



ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ

“ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ & ΘΕΩΡΙΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΕΛΕΓΧΟΥ”

## **Επίλυση Εξισώσεων Lyapunov με εφαρμογές στην Θεωρία Ελέγχου**

**ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ**

**Ελένη Θ. Μπαμπαλώνα**

**Επιβλέπων:** Νικόλαος Καραμπετάκης  
Επίκουρος Καθηγητής Α.Π.Θ.

Θεσσαλονίκη, Δεκέμβριος 2007





ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ  
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ  
ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ  
“ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ & ΘΕΩΡΙΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ &  
ΕΛΕΓΧΟΥ”

## **Επίλυση Εξισώσεων Lyapunov με εφαρμογές στη Θεωρία Ελέγχου**

### **ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ**

**Ελένη Θ. Μπαπαλώνα**

**Επιβλέπων:** Νικόλαος Καραμπετάκης  
Επίκουρος Καθηγητής Α.Π.Θ.

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 19η Δεκεμβρίου 2007.

.....  
Ν. Καραμπετάκης  
Επίκ. Καθηγητής Α.Π.Θ.

.....  
Α. Βαρδουλάκης  
Καθηγητής Α.Π.Θ.

.....  
Μ. Γουσίδου-Κουτίτα  
Αναπλ. Καθηγήτρια Α.Π.Θ.

Θεσσαλονίκη, Δεκέμβριος 2007

.....  
Ελένη Θ. Μπαμπαλώνα  
Πτυχιούχος Μαθηματικός Α.Π.Θ.

Copyright © Ελένη Θ. Μπαμπαλώνα, 2007.  
Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευτεί ότι εκφράζουν τις επίσημες θέσεις του Α.Π.Θ.

## ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Σκοπός της εργασίας είναι η μελέτη της εξίσωσης Lyapunov  $AX + XA^T = C$  και η εφαρμογή αυτής στη Θεωρία Ελέγχου. Η εξίσωση αυτή παρουσιάζει πολύ μεγάλο ενδιαφέρον λόγω των εφαρμογών που έχει στην Θεωρία Ελέγχου. Λύνοντας την, μπορούμε να βγάλουμε συμπεράσματα για την ευστάθεια του πίνακα A, χωρίς να υπολογίσουμε τις ιδιοτιμές του. Όμως ο πιο σημαντικός ρόλος που παίζει η εξίσωση Lyapunov, οφείλεται στο γεγονός ότι μας παρέχει μία διαδικασία εύρεσης μιάς συνάρτησης Lyapunov, για ένα οποιοδήποτε γραμμικό σύστημα  $\dot{x} = Ax$ , με την προϋπόθεση ότι ο πίνακας A είναι ευσταθής. Η δεύτερη (ή άμεση) μέθοδος Lyapunov, η οποία έχει γίνει σημαντικό θέμα έρευνας στην Θεωρία Ελέγχου, αποτελεί μία ποιοτική προσέγγιση στην ανάλυση της ευστάθειας γραμμικών και μη γραμμικών συστημάτων. Η μέθοδος αυτή ζητά την εύρεση μιάς συνάρτησης Lyapunov, η οποία έχει πολύ ειδικές ιδιότητες. Γιαυτό και η διαδικασία εύρεσης τέτοιας συνάρτησης εξακολουθεί να είναι ένα έργο τέχνης.

Η εργασία είναι χωρισμένη σε τρία κεφάλαια. Συγκεκριμένα στο πρώτο κεφάλαιο παρουσιάζουμε κάποιες βασικές εισαγωγικές έννοιες, που θα χρησιμοποιήσουμε στα επόμενα κεφάλαια και θεωρούνται πολύ βασικές για τον αναγνώστη, ώστε να κατανοήσει καλύτερα την εργασία.

Το **δεύτερο κεφάλαιο** είναι χωρισμένο σε τέσσερις ενότητες. Στην **πρώτη ενότητα** παρουσιάζουμε την πρώτη (ή έμμεση) μέθοδο Lyapunov, που μελετά την ευστάθεια ενός μη γραμμικού συστήματος, γραμμικοποιώντας το και ερευνώντας την ευστάθειά του αντίστοιχου γραμμικού συστήματος. Ορίζουμε την συνάρτηση Lyapunov και εξηγούμε τη χρήση της στο θεώρημα Lyapunov, το οποίο μας παρέχει πληροφορίες για την ανάλυση της ευστάθειας γραμμικών και μη γραμμικών συστημάτων (δεύτερη μέθοδος Lyapunov). Κατασκευάζουμε την εξίσωση Lyapunov και αναλύουμε τον τρόπο με τον οποίο η λύση της μας επιτρέπει να βγάλουμε συμπεράσματα για την ασυμπτωτική ευστάθεια γραμμικών συστημάτων. Στη συνέχεια παρουσιάζουμε μεθόδους για την επίλυση της εξίσωσης Lyapunov όπως η αριθμητική μέθοδος με χρήση της Real Schur μορφής (RSF) και ο αλγόριθμος Jameson. Στην **δεύτερη ενότητα** μελετάμε τον τρόπο με τον οποίο χρησιμοποιώντας την εξίσωση Lyapunov, αποδεικνύουμε αν ένα σύστημα είναι ελέγξιμο ή παρατηρήσιμο. Στην **τρίτη ενότητα** αναφερόμαστε στην χρήση της εξίσωσης Lyapunov στον εύρωστο έλεγχο. Στην **τέταρτη ενότητα** γίνεται λόγος για την επίλυση της γενικευμένης εξίσωσης Lyapunov  $A^T XE + E^T XA = -Y$ , με τον αλγόριθμο Bartels-Stewart.

Στο **τρίτο κεφάλαιο** εφαρμόζουμε την εξίσωση Lyapunov στον γραμμικό ταλαντωτή και στο εκκρεμές.

Τέλος ακολουθεί το παράρτημα στο οποίο παρουσιάζουμε κάποια προγράμματα, M-files, που έγιναν από την συγγραφέα αυτής της διπλωματικής εργασίας, στο Matlab, βάσει των αλγορίθμων που χρησιμοποιούνται σε όλη την εργασία.

## ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ

Ευστάθεια κατά Lyapunov, συνάρτηση Lyapunov, εξίσωση Lyapunov, Real Schur μορφή, γενικευμένη εξίσωση Lyapunov.

## ABSTRACT

The aim of this M.Sc. Thesis is to study the Lyapunov equation  $AX + XA^T = C$  and apply it to the Control Theory. The Lyapunov equation is of great interest because of its application to the ‘Control Theory’. By solving it, we can draw conclusions about the stability of matrix ‘A’, without calculating the eigenvalues of A. The **main** interest of the Lyapunov equation though, lies in the fact that it provides a procedure for finding a Lyapunov function for any linear system  $\dot{x} = Ax$  under the condition that A is stable. The second (or direct) Lyapunov’s method, which has developed to an important research subject in the Control Theory, constitutes an approach in issues of quality, in the analysis of the stability of linear and non linear systems. This method requires the development of a Lyapunov function with special characteristics. This explains why the procedure of finding such a Lyapunov function is still considered to be a work of art.

This paper is divided in **three chapters**. To be more specific, in the **first chapter** we introduce some basic key concepts that will be used in the next chapters and they are considered as fundamental knowledge for the reader in order to better understand this paper.

The **second chapter** is divided into four parts. In the **first part** we present the first (or indirect) Lyapunov’s method, which studies the stability of a non linear system, by linearizing and investigating the stability of the corresponding linear system. We define the Lyapunov function and explain the use of it in Lyapunov theorem which provides us with information to help us analyze the stability of linear and non linear systems (second Lyapunov’s method). We also construct the Lyapunov equation and analyze how we draw conclusions about the asymptotical stability of linear systems, just by solving the equation. Next we introduce methods of solving the Lyapunov equation like the “**arithmetic method**”, with the use of the Real Schur Form (RSF) and Jameson’s algorithm. In the **second part** we study the way we reach conclusions about the controllability and observability of a system, using the Lyapunov equation. In the **third part** we deal with the use of Lyapunov equation concerning the **Robust theory**. In the **fourth part** we discuss the solution of the generalized Lyapunov equation  $A^T XE + E^T XA = -Y$ , with the Bartels-Stewart algorithm.

In the **third chapter** we apply the Lyapunov equation in the linear oscillator and the pendulum.

Last but not least, an **Appendix** follows in which we present some programs and M-files, created by the author of this paper, in Matlab, based on the algorithms used in the whole of this paper.

## KEY WORDS

Lyapunov Stability, Lyapunov function, Lyapunov equation, Real-Schur form, generalized Lyapunov equation.

## ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Τώρα που ήρθε η ώρα της συγγραφής της μεταπτυχιακής μου διπλωματικής εργασίας, ανατρέχω πίσω στα δύο χρόνια που εργάστηκα για να την ολοκληρώσω. Ήταν δύσκολα και δημιουργικά. Η προσπάθεια αυτή θα αποτελεί σταθμό στη ζωή μου. Δεν θα μπορούσα όμως να την ολοκληρώσω χωρίς την βοήθεια του επίκουρου καθηγητού μου κ. Καραμπετάκη Νικόλαου. Η καθοδήγησή του ήταν καθοριστική. Ήταν πράγματι ένας αληθινός πανεπιστημιακός δάσκαλος. Θα τον θυμάμαι με ευγνωμοσύνη. Τον ευχαριστώ.

Θερμές ευχαριστίες επίσης οφείλω και στα άλλα δύο μέλη της τριμελούς επιτροπής, την αναπληρώτρια καθηγήτρια κα. Γουσίδου-Κουτίτα Μαρία και τον καθηγητή κ. Βαρδουλάκη Αντώνιο-Ιωάννη, για το χρόνο που αφιέρωσαν για να μελετήσουν, να διορθώσουν και να αξιολογήσουν την εργασία μου.

Τέλος νομίζω ότι οφείλω να ευχαριστήσω τους γονείς μου, που με περιέβαλαν με στοργή σε αυτή την προσπάθειά μου. Τους ευχαριστώ και τους αφιερώνω την εργασία μου.

Ελένη Θ. Μπαμπαλώνα



## ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ	5
ABSTRACT	6
ΠΡΟΛΟΓΟΣ	7
ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ	9
<b>Κεφάλαιο πρώτο</b>	
1.1 Εισαγωγή	19
1.2 Στοιχεία από την Αριθμητική Ανάλυση	19
1.3 Πίνακες	23
<b>Κεφάλαιο δεύτερο</b>	
<b>2. ΕΞΙΣΩΣΗ LYAPUNOV</b>	
2.1 Εισαγωγή	63
2.2 Θεωρίας Lyapunov	64
2.2.1 Έλεγχος με χρησιμοποίηση της Θεωρίας Lyapunov	64
2.2.2 Δεύτερη Μέθοδος Lyapunov	77
2.2.3 Θεωρία Ελέγχου και Εξίσωση Lyapunov	82
2.2.4 Αλγόριθμος Επίλυσης της Εξίσωσης Lyapunov με τη μέθοδο Schur	101
2.2.5 Αριθμητική Λύση της Εξίσωσης του πίνακα Lyapunov	110
2.3 Ελεγκσιμότητα-Παρατηρησιμότητα	120
2.4 Εύρωστος έλεγχος	129
2.5. Αριθμητική λύση γενικευμένης εξίσωσ. Lyapunov για ιδιόμορφα συστήματα	135
2.5.1 Η γενικευμένη Real Schur μέθοδος	137
2.5.2 QZ Αλγόριθμος	137
2.5.3 Μετατροπή στη Hessenberg- τριγωνική μορφή.	139
2.5.4 Μετατροπή στη γενικευμένη Real Schur μορφή	142
2.5.5 Γενικευμένη εξίσωση Lyapunov για ιδιόμορφα συστήματα	143
2.5.6 Αλγόριθμος για τη γενικευμένη εξίσωση Lyapunov . Γενίκευση της Bartels-Stewart μεθόδου.	152
<b>Κεφάλαιο τρίτο</b>	
3.1 Εισαγωγή	157
3.2 Μελέτη Γραμμικού Ταλαντωτή τέταρτης τάξης με χρήση της εξίσω. Lyapunov	165
<b>Παράρτημα</b>	177
<b>Βιβλιογραφία</b>	202

Ελένη Θ. Μπαμπαλώνα



## **Aleksandr Mikhailovich Lyapunov**

**1857-1918**

### **ΒΙΟΓΡΑΦΙΚΟ**

Ο Aleksandr Mikhailovich Lyapunov γεννήθηκε στις 6 Ιουνίου 1857 στην Yaroslavl της Ρωσίας, και πέθανε στις 3 Νοεμβρίου 1918 στην Οδησό της Ρωσίας.

Ο Lyapunov αποφοιτά το 1876 και περνά στη Σχολή Φυσικής και Μαθηματικών του Πανεπιστημίου της Αγίας Πετρούπολης.

Στο Πανεπιστήμιο της Αγίας Πετρούπολης είναι μαθητής του Chebyshev, ο οποίος ασκεί μεγάλη επίδραση πάνω του. Ο Lyapunov αποφοιτά το 1880 και παραμένει στην Αγία Πετρούπολη να αναλάβει έρευνα. Δημοσιεύει 2 άρθρα στην υδροστατική το 1881 σχετικά με την ισορροπία των στερεών σωμάτων σε υγρά, που περιέχονται μέσα σε ένα δοχείο συγκεκριμένης μορφής και στην δυναμική της υδροστατικής πίεσης. Παρουσιάζει την

διπλωματική εργασία του μεταπτυχιακού του, το 1884 στο Πανεπιστήμιο της Αγίας Πετρούπολης, με θέμα «Ευστάθεια της ελλειψοειδούς φόρμας της ισορροπίας ενός περιστρεφόμενου υγρού». Στη συνέχεια το 1885 αντικαθιστά τον V. G. Imshenecky στο Πανεπιστήμιο του Kharkov, και διδάσκει μηχανική, συνεχίζοντας παράλληλα την έρευνα του διδακτορικού του. Παρουσιάζει το διδακτορικό του με θέμα «Το γενικό πρόβλημα της ευστάθειας της κίνησης» στο Πανεπιστήμιο της Μόσχας, το οποίο και του απονέμεται τον Οκτώβριο του 1892.

Την επόμενη χρονιά διορίζεται καθηγητής στο Πανεπιστήμιο του Kharkov, όπου παραμένει μέχρι το 1902. Παράλληλα με το Πανεπιστήμιο του Kharkov, συμβάλει σημαντικά με την παρουσία του στην Μαθηματική Κοινωνία του Kharkov, όντας αντιπρόεδρος της Μαθηματικής Κοινωνίας του Kharkov από το 1891 έως το 1892 και πρόεδρος από το 1899 έως το 1902, και βοηθάει στην έκδοση του περιοδικού Communications of the Kharkov Mathematical Society.

Αργότερα ασχολήθηκε με το πρόβλημα της ευστάθειας των ρευστών ελλειψοειδών βασίζοντας τις έρευνές του στην παραλλαγμένη αρχή του Thomson-Tait. Ο Lyapunov προσθέτει ότι η επιβολή συγκεκριμένων πρόσθετων περιορισμών στην πρώτη απόκλιση μειώνουν την γενικότητα της μεθόδου του.

Το 1901 ο Lyapunov εκλέγεται στη Ρωσική Ακαδημία των Επιστημών στην Αγία Πετρούπολη και την επόμενη χρονιά γίνεται ακαδημαϊκός στα εφαρμοσμένα μαθηματικά της Ακαδημίας, όπου αφιερώνεται ολοκληρωτικά στην διδασκαλία και στην επιστημονική έρευνα.

Εκτός από την Θεωρία των περιστρεφόμενων υγρών, σημαντική είναι η συνεισφορά του Lyapunov στην Θεωρία των Πιθανοτήτων, και στην Ευστάθεια Συστημάτων. Ο Lyapunov αναπτύσσει κάποια σημαντική προσεγγιστική μέθοδο το 1899. Η μέθοδος αυτή, γνωστή ως 'Μέθοδος Lyapunov' καθορίζει την ευστάθεια ενός συστήματος διαφορικών εξισώσεων. Σε δύο άρθρα που δημοσιεύει το 1900 και 1901 Στην Θεωρία Πιθανοτήτων, αποδεικνύει το 'Κεντρικό Θεώρημα του Ορίου' χρησιμοποιώντας μία μέθοδο που βασίζεται στην επιλογή χαρακτηριστικών συναρτήσεων. Στη μέθοδο αυτή βασίζεται σήμερα όλη η Θεωρία Πιθανοτήτων.

Μια άλλη συνεισφορά που πρέπει να αναφέρουμε είναι σαν συντάκτης δύο εκδόσεων των εργασιών της συλλογής του Euler.

## Επίλυση Εξισώσεων Lyapunov με εφαρμογές στην Θεωρία Ελέγχου

Τιμάται για τις εξωτερικές συνεισφορές του με την εκλογή του σε διαφορετικές Ακαδημίες, όπως η Ακαδημία του Lincei(1909) και η Γαλλική Ακαδημία Επιστημών(1916). Ανακηρύσσεται επίτιμο μέλος των Πανεπιστημίων της Αγίας Πετρούπολης, Khar'kov και Kazan. Πολλοί φόροι τιμής απονέμονται γι' αυτόν μέσα στην εκατονταετηρίδα από τη γέννησή του από φορείς όπως την Ακαδημία των Επιστημών της Μόσχας, το Παν/μιο της Μόσχας, την Μαθηματική Κοινωνία της Μόσχας, το Ινστιτούτο Μηχανικής της Ακαδημίας των Επιστημών της Μόσχας και το Ινστιτούτο των Αυτόματων και Τηλεμηχανικών της Ακαδημίας των Επιστημών της Μόσχας. Άλλα άρθρα περιγράφουν την συνεισφορά του Lyapunov στην Θεωρία της Ευστάθειας και την επιρροή του στον τομέα αυτόν για μια μεγάλη περίοδο. Θέματα που αναφέρονται σε αυτά, περιλαμβάνουν: ευστάθεια σημείων, κατασκευή και εφαρμογή της συνάρτησης Lyapunov, ευστάθεια διαφορικών εξισώσεων, τη δεύτερη μέθοδο Lyapunov και τη μέθοδο της συνάρτησης Lyapunov για την ευστάθεια μη γραμμικών συστημάτων. Το άρθρο του 'Sur le probleme general de la stabilite du mouvement' (1892) στη Γαλλία σημαδεύει την αρχή της Θεωρίας της Ευστάθειας.

Στις 31 Οκτωβρίου 1918 η σύζυγός του πεθαίνει από φυματίωση και ο Lyapunov αυτοπυροβολείται. Τρεις μέρες αργότερα, στις 3 Νοεμβρίου πεθαίνει στο Νοσοκομείο.

Ελένη Θ. Μπαμπαλώνα

## Εισαγωγή

Η μοντελοποίηση και επίλυση προβλημάτων με την βοήθεια των μαθηματικών έχει τις ρίζες της στην αρχαία Ελλάδα, όπου για πρώτη φορά μηχανικοί, ναυπηγοί, αστρονόμοι, γεωμέτρεις και άλλοι επιστήμονες χρησιμοποίησαν αξιωματικά θεμελιωμένες μαθηματικές θεωρίες, όπως η Ευκλείδεια γεωμετρία, για να δώσουν απαντήσεις σε θεωρητικά αλλά και τεχνικής φύσεως προβλήματα όπως παραδείγματος χάριν η κατανόηση των νόμων που διέπουν τον κόσμο μας.

Από τότε μέχρι σήμερα βέβαια έχουν αναπτυχθεί καινούργιες, όμορφες και βαθιές μαθηματικές θεωρίες όπως ο Διανυσματικός και Απειροστικός Λογισμός, η Θεωρία Δυναμικών Συστημάτων, η Θεωρία Ελέγχου ή η Αριθμητική Ανάλυση, που μας επιτρέπουν να λύσουμε ακόμη πιο σύνθετα και δύσκολα προβλήματα. Τέτοιου είδους προβλήματα είναι η μέτρηση της απόστασης μακρινών αστεριών ή η κατασκευή μηχανών με τις οποίες μπορούμε να ταξιδέψουμε ακόμη και μακριά από τον ίδιο μας τον πλανήτη.

