t}-1\right) & e^{3t}t & e^{-2t}\left(e^{5t}t+1\right) & e^{3t}t \\ -e^{-2t}\left(e^{5t}t+e^{5t}-1\right) & -e^{3t}t & -e^{-2t}\left(e^{5t}t-e^{5t}+1\right) & -e^{3t}(t-1) \end{pmatrix}$$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7**

The given matrix A is :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

The Characteristic Polynomial of matrix A is :

$$\text{p(x)} = x^4 - 7x^3 + 13x^2 + 3x - 18$$

The Eigenvalues of matrix A are :

x1 = 3 with Algebraic multiplicity 2 and Geometric 1

x2 = 2 with Algebraic multiplicity 1 and Geometric 1

x3 = −1 with Algebraic multiplicity 1 and Geometric 1

The Eigensystem of matrix A is :

$$\begin{pmatrix} 3 & \{3, 1, 0, 0\} \\ 3 & \{0, 0, 0, 0\} \\ 2 & \{1, 0, 0, 0\} \\ -1 & \{1, -1, 2, 0\} \end{pmatrix}$$

Some of Eigenvalues of the matrix A are multiple with different

Algeraic and Geometric Multiplicity, so

The Jordan Canonical form is not Diagonal and it is :

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \text{ so } e^J = \begin{pmatrix} \frac{1}{e} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^3 & e^3 \\ 0 & 0 & 0 & e^3 \end{pmatrix}$$

$$\text{and finaly } e^{\text{Jt}} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{3t} & e^{3t}t \\ 0 & 0 & 0 & e^{3t} \end{pmatrix}$$

The Similarity Matrix S which satisfies $S^{-1}$.A.S = J is :

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -\frac{20}{7} \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{7} \end{pmatrix}, \text{ so } S^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & -3 & -2 & 22 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

The matrix $e^{\mathrm{At}} = \mathrm{S}.e^{\mathrm{Jt}}.S^{-1}$ is :

$$e^{\mathrm{At}} = \mathrm{S}.e^{\mathrm{Jt}}.S^{-1} = \begin{pmatrix} e^{2t} & 3e^{2t}(-1+e^{t}) & \frac{1}{2}e^{-t}(-1+e^{t})^{2}(1+2e^{t}+3e^{2t}) & \frac{1}{2}e^{-t}(42e^{4t}t+44e^{3t}-43e^{4t}-1) \\ 0 & e^{3t} & \frac{1}{2}e^{-t}(-1+e^{4t}) & \frac{1}{2}e^{-t}(14e^{4t}t-e^{4t}+1) \\ 0 & 0 & e^{-t} & e^{-t}(-1+e^{4t}) \\ 0 & 0 & 0 & e^{3t} \end{pmatrix}$$

# ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] Βασιλείου Π.-Χ., Τσακλίδης Γ, *Εφαρμοσμένη Θεωρία Πινάκων*, Θεσσαλονίκη 2003.

[2] Γουσίδου-Κουτίτα Μ., *Αριθμητικές Μέθοδοι με Εφαρμογές στην Θεωρία Ελέγχου.* Θεσσαλονίκη, 2002.

[3] Biswa Natha Datta, *Numerical Methods for Linear Control Systems*, Elsevier Academic Press, UK 2004.

[4] Burden R., Faires D., *Numerical Analysis*, Brooks/Cole Publishing Company, USA 1997.

[5] Petkov Christov, Konstantinov M., *Computational Methods for Linear Control Systems*, Prentice Hall International Series, UK 1991 .

[6] Rivaud J., *Linear Algebra*, Vuibert France 1978.

[7] Godement R., Cours d' Algebre, Hermann France 1973.

[8] Lipschutz S., Lipson M., *Linear Algebra*, Schaum Series, 2001.