Για να δώσουμε απαντήσεις σε προβλήματα όπως τα παραπάνω μοντελοποιούμε τα υπό έρευνα συστήματα με τη βοήθεια φυσικών ή εμπειρικών νόμων όπως οι νόμοι του Newton ή οι εξισώσεις του Maxwell. Κατ' αυτό τον τρόπο μπορούμε να κατασκευάσουμε στη συνέχεια διαφορικές εξισώσεις, εξισώσεις δηλαδή που περιγράφουν κάποια μεταβαλλόμενη με τον χρόνο πτυχή του προβλήματος. Η ανάλυση αυτών των εξισώσεων τελικά, μας επιτρέπει να αντλήσουμε τις πληροφορίες που χρειαζόμαστε ώστε να απαντήσουμε στα διάφορα προβλήματα που μας απασχολούν.

Μία από τις θεωρίες που ασχολούνται με την μελέτη διαφορικών εξισώσεων είναι και η Θεωρία Ελέγχου. Στην συγκεκριμένη θεωρία μελετάτε η απόκριση του υπό εξέταση συστήματος, όπως συνηθίζεται να λέγεται η λύση κάποιας μορφής του συστήματος διαφορικών εξισώσεων που περιγράφει το πρόβλημα, όταν αυτό τροφοδοτείται με τα κατάλληλα ερεθίσματα. Τέτοιου είδους ερεθίσματα παραδείγματος χάριν μπορεί να είναι δυνάμεις που εξασκούμε σε μηχανικής φύσεως προβλήματα ή ηλεκτρικοί παλμοί (ηλεκτρικές τάσεις) σε προβλήματα ηλεκτρικών κυκλωμάτων. Στη γλώσσα της Θεωρίας Ελέγχου αυτά τα ερεθίσματα λέγονται είσοδοι και αναπαριστώνται από κατάλληλες μαθηματικές συναρτήσεις.

Στην παρούσα εργασία θα ασχοληθούμε με την μελέτη της ευστάθειας γραμμικών και μη γραμμικών συστημάτων, κάνοντας χρήση της εξίσωσης Lyapunov. Όπως γνωρίζουμε η ευστάθεια παίζει σημαντικό ρόλο στη θεωρία συστημάτων και στη μηχανική. Υπάρχουν πολλά είδη ευστάθειας που προκύπτουν από τη μελέτη των δυναμικών συστημάτων. Θα ασχοληθούμε κυρίως με τη μελέτη της ευστάθειας των σημείων ισορροπίας γραμμικών και μη γραμμικών συστημάτων. Η ευστάθεια κυρίως χαρακτηρίζεται με την έννοια που έδωσε ο Ρώσος Μαθηματικός και Μηχανικός Lyapunov, ο οποίος έθεσε τα θεμέλια μιάς θεωρίας που είναι γνωστή ως 'Ευστάθεια κατά Lyapunov'. Με την γνωστή μέθοδο Lyapunov την οποία παραθέτουμε στο κεφάλαιο 2, αντλούμε συμπεράσματα για την ευστάθεια σε ένα σημείο ισορροπίας ενός γραμμικού ή μη γραμμικού συστήματος. Συγκεκριμένα θα εξετάσουμε το πως μπορούμε να αντλήσουμε πληροφορίες για την απόκριση συστημάτων ανοιχτού ή κλειστού βρόγχου που περιγράφονται από γραμμικές, μη χρονικά μεταβαλλόμενες (time invariant) διαφορικές εξισώσεις στο πεδίο κατάστασης. Η ανάλυση τέτοιου είδους εξισώσεων έχει μελετηθεί διεξοδικά και υπάρχει μία πραγματικά μεγάλη αποθήκη αποτελεσμάτων απ' όπου κανείς μπορεί να αντλήσει απαντήσεις. Εμείς εδώ θα χρησιμοποιήσουμε ιδέες και αποτελέσματα από την Αριθμητική Ανάλυση και την Θεωρία Lyapunov και θα δώσουμε απαντήσεις σε προβλήματα ευστάθειας, ευρωστίας και παρατηρησιμότητας και ελεγκσιμότητας. Προβλήματα ευστάθειας είναι αυτά στα οποία προσπαθούμε να εξαναγκάσουμε απόκριση του συστήματος να πλησιάσει κάποιο σταθερό σημείο (στην παρούσα εργασία σαν σταθερό σημείο των συστημάτων θα εννοείται πάντα η αρχή των συντεταγμένων) χρησιμοποιώντας σαν είσοδο κατάλληλες συναρτήσεις. Προβλήματα ευρωστίας είναι αυτά στα οποία μελετάτε η διατήρηση κάποιου δυναμικού χαρακτηριστικού, όπως η ευστάθεια του συστήματος, όταν το σύστημα υπόκειται σε αναταράξεις (perturbations). Η παρατηρησιμότητα και η ελεγκσιμότητα από την άλλη είναι έννοιες που σχετίζονται με την περιγραφή του συστήματος ελέγχου στο χώρο κατάστασης και δίνουν απαντήσεις σε ερωτήματα επάνω στην αλληλεπίδραση των εισόδων και των τροχιών και των εξόδων και των τροχιών του συστήματος αντίστοιχα.

Συγκεκριμένα η εργασία είναι χωρισμένη σε τρία Κεφάλαια. Στο πρώτο Κεφάλαιο αναφερόμαστε και παραθέτουμε τους ορισμούς και τα αποτελέσματα από την Αριθμητική Ανάλυση που θα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια, όπως, οι πίνακες Hessenberg,



Householder, Givens, η παραγοντοποίηση QR, η μορφή Hessenberg και η πραγματική Schur μορφή ενός πίνακα και ο αλγόριθμος QR με διπλή μετατόπιση (double shift QR algorithm).

Στο δεύτερο Κεφάλαιο παραθέτουμε τους ορισμούς και τα αποτελέσματα από την Θεωρία Ελέγχου, την Θεωρία Lyapunov, όπως η ασυμπτωτική ευστάθεια κατά Lyapunov, οι συναρτήσεις και μελετάμε την εξίσωση Lyapunov. Εξηγούμε κατ' αρχάς την χρησιμότητά της και συνεχίζουμε με τους τρόπους επίλυσής της, αναλυτικές και αριθμητικές. Επιλέγουμε να επιλύσουμε την εξίσωση με χρήση της μεθόδου Schur, την μέθοδο που απ' όσο γνωρίζουμε αποτελεί μέχρι σήμερα τον πιο ευσταθή αριθμητικά τρόπο.

Στο τρίτο και τελευταίο Κεφάλαιο μελετάμε με τη βοήθεια της εξίσωσης Lyapunov το μοντέλο ενός γραμμικού ταλαντωτή τέταρτης τάξης και δείχνουμε εάν και πότε το σύστημα αυτό μπορεί να είναι ευσταθές. Στη συνέχεια πραγματοποιούμε ανάλυση ευρωστίας στο σύστημα και τελικά δείχνουμε κάτω υπό ποιες συνθήκες το εν λόγω σύστημα είναι παρατηρήσιμο και ελέγξιμο.

Στο τέλος της εργασίας υπάρχει ένα παράρτημα όπου μπορούν να βρεθούν οι κώδικες των αλγορίθμων τους οποίους χρησιμοποιήσαμε στην εργασία για να λύσουμε τα διάφορα προβλήματα. Οι κώδικες είναι γραμμένοι σε προγράμματα (m-files) του Matlab.

Η παρούσα εργασία έχει γραφεί χρησιμοποιώντας το office 2003 της Microsoft και οι υπολογισμοί έγιναν με την βοήθεια του Matlab 6.5 και ενός επεξεργαστή Intel στα 1.86 GHz.

Ελένη Θ. Μπαμπαλώνα

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

### 1. ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

#### 1.1 Εισαγωγή

Σ' αυτό το πρώτο κεφάλαιο αναφερόμαστε στην θεωρία, τους ορισμούς, τα αποτελέσματα και τα συμπεράσματα, που θα χρησιμοποιήσουμε στα επόμενα κεφάλαια. Συγκεκριμένα αποτελείται από μία ενότητα που αναφέρεται σε αποτελέσματα και αλγορίθμους προερχόμενα από την Αριθμητική Γραμμική Άλγεβρα και την Αριθμητική Ανάλυση. Τέτοιου είδους αποτελέσματα είναι η Hessenberg και η Schur μορφή ενός τετραγωνικού, με πραγματικές τιμές,  $n$ -διάστατου πίνακα  $A$ . Η εύρεση αυτών των μορφών προϋποθέτει την ύπαρξη γρήγορων και αξιόπιστων αλγορίθμων όπως ο Double shift implicit QR αλγόριθμος που μελετάμε στο τέλος της παραγράφου.

Στο δεύτερο Κεφάλαιο θα εξετάσουμε την εξίσωση Lyapunov πιο διεξοδικά και θα αναφερθούμε σε διάφορες εφαρμογές της.

#### 1.2. Στοιχεία από την Αριθμητική Ανάλυση

Σ' αυτή την παράγραφο αναφέρουμε ενδεικτικά τις έννοιες από την Αριθμητική ανάλυση που θα χρησιμοποιήσουμε για να επιλύσουμε την εξίσωση Lyapunov. Για περισσότερες λεπτομέρειες και αποδείξεις των θεωρημάτων που θα παραθέσουμε στην συνέχεια παραπέμπουμε τον αναγνώστη στα κεφάλαια 2, 3 και 4 του [2].

##### 1.2.1 Νόρμες πινάκων και διανυσμάτων

**Ορισμός 1.2.1:** Έστω  $V$  ο διανυσματικός χώρος των πραγματικών συναρτήσεων, πάνω στο σώμα  $K$ . Ορίζουμε στον  $V$  την απεικόνιση  $\|\bullet\|: V \rightarrow \mathbb{R}^+$  η οποία ονομάζεται νόρμα (norm) επί του  $V$ , με τις εξής ιδιότητες:

Για κάθε  $\lambda \in K$  και  $x(t), y(t) \in V$

- $\|x(t)\| = 0$  αν-ν  $x(t) = 0, \forall t \in [a, b]$

Ελένη Θ. Μπαμπαλώνα

- $\|\lambda x(t)\| = \lambda \|x(t)\|$
- $\|x(t) + y(t)\| \leq \|x(t)\| + \|y(t)\|$

Σε έναν νορμικό γραμμικό χώρο  $(V, \|\bullet\|)$  ορίζουμε ως απόσταση δύο στοιχείων του  $x_1$  και  $x_2$  την νόρμα  $\|x_1 - x_2\|$ . Έτσι ο νορμικός χώρος γίνεται *μετρικός χώρος*, δηλ. ένας χώρος εφοδιασμένος με μια μετρική  $d : V \times V \rightarrow \mathbb{R}^+$  που ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες.

- $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- $d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in V$
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z), \forall x, y, z \in V$

Η συνάρτηση  $\|\bullet\|_\infty : C[a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \|x(t)\|_\infty = \sup_{t \in [a, b]} \{|x(t)|\}$  αποτελεί νόρμα του διανυσματικού χώρου  $C[a, b]$ .

Άλλες γνωστές νόρμες στον χώρο  $C[a, b]$ . είναι οι εξής:

$$\|\bullet\|_1 : C[a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+, \|x(t)\|_1 = \int_a^b |x(t)| dt$$

$$\|\bullet\|_2 : C[a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+, \|x(t)\|_2 = \sqrt{\int_a^b x^2(t) dt}, \text{ γνωστή ως } L_2\text{-νόρμα}$$

$$\|\bullet\|_p : C[a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+, \|x(t)\|_p = \left( \int_a^b |x(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

Ένας επίσης σημαντικός χώρος είναι ο χώρος  $C^1[a, b]$  των συνεχών συναρτήσεων στο κλειστό διάστημα  $[a, b]$ , που επιπλέον έχουν και συνεχείς πρώτες παραγώγους στο ίδιο διάστημα. Ο χώρος αυτός είναι εφοδιασμένος με την γνωστή πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό με σταθερά, αλλά η νόρμα με την οποία είναι εφοδιασμένος είναι της μορφής

$$\|\bullet\|: C^1[a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \|x(t)\| = \sup_{t \in [a, b]} \{|x(t)|\} + \sup_{t \in [a, b]} \{|x'(t)|\}$$

**Ορισμός 1.2.2:** Έστω  $V$  ο διανυσματικός χώρος των πραγματικών συναρτήσεων, πάνω στο σώμα  $K$  ( $\mathbb{R}$  ή  $\mathbb{C}$ ). Ορίζουμε στον  $V$  την απεικόνιση  $\|\bullet\|: V \rightarrow \mathbb{R}$  η οποία ονομάζεται διανυσματική νόρμα (ή norm διανύσματος) με τις εξής ιδιότητες:

Για κάθε  $x, y \in V$  ισχύει

$$\|x\| \geq 0$$

$$\|ax\| = |a|\|x\| \text{ για όλα τα } a \in K$$

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

$$\|x\| = 0 \text{ εάν και μόνο εάν } x = 0.$$

Εάν μία συνάρτηση ικανοποιεί τις τρεις πρώτες ιδιότητες αλλά όχι κατ' ανάγκη και την τέταρτη, τότε αυτή ονομάζεται διανυσματική ημι-norm (ημι-norm διανύσματος).

Οι πιο γνωστές νόρμες διανύσματος είναι οι εξής:

1) Η  $L_2$  norm στον  $\mathbb{C}^n$  (Ευκλείδεια)

Αν  $x \in \mathbb{C}^n$  με  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)'$ , η  $L_2$  norm ορίζεται ως εξής:

$$\|x\|_2 = (|x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2)^{1/2}$$

2) Η  $L_1$  norm στον  $\mathbb{C}^n$  (αθροιστική)

Αν  $x \in \mathbb{C}^n$  με  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)'$ , η  $L_1$  norm ορίζεται ως εξής:

$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$$

3) Η  $L_\infty$  norm στον  $\mathbb{C}^n$  (max norm)

Αν  $x \in \mathbb{C}^n$  με  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)'$ , η  $L_\infty$  norm ορίζεται ως εξής:

$$\|x\|_\infty = \max \{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}$$

Ελένη Θ. Μπαμπαλώνα

**Ορισμός 1.2.3:** Έστω  $C^{m \times n}$  ένας διανυσματικός χώρος. Ορίζουμε στον  $C^{m \times n}$  την συνάρτηση  $\|\bullet\|: C^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}$  η οποία ονομάζεται norm πίνακα με τις εξής ιδιότητες:

Για κάθε πίνακα  $A, B \in C^{m \times n}$  ισχύει

- 1)  $\|A\| \geq 0$
- 2)  $\|aA\| = |a|\|A\|$  για όλα τα  $a \in \mathbb{C}$
- 3)  $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$
- 4)  $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$
- 5)  $\|A\| = 0$  εάν και μόνο εάν  $A = 0$

Εάν μία συνάρτηση ικανοποιεί τις ιδιότητες (1), (2), (3) και (5), τότε αυτή ονομάζεται γενικευμένη norm πίνακα. □

Οι πιο γνωστές νόρμες πίνακα είναι οι εξής:

1) Η  $L_1$  norm στον  $C^{m \times n}$

Αν  $A \in C^{m \times n}$ , τότε η  $L_1$  norm ορίζεται ως

$$\|A\|_1 = \max_j \sum_{i,j} |a_{ij}|$$

2) Η  $L_2$  norm στον  $C^{m \times n}$

Αν  $A \in C^{m \times n}$ , τότε η  $L_2$  norm ορίζεται ως

$$\|A\|_2 = \left( \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}| \right)^{1/2} = [\lambda \max(A^T A)]^{1/2}, \text{ όπου } \lambda \max(A^T A) \text{ η μεγαλύτερη ιδιοτιμή του πίνακα } A^T A$$

3) Η  $L_\infty$  norm στον  $C^{m \times n}$

Αν  $A \in C^{m \times n}$ , τότε η  $L_\infty$  norm ορίζεται ως

$$\|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

### 1.3 Πίνακες

**Ορισμός 1.3.1** Ένας πίνακας  $A \in \mathbb{R}^n$ , λέγεται **μη-ομαλός ή ιδιόμορφος (singular)** εάν δεν υπάρχει ο αντίστροφος του δηλαδή δεν υπάρχει ο  $A^{-1}$ , ενώ θα λέμε ότι ένας πίνακας λέγεται **ομαλός ή μη ιδιόμορφος (nonsingular)** εάν υπάρχει ο  $A^{-1}$ .  
 $\square$

Εάν ένας πίνακας  $A$  λοιπόν είναι singular, και άρα δεν υπάρχει ο αντίστροφος του, τότε θα ισχύει ότι η ορίζουσα του δεν είναι διάφορη του μηδενός δηλαδή ισχύει ότι  $\det(A) = 0$  και άρα ο πίνακας χάνει θα λέγαμε βαθμό. Ενώ εάν ο πίνακας  $A$  λοιπόν είναι nonsingular και άρα υπάρχει ο αντίστροφός του, τότε  $\det(A) \neq 0$  και άρα  $\text{rank}(A) = n$ .

**Ορισμός 1.3.2** Έστω  $A$  πραγματικός συμμετρικός πίνακας.

- 1) Εάν  $x^T A x > 0, \forall x \neq 0$  τότε ο  $A$  ονομάζεται **θετικά ορισμένος (positive-definite matrix)**.
- 2) Εάν  $x^T A x \geq 0, \forall x \neq 0$  τότε ο  $A$  ονομάζεται **θετικά ημιορισμένος (positive semi-definite matrix)**.
- 3) Εάν  $x^T A x < 0, \forall x \neq 0$  τότε ο  $A$  ονομάζεται **αρνητικά ορισμένος (negative-definite matrix)**.
- 4) Εάν  $x^T A x \leq 0, \forall x \neq 0$  τότε ο  $A$  ονομάζεται **αρνητικά ημιορισμένος (negative semi-definite matrix)**.  $\square$

**Παρατηρήσεις.** (όμοια για αρνητικά ορισμένους πίνακες)

Ο πραγματικός συμμετρικός πίνακας  $A$  είναι θετικά ορισμένος (θετικά ημιορισμένος) ακριβώς όταν όλες οι ιδιοτιμές του  $A$  είναι θετικές (μη αρνητικές).

Ο πραγματικός συμμετρικός πίνακας  $A$  είναι αρνητικά ορισμένος (αρνητικά ημιορισμένος) ακριβώς όταν όλες οι ιδιοτιμές του  $A$  είναι αρνητικές (μη θετικές).

Αν ο  $A$  είναι θετικά (αρνητικά) ορισμένος τότε υπάρχει αντίστροφος.

Αν ο  $A$  είναι θετικά (αρνητικά) ορισμένος και ο  $P$  είναι θετικά (αρνητικά) ημιορισμένος τότε ο  $A+P$  είναι θετικά (αρνητικά) ορισμένος.

Ελένη Θ. Μπαμπαλώνα

Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

και οι υποορίζουσες του πίνακα  $A$  :

$$A_1 = |a_{11}|, A_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, A_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \dots, A_n = |A|$$

Τότε :

1) Ο πίνακας  $A$  είναι θετικά ορισμένος αν-ν όλες οι υποορίζουσες  $A_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  είναι θετικές.

2) Ο πίνακας  $A$  είναι αρνητικά ορισμένος αν-ν

$$A_1 < 0, A_2 > 0, A_3 < 0, \dots, (-1)^n A_n > 0.$$

**Ορισμός 1.3.3** Ένας τετραγωνικός πίνακας  $A$  με τιμές από το σώμα των πραγματικών αριθμών θα λέγεται **κάτω Hessenberg** και αντίστοιχα ο **Β πάνω Hessenberg**, εάν έχουν τις ακόλουθες μορφές



$$A = \begin{bmatrix} * & * & 0 & \dots & 0 \\ * & * & * & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & * \\ * & * & \dots & \dots & * \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} * & * & \dots & \dots & * \\ * & * & & & \vdots \\ 0 & * & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & * & * \end{bmatrix}.$$

Δηλαδή ένας τετραγωνικός πίνακας  $A$  θα λέγεται κάτω Hessenberg εάν  $a_{i,j}=0$  όταν  $j>i+1$  και αντίστοιχα πάνω Hessenberg εάν  $a_{i,j}=0$  όταν  $i>j+1$ .

Ένας άνω Hessenberg πίνακας  $H$  θα είναι *unreduced* εάν  $a_{i,i-1} \neq 0$  για  $i=2,3,\dots,n$ .

Ομοίως ένας κάτω Hessenberg πίνακας  $H$  θα είναι *reduced* εάν  $a_{i,i+1} \neq 0$  για  $i=1,2,\dots,n-1$ .  $\square$

Θα χρησιμοποιήσουμε πίνακες Hessenberg διότι όπως θα εξηγήσουμε και παρακάτω, έχουν την ιδιότητα να μην προκαλούν και ακόμα περισσότερο να μην αυξάνουν τα λάθη αποκοπής κατά την διάρκεια των υπολογισμών. Είναι, με άλλα λόγια πίνακες αριθμητικά ευσταθείς.

Συνεχίζουμε με την QR παραγοντοποίηση ενός τετραγωνικού πίνακα  $A$  με πραγματικές τιμές. Συγκεκριμένα αναφέρουμε το ακόλουθο Θεώρημα που μπορεί να βρεθεί στο [2, σελ. 56].

**Θεώρημα 1.3.1** Έστω ένας πραγματικός πίνακας  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ο οποίος έχει τάξη  $n$  (δηλαδή ο αριθμός των γραμμικά ανεξάρτητων γραμμών και στηλών του πίνακα  $A$  είναι  $n$ ). Τότε υπάρχει ένας ορθογώνιος πίνακας  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , ( $QQ^T = Q^T Q = I_{n \times n}$ ) και ένας άνω τριγωνικός πίνακας  $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$  τέτοιοι ώστε

$$A = QR.$$

Οι πίνακες  $Q$  και  $R$  είναι μοναδικοί.  $\square$

Η QR ανάλυση ενός πίνακα είναι πολύ σημαντική. Ένας από τους βασικότερους λόγους γι' αυτό είναι ότι ο μετασχηματισμός QR μας επιτρέπει ουσιαστικά να «αντικαταστήσουμε» τους αρχικούς πίνακες και να δουλέψουμε με ορθογώνιους και άνω τριγωνικούς πίνακες και κατά συνέπεια να εκμεταλλευτούμε όλες τις «καλές» ιδιότητες αυτών των πινάκων καθώς είναι πίνακες αριθμητικά ευσταθείς. Αυτό θα γίνει ξεκάθαρο παρακάτω όταν αναφερθούμε στον αλγόριθμο QR.

Προς το παρόν συνεχίζουμε με πίνακες Householder και Givens, πίνακες τους οποίους μπορεί κάποιος να χρησιμοποιήσει για να υπολογίσει την QR παραγοντοποίηση ενός πραγματικού, τετραγωνικού πίνακα  $A$ .

**Ορισμός 1.3.4** Έστω διάνυσμα  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  όπου  $x_i \in \mathbb{R}, \forall i = 1, 2, \dots, n$ . Έστω επίσης ο ορθογώνιος πίνακας  $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ο οποίος δημιουργείται ως  $H = I - 2(uu^T / u^T u)$ , όπου  $u \in \mathbb{R}^n$  είναι το μη μηδενικό διάνυσμα στήλη  $u = x + \text{sgn}(x_1) \|x\|_2 e_1$ . Τότε ο  $H$  θα λέγεται **πίνακας Householder**. □

Το διάνυσμα  $e_1$  στον παραπάνω ορισμό είναι το κλασικό μοναδιαίο διάνυσμα ενός  $n$ -διάστατου Ευκλείδειου χώρου. Η σημασία του στον ορισμό θα γίνει αντιληπτή στα παρακάτω. Επίσης το  $x_1$  συμβολίζει το πρώτο στοιχείο του διανύσματος  $x$  και  $\|x\|_2$  συμβολίζει την Ευκλείδεια νόρμα του διανύσματος  $x$ .

Ας συνεχίσουμε λοιπόν μ' ένα παράδειγμα, όπου θα υπολογίσουμε την QR παραγοντοποίηση ενός πίνακα και όπου παράλληλα θα παρουσιάσουμε τα πλεονεκτήματα των πινάκων Householder.

### Παράδειγμα 1.3.1

Έστω πραγματικός, τετραγωνικός πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \\ 5 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Επίλυση Εξισώσεων Lyapunov  
με εφαρμογές στην Θεωρία Ελέγχου

Θα βρούμε την QR ανάλυση του  $A_1 = A$  χρησιμοποιώντας πίνακες Householder. Υπολογίζουμε κατ' αρχάς το πρώτο διάνυσμα  $u_1$  χρησιμοποιώντας την πρώτη στήλη  $x_1$  του πίνακα  $A$ . Το  $x_1^1$  συμβολίζει το πρώτο στοιχείο της πρώτης στήλης  $x_1$  του πίνακα  $A$ . Χρησιμοποιώντας το  $u_1$  στην συνέχεια υπολογίζουμε τον πίνακα Householder  $H_1$ , ο οποίος θα μετασχηματίσει τον πίνακα  $A_1$ . Έχουμε λοιπόν

$$u_1 = x_1 + \text{sgn}(x_1^1) \|x_1\|_2 e_1 =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \sqrt{1^2 + 2^2 + 5^2 + 1^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{31} \\ 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

όπως επίσης και

$$u_1 u_1^T = \begin{bmatrix} (1 + \sqrt{31})^2 & 2(1 + \sqrt{31}) & 5(1 + \sqrt{31}) & 1 + \sqrt{31} \\ 2(1 + \sqrt{31}) & 4 & 10 & 2 \\ 5(1 + \sqrt{31}) & 10 & 25 & 5 \\ 1 + \sqrt{31} & 2 & 5 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ενώ} \quad u_1^T u_1 = 73.1355.$$

Κατασκευάζουμε τώρα τον πίνακα Householder

Ελένη Θ. Μπαμπαλώνα

$$\begin{aligned}
 H_1 &= I - 2 (u_1 u_1^T / u_1^T u_1) = \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \left( \frac{2}{(1+\sqrt{31})^2 + 2^2 + 5^2 + 1^2} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{31} \\ 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{31} & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \right) \\
 \Rightarrow H_1 &= \begin{bmatrix} -0.1796 & -0.3592 & -0.8980 & -0.1796 \\ -0.3592 & 0.8906 & -0.2735 & -0.0547 \\ -0.8980 & -0.2735 & 0.3163 & -0.1367 \\ -0.1796 & -0.0547 & -0.1367 & 0.9727 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζοντας τον πίνακα  $A_1$  από αριστερά με τον  $H_1$  βρίσκουμε τον  $A_2$  να είναι

$$A_2 = H_1 A_1 = \begin{bmatrix} -5.5678 & \vdots & -1.7961 & -2.3349 & -2.5145 \\ \dots & \vdots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \vdots & 1.4531 & 2.3754 & 1.9298 \\ 0 & \vdots & -0.3673 & -4.0614 & -1.6755 \\ 0 & \vdots & 0.7265 & 1.1877 & 1.4649 \end{bmatrix}.$$

Παρατηρούμε ότι η πρώτη στήλη του πίνακα  $A$  έχει μετασχηματιστεί σ' ένα πολλαπλάσιο του μοναδιαίου διανύσματος.

Συνεχίζουμε στο ίδιο πνεύμα με τον υποπίνακα του  $A_2$  που δημιουργείται από τις γραμμές  $\{2,3,4\}$  και τις στήλες  $\{2,3,4\}$  και κατασκευάζουμε το διάνυσμα  $u_2$ . Θα έχουμε

$$\begin{aligned}
 u_2 &= x_2 + \text{sgn}(x_2^2) \|x_2\| e_1 = \\
 &= \begin{pmatrix} 1.4531 \\ -0.3673 \\ 0.7265 \end{pmatrix} + 1.6656 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.1187 \\ -0.3673 \\ 0.7265 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

οπότε

Επίλυση Εξισώσεων Lyapunov  
με εφαρμογές στην Θεωρία Ελέγχου

$$u_2 u_2^T = \begin{bmatrix} 9.7263 & -1.1455 & 2.2657 \\ -1.1455 & 0.1349 & -0.2668 \\ 2.2657 & -0.2668 & 0.5278 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad u_2^T u_2 = 10.3890.$$

Μπορούμε τώρα να κατασκευάσουμε τον πίνακα Householder  $H_2$  δημιουργώντας πρώτα τον

$$\begin{aligned} \hat{H}_2 &= I_{3 \times 3} - 2(u_2 u_2^T / u_2^T u_2) = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{10.3890} \begin{bmatrix} 9.7263 & -1.1455 & 2.2657 \\ -1.1455 & 0.1349 & -0.2668 \\ 2.2657 & -0.2668 & 0.5278 \end{bmatrix} \Rightarrow \\ \Rightarrow \hat{H}_2 &= \begin{bmatrix} -0.8724 & 0.2205 & -0.4362 \\ 0.2205 & 0.9740 & 0.0514 \\ -0.4362 & 0.0514 & 0.8984 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Βρίσκουμε στη συνέχεια τον πίνακα μετασχηματισμού  $H_2$  εμφυτεύοντας τον  $\hat{H}_2$  στον μοναδιαίο κατά τον εξής τρόπο

$$H_2 = \begin{bmatrix} 1 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \vdots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \vdots & & & \\ 0 & \vdots & \hat{H}_2 & & \\ 0 & \vdots & & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.8724 & 0.2205 & -0.4362 \\ 0 & 0.2205 & 0.9740 & 0.0514 \\ 0 & -0.4362 & 0.0514 & 0.8984 \end{bmatrix}.$$

Πολλαπλασιάζοντας τον  $A_2$  από αριστερά με τον  $H_2$  παίρνουμε τον

Ελένη Θ. Μπαμπαλώνα

$$A_3 = H_2 A_2 = \begin{bmatrix} -5.5678 & -1.7961 & \vdots & -2.3349 & -2.5145 \\ 0 & -1.6656 & \vdots & -3.4860 & -2.6920 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \vdots & -3.3711 & -1.1312 \\ 0 & 0 & \vdots & -0.1777 & 0.3882 \end{bmatrix}.$$

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε το διάνυσμα  $u_3$  και τον πίνακα  $H_3$  να είναι

$$u_3 = \begin{pmatrix} -6.7469 \\ -0.1777 \end{pmatrix} \text{ και } H_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.9986 & -0.0526 \\ 0 & 0 & -0.0526 & 0.9986 \end{bmatrix}$$

και τελικά βλέπουμε ότι με τον παραπάνω αλγόριθμο ο αρχικός πίνακας  $A$  μετασχηματίστηκε σ' έναν άνω τριγωνικό πίνακα

$$A_3 = \begin{bmatrix} -5.5678 & -1.7961 & -2.3349 & -2.5145 \\ 0 & -1.6656 & -3.4860 & -2.6920 \\ 0 & 0 & 3.3758 & 1.1092 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4472 \end{bmatrix} = R.$$

Αυτός είναι ο πίνακας  $R$  της ανάλυσης QR. Παρατηρούμε τώρα ότι ο πίνακας  $R = A_3$  προήλθε από την παρακάτω διαδικασία

$$R = A_3 = H_3 (H_2 (H_1 A))$$

άρα αναστρέφοντας την διαδικασία μπορούμε να υπολογίσουμε τον πίνακα  $Q$  σαν τον ανάστροφο πίνακα του γινομένου  $H_3 H_2 H_1$ .

Δηλαδή

$$Q = (H_3 H_2 H_1)^T = H_1^T H_2^T H_3^T =$$

$$= \begin{bmatrix} -0.1796 & 0.1937 & 0.9645 & -0.0 \\ -0.3592 & -0.8134 & 0.0965 & -0.4472 \\ -0.8980 & 0.3680 & -0.2411 & 0.0 \\ -0.1796 & -0.4067 & 0.0482 & 0.8945 \end{bmatrix}.$$

Υπολογίσαμε δηλαδή έναν ορθογώνιο πίνακα  $Q$  και έναν άνω τριγωνικό πίνακα  $R$  έτσι ώστε  $A = QR$ . □

Όπως είπαμε ο πίνακας  $Q$  ο οποίος παράγεται σαν γινόμενο πινάκων Householder είναι ορθογώνιος. Αυτό το πλεονέκτημα θα το χρησιμοποιήσουμε αργότερα στον υπολογισμό της Schur μορφής ενός πραγματικού, τετραγωνικού πίνακα.

Προς το παρόν ορίζουμε τους πίνακες Givens και εξηγούμε την χρησιμότητά τους.

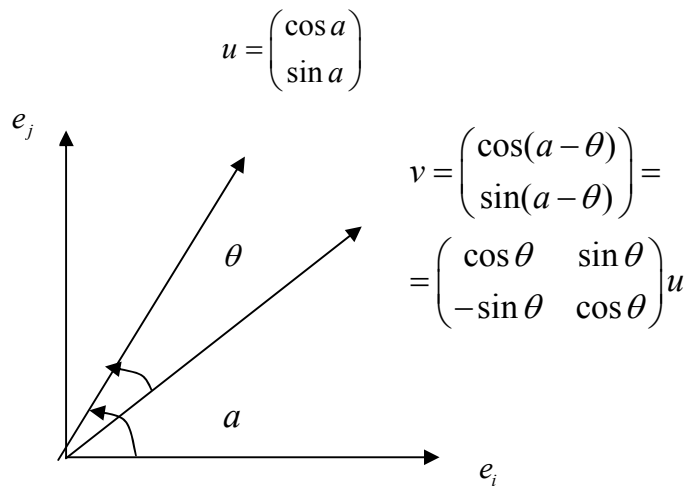
**Ορισμός 1.3.5** Ένας πίνακας ο οποίος έχει την ακόλουθη μορφή

$$G(i, j, c, s) = \begin{array}{cccccccc} & & & & \text{i-th} & & \text{j-th} & & \\ & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c & \cdots & s & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -s & \cdots & c & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow \text{i-th} \\ \\ \leftarrow \text{j-th} \end{array} \end{array}$$

και όπου ισχύει ότι  $c^2 + s^2 = 1$  θα λέγεται **πίνακας Givens**. □

Ένα πλεονέκτημα των πινάκων Givens όπως και των πινάκων Householder που είδαμε προηγουμένως είναι ότι και αυτοί οι πίνακες είναι ορθογώνιοι, μία ιδιότητα που όπως έχουμε προαναφέρει εξασφαλίζει την αριθμητική ευστάθεια στους υπολογισμούς. Εκτός της ορθογωνιότητας βέβαια οι πίνακες Givens αποτελούν κι αυτοί με την σειρά τους θαυμάσια εργαλεία για τον μηδενισμό στοιχείων ενός πίνακα  $A$ .

Εάν διαλέξουμε  $c = \cos \theta$  και  $s = \sin \theta$ , για κάποια γωνία  $\theta$ , ο παραπάνω πίνακας Givens μπορεί να οριστεί από το  $i, j$  επίπεδο ως  $J(i, j, \theta)$ . Γεωμετρικά ο πίνακας  $J(i, j, \theta)$  περιστρέφει ένα ζεύγος συντεταγμένων  $(i, j)$  μέσω της γωνίας  $\theta$  στο  $(i, j)$  επίπεδο. Για τον λόγο αυτό ο πίνακας Givens  $J(i, j, \theta)$  λέγεται αλλιώς και **Givens περιστροφή** ή **Επίπεδη Περιστροφή στο  $(i, j)$  επίπεδο**.



Givens περιστροφή ή επίπεδη περιστροφή στο  $(i, j)$  επίπεδο



Συγκεκριμένα έστω το ακόλουθο διάνυσμα.

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$  όπου  $x_1$  και  $x_2$  είναι πραγματικοί αριθμοί. Τότε επιλέγοντας τα  $c$  και  $s$  ως εξής

$$c = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \text{ και } s = \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}},$$

και σχηματίζοντας τον πίνακα Givens

$$G(1, 2, c, s) = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix},$$

βλέπουμε ότι πολλαπλασιάζοντας το διάνυσμα  $x$  με τον  $G$  έχουμε

$$G(1, 2, c, s) x = \begin{pmatrix} * \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Καταφέραμε οπότε να μηδενίσουμε το στοιχείο (2,1) του  $x$ . Αυτή την διαδικασία μπορούμε να την εφαρμόσουμε για να μηδενίσουμε γενικώς όποιο στοιχείο ενός διανύσματος θέλουμε. Μπορούμε δηλαδή να χρησιμοποιήσουμε πίνακες Givens για να υπολογίσουμε την QR ανάλυση ενός πίνακα ή να βρούμε την Hessenberg μορφή του. Θα συνεχίσουμε με ένα παράδειγμα όπου θα υπολογίσουμε πάλι την QR ανάλυση του πίνακα του παραδείγματος 1.2.4 αλλά αυτή τη φορά με χρήση πινάκων Givens.

**Παράδειγμα 1.3.2** Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \\ 5 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Για να μετασχηματίσουμε τον  $A$  χρειάζεται να τον πολλαπλασιάσουμε με κατάλληλους πίνακες Givens ώστε να μηδενιστούν πρώτα τα στοιχεία (2,1)-(3,1)-(4,1) έπειτα τα στοιχεία (3,2)-(4,2) και τελικά το στοιχείο (4,3). Για το στοιχείο (2,1) θα ξεκινήσουμε έχοντας σαν οδηγό διάνυσμα το

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ και } c = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = 0.4472 \quad \text{ενώ}$$

$$s = \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = 0.8944.$$

Έχοντας υπολογίσει τα  $c$ ,  $s$  μπορούμε τώρα να δημιουργήσουμε τον πίνακα Givens που θα μηδενίσει το στοιχείο (2,1) ως εξής

$$G_1 = G(2,1,c,s) = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4472 & 0.8944 & 0 & 0 \\ -0.8944 & 0.4472 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

και πολλαπλασιάζοντας από αριστερά τον  $A$  με τον  $G$  βρίσκουμε τον πίνακα  $A_2$

$$A_2 = G_1 \cdot A = \begin{bmatrix} 2.2361 & 1.7889 & 4.9193 & 3.1305 \\ 0 & 0.8944 & -0.8944 & 0.4472 \\ 5 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Παρατηρούμε ότι το στοιχείο (2,1) όπως αναμενόταν μηδενίστηκε. Προχωρούμε με τον μηδενισμό του στοιχείου (3,1). Στην προκειμένη περίπτωση το διάνυσμα οδηγός θα είναι το

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.2361 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ και } c = \frac{2.2361}{\sqrt{30.0001}}, s = \frac{5}{\sqrt{30.0001}}.$$

Κατασκευάζουμε στη συνέχεια τον πίνακα Givens που θα μηδενίσει το στοιχείο (3,1) του πίνακα  $A_2$

$$G_2 = G(3,1,c,s) = \begin{bmatrix} \frac{2.2361}{\sqrt{30.0001}} & 0 & \frac{5}{\sqrt{30.0001}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{5}{\sqrt{30.0001}} & 0 & \frac{2.2361}{\sqrt{30.0001}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

και πολλαπλασιάζοντας πάλι τον  $A_2$  από αριστερά με τον πίνακα Givens που μόλις κατασκευάσαμε θα έχουμε

$$A_3 = G_2 \cdot A_2 = \begin{bmatrix} 5.4772 & 1.6432 & 2.0083 & 2.1909 \\ 0 & 0.8944 & -0.8944 & 0.4472 \\ 0 & -1.2247 & -4.4907 & -2.4495 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Όπως αναμενόταν το στοιχείο (3,1) μηδενίστηκε. Για το τελευταίο στοιχείο (4,1) χρησιμοποιούμε σαν διάνυσμα οδηγό το

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.4772 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ και } c = \frac{5.4772}{\sqrt{30.9997}}, s = \frac{1}{\sqrt{30.9997}}.$$

Συνεχίζοντας όπως προηγουμένως δημιουργούμε τον πίνακα Givens

Ελένη Θ. Μπαμπαλώνα

$$G_3 = G(4,1,c,s) = \begin{bmatrix} \frac{5.4772}{\sqrt{30.9997}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{30.9997}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{30.9997}} & 0 & 0 & \frac{5.4772}{\sqrt{30.9997}} \end{bmatrix}$$

ο οποίος πολλαπλασιάζοντας τον  $A_3$  από αριστερά παράγει τον  $A_4$

$$A_4 = G_3 \cdot A_3 = \begin{bmatrix} 5.5678 & 1.7961 & 2.3349 & 2.5145 \\ 0 & 0.8944 & -0.8944 & 0.4472 \\ 0 & -1.2247 & -4.4907 & -2.4495 \\ 0 & 0.6886 & 1.6068 & 1.5740 \end{bmatrix}.$$

Για να μηδενίσουμε τώρα τα στοιχεία της δεύτερης στήλης θα χρησιμοποιήσουμε σαν διάνυσμα οδηγό το

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8944 \\ -1.2247 \end{pmatrix} \text{ και } c = \frac{0.8944}{\sqrt{2.2998}}, s = \frac{-1.2247}{\sqrt{2.2998}}.$$

Βλέπουμε δηλαδή ότι χρησιμοποιούμε σαν πρώτο στοιχείο του οδηγού το αμέσως επόμενο στοιχείο της διαγωνίου του μετασχηματισμένου πίνακα  $A_4$  δηλαδή το  $A_4(2,2)$ . Ο πίνακας Givens κατασκευάζεται βάζοντας το Givens block στην κατάλληλη θέση ως εξής

$$G_4 = G(3,2,c,s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{0.8944}{\sqrt{2.2998}} & \frac{-1.2247}{\sqrt{2.2998}} & 0 \\ 0 & \frac{1.2247}{\sqrt{2.2998}} & \frac{0.8944}{\sqrt{2.2998}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

και πολλαπλασιάζοντας τον  $A_4$  βρίσκουμε

$$A_5 = G_4 \cdot A_4 = \begin{bmatrix} 5.5678 & 1.7961 & 2.3349 & 2.5145 \\ 0 & 1.5166 & 3.0991 & 2.2419 \\ 0 & 0 & -3.3708 & -1.0835 \\ 0 & 0.6886 & 1.6068 & 1.5740 \end{bmatrix}.$$

Συνεχίζουμε με οδηγό το διάνυσμα

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5166 \\ 0.6886 \end{pmatrix} \text{ και } c = \frac{1.5166}{\sqrt{2.7742}}, s = \frac{0.6886}{\sqrt{2.7742}}$$

κατασκευάζουμε τον επόμενο πίνακα μετασχηματισμού Givens

$$G_5 = G(4, 2, c, s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1.5166}{\sqrt{2.7742}} & 0 & \frac{0.6886}{\sqrt{2.7742}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{-0.6886}{\sqrt{2.7742}} & 0 & \frac{1.5166}{\sqrt{2.7742}} \end{bmatrix}$$

και κατ' επέκταση βρίσκουμε τον  $A_6$  να είναι

$$A_6 = G_5 \cdot A_5 = \begin{bmatrix} 5.5678 & 1.7961 & 2.3349 & 2.5145 \\ 0 & 1.6656 & 3.4862 & 2.6921 \\ 0 & 0 & -3.3708 & -1.0835 \\ 0 & 0 & 0.1818 & 0.5063 \end{bmatrix}.$$

Μένει να μηδενίσουμε και το στοιχείο (4,3). Όπως προηγουμένως και επειδή αλλάζουμε στήλη χρησιμοποιούμε σαν πρώτο στοιχείο του οδηγού το επόμενο στοιχείο της διαγωνίου, δηλαδή το  $A_6(3,3)$ . Θα έχουμε

Ελένη Θ. Μπαμπαλώνα

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3.3708 \\ 0.1818 \end{pmatrix} \text{ και } c = \frac{-3.3708}{\sqrt{11.3953}}, s = \frac{0.1818}{\sqrt{11.3953}}$$

και ο επόμενος πίνακας Givens θα είναι

$$G_6 = G(4, 3, c, s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-3.3708}{\sqrt{11.3953}} & \frac{0.1818}{\sqrt{11.3953}} \\ 0 & 0 & \frac{-0.1818}{\sqrt{11.3953}} & \frac{-3.3708}{\sqrt{11.3953}} \end{bmatrix}.$$

Χρησιμοποιώντας τον  $G_6$  βρίσκουμε τελικά

$$A_7 = G_6 \cdot A_6 = \begin{bmatrix} 5.5678 & 1.7961 & 2.3349 & 2.5145 \\ 0 & 1.6656 & 3.4862 & 2.6921 \\ 0 & 0 & 3.3757 & 1.1092 \\ 0 & 0 & 0 & -0.4472 \end{bmatrix}$$

δηλαδή έναν άνω τριγωνικό πίνακα. Παρατηρούμε, όπως και με τους μετασχηματισμούς Householder, ότι ο πίνακας  $A_7 = R$  παράχθηκε με την παρακάτω διαδικασία

$$\begin{aligned} R &= (G_6 G_5 G_4 G_3 G_2 G_1) A \Rightarrow A = (G_6 G_5 G_4 G_3 G_2 G_1)^T R \\ &\Rightarrow A = QR \end{aligned}$$

όπου  $Q = G_1^T G_2^T G_3^T G_4^T G_5^T G_6^T$ . Παρατηρούμε επίσης ότι ο πίνακας  $Q$  είναι ορθογώνιος, διότι εύκολα μπορούμε να υπολογίσουμε με τη βοήθεια του MatLab

$$Q = \begin{bmatrix} -0.1796 & 0.1937 & 0.9645 & 0.0000 \\ -0.3592 & -0.8134 & 0.0964 & -0.4472 \\ -0.8980 & 0.3680 & -0.2411 & 0.0000 \\ -0.1796 & -0.4067 & 0.0482 & 0.8944 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad QQ^T = I_{4 \times 4}$$

Βρήκαμε δηλαδή έναν ορθογώνιο πίνακα  $Q$  και έναν άνω τριγωνικό πίνακα  $R$  έτσι ώστε

$$A = QR$$

□

Συνεχίζουμε με την ελάττωση ενός πίνακα σε μορφή Hessenberg. Όπως προαναφέραμε οι πίνακες Hessenberg είναι αριθμητικά ευσταθείς και γι' αυτό μετασχηματίζουμε πρώτα έναν πίνακα σ' αυτή την μορφή και έπειτα χρησιμοποιούμε τον αλγόριθμο QR για να βρούμε την Schur μορφή του. Αυτό θα γίνει ξεκάθαρο στην επόμενη παράγραφο όταν και θα αναφερθούμε στην Schur μορφή και τους αλγορίθμους που μας επιτρέπουν τον υπολογισμό της.

Η μέθοδος αυτή είναι μια επέκταση της QR παραγοντοποίησης χρησιμοποιώντας πίνακες Householder για να βρούμε πίνακες  $P$  και  $H$ , τέτοιους ώστε ο πίνακας  $PAP^T = H$  να είναι άνω Hessenberg και ο  $P$  να είναι ορθογώνιος.

Ο πίνακας  $P$  δημιουργείται από το γινόμενο  $(n-2)$  πινάκων Householder, από  $P_1$  έως  $P_{n-2}$ . Ο πίνακας  $P_1$  κατασκευάζεται έτσι ώστε να δημιουργήσει μηδενικά στην πρώτη στήλη του πίνακα  $A$  κάτω από το στοιχείο στην θέση  $(2,1)$ . Ο πίνακας  $P_2$  κατασκευάζεται έτσι ώστε να δημιουργήσει μηδενικά στην δεύτερη στήλη του πίνακα  $P_1AP_1^T$  κάτω από το στοιχείο στην θέση  $(3,2)$  και συνεχίζουμε έτσι μέχρι το τέλος.

Η όλη διαδικασία αποτελείται από  $(n-2)$  βήματα. (Ένας  $n \times n$  πίνακας Hessenberg αποτελείται από  $(n-2)(n-1)/2$  τουλάχιστον μηδενικά).

Στο τέλος του  $(n-2)$  βήματος, ο πίνακας  $A^{(n-2)}$  θα είναι ένας πίνακας ;άνω Hessenberg  $H$ , ορθογώνια όμοιος με τον πίνακα  $A$ .

Θα ισχύει

Ελένη Θ. Μπαμπαλώνα

$$\begin{aligned}
 H &= A^{(n-2)} = P_{n-2} A^{(n-3)} P_{n-2}^T = P_{n-2} (P_{n-3} A^{(n-4)} P_{n-3}^T) P_{n-2}^T = \\
 &= \dots = (P_{n-2} P_{n-3} \dots P_1) A (P_1^T P_2^T \dots P_{n-3}^T P_{n-2}^T)
 \end{aligned}$$

όπου

$$P = P_{n-2} P_{n-3} \dots P_1.$$

Έτσι έχουμε  $H = PAP^T$ . Επειδή ο κάθε Householder πίνακας  $P_i$  είναι ορθογώνιος άρα και ο πίνακας  $P$  θα είναι ορθογώνιος ως το γινόμενο  $(n-2)$  Householder πινάκων.

Για  $n=4$  θα έχουμε

Θέτουμε  $A^{(0)} = A$ .

Οπότε

$$A \xrightarrow{P_1} P_1 A P_1^T = \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{pmatrix} = A^{(1)}$$

$$A^{(1)} \xrightarrow{P_2} P_2 A^{(1)} P_2^T = \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{pmatrix} = A^{(2)} = H.$$

Επίσης αναφέρουμε ότι ο πολλαπλασιασμός από δεξιά με τον πίνακα  $P_i^T$  δεν καταστρέφει τα μηδενικά που ήδη υπάρχουν στον πίνακα  $P_i A^{(i-1)}$ .

Η διαδικασία αυτή χρειάζεται περίπου  $\frac{10}{3}n^3$  flops, ενώ αν θέλουμε να υπολογίσουμε και

τον πίνακα  $P$  τότε θα χρειαστούν επιπλέον και άλλα  $\frac{4}{3}n^3$  flops.

Προς το παρόν δίνουμε ένα παράδειγμα όπου μετασχηματίζουμε ένα πίνακα σε μορφή πάνω Hessenberg με τη βοήθεια πινάκων Householder, εξηγώντας παράλληλα και



τον αλγόριθμο που χρησιμοποιούμε. Βρίσκουμε δηλαδή ένα γινόμενο ορθογωνίων πινάκων  $P$  τέτοιων ώστε  $PAP^T=H$  και όπου ο  $H$  να είναι πάνω Hessenberg. Τέτοιος πίνακας  $P$  είναι πάντοτε δυνατόν να βρεθεί, [2].

**Παράδειγμα 1.3.3** Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \\ -4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & \frac{1}{2} & 5 & \frac{3}{2} \\ 1 & -3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Θα βρούμε έναν πίνακα Householder  $H_1$  έτσι ώστε όταν πολλαπλασιάσουμε τον  $A$  με τον  $H_1$  από αριστερά και τον  $H_1^T$  από δεξιά (ο δεύτερος πολλαπλασιασμός χρειάζεται λόγω της μορφής της εξίσωσης Lyapunov όπως και θα δείξουμε παρακάτω) να μηδενιστούν τα στοιχεία του  $A$  που βρίσκονται κάτω από το στοιχείο  $A(2,1)$ .

Ξεκινάμε υπολογίζοντας το διάνυσμα  $u_1$  με την χρησιμοποίηση της πρώτης στήλης του πίνακα  $A$ ,  $x_1 = (-4, 2, 1)^T$  ως εξής

$$u_1 = x_1 + \operatorname{sgn}(x_1^1) \|x_1\|_2 e_1 = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \sqrt{16+4+1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4-\sqrt{21} \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Μπορούμε να υπολογίσουμε τώρα τον πίνακα  $H_1^f$  που θα χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό του  $H_1$  ως εξής

$$H_1^f = I - 2(u_1 u_1^T / u_1^T u_1)$$

Θα έχουμε ότι

Ελένη Θ. Μπαμπαλώνα

$$\begin{aligned}
 u_1^T u_1 &= 78.6610 \text{ και } u_1 u_1^T = \begin{bmatrix} -8.5826 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -8.5826 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} 73.6610 & -17.1652 & -8.5826 \\ -17.1652 & 4 & 2 \\ -8.5826 & 2 & 1 \end{bmatrix} = M
 \end{aligned}$$

οπότε επιστρέφοντας στην προηγούμενη εξίσωση υπολογίζουμε τελικά τον  $H_1^f$  να είναι

$$\begin{aligned}
 H_1^f &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{78.6610} \begin{bmatrix} 73.6610 & -17.1652 & -8.5826 \\ -17.1652 & 4 & 2 \\ -8.5826 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} 0.8729 & 0.4364 & 0.2182 \\ 0.4364 & 0.8983 & -0.0509 \\ 0.2182 & -0.0509 & 0.9746 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Ο  $H_1$  μπορεί τώρα να δημιουργηθεί εμφυτεύοντας τον  $H_1^f$  στον μοναδιαίο 4x4 ως εξής :

$$H_1 = \begin{bmatrix} 1 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \vdots & & & \\ 0 & \vdots & & H_1^f & \\ 0 & \vdots & & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8729 & 0.4364 & 0.2182 \\ 0 & 0.4364 & 0.8983 & -0.0509 \\ 0 & 0.2182 & -0.0509 & 0.9746 \end{bmatrix}$$

Ο πολλαπλασιασμός του  $A = A_1$  με τον  $H_1$  δίνει

$$A_2 = H_1 A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0.8729 & 2.7966 & -2.1017 \\ 4.5826 & 2.5714 & 1.7143 & 0.8571 \\ 0 & 1.2704 & 4.3356 & 1.1678 \\ 0 & 3.7448 & 0.1858 & 2.0929 \end{bmatrix}$$

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο, κατασκευάζουμε κατάλληλους πίνακες Householder και έπειτα τους εμφυτεύουμε στους αντίστοιχους μοναδιαίους. Παίρνοντας κατά συνέπεια σαν διάνυσμα οδηγό μας τώρα το  $x_2 = (1.2704, 3.7448)^T$  βρίσκουμε ότι

$$u_2 = \begin{bmatrix} 5.2249 \\ 3.7448 \end{bmatrix} \text{ και } H_2^f = \begin{bmatrix} -0.3213 & -0.9470 \\ -0.9470 & 0.3213 \end{bmatrix}$$

Άρα τελικώς υπολογίζουμε τον  $H_2$  να είναι

$$H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.3213 & -0.9470 \\ 0 & 0 & -0.9470 & 0.3213 \end{bmatrix}$$

Πολλαπλασιάζοντας στη συνέχεια τον  $A_2$  με τον  $H_2$  βρίσκουμε

$$A_3 = H_2 A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0.8729 & 1.0918 & -3.3236 \\ 4.5826 & 2.5714 & -1.3625 & -1.3480 \\ 0 & -3.9545 & 2.7362 & 0.7284 \\ 0 & 0 & 1.7104 & 3.6923 \end{bmatrix}$$

ο οποίος φανερά είναι ένας πίνακας σε μορφή πάνω Hessenberg.

Έχοντας στην διάθεσή μας τους πίνακες  $H_2$  και  $H_1$  υπολογίζουμε τελικώς και τον  $P$  που βρίσκεται να είναι ίσος με

$$P = H_2 H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.8729 & 0.4364 & 0.2182 \\ 0 & -0.3469 & -0.2404 & -0.9066 \\ 0 & 0.3432 & 0.8670 & -0.3613 \end{bmatrix}$$

Ελένη Θ. Μπαμπαλώνα

Παρατηρούμε επίσης ότι  $PAP^T = A_4$ , δηλαδή πολλαπλασιασμός από δεξιά με τον ανάστροφο  $P^T$  δεν καταστρέφει τα μηδενικά και κατ' επέκταση τη μορφή του  $A_4$ , ο οποίος είναι η πάνω Hessenberg μορφή του  $A$ , με σφάλμα τάξης  $10^{-3}$  για τα στοιχεία  $a_{31}, a_{41}, a_{42}$  :

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.8728 & 1.0920 & 3.3236 \\ 4.5826 & 2.5712 & -1.3622 & 1.3478 \\ 0.0002 & -3.9544 & 2.7361 & -0.7281 \\ -0.0001 & -0.0004 & -1.7102 & 3.6923 \end{bmatrix}$$

□

Έχοντας στη διάθεσή μας έναν αλγόριθμο που υπολογίζει την (πάνω) Hessenberg μορφή ενός τετραγωνικού, πραγματικού πίνακα  $A$  μπορούμε τώρα να προχωρήσουμε στην Schur μορφή ενός πίνακα.

### Θεώρημα 1.3.6 [2, σελ. 83]

Έστω πίνακας  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Τότε υπάρχει ένας ορθογώνιος πίνακας  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  τέτοιος ώστε

$$Q^T A Q = R = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & \cdots & R_{1k} \\ 0 & R_{22} & \cdots & R_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & R_{kk} \end{bmatrix}$$

Κάθε στοιχείο της διαγωνίου  $R_{ii}$  είναι είτε ένας πραγματικός αριθμός που αντιστοιχεί σε πραγματική ιδιοτιμή του πίνακα  $A$  είτε ένας  $2 \times 2$  πίνακας που αντιστοιχεί σε ζευγάρι συζυγών ιδιοτιμών του  $A$ . □

**Ορισμός 1.3.7** Ο πίνακας  $R$  του Θεωρήματος 1.3.6 θα ονομάζεται **πραγματική Schur μορφή** του πραγματικού, τετραγωνικού πίνακα  $A$ .

Σημείωση : Από εδώ και στο εξής η πραγματική Schur μορφή θα ονομάζεται απλώς Schur μορφή. □

Βλέπουμε ότι ένα σημαντικό πλεονέκτημα της Schur μορφής είναι ότι εμφανίζει τις ιδιοτιμές του πραγματικού πίνακα  $A$  από τον οποίο προήλθε στη διαγώνιά της.

*Αποτελεί δηλαδή έναν εναλλακτικό, πέραν του χαρακτηριστικού πολυωνύμου τρόπο, υπολογισμού των ιδιοτιμών ενός πίνακα!!!*

Ακόμα περισσότερο και διατηρώντας ένα από τα πιο σημαντικά χαρακτηριστικά ενός πίνακα που είναι οι ιδιοτιμές του, μετασχηματίζει τον αρχικό πίνακα σε μία «σχεδόν» άνω τριγωνική μορφή που είναι πολύ βολική κατά την διάρκεια των υπολογισμών. Τελικά και αφού όπως έχουμε αναφέρει (Θεώρημα 1.3.6) μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ορθογώνιους πίνακες για την εύρεση της Schur μορφής, η διαδικασία υπολογισμού της θα είναι και αριθμητικά ευσταθής.

Συνειδητοποιούμε οπότε ότι τα πλεονεκτήματα που αποκομίζουμε μετασχηματίζοντας έναν πίνακα  $A$  στη Schur μορφή του αποτελούν εφελκυστήρα για την κατασκευή ενός αλγορίθμου που να μπορεί να την υπολογίζει. Αυτός ο αλγόριθμος που χρησιμοποιείται ευρέως σήμερα, παραδείγματος χάριν στο πακέτο MatLab, ονομάζεται αλγόριθμος QR (QR algorithm). Υπεύθυνος για την κατασκευή του τα έτη 1959-61 είναι ο J.G.F. Francis, για περισσότερες πληροφορίες <http://amath.colorado.edu/resources/archive/topten.pdf>.

Έστω κατ' αρχάς ότι έχουμε  $A = A_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Υπολογίζουμε την QR ανάλυση αυτού του πίνακα, βρίσκουμε δηλαδή έναν ορθογώνιο πίνακα  $Q_1$  και έναν άνω τριγωνικό πίνακα  $R_1$  τέτοιους ώστε  $A_0 = Q_1 R_1$ . Εάν έπειτα θέσουμε  $A_1 = R_1 Q_1$  μπορούμε στη συνέχεια να υπολογίσουμε την QR ανάλυση του νέου πίνακα  $A_1$ , δηλαδή να βρούμε όπως

προηγουμένως έναν ορθογώνιο πίνακα  $Q_2$  και έναν άνω τριγωνικό  $R_2$  έτσι ώστε  $A_1=Q_2R_2$ . Αλλάζοντας τώρα πάλι τη θέση των  $Q_2$  και  $R_2$  παίρνουμε τον  $A_2=R_2Q_2$ . Παρατηρούμε ότι συνεχίζοντας κατ' αυτόν τον τρόπο δημιουργείται μία ακολουθία πινάκων  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Το εκπληκτικό φαινόμενο που παρατήρησε ο Francis είναι ότι καθώς το πλήθος  $n$  των παραγομένων πινάκων μεγαλώνει τα διαγώνια στοιχεία του  $A_n$  τείνουν στις ιδιοτιμές του αρχικού πίνακα  $A$ !

Αποδείχθηκε τελικά ότι καθώς το  $n$  τείνει στο άπειρο ο  $A_n$  συγκλίνει στη Schur μορφή  $R$  του αρχικού πίνακα  $A$ . Δηλαδή

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = R$$

όπου  $R$  η Schur μορφή του  $A$ .

Παρόλα τα πλεονεκτήματα του παραπάνω αλγορίθμου υπάρχει και ένα σοβαρό πρόβλημα. Αυτό έγκειται στον αριθμό των επαναλήψεων που πρέπει να πραγματοποιήσουμε σ' έναν ηλεκτρονικό υπολογιστή ώστε το λάθος ανάμεσα στις πραγματικές ιδιοτιμές του  $A$  και αυτές που αναπαράγονται στην διαγώνιο του  $A_n$  να είναι αρκετά μικρό. Με άλλα λόγια η σύγκλιση του  $A_n$  είναι πολύ αργή και κατά συνέπεια ασύμφορη, κυρίως όταν ο πίνακας είναι γεμάτος και πυκνός, δηλαδή λίγα έως και κανένα από τα στοιχεία του δεν είναι μηδέν. Αυτό γιατί η QR παραγοντοποίηση ενός πίνακα χρειάζεται  $O(n^3)$  flops και αν ο πίνακας μας έχει διάσταση  $n \times n$ , τότε  $n$  τέτοιες παραγοντοποιήσεις θα χρειαστούμε. Δηλαδή συνολικά χρειαζόμαστε  $O(n^4)$  flops. Για παράδειγμα, στην περίπτωση ενός πραγματικού  $6 \times 6$  πίνακα  $A$  με τουλάχιστον ένα ζευγάρι μιγαδικών ιδιοτιμών η σύγκλιση δεν επιτυγχάνεται ούτε μετά από χίλιες επαναλήψεις.

Για να ξεπεραστεί αυτός ο σκόπελος επινοήθηκε μία παραλλαγή του αλγορίθμου QR, ο ρητός, διπλά μετατοπισμένος QR αλγόριθμος (Double shift explicit QR algorithm) ο οποίος είναι ικανός να υπολογίζει την Schur μορφή σε πεπερασμένο αριθμό βημάτων.

Η Ιδέα που κρύβεται πίσω απ' αυτόν τον αλγόριθμο είναι γνωρίζοντας την πάνω Hessenberg μορφή του  $A$ , να καταλήξουμε στον υπολογισμό της Schur μορφής του. Η QR παραγοντοποίηση ενός Hessenberg πίνακα χρειάζεται  $O(n^2)$  flops. Άρα η συνολική

διαδικασία θα μας κοστίσει τελικά  $O(n^3)$  flops. Γι' αυτό μετασχηματίζουμε κατ' αρχάς τον πίνακά μας  $A$  στην (πάνω) Hessenberg μορφή του  $H = P^T A P$  και στη συνέχεια εφαρμόζουμε τον κλασικό αλγόριθμο QR στον μετατοπισμένο  $H = H_0$ , βρίσκουμε δηλαδή αριθμούς  $k_1, k_2$  τέτοιους ώστε

$$\begin{aligned} \hat{H}_1 &= H_0 - k_1 I_{n \times n} = Q_1 R_1 \Rightarrow H_1 = R_1 Q_1 + k_1 I_{n \times n} \text{ και} \\ H_1 - k_2 I_{n \times n} &= Q_2 R_2 \Rightarrow H_2 = R_2 Q_2 + k_2 I_{n \times n} \end{aligned}$$

Στην πράξη ως  $k_1$  και  $k_2$  διαλέγονται οι ιδιοτιμές του  $2 \times 2$  πίνακα

$$B_k = \begin{bmatrix} H_k(n-1, n-1) & H_k(n-1, n) \\ H_k(n, n-1) & H_k(n, n) \end{bmatrix}$$

ο οποίος είναι υποπίνακας των πινάκων  $H_{2k}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  που δημιουργούνται σε κάθε επανάληψη του αλγόριθμου.

**Παράδειγμα 1.3.4** Εφαρμόζουμε τον παραπάνω αλγόριθμο στον επόμενο πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

ο οποίος έχει ιδιοτιμές  $\lambda_1 = -0.8019$ ,  $\lambda_2 = 0.555$  και  $\lambda_3 = 2.247$ . Αφού ψάχνουμε την Schur μορφή του  $A$  θα πρέπει η διαγώνιος των πινάκων, που υπολογίζονται στα βήματα του αλγορίθμου, να συγκλίνει μετά από κάποια βήματα στις ιδιοτιμές του  $A$ . Όταν συμβεί αυτό σταματά και ο αλγόριθμος.

Ελένη Θ. Μπαμπαλώνα

**Βήμα 1.** Μετασχηματίζουμε τον πίνακα  $A$  σε πάνω Hessenberg μορφή. Γι' αυτό χρειαζόμαστε έναν ορθογώνιο πίνακα  $P$  τέτοιον ώστε

$$H = P^T A P \Rightarrow A = P H P^T$$

Χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο υπολογισμού της Hessenberg μορφής (Παράδειγμα 1.2.7 και ρουτίνα 3) βρίσκουμε

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \text{ και } H = H_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Μπορούμε τώρα να ξεκινήσουμε τον αλγόριθμο Double shift explicit QR χρησιμοποιώντας τον  $H_0$  σαν αρχικό πίνακα.

**Βήμα 2.** Υπολογίζουμε τις ιδιοτιμές  $k_1, k_2$  του  $2 \times 2$  υποπίνακα που βρίσκεται στην κάτω δεξιά γωνία του  $H_0$ , δηλαδή τον  $L_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ . Οι ιδιοτιμές αυτού (οι οποίες μπορούν να βρεθούν και με χρήση του χαρακτηριστικού πολυωνύμου  $\left( k I_{2 \times 2} - \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right) = 0 \Rightarrow k^2 - k - 3$ ) του  $2 \times 2$  υποπίνακα του  $A$ ) είναι  $k_1 = -1.3028$  και  $k_2 = 2.3028$  (οι οποίες βρίσκονται με την ακόλουθη εντολή του MatLab  $\text{eig}(L_1)$ ).

Προχωράμε με τον υπολογισμό των επόμενων, μετατοπισμένων πινάκων  $H_1$  και  $H_2$ , δηλαδή των  $\hat{H}_1$  και  $\hat{H}_2$ .

**Βήμα 3.** Υπολογίζουμε τον μετατοπισμένο πίνακα  $H_1$ , δηλαδή τον  $\hat{H}_1 = H_0 - k_1 I_{3 \times 3}$  όπου  $H_0 = H$ ,



$$\hat{H}_1 = H_0 - k_1 I_{3 \times 3} \Rightarrow \hat{H}_1 = \begin{bmatrix} 2.3028 & 1 & 0 \\ -1 & 0.3028 & 1 \\ 0 & 1 & 3.3028 \end{bmatrix}.$$

**Βήμα 4.** Υπολογίζουμε την QR ανάλυση (που μπορεί να υπολογιστεί με χρήση της ρουτίνας 1 ή 2 (Παραδείγματα 1.2.4 και 1.2.6)) του  $\hat{H}_1$  η οποία είναι  $\hat{H}_1 = Q_1 R_1$ ,

$$\hat{H}_1 = Q_1 R_1 \text{ και } Q_1 = \begin{bmatrix} -0.9172 & -0.2231 & -0.33 \\ 0.3983 & -0.5137 & -0.7599 \\ 0 & -0.8284 & 0.5601 \end{bmatrix}, R_1 = \begin{bmatrix} -2.5105 & -0.7966 & 0.3983 \\ 0 & -1.2071 & -3.2499 \\ 0 & 0 & 1.0899 \end{bmatrix}$$

**Βήμα 5.** Μπορούμε τώρα κατά συνέπεια να βρούμε τον  $H_1$  ως εξής,

$$H_1 = R_1 Q_1 + k_1 I_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 0.6827 & 0.6393 & 1.6569 \\ -0.4808 & 2.0097 & -0.9029 \\ 0 & -0.9029 & -0.6924 \end{bmatrix}.$$

**Βήμα 6.** Συνεχίζουμε υπολογίζοντας τον  $\hat{H}_2 = H_1 - k_2 I_{3 \times 3}$ . Θα έχουμε

$$\hat{H}_2 = H_1 - k_2 I_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} -1.6201 & 0.6393 & 1.6569 \\ -0.4808 & -0.2931 & -0.9029 \\ 0 & -0.9029 & -2.9951 \end{bmatrix}.$$

**Βήμα 7.** Όπως προηγουμένως συνεχίζουμε υπολογίζοντας την QR ανάλυση του  $\hat{H}_2$ , η οποία είναι  $\hat{H}_2 = Q_2 R_2$ ,

$$\hat{H}_2 = Q_2 R_2 \text{ και } Q_2 = \begin{bmatrix} -0.9587 & 0.1298 & 0.2532 \\ -0.2845 & -0.4373 & -0.8531 \\ 0 & -0.8899 & 0.4562 \end{bmatrix}, R_2 = \begin{bmatrix} 1.6899 & -0.5295 & -1.3315 \\ 0 & 1.0146 & 3.2753 \\ 0 & 0 & -0.1766 \end{bmatrix}$$

Ελένη Θ. Μπαμπαλώνα

**Βήμα 8.** Οπότε βρίσκουμε τον  $H_2 = R_2 Q_2 + k_2 I_{3 \times 3}$ ,

$$H_2 = R_2 Q_2 + k_2 I_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 0.833 & 1.6358 & 0.2722 \\ -0.2887 & -1.0556 & 0.6285 \\ 0 & 0.1571 & 2.2222 \end{bmatrix}.$$

Παρατηρούμε ότι ήδη η διαγώνιος του  $H_2$  είναι αρκετά «κοντά» στις ιδιοτιμές του αρχικού  $A$ .

**Βήμα 9.** Συνεχίζουμε βρίσκοντας τις ιδιοτιμές  $k_3, k_4$  του  $2 \times 2$  κάτω δεξιά υποπίνακα του  $H_2$ . Αυτές είναι  $k_3 = -1.0854$  και  $k_4 = 2.2521$ .

**Βήμα 10.** Πραγματώνουμε πάλι το βήμα του αλγορίθμου υπολογίζοντας τον πίνακα  $\hat{H}_3 = H_2 - k_3 I_{3 \times 3}$  και χρησιμοποιώντας τα  $k_3$  και  $k_4$ . Θα έχουμε λοιπόν

$$\hat{H}_3 = H_2 - k_3 I_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 1.9187 & 1.6358 & 0.2722 \\ -0.2887 & 0.0299 & 0.6285 \\ 0 & 0.1571 & 3.3076 \end{bmatrix}$$

**Βήμα 11** Η ανάλυση QR του πίνακα  $\hat{H}_3$  θα είναι  $\hat{H}_3 = Q_3 R_3$ ,

$$\hat{H}_3 = Q_3 R_3 \text{ και } Q_3 = \begin{bmatrix} -0.9889 & -0.1289 & -0.0742 \\ 0.1488 & -0.8570 & -0.4934 \\ 0 & -0.4990 & 0.8666 \end{bmatrix}, R_3 = \begin{bmatrix} -1.9403 & -1.6132 & -0.1756 \\ 0 & -0.3149 & -2.2242 \\ 0 & 0 & 2.5361 \end{bmatrix}$$

**Βήμα 12.** Οπότε ο  $H_3$  βρίσκεται να είναι  $H_3 = R_3 Q_3 + k_3 I_{3 \times 3}$ ,

$$H_3 = R_3 Q_3 + k_3 I_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 0.5933 & 1.7202 & 0.7879 \\ -0.0468 & 0.2943 & -1.7721 \\ 0 & -1.2655 & 1.1124 \end{bmatrix}.$$

**Βήμα 13.** Συνεχίζουμε υπολογίζοντας τον  $\hat{H}_4 = H_3 - k_4 I_{3 \times 3}$ ,

$$\hat{H}_4 = H_3 - k_4 I_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} -1.6587 & 1.7202 & 0.7879 \\ -0.0468 & -1.9578 & -1.7721 \\ 0 & -1.2655 & -1.1397 \end{bmatrix} \text{ και}$$

**Βήμα 14.** Βρίσκουμε την QR ανάλυση του  $\hat{H}_4$  η οποία είναι  $\hat{H}_4 = Q_4 R_4$ ,

$$\hat{H}_4 = Q_4 R_4 \text{ και } Q_4 = \begin{bmatrix} -0.9996 & 0.0239 & 0.0151 \\ -0.0282 & -0.8454 & -0.5334 \\ 0 & -0.5336 & 0.8457 \end{bmatrix}, R_4 = \begin{bmatrix} 1.6594 & -1.6643 & -0.7375 \\ 0 & 2.3714 & 2.1251 \\ 0 & 0 & -0.067 \end{bmatrix}$$

**Βήμα 15.** Σχηματίζουμε τον πίνακα  $H_4 = R_4 Q_4 + k_4 I_{3 \times 3}$ ,

$$H_4 = R_4 Q_4 + k_4 I_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 0.6403 & 1.8401 & 0.2890 \\ -0.0670 & -0.8867 & 0.5323 \\ 0 & 0.0036 & 2.2464 \end{bmatrix}.$$

Βλέπουμε ότι η υποδιαγώνιος του  $H_4$  συγκλίνει «σιγά-σιγά» προς μηδενικά στοιχεία, ενώ η κύρια διαγώνιος «σιγά-σιγά» προς τις ιδιοτιμές του  $A$  όπως βέβαια περιμέναμε.

**Βήμα 16.** Συνεχίζουμε υπολογίζοντας τις ιδιοτιμές του υποπίνακα του  $H_4$  που είναι  $k_5 = -0.8873$  και  $k_6 = 2.2470$ .

**Βήμα 17.** Έπειτα θα υπολογίσουμε τον πίνακα  $\hat{H}_5 = H_4 - k_5 I_{3 \times 3}$ , οπότε θα έχουμε

Ελένη Θ. Μπαμπαλώνα

$$\hat{H}_5 = H_4 - k_5 I_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 1.5276 & 1.8401 & 0.2890 \\ -0.0670 & 0.0006 & 0.5323 \\ 0 & 0.0036 & 3.1337 \end{bmatrix}$$

**Βήμα 18.** Η QR ανάλυση του πίνακα  $\hat{H}_5$  είναι  $\hat{H}_5 = Q_5 R_5$ ,

$$\hat{H}_5 = Q_5 R_5 \text{ και } Q_5 = \begin{bmatrix} -0.999 & -0.0437 & -0.0019 \\ 0.0438 & -0.9981 & -0.0441 \\ 0 & -0.0441 & 0.999 \end{bmatrix}, R_5 = \begin{bmatrix} -1.5291 & -1.8383 & -0.2655 \\ 0 & -0.0813 & -0.6822 \\ 0 & 0 & 3.1066 \end{bmatrix}$$

**Βήμα 19.** Βρίσκουμε τον πίνακα  $H_5 = R_5 Q_5 + k_5 I_{3 \times 3}$ ,

$$H_5 = R_5 Q_5 + k_5 I_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 0.5598 & 1.9134 & -0.1812 \\ -0.0036 & -0.7761 & -0.6779 \\ 0 & -0.1371 & 2.2163 \end{bmatrix}.$$

**Βήμα 20.** Υπολογίζουμε τον  $\hat{H}_6 = H_5 - k_6 I_{3 \times 3}$ ,

$$\hat{H}_6 = H_5 - k_6 I_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} -1.6872 & 1.9134 & -0.1812 \\ -0.0036 & -3.0231 & -0.6779 \\ 0 & -0.1371 & -0.0307 \end{bmatrix}$$

**Βήμα 21.** Η QR ανάλυση του πίνακα  $\hat{H}_6$  είναι  $\hat{H}_6 = Q_6 R_6$ ,

$$\hat{H}_6 = Q_6 R_6 \text{ και } Q_6 = \begin{bmatrix} -1 & 0.0021 & 0.0001 \\ -0.0021 & -0.999 & -0.0452 \\ 0 & -0.0452 & 0.999 \end{bmatrix}, R_6 = \begin{bmatrix} 1.6872 & -1.907 & 0.1826 \\ 0 & 3.0303 & 0.6783 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

**Βήμα 22.** Βρίσκουμε τον πίνακα  $H_6 = R_6 Q_6 + k_6 I_{3 \times 3}$ ,

$$\text{άρα } H_6 = R_6 Q_6 + k_6 I_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 0.5638 & 1.9003 & 0.2689 \\ -0.0064 & -0.8108 & 0.5405 \\ 0 & 0 & 2.2470 \end{bmatrix}.$$

**Βήμα 23.** Βρίσκουμε τις ιδιοτιμές  $k_7 = -0.8108$  και  $k_8 = 2.2470$ .

**Βήμα 24.** Υπολογίζουμε τον πίνακα  $\hat{H}_7 = H_6 - k_7 I_{3 \times 3}$ ,

$$\hat{H}_7 = H_6 - k_7 I_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 1.3747 & 1.9003 & 0.2689 \\ -0.0064 & 0 & 0.5405 \\ 0 & 0 & 3.0578 \end{bmatrix}$$

**Βήμα 25.** Η QR ανάλυση του πίνακα  $\hat{H}_7$  είναι  $\hat{H}_7 = Q_7 R_7$

$$\hat{H}_7 = Q_7 R_7 \text{ με } Q_7 = \begin{bmatrix} -1 & -0.0046 & 0 \\ 0.0046 & -1 & -0.0001 \\ 0 & -0.0001 & 1 \end{bmatrix}, R_7 = \begin{bmatrix} -1.3747 & -1.9003 & -0.2664 \\ 0 & -0.0088 & -0.5421 \\ 0 & 0 & 3.0577 \end{bmatrix}$$

**Βήμα 26.** Σχηματίζουμε τον πίνακα  $H_7 = R_7 Q_7 + k_7 I_{3 \times 3}$ ,

$$H_7 = R_7 Q_7 + k_7 I_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 0.555 & 1.9067 & -0.2661 \\ 0 & -0.8019 & -0.5421 \\ 0 & -0.0004 & 2.2469 \end{bmatrix}.$$

**Βήμα 27.** Υπολογίζουμε τον πίνακα  $\hat{H}_8 = H_7 - k_8 I_{3 \times 3}$ ,

Ελένη Θ. Μπαμπαλώνα

$$\hat{H}_8 = H_7 - k_8 I_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} -1.6920 & 1.9067 & -0.2661 \\ 0 & -3.0489 & -0.5421 \\ 0 & -0.0004 & -0.0001 \end{bmatrix}$$

**Βήμα 28.** Η QR ανάλυση του πίνακα  $\hat{H}_8$  είναι

$$\hat{H}_8 = Q_8 R_8 \text{ όπου } Q_8 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -0.0001 \\ 0 & -0.0001 & 1 \end{bmatrix}, R_8 = \begin{bmatrix} 1.6920 & -1.9067 & 0.2661 \\ 0 & 3.0489 & 0.5421 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

**Βήμα 29.** Βρίσκουμε τον πίνακα  $H_8 = R_8 Q_8 + k_8 I_{3 \times 3}$ ,

$$H_8 = R_8 Q_8 + k_8 I_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 0.5551 & 1.9067 & 0.2664 \\ -0.0001 & -0.8020 & 0.5417 \\ 0 & 0 & 2.2470 \end{bmatrix}.$$

Παρατηρούμε τελικά ότι μετά από τα παραπάνω βήματα της μεθόδου έχουμε καταφέρει σύγκλιση με ακρίβεια τριών δεκαδικών ψηφίων.  $\square$

Ακόμα όμως και αυτός ο αλγόριθμος δημιουργεί αριθμητικά προβλήματα! Αυτά οφείλονται στο γεγονός ότι οι ιδιοτιμές ενός ή περισσοτέρων πινάκων  $B_k$  μπορεί να είναι μιγαδικοί αριθμοί. Αυτό από τη μεριά του και από αριθμητικής καθαρά σκοπιάς σημαίνει ότι θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε σ' αυτήν την περίπτωση πράξεις ορισμένες στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών άρα να σπαταλήσουμε υπολογιστικό χρόνο και ισχύ.

Το πρόβλημα ξεπεράστηκε με την επόμενη τελική (τουλάχιστον μέχρι σήμερα απ' όσο γνωρίζουμε) παραλλαγή του αλγορίθμου QR και ονομάζεται Double shift implicit QR algorithm.

Η διαφορά από τον explicit algorithm είναι ότι μ' αυτόν αποφεύγουμε την εμφάνιση μιγαδικών ιδιοτιμών με το να θεωρούμε πίνακες

$$N = (H - k_1 I)(H - k_2 I) = H^2 - (k_1 + k_2)H + k_1 k_2 I^2.$$

Ενώ τώρα τα  $\kappa_1$  και  $\kappa_2$  μπορεί να είναι μιγαδικοί παρά ταύτα το άθροισμα και το γινόμενο τους θα είναι πάντα πραγματικοί αριθμοί αφού αυτοί θα είναι συζυγείς. Άρα κατά συνέπεια και ο πίνακας  $N$  θα είναι πραγματικός.

Ο αλγόριθμος συνεχίζει με τον υπολογισμό πινάκων Householder  $P_1, P_2, \dots, P_{n-2}$  τέτοιους ώστε ο πίνακας

$$H_2 = (P_1 P_2 \dots P_{n-2})^T N (P_1 P_2 \dots P_{n-2}) \quad (1.2.11)$$

να είναι πάνω Hessenberg. Αποδεικνύεται ότι σε σχετικά μικρό αριθμό βημάτων ο πίνακας  $H_k$  που παράγεται από τις διαδοχικές επαναλήψεις του implicit (πεπλεγμένου) algorithm συγκλίνει στην Schur μορφή του  $A$ .

Στην πράξη έχει δειχθεί ότι ενώ ο παραπάνω αλγόριθμος καταφέρνει σε μικρό αριθμό βημάτων να συγκλίνει σε μία μορφή αυτή δεν είναι ακριβώς η Schur μορφή που ζητάμε! Παράγει δηλαδή έναν πίνακα του οποίου τα διαγώνια στοιχεία συγκλίνουν γρήγορα και με σχεδόν ανύπαρκτο λάθος στις πραγματικές ιδιοτιμές του αρχικού μας πίνακα αλλά όταν οι ιδιοτιμές είναι ένα ζευγάρι μιγαδικών αριθμών αποτυγχάνει!! Για την ακρίβεια δεν αποτυγχάνει εντελώς (!) αφού παράγει ένα ζευγάρι διαδοχικών στη διαγώνιο αριθμών, το άθροισμα των οποίων δια δύο συγκλίνει στο πραγματικό μέρος των μιγαδικών συζυγών ιδιοτιμών!!

Αυτό φαίνεται καλύτερα με το επόμενο παράδειγμα που ακολουθεί.

**Παράδειγμα 1.3.5** Έστω

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & -0.3 & 6 & 1 \\ -2.2 & 3.1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1.4 & 5.7 \end{bmatrix}$$

Ελένη Θ. Μπαμπαλώνα

Σύμφωνα με τη μέθοδο που περιγράφουμε προηγουμένως, αναλύοντας τον ισοδύναμο Hessenberg  $H$  του πίνακα  $A$  στο γινόμενο (1.3.11), μέσω Matlab, προκύπτουν για τον

$$H = \begin{bmatrix} 1.0000 & -1.8207 & 0.2278 & 3.1037 \\ 2.4166 & 5.0342 & -1.0808 & -1.0205 \\ 0 & -3.7957 & -2.3418 & 3.3633 \\ 0 & 0 & 2.2874 & 4.7076 \end{bmatrix}$$

οι εξής πίνακες

$$P = P_1 P_2 \dots P_{n-2} = \begin{bmatrix} 0.1549 & -0.8036 & -0.3967 & -0.4157 \\ 0.0449 & 0.5708 & -0.3743 & -0.7294 \\ 0.9504 & 0.1330 & -0.1486 & 0.2388 \\ -0.2661 & 0.1035 & -0.8249 & 0.4879 \end{bmatrix}$$

$$N = \begin{bmatrix} -3.4627 & -2.4350 & -0.2721 & 3.0433 \\ 0 & 1.3866 & 0.2343 & -4.2886 \\ 0 & 0 & 5.2381 & -1.8682 \\ 0 & 0 & 0.0020 & 5.2381 \end{bmatrix}$$

όπου  $P_1, P_2, \dots, P_{n-2}$  πίνακες Householder και  $N$  συγκλίνει στη Schur μορφή του πίνακα  $A$ , η οποία χρησιμοποιώντας την ρουτίνα (5) που υπολογίζει την Schur μορφή πίνακα είναι:

$$R = \begin{bmatrix} 1.3866 & -0.2768 & -2.9751 & -0.5172 \\ 0 & 5.1251 & -3.2318 & 2.1073 \\ 0 & 0.0051 & 5.3511 & 3.4086 \\ 0 & 0 & 0 & -3.4627 \end{bmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι ο  $A$  έχει δύο πραγματικές ιδιοτιμές, τις  $\lambda_1=1.3866$  και  $\lambda_2=-3.4627$  αλλά και ένα ζευγάρι συζυγών μιγαδικών  $\lambda_3=5.2381+0.0613i$ ,  $\lambda_4=5.2381-0.0613i$  (λόγω του



Schur bump  $\begin{bmatrix} 5.1251 & -3.2318 \\ 0.0051 & 5.3511 \end{bmatrix}$ ). Οι ιδιοτιμές του πίνακα  $\begin{bmatrix} 5.1251 & -3.2318 \\ 0.0051 & 5.3511 \end{bmatrix}$  είναι

$$\lambda_3=5.2381+0.0609i, \lambda_4=5.2381-0.0609i.$$

Παρά ταύτα έχουμε ότι

$$(5.1251 + 5.3511) / 2 = 5.2381 = \operatorname{Re}(\lambda_3) = \operatorname{Re}(\lambda_4)$$

δηλαδή όπως εξηγήσαμε και παραπάνω όταν εμφανίζεται ζευγάρι μιγαδικών το άθροισμα των διαγωνίων στοιχείων στο Schur bump δια δύο συγκλίνει στο πραγματικό μέρος των ιδιοτιμών που ψάχνουμε.  $\square$

Το παραπάνω πρόβλημα μπορεί να λυθεί με άμεση προσπέλαση του κώδικα και «εξωτερικό» υπολογισμό των ιδιοτιμών που είναι μιγαδικές, στα σημεία της υποδιαγωνίου όπου εμφανίζεται αριθμός διάφορος του μηδενός. Εκεί όπου με άλλα λόγια δηλαδή εμφανίζεται ένα Schur bump που με τη σειρά του υπονοεί ότι εκεί βρίσκεται ένα ζευγάρι μιγαδικών ιδιοτιμών του  $A$ .

Παρακάτω παραθέτουμε ακόμα ένα παράδειγμα στο οποίο εξηγούμε αναλυτικά όλα τα βήματα του Double shift implicit QR αλγόριθμου.

Έστω ο πίνακας

$$H = \begin{bmatrix} h_{11} & \dots & h_{1,n-1} & h_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h_{n-1,1} & \dots & h_{n-1,n-1} & h_{n-1,n} \\ h_{n1} & \dots & h_{n,n-1} & h_{nn} \end{bmatrix}$$

1) Υπολογίζουμε την πρώτη στήλη  $n_1$  του πίνακα

$$N = (H - k_1 I)(H - k_2 I) = H^2 - (k_1 + k_2)H + k_1 k_2 I^2,$$

$$\text{όπου } k_1 + k_2 = h_{n-1,n-1} + h_{nn} = t \text{ και } k_1 k_2 = h_{n-1,n-1} h_{nn} - h_{n,n-1} h_{n-1,n} = d.$$

2). Βρίσκουμε έναν πίνακα Householder  $P_0$  έτσι ώστε  $P_0 n_1$  να είναι πολλαπλάσιο του

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

3). Δημιουργούμε τον πίνακα  $H' = P_0^T H P_0$ .

4). Μετατρέπουμε τον πίνακα  $H'$  σε έναν άνω Hessenberg πίνακα, χρησιμοποιώντας πίνακες Householder:

$$(P_{n-2}^T \dots P_2^T P_1^T) H' (P_1 P_2 \dots P_{n-2}) = H''$$

**Παράδειγμα 1.3.6** Έστω ο πίνακας

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

**Βήμα 1.** Υπολογίζουμε την πρώτη στήλη  $n_1$  του πίνακα  $N$ .

Οι ιδιοτιμές του υποπίνακα  $h = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$  είναι  $1+i$  και  $1-i$  και

$$k_1 + k_2 = \text{tr}(h) = h_{2,2} + h_{3,3} = t = 2, \quad k_1 k_2 = \det(h) = h_{2,2} h_{3,3} - h_{3,2} h_{2,3} = 2 = d$$

Άρα ο πίνακας  $N$  που προκύπτει από τη σχέση  $N = H^2 - tH + dI$ , όπου  $t=2$  και  $d=2$ , είναι

$$N = \begin{bmatrix} 3 & -8 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{με } n_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

**Βήμα 2.** Προσπαθούμε να βρούμε πίνακα Householder  $P_0$ , έτσι ώστε  $P_0 n_1$  να είναι

πολλαπλάσιο του  $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ , όπου  $n_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$ .

Έχουμε,

$$u = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} + \sqrt{3^2 + (-1)^2 + 2^2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.7417 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Κατασκευάζουμε τον πίνακα Householder  $P_0$ ,

$$P_0 = I - 2(uu^T / u^T u) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - 2 \left( \begin{bmatrix} 45.4499 & -6.7417 & -13.4833 \\ -6.7417 & 1 & 2 \\ -13.4833 & 2 & 4 \end{bmatrix} \right) / 50.4499 =$$

$$= \begin{bmatrix} -0.8018 & 0.2673 & 0.5345 \\ 0.2673 & 0.9604 & -0.0793 \\ 0.5345 & -0.0793 & 0.8414 \end{bmatrix}$$

3). Δημιουργούμε τον πίνακα  $H' = P_0^T H P_0$ .

$$H' = P_0^T H P_0 = \begin{bmatrix} -0.8571 & -2.6248 & -0.9734 \\ 0.0581 & 0.8666 & 1.9505 \\ 1.1852 & -0.7221 & 2.9906 \end{bmatrix}$$

4). Μετατρέπουμε τον πίνακα  $H'$  σε έναν άνω Hessenberg μορφή, χρησιμοποιώντας πίνακες Householder:

$$(P_{n-2}^T \dots P_2^T P_1^T) H' (P_1 P_2 \dots P_{n-2}) = H'' .$$

Έχουμε

$$u_1 = \begin{bmatrix} 0.0581 \\ 1.1852 \end{bmatrix} + \sqrt{0.0852^2 + 1.1852^2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.2447 \\ 1.1852 \end{bmatrix}$$

Οπότε

$$\begin{aligned} \hat{P}_1 &= I_{2 \times 2} - 2(uu^T / u^T u) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 2 \left( \begin{bmatrix} 1.5493 & 1.4752 \\ 1.4752 & 1.4047 \end{bmatrix} \right) / 2.9540 = \\ &= \begin{bmatrix} 0.0490 & -0.9988 \\ -0.9988 & 0.0490 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Βρίσκουμε στη συνέχεια τον πίνακα μετασχηματισμού εμφυτεύοντας τον παραπάνω πίνακα στον μοναδιαίο ως εξής;

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0490 & -0.9988 \\ 0 & -0.9988 & 0.0490 \end{bmatrix}$$

Οπότε προκύπτει ο πίνακας

$$H'' = P_1^T H P_1 = \begin{bmatrix} -0.8571 & 1.1008 & 2.5739 \\ -1.1866 & 3.0456 & -0.8290 \\ 0 & 1.8436 & 0.8115 \end{bmatrix}$$

□

Θα μελετήσουμε τον ίδιο πίνακα με το προηγούμενο παράδειγμα, χρησιμοποιώντας τον Double shift explicit QR αλγόριθμο.

**Παράδειγμα 1.3.7** Έστω ο πίνακας

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

**Βήμα 1.** Υπολογίζουμε τον πίνακα  $N$ .

Οι ιδιοτιμές του πίνακα  $h = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$  είναι  $1+i$  και  $1-i$ , και  $k_1 + k_2 = h_{2,2} + h_{33} = t = 2$ ,

$$k_1 k_2 = h_{22} h_{33} - h_{3,2} h_{2,3} = 2 = d.$$

Άρα ο πίνακας  $N$  που προκύπτει από τη σχέση  $N = H^2 - tH + dI$ , όπου  $t=2$  και  $d=2$ , είναι

$$N = \begin{bmatrix} 3 & -8 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{με } n_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

**Βήμα 2.** Βρίσκουμε την QR παραγοντοποίηση του πίνακα  $N$ , η οποία είναι

$$Q = \begin{bmatrix} -0.8018 & -0.5470 & -0.2408 \\ 0.2673 & 0.0322 & -0.9631 \\ 0.5345 & -0.8365 & 0.1204 \end{bmatrix}$$

Ελένη Θ. Μπαμπαλώνα

$$R = \begin{bmatrix} -3.7417 & 6.9488 & -3.2071 \\ 0 & 4.4401 & -2.6383 \\ 0 & 0 & -4.0931 \end{bmatrix}$$

**Βήμα 3.** Βρίσκουμε τον πίνακα  $H_2 = Q^T H Q$ , οποίος είναι ο εξής:

$$H_2 = \begin{bmatrix} -0.8571 & 1.1007 & 2.5740 \\ -1.1867 & 3.0455 & -0.8289 \\ 0 & 1.8437 & 0.8116 \end{bmatrix}$$

□

Παρατηρούμε ότι ο πίνακας  $H_2$  που προκύπτει χρησιμοποιώντας τον Double shift explicit QR αλγόριθμο, είναι ο ίδιος που προέκυψε χρησιμοποιώντας τον Double shift implicit QR αλγόριθμο.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

### 2. ΕΞΙΣΩΣΗ LYAPUNOV

#### 2.1 Εισαγωγή

Σ' αυτό το δεύτερο κεφάλαιο χρησιμοποιούμε τη Θεωρία Lyapunov για να κατασκευάσουμε την εξίσωση Lyapunov και δείχνουμε πως η τελευταία μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να αποδείξουμε ότι ένα σύστημα είναι ασυμπτωτικά ευσταθές. Θα μελετήσουμε πιο εκτεταμένα την εξίσωση Lyapunov. Θα δείξουμε παραδείγματος χάριν το πως μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να αποφανθούμε εάν ένα σύστημα είναι παρατηρήσιμο (observable) ή ελέγξιμο (controlable). Αυτές οι έννοιες σχετίζονται με την ύπαρξη λύσης διαφόρων προβλημάτων της Θεωρίας Ελέγχου, όπως παραδείγματος χάριν στην επανατοποθέτηση των πόλων ή τη δημιουργία παρατηρητή κατάστασης ενός συστήματος. Αναφερθήκαμε επίσης στο πρώτο κεφάλαιο σε διάφορες αριθμητικές μεθόδους, όπως η εύρεση της πραγματικής Schur μορφής ενός τετραγωνικού, με πραγματικές τιμές πίνακα, τις οποίες θα χρησιμοποιήσουμε τώρα στο δεύτερο κεφάλαιο για να κατασκευάσουμε έναν αλγόριθμο ο οποίος θα είναι ικανός να επιλύει την εξίσωση Lyapunov γρήγορα και αξιόπιστα.

Συγκεκριμένα το Κεφάλαιο 2 είναι χωρισμένο σε τρεις ενότητες. Στην πρώτη από αυτές σκιαγραφούμε τις κεντρικές ιδέες της Θεωρίας Lyapunov στο πλαίσιο προβλημάτων της Θεωρίας Ελέγχου όπως η ευστάθεια συστημάτων που περιγράφονται από συνήθεις διαφορικές εξισώσεις. Ορίζουμε τη συνάρτηση Lyapunov και εξηγούμε τη χρήση της στο Θεώρημα Lyapunov. Αυτό το Θεώρημα μας παρέχει ένα θαυμάσιο εργαλείο για την ανάλυση της ευστάθειας συστημάτων. Στη συνέχεια κατασκευάζουμε την εξίσωση Lyapunov και αναλύουμε πως η λύση της μας επιτρέπει να εξάγουμε συμπεράσματα για την ασυμπτωτική συμπεριφορά των λύσεων γραμμικών διαφορικών εξισώσεων. Επιπλέον σ' αυτή την ενότητα παρουσιάζουμε μεθόδους αναλυτικής ή προσεγγιστικής επίλυσης της εξίσωσης Lyapunov και επισημαίνουμε τους λόγους για τους οποίους επιλέγουμε την αριθμητική μέθοδο επίλυσης με χρήση της πραγματικής Schur μορφής. Στο τέλος της ενότητας αυτής παρουσιάζουμε έναν αλγόριθμο υπολογισμού της λύσης της εξίσωσης Lyapunov και κάποια παραδείγματα.

Στη δεύτερη ενότητα εμβαθύνουμε σε κάποιες πολύ σημαντικές για τη Θεωρία Ελέγχου ιδιότητες όπως η παρατηρησιμότητα και η ελεγχιμότητα ενός συστήματος ελέγχου που περιγράφεται από κάποιο σύστημα διαφορικών εξισώσεων. Ακόμα περισσότερο μελετάμε το πως μπορεί να χρησιμοποιηθεί η εξίσωση Lyapunov για να αποδείξουμε ότι ένα σύστημα είναι παρατηρήσιμο και ελέγξιμο.

Στην τρίτη ενότητα αναφερόμαστε τέλος σε επιπλέον εφαρμογές της εξίσωσης Lyapunov στον Εύρωστο Έλεγχο.

## 2.2 Θεωρία Lyapunov

### 2.2.1 Έλεγχος με χρησιμοποίηση της Θεωρίας Lyapunov.

Για να αναλύσουμε και στη συνέχεια να μπορέσουμε να ελέγξουμε την απόκριση συστημάτων που περιγράφονται από διαφορικές εξισώσεις, μπορούμε να επιδιώξουμε να βρούμε μία κλειστή μορφή λύση. Μία συνάρτηση δηλαδή που να επαληθεύει την διαφορική εξίσωση και τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος. Δυστυχώς όμως, μόνο ένα μικρό ποσοστό διαφορικών εξισώσεων έχει μέχρι σήμερα λυθεί αναλυτικά κι έτσι είμαστε αναγκασμένοι είτε να καταφεύγουμε σε υπολογιστικές μεθόδους, είτε να πραγματοποιούμε μία ποιοτική ανάλυση για να μπορέσουμε να ελέγξουμε την απόκριση του συστήματος.

Η θεωρία που μπορεί να δώσει απαντήσεις στο παραπάνω πρόβλημα ονομάζεται θεωρία Lyapunov προς τιμής του Ρώσου μαθηματικού A. Lyapunov που την ανακάλυψε. Η ριζοσπαστική ιδέα του Lyapunov ήταν να χρησιμοποιήσει κατάλληλες συναρτήσεις για να μετρήσει την απόσταση των τροχιών, που σχηματίζουν οι λύσεις του συστήματος διαφορικών εξισώσεων, από την αρχή των αξόνων. Στη συνέχεια μελετώντας την συμπεριφορά των παραγώγων αυτών των συναρτήσεων μπόρεσε να αποφανθεί στο ερώτημα εάν οι τροχιές συγκλίνουν ή όχι σ' ένα σταθερό σημείο, διότι αρνητικές παράγωγοι θα σήμαιναν φθίνουσα πορεία των τροχιών προς το σημείο ενώ θετικές αύξουσα, με κατεύθυνση των τροχιών προς το άπειρο.

Για να θεμελιώσουμε την παραπάνω ιδέα χρειαζόμαστε κάποιους ορισμούς. Για λεπτομέρειες και περισσότερες πληροφορίες για τη Θεωρία Lyapunov και την ευστάθεια συστημάτων [7, Κεφ. 6, παρ. 6] και [5, κεφ. 4].



**Ορισμός 2.2.1** *Κατάσταση ισορροπίας* ενός συστήματος  $\dot{x} = Ax(t)$  με  $x(0) = x_0$  ονομάζουμε το διάνυσμα  $x_e$  που ικανοποιεί την σχέση  $Ax_e = 0$ .  $\square$

Η  $x_e = 0$  είναι η μοναδική κατάσταση ισορροπίας εάν και μόνο εάν ο πίνακας  $A$  είναι μη ιδιόμορφος πίνακας.

Για ευκολία, όλοι οι ορισμοί και τα θεωρήματα αναφέρονται, όσον αφορά το σημείο ισορροπίας, στην αρχή των συντεταγμένων του  $R^n$ , δηλαδή στο σημείο  $x_e = 0$ , δηλαδή τη μηδενική ισορροπία του χώρου κατάστασης. Ας υποθέσουμε ότι χρησιμοποιώντας την αλλαγή των παραμέτρων  $y = x - x_e$ , οποιοδήποτε άλλο σημείο ισορροπίας μπορεί να μετατοπιστεί στην αρχή του συστήματος συντεταγμένων. Τότε η παράγωγος του  $y$  δίνεται από τον εξής τύπο

$$\dot{y} = \dot{x} = f(x) = f(y + x_e) \triangleq g(y), \quad \text{όπου } g(0) = 0.$$

Στην νέα μεταβλητή  $y$ , το σύστημα έχει πάλι σημείο ισορροπίας στην αρχή των συντεταγμένων. Συνεπώς θα υποθέσουμε ότι η  $f(x)$  ικανοποιεί την  $f(0) = 0$  και θα μελετήσουμε την ευστάθεια στην αρχή των αξόνων  $x = 0$ . Γίνεται δηλαδή απλή μετατόπιση του συστήματος συντεταγμένων έτσι ώστε η ισορροπία που μας ενδιαφέρει να βρίσκεται στην αρχή του νέου συστήματος συντεταγμένων.

**Ορισμός 2.2.2** Ένα σύστημα με κατάσταση ισορροπίας  $x_e$  λέγεται *ασυμπτωτικά ευσταθές* εάν για οποιαδήποτε αρχική συνθήκη, το διάνυσμα κατάστασης  $x(t)$  πλησιάζει το  $x_e$  καθώς ο χρόνος αυξάνει.  $\square$

Ισοδύναμα:

**Ορισμός 2.2.3** Ένα σύστημα που περιγράφεται από την διαφορική εξίσωση

$$\dot{x} = f(x(t)), \quad t > 0 \quad (2.2.1)$$

Ελένη Θ. Μπαμπαλώνα

όπου  $x \in U, U \subset \mathbb{R}^v, f: \mathbb{R}^v \rightarrow \mathbb{R}^v$ , αναλυτική διανυσματική συνάρτηση και  $x(t_0, x_0, t)$  η λύση που ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες  $x(t_0) = x_0$ , θα λέγεται **ασυμπτωτικά ευσταθές** εάν

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t_0, x_0, t) = 0.$$

□

Ο παραπάνω ορισμός μας λέει απλά ότι για να είναι το σύστημα (2.2.1) ασυμπτωτικά ευσταθές θα πρέπει η λύση του συστήματος, ανεξαρτήτως των αρχικών συνθηκών, να τείνει στο μηδενικό διάνυσμα καθώς ο χρόνος τείνει προς το άπειρο.

**Παράδειγμα 2.2.1** Έστω το επόμενο σύστημα

$$\dot{x} = Ax = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix},$$

με αρχικές συνθήκες  $x_1(0) = 1$  και  $x_2(0) = 1$ . Εύκολα βρίσκουμε, παραδείγματος χάριν με την μέθοδο των πινάκων, την λύση του παραπάνω συστήματος να είναι

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} \\ e^{-2t} \end{pmatrix}.$$

Οπότε θα έχουμε ότι

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(x_0, t_0, t) = \begin{pmatrix} \lim_{t \rightarrow +\infty} x_1(t) \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lim_{t \rightarrow +\infty} (2e^{-t} - e^{-2t}) \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} (e^{-2t}) \end{pmatrix} = 0.$$

Δηλαδή το σύστημα είναι ασυμπτωτικά ευσταθές. Από την άλλη συνειδητοποιούμε ότι εάν κάποια από τις ιδιοτιμές του πίνακα  $A$  έχει θετικό πραγματικό μέρος τότε θα εμφανίζεται κάποιος όρος  $e^{kx}$  όπου  $k > 0$  και κατά συνέπεια η λύση θα τείνει στο άπειρο οπότε και το σύστημα θα είναι *ασταθές*.  $\square$

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα μπορέσαμε να μελετήσουμε την ασυμπτωτική ευστάθεια του συστήματος βρίσκοντας την γενική του λύση. Για να αποφανθούμε όμως για συστήματα ανώτερης τάξης ή μη-γραμμικά χρειαζόμαστε την ποιοτική ανάλυση που προσφέρει η Θεωρία Lyapunov.

Το θεώρημα που ακολουθεί καθορίζει την ασυμπτωτική ευστάθεια ενός γραμμικού συστήματος  $\dot{x} = Ax(t)$ , σε σχέση με τις ιδιοτιμές του πίνακα  $A$ .

**Θεώρημα 2.2.1** Το σύστημα  $\dot{x} = Ax(t)$ , με  $x(0) = x_0$ , (1) είναι ασυμπτωτικά ευσταθές εάν και μόνο εάν οι ιδιοτιμές του πίνακα  $A$  έχουν αρνητικά πραγματικά μέρη.

Απόδειξη:

Γνωρίζουμε ότι η γενική λύση του συστήματος (1) είναι η

$$x(t) = e^{At} x_0.$$

Συνεπώς,  $x(t) \rightarrow 0$  εάν και μόνο εάν  $e^{At} \rightarrow 0$  καθώς  $t \rightarrow \infty$ . Θα δείξουμε τώρα ότι αυτό συμβαίνει εάν και μόνο εάν όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα  $A$  έχουν αρνητικά πραγματικά μέρη.

Έστω  $X^{-1}AX = \text{diag}(e^{J_1 t}, e^{J_2 t}, \dots, e^{J_k t})X^{-1}$  η Jordan κανονική μορφή του πίνακα  $A$ , (JCF).

Τότε,

$$e^{At} = X \text{diag}(e^{J_1 t}, e^{J_2 t}, \dots, e^{J_k t}) X^{-1}.$$

Έστω  $\lambda_i$  μία ιδιοτιμή του πίνακα  $A$  που αντιστοιχεί στο  $J_i$ . Τότε  $e^{J_i t} \rightarrow 0$  εάν και μόνο εάν η ιδιοτιμή  $\lambda_i$  έχει αρνητικό πραγματικό μέρος. Επομένως  $e^{At} \rightarrow 0$  εάν και μόνο εάν όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα  $A$  έχουν αρνητικά πραγματικά μέρη.  $\square$

Στα μη γραμμικά συστήματα υπάρχουν αντίστοιχες ποσότητες, που ονομάζονται εκθέτες Lyapunov, που μετρούν την ταχύτητα με την οποία αποκλίνουν γειτονικές τροχιές. Επειδή τα μη γραμμικά συστήματα παρουσιάζουν μεγάλη ποικιλία δυναμικής συμπεριφοράς χρειάζεται να επεκτείνουμε την έννοια της ασυμπτωτικής ευστάθειας.

Αν δοθεί ελεγκτής ανάδρασης  $u(x)$ , το μη γραμμικό σύστημα ελέγχου

$$\dot{x} = f(x, u)$$

γίνεται μη γραμμικό δυναμικό σύστημα της μορφής

$$\dot{x} = f(x) \leftarrow f[x, u(x)]$$

Για να απλοποιήσουμε την εξέταση της ευστάθειας, υποθέτουμε ότι η  $f(x)$  είναι όχι μόνο συνεχής αλλά έχει συνεχείς και τις μερικές παραγώγους οποιασδήποτε τάξης που χρειάζονται.

**Ορισμός 2.2.4** Μια λύση  $\bar{x}(t)$  της  $\dot{x} = f(x)$  είναι **ευσταθής ως προς Lyapunov** αν για κάθε  $\varepsilon > 0$ , υπάρχει  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  τέτοιο ώστε για κάθε  $x(0)$  όπου είναι

$$\|x(0) - \bar{x}(0)\| < \delta$$

η λύση  $x(t)$  να ικανοποιεί την

$$\|x(t) - \bar{x}(t)\| < \varepsilon$$

για όλα τα  $t > 0$ . □

Στο Σχήμα (2.2.1) αποδίδεται γραφικά ένα ευσταθές κατά Lyapunov σύστημα, όπου για  $t = 0$  διαπιστώνουμε ότι η απόσταση των  $x(0)$  και  $\bar{x}(0)$  είναι μικρότερη του  $\delta$ , και για κάθε άλλο  $t$  οι αποστάσεις  $x(t)$  και  $\bar{x}(t)$  παραμένουν μικρότερες του  $\varepsilon$ .

Υπενθυμίζουμε ότι, αν επιπλέον, ισχύει η

$$\|x(t) - \bar{x}(t)\| \rightarrow 0 \text{ καθώς } t \rightarrow \infty \quad (2.2.2)$$

τότε η  $\bar{x}(t)$  είναι ασυμπτωτικά ευσταθής.

Επίλυση Εξισώσεων Lyapunov  
με εφαρμογές στην Θεωρία Ελέγχου

Αν η λύση  $\bar{x}(t)$  είναι ευσταθής ως προς Lyapunov και η (2.2.2) ισχύει για κάθε λύση της  $x(t)$ , τότε η  $\bar{x}(t)$  είναι συνολικά ασυμπτωτικά ευσταθής.  $\square$

Στους ορισμούς αυτούς, το  $\|\bullet\|$  σημαίνει κάθε κατάλληλο μέτρο διανύσματος. Ωστόσο, εκτός και αν σημειώνεται διαφορετικά, πάντοτε χρησιμοποιούμε το  $\|\bullet\|$  έτσι ώστε να σημαίνει το μήκος του διανύσματος, που ορίζεται από το Ευκλείδιο μέτρο

$$\|x\| = \sqrt{x^T x} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_{n_x}^2}.$$

Γενικότερα αν τα στοιχεία του  $x = \sigma + i\omega$  είναι μιγαδικοί αριθμοί, με  $i = \sqrt{-1}$ , χρησιμοποιούμε την

$$\|x\| = \sqrt{x^{*T} x} = \sqrt{\sigma^T \sigma + \omega^T \omega},$$

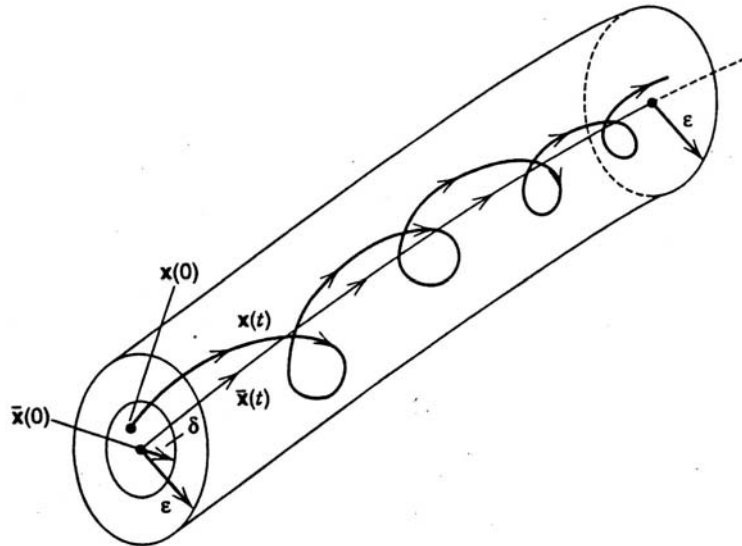
όπου  $x^* = \sigma - i\omega$  είναι ο συζυγής μιγαδικός του  $x$ . Για ένα πίνακα  $A$  διαστάσεων  $n_x \times n_x$ , πιθανώς με μιγαδική τιμή, ορίζουμε μέτρο πίνακα με την

$$\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

Για το Ευκλείδιο μέτρο διανύσματος το αντίστοιχο μέτρο πίνακα [Faddeev και Faddeeva, 1963, σελ. 109] δίνεται από την

$$\|A\| = \sqrt{\mu_{\max}},$$

όπου  $\mu_{\max}$  είναι η μεγαλύτερη ιδιοτιμή του πίνακα  $A^{*T} A$ .



Σχήμα (2.2.1) Ευστάθεια κατά Lyapunov

Σαν παράδειγμα της διαφοράς μεταξύ ευστάθειας και ασυμπτωτικής ευστάθειας, έχουμε το σύστημα Lotka-Volterra Θηραμάτων-Αρπακτικών:

**Παράδειγμα 2.2.2: Lotka-Volterra Θηραμάτων-Αρπακτικών.** Έστω ένα σύστημα πληθυσμού δυο (βιολογικών) ειδών, που αποτελείται από ένα είδος θηραμάτων, που έχει απεριόριστα αποθέματα τροφής και δεν έχει προβλήματα χώρου, και ένα είδος αρπακτικών, που τρέφεται μόνο με το συγκεκριμένο είδος θηραμάτων. Αυτό το είδος συστήματος έχει προτυποποιηθεί με τις εξισώσεις Lotka-Volterra:

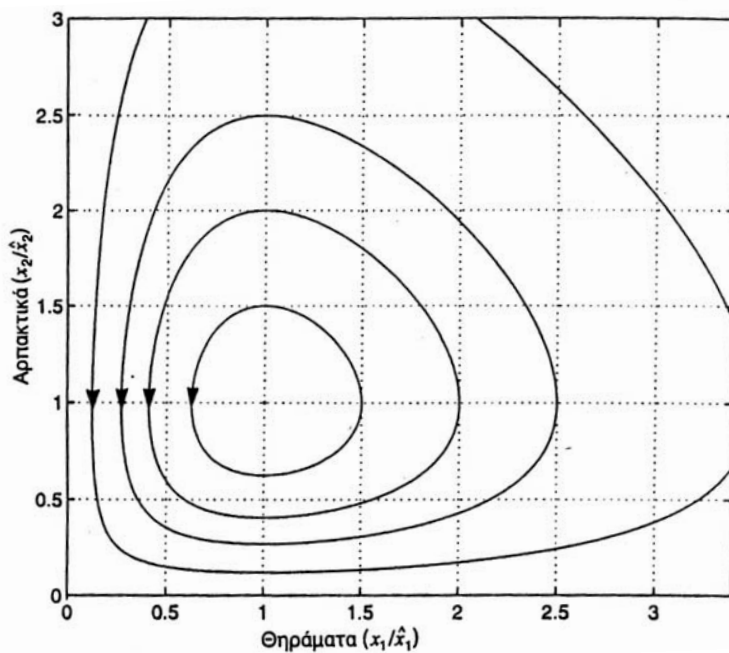
$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \alpha x_1 - \beta x_1 x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\gamma x_2 + \delta x_1 x_2\end{aligned}$$

όπου  $x_1$  είναι ο πληθυσμός των θηραμάτων,  $x_2$  ο πληθυσμός των αρπακτικών και  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  θετικές παράμετροι. Ο πρώτος όρος στη  $\dot{x}_1$  αντιστοιχεί σε εκθετική ανάπτυξη του πληθυσμού των θηραμάτων κατά Malthus όταν δεν υπάρχουν αρπακτικά. Παρόμοια ο πρώτος όρος στη  $\dot{x}_2$  αντιστοιχεί σε εκθετική ελάττωση του πληθυσμού των αρπακτικών όταν δεν υπάρχουν θηράματα. Οι δεύτεροι όροι στις εξισώσεις αυτές δίνουν το μοντέλο της ταχύτητας με την οποία τα αρπακτικά βρίσκουν και τρώνε τα θηράματα, που θεωρείται αναλογική και στους δυο πληθυσμούς. Η κατάσταση ισορροπίας δίνεται από τις σχέσεις

$$\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \left( \frac{\delta}{\gamma}, \frac{\alpha}{\beta} \right)$$

Στο Σχήμα(2.2.2) φαίνονται οι τροχιές για το σύστημα αυτό, που είναι κλειστές περιοδικές λύσεις που δίνονται από την  $V(x) = \text{σταθερά}$ , όπου

$$V(x_1, x_2) = \gamma \left[ \frac{x_1}{\bar{x}_1} - \ln\left(\frac{x_1}{\bar{x}_1}\right) \right] + \alpha \left[ \frac{x_2}{\bar{x}_2} - \ln\left(\frac{x_2}{\bar{x}_2}\right) \right]$$



Σχήμα (2.2.2) Τροχιές στο σύστημα θηραμάτων-αρπακτικών

Έπεται ότι η ισορροπία στο  $\bar{x}$  είναι ευσταθής, επειδή τροχιές που ξεκινούν κοντά στην αρχή των συντεταγμένων παραμένουν κοντά, αλλά όχι ασυμπτωτικά ευσταθής, επειδή οι τροχιές δεν προσεγγίζουν την αρχή των συντεταγμένων.  $\square$

Για να μελετήσουμε την ευστάθεια Lyapunov μιας λύσης συστήματος μη γραμμικών εξισώσεων, τουλάχιστον τοπικά, μελετούμε τις γραμμικοποιημένες εξισώσεις κίνησης. Η προσέγγιση αυτή είναι γνωστή σαν **πρώτη (ή έμμεση) μέθοδος Lyapunov**. Προσεγγίζουμε δηλαδή τη μη γραμμική διαφορική εξίσωση, που περιγράφει το σύστημα, με μια γραμμική διαφορική εξίσωση. Η προσέγγιση αυτή γίνεται χωριστά για κάθε κατάσταση ισορροπίας και τα συμπεράσματα περί ευστάθειας του μη γραμμικού συστήματος ισχύουν μόνο για μια μικρή περιοχή γύρω από την κατάσταση ισορροπίας. Για το λόγο αυτό η πρώτη αυτή μέθοδος είναι περιορισμένης αξίας.

Έστω  $\bar{x}(t)$  είναι λύση αναφοράς του μη γραμμικού συστήματος  $\dot{x} = f(x)$  που ξεκινά σε χρόνο  $t_0$ , και έστω  $x(t) = \bar{x}(t) + X(t)$  η λύση που αντιστοιχεί σε μια μικρή διαταραχή  $X(t_0)$  των αρχικών συνθηκών. Αναλύοντας σε σειρά Taylor την  $\dot{x} = f(x)$  στο σημείο  $\bar{x}(t)$  έχουμε

$$\dot{x} = f(x) = f(\bar{x}) + \left[ \frac{\partial f}{\partial x} \right]_{\bar{x}}^T (x - \bar{x}) + \frac{1}{2} (x - \bar{x})^T \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right]_{\bar{x}} (x - \bar{x}) + \dots \quad (2.2.3)$$

Θέτουμε  $A(t)$  τον χρονικά μεταβαλλόμενο πίνακα  $n_x \times n_x$  μερικών παραγώγων, που εκτιμάται κατά μήκος της λύσης αναφοράς ως

$$A(t) = \frac{\partial f[\bar{x}(t)]}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{n_x}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_{n_x}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_{n_x}}{\partial x_{n_x}} \end{bmatrix}_{\bar{x}(t)}$$

Έτσι μπορούμε να μελετήσουμε την τοπική ευστάθεια της  $\bar{x}(t)$  εξετάζοντας την ευστάθεια της λύσης ισορροπίας  $x(t) \equiv 0$  για το γραμμικοποιημένο σύστημα  $\dot{x} = A(t)x$ . Επειδή το



$\bar{x}(t)$  είναι σημείο ισορροπίας, άρα  $f(\bar{x})=0$ , θέτω  $x-\bar{x}=X$ , οπότε μία πρώτη προσέγγιση, δηλαδή το γραμμικό μέρος της (2.2.3) είναι  $\dot{X}=AX$  όπου  $A$  σταθερός πίνακας. Άρα οι εξισώσεις διαταραχής στο χώρο κατάστασης γίνονται  $\dot{X}=AX$ .

Για μία μικρή περιοχή, δηλαδή, γύρω από την αρχή των αξόνων, μπορούμε να προσεγγίσουμε το μη γραμμικό σύστημα  $\dot{x}=f(x)$ , με το γραμμικοποιημένο του γύρω από την αρχή των συντεταγμένων ως

$$\dot{x}=Ax, \text{ όπου } A=\frac{\partial f}{\partial x}(0)$$

Το θεώρημα που ακολουθεί, εξηγεί αναλυτικά τις συνθήκες κάτω από τις οποίες μπορούμε να βγάλουμε συμπεράσματα σχετικά με την ευστάθεια της αρχής των αξόνων, ως σημείο ισορροπίας ενός μη γραμμικού συστήματος, εξερευνώντας την ευστάθεια αυτής ως σημείο ισορροπίας ενός γραμμικού συστήματος. Το θεώρημα αυτό είναι γνωστό ως *έμμεση μέθοδος Lyapunov*.

**Θεώρημα 2.2.2** [Khalil,2002,σελίς 139]

Έστω  $x=0$  ένα σημείο ισορροπίας για το μη γραμμικό σύστημα

$$\dot{x}=f(x)$$

όπου  $f:D \rightarrow R^n$  είναι μία συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση (με συνεχείς παραγώγους) και  $D$  μία περιοχή της αρχής των αξόνων. Έστω

$$A=\frac{\partial f}{\partial x}(x)|_{x=0}$$

Τότε,

1. Η αρχή είναι ασυμπτωτικά ευσταθής εάν  $\text{Re } \mu_i < 0$  για όλες τις ιδιοτιμές του πίνακα  $A$ .

2. Η αρχή είναι ασταθής εάν  $\text{Re } \mu_i > 0$  για μία ή περισσότερες ιδιοτιμές του πίνακα  $A$ .  $\square$

Το παραπάνω λοιπόν θεώρημα μας παρέχει τη δυνατότητα να με μία απλή διαδικασία να μελετήσουμε την ευστάθεια ενός σημείου ισορροπίας στην αρχή των αξόνων. Υπολογίζουμε δηλαδή τον Ιακωβιανό πίνακα

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} (x) \right|_{x=0}$$

και ελέγχουμε τις ιδιοτιμές του. Η ευστάθεια της αρχής συντεταγμένων του συστήματος  $\dot{x} = Ax$  καθορίζεται από τις ιδιοτιμές  $\mu_j$ ,  $j=1, \dots, n_x$  του πίνακα  $A$  που είναι λύσεις της χαρακτηριστικής εξίσωσης του πολυωνύμου  $n_x$  τάξης,

$$0 = |\mu I - A| = P(\mu) = \mu^{n_x} + \rho_{n_x-1} \mu^{n_x-1} + \dots + \rho_1 \mu + \mu_0.$$

Για να είναι ευσταθής η αρχή συντεταγμένων στο γραμμικό σύστημα σταθερών συντελεστών  $\dot{x} = Ax$ , πρέπει όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα  $A$  να έχουν  $\text{Re}(\mu_j) \leq 0$ . Αν κάποια από τις ιδιοτιμές έχει θετικό πραγματικό μέρος, τότε υπάρχει τουλάχιστον μια λύση  $x(t)$  της  $\dot{x} = Ax$ , ξεκινώντας αυθαίρετα κοντά στη  $x=0$ , για την οποία  $\|x(t)\| \rightarrow \infty$  καθώς  $t \rightarrow \infty$ , που σημαίνει ότι η αρχή συντεταγμένων είναι ασταθής.

Άρα συμπεραίνουμε ότι για το γραμμικό σύστημα σταθερών συντελεστών  $\dot{x} = Ax$ , η αρχή συντεταγμένων είναι συνολικά ασυμπτωτικά ευσταθής αν και μόνο αν όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα  $A$  έχουν αρνητικά πραγματικά μέρη.

Σε περίπτωση που μερικές από τις ιδιοτιμές έχουν μηδενικά πραγματικά μέρη και δεν επαναλαμβάνονται, τότε η αρχή συντεταγμένων είναι ευσταθής αλλά όχι ασυμπτωτικά ευσταθής γιατί οι ιδιοτιμές με μηδενικά πραγματικά μέρη αντιστοιχούν στη λύση σε όρους που έχουν σταθερό πλάτος. Δεν αυξάνουν με το χρόνο ούτε και ελαττώνονται στο μηδέν. Αν όμως υπάρχουν επαναλαμβανόμενες ιδιοτιμές με μηδενικά πραγματικά μέρη και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα δεν είναι γραμμικά ανεξάρτητα τότε η αρχή των συντεταγμένων είναι ασταθής για το γραμμικό σύστημα.

**Παράδειγμα 2.2.3 Ταλαντωτής Van de Pol.** Ο ταλαντωτής Van de Pol δίνεται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + \beta(1-x_1^2)x_2\end{aligned}$$

Για να μελετήσουμε την ευστάθειά του χρησιμοποιούμε τις γραμμικοποιημένες εξισώσεις κίνησης κοντά στο  $x = 0$

$$\dot{x} = Ax$$

όπου

$$A = \frac{\partial f(0)}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(0)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(0)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2(0)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(0)}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \beta \end{pmatrix}$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση του  $A$  είναι

με ιδιοτιμές

Αν  $\beta > 0$ , οι ιδιοτιμές έχουν θετικό πραγματικό μέρος, επομένως το σύστημα έχει ασταθή ισορροπία στην αρχή των συντεταγμένων.

Αν  $\beta < 0$  έχουμε ασυμπτωτική ευστάθεια τουλάχιστον τοπικά.

Αν  $\beta = 0$ , το σύστημα Van de Pol είναι απλά ένας γραμμικός αρμονικός ταλαντωτής χωρίς απόσβεση με ιδιοτιμές  $\mu = \pm i$ . Σ' αυτή την περίπτωση έχουμε ευστάθεια αλλά όχι ασυμπτωτική ευστάθεια.

Περίληπτικά, βρήκαμε ότι το σημείο ισορροπίας του μη γραμμικού συστήματος Van de Pol είναι ασταθές για  $\beta > 0$ , ευσταθές για  $\beta = 0$ , και τουλάχιστον τοπικά ασυμπτωτικά ευσταθές για  $\beta < 0$ .

**Παράδειγμα 2.2.4** Θεωρούμε το εκκρεμές με εξισώσεις

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -a \sin x_1 - bx_2\end{aligned}$$

το οποίο έχει δύο σημεία ισορροπίας  $(x_1 = 0, x_2 = 0)$  και  $(x_1 = \pi, x_2 = 0)$ . Θα μελετήσουμε την ευστάθεια και των δύο σημείων ισορροπίας κάνοντας γραμμικοποίηση του παραπάνω συστήματος. Ο Ιακωβιανός πίνακας είναι ο εξής

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a \cos x_1 & -b \end{bmatrix}$$

Για να καθορίσουμε την ευστάθεια της αρχής των αξόνων, υπολογίζουμε την τιμή του παραπάνω Ιακωβιανού πίνακα για  $x = 0$ .

$$A = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a & -b \end{bmatrix}$$

Οι ιδιοτιμές του παραπάνω πίνακα  $A$  είναι

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2}b \pm \frac{1}{2}\sqrt{b^2 - 4a}$$

Για κάθε  $a, b > 0$ , οι ιδιοτιμές ικανοποιούν την σχέση  $\text{Re } \lambda_i < 0$ . Συνεπώς το σημείο ισορροπίας στη αρχή των αξόνων είναι ασυμπτωτικά ευσταθές. Εάν δεν υπάρχει τριβή, οπότε  $b = 0$  τότε και οι δύο ιδιοτιμές βρίσκονται στον φανταστικό άξονα. Οπότε δεν μπορούμε να αποφανθούμε για την ευστάθεια της αρχής των αξόνων μέσω της γραμμικοποίησης του αρχικού συστήματος. Διαπιστώνουμε όμως, ότι στην περίπτωση

αυτή η αρχή είναι ένα ευσταθές σημείο ισορροπίας όπως διαπιστώνεται από την συνάρτηση ενέργειας Lyapunov. Για να προσδιορίσουμε την ευστάθεια του σημείου ισορροπίας στο  $(x_1 = \pi, x_2 = 0)$ , υπολογίζουμε τον Ιακωβιανό πίνακα στο σημείο αυτό. Αυτό είναι ισοδύναμο με το να κάνουμε μία αλλαγή στις παραμέτρους, θέτοντας  $z_1 = x_1 - \pi, z_2 = x_2$  και μεταφέροντας με αυτόν τον τρόπο το σημείο ισορροπίας στην αρχή των αξόνων. Οπότε υπολογίζουμε τον Ιακωβιανό πίνακα

$$\tilde{A} = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x_1=\pi, x_2=0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a & -b \end{bmatrix}$$

Οι ιδιοτιμές του πίνακα  $\tilde{A}$  είναι

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2}b \pm \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + 4a}$$

Για όλα τα  $a > 0$  και  $b \geq 0$ , υπάρχει μία ιδιοτιμή στο ανοικτό δεξιό-ημιεπίπεδο. Επομένως το σημείο ισορροπίας στο  $(x_1 = \pi, x_2 = 0)$ , είναι ασταθές.  $\square$

## 2.2.2 Δεύτερη Μέθοδος Lyapunov

Μια ποιοτική προσέγγιση στην ανάλυση της ευστάθειας, που ισχύει και για τα γραμμικά και για τα μη γραμμικά συστήματα, είναι γνωστή σαν δεύτερη ή άμεση μέθοδος Lyapunov. Η προσέγγιση αυτή αναπτύχθηκε από τον A.M.Lyapunov στη Ρωσία, το 1892. Η αρχική του εργασία μεταφράστηκε στα γαλλικά το 1907, αλλά η προσέγγιση δεν έγινε γνωστή στη Δύση μέχρι το 1960, περίπου την ίδια χρονική περίοδο που έγινε γνωστή και μια άλλη περισσότερο πρόσφατη ρώσικη εξέλιξη, η αρχή ελαχίστου του Pontryagin για τον βέλτιστο έλεγχο. Από τότε και η δεύτερη μέθοδος Lyapunov και η αρχή ελαχίστου Pontryagin έχουν γίνει σημαντικά θέματα έρευνας στη θεωρία ελέγχου.

Η δεύτερη μέθοδος Lyapunov έχει στενή σχέση με την ιδέα ότι η συνάρτηση ενέργειας συστήματος ελατηρίου-μάζας με απόσβεση χωρίς είσοδο εξωτερικής δύναμης θα ελαττώνεται κατά μήκος οποιασδήποτε τροχιάς του συστήματος.

Αν ένα σύστημα έχει μια ευσταθή κατάσταση ισορροπίας  $x_e$ , τότε η αποθηκευμένη ενέργεια του συστήματος εξασθενεί, καθώς ο χρόνος  $t$  αυξάνει, μέχρις ότου η αποθηκευμένη ενέργεια φτάσει στην ελάχιστή της τιμή στην κατάσταση ισορροπίας  $x_e$ .

Ο προσδιορισμός της ευστάθειας ενός συστήματος γραμμικού ή μη, με τη δεύτερη μέθοδο Lyapunov, απαιτεί τον προσδιορισμό μιας ειδικής συνάρτησης του χώρου κατάστασης (όπως η ενέργεια σε μερικά συστήματα) που ονομάζεται **συνάρτηση Lyapunov**.

**Ορισμός 2.2.5** Έστω  $U \subset \mathbb{R}^n$ , μία περιοχή γύρω από την αρχή των αξόνων. Μία συνάρτηση  $V:U \rightarrow \mathbb{R}$  θα ονομάζεται **συνάρτηση Lyapunov** (για το σύστημα  $\dot{x} = f(x(t))$ ,  $t > 0$  (2.2.4)) εάν για κάθε  $x \in U$  ικανοποιούνται οι επόμενες προϋποθέσεις

- i. Η  $V$  είναι  $C^1$ , δηλαδή η  $V$  είναι συνεχής και οι μερικές της παράγωγοι πρώτης τάξης ορίζονται και είναι συνεχείς.
- ii.  $V(0)=0$ .
- iii.  $V(x)>0$ , για κάθε  $x \neq 0$

$$iv. \quad \dot{V}(x(t)) = \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dx} \frac{dx}{dt} = \left( \frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n} \right) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} < 0, \forall x \neq 0.$$

□

Έχοντας τώρα στη διάθεσή μας τις συναρτήσεις Lyapunov προχωράμε στο Θεώρημα Lyapunov που μία απόδειξή του μπορεί να βρεθεί στο [5, Κεφ. 4, σελ. 114] και την παραθέτουμε στη σελ.81. Ακολουθεί μια πρώτη γενική διατύπωση του Θεωρήματος Ευστάθειας Lyapunov:

**Θεώρημα ευστάθειας Lyapunov 2.2.3** Έστω το σύστημα διαφορικών εξισώσεων (2.2.4). Εάν για το σύστημα αυτό μπορεί να βρεθεί μία συνάρτηση Lyapunov  $V(x)$ , τότε το σύστημα (2.2.4) είναι ασυμπτωτικά ευσταθές. □

**Παράδειγμα 2.2.5** Έστω το μη-γραμμικό σύστημα

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}x_1 + x_1x_2^2 \\ -\frac{1}{2}x_2 - x_1^2x_2 \end{pmatrix} \quad (2.2.5)$$

και έστω η  $C^1$  συνάρτηση  $V(x) = x_1^2 + x_2^2$ . Τότε έχουμε ότι

$$V(0) = 0 \text{ και } V(x) > 0, \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 - \{0\}.$$

Επίσης βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \nabla V \cdot \dot{x} = \left( \frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2} \right) \cdot \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = (2x_1, 2x_2) \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}x_1 + x_1x_2^2 \\ -\frac{1}{2}x_2 - x_1^2x_2 \end{pmatrix} = \\ &= -x_1^2 + 2x_1^2x_2^2 - x_2^2 - 2x_1^2x_2^2 = -(x_1^2 + x_2^2) < 0, \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι η  $V(x) = x_1^2 + x_2^2$  είναι συνάρτηση Lyapunov του συστήματος (2.2.5) αφού ικανοποιούνται όλες οι ιδιότητες του Ορισμού 2.2.5 άρα και σύμφωνα με το Θεώρημα 2.2.3, το σύστημα (2.2.5) είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.  $\square$

Όπως προείπαμε για να δείξουμε ότι ένα σύστημα είναι ασυμπτωτικά ευσταθές θα πρέπει να βρούμε μία συνάρτηση Lyapunov. Παρατηρούμε ότι για γραμμικά συστήματα της μορφής

$$\dot{x} = Ax, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

θεωρώντας σαν συνάρτηση την  $V(x) = x^T Px$ , όπου  $P$  πραγματικός, θετικά ορισμένος, συμμετρικός πίνακας έχουμε :

Ελένη Θ. Μπαμπαλώνα

- i. η  $V$  είναι  $C^1$  σαν πολυωνυμική
- ii.  $V(0) = 0$
- iii.  $V(x) > 0, \forall x \neq 0$ , διότι ο  $P$  είναι θετικά ορισμένος, δηλαδή  $x^T P x > 0, \forall x \neq 0$ .
- iv.

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} = (Ax)^T P x + x^T P A x = x^T A^T P x + x^T P A x = \\ &= x^T (A^T P + P A)x.\end{aligned}$$

Έστω τώρα  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ένας θετικά ορισμένος πίνακας ( $x^T Q x > 0, \forall x \neq 0$ ) τότε ο  $-Q$  θα είναι αρνητικά ορισμένος διότι

$$x^T (-Q)x = -(x^T Q x) < 0, \forall x \neq 0.$$

Εάν  $A^T P + P A = -Q$  τότε θα έχουμε ότι

$$\dot{V}(x) = x^T (A^T P + P A)x = -x^T Q x < 0, \forall x \neq 0$$

και το σύστημα θα είναι ασυμπτωτικά ευσταθές αφού η συνάρτηση  $V(x)$  θα είναι συνάρτηση Lyapunov για αυτό.

Το όλο πρόβλημα οπότε συγκεντρώνεται στο να βρούμε ένα θετικά ορισμένο, συμμετρικό πίνακα  $P$ , ώστε για κάποιον επίσης θετικά ορισμένο  $Q$  να έχουμε

$$A^T P + P A = -Q \quad (2.2.6)$$

Η εξίσωση (2.2.6) λέγεται εξίσωση Lyapunov και παίζει σπουδαίο ρόλο σ' αυτή την εργασία.

Στη συνέχεια δίνουμε ένα αναλυτικό παράδειγμα χρησιμοποίησης της



**Παράδειγμα 2.2.6** Έστω πάλι το σύστημα του Παραδείγματος 2.2.1

$$\dot{x} = Ax = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

με αρχικές συνθήκες  $x_1(0) = 1, x_2(0) = 2$ .

Για να δείξουμε ότι αυτό το σύστημα είναι ασυμπτωτικά ευσταθές χρειάζεται να λύσουμε την εξίσωση Lyapunov (2.2.6), η λύση της οποίας υπονοεί την ύπαρξη συνάρτησης Lyapunov για το σύστημα.

Επιλέγοντας ως Q το μοναδιαίο πίνακα 2x2 η εξίσωση (2.2.6) γίνεται

$$\begin{aligned} A^T P + PA = -I &\Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \\ \begin{bmatrix} -p_1 - p_1 & -p_2 + p_1 - 2p_2 \\ -p_2 + p_1 - 2p_2 & p_2 - 2p_3 + p_2 - 2p_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \\ \begin{bmatrix} -2p_1 & p_1 - 3p_2 \\ p_1 - 3p_2 & -4p_3 + 2p_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -2p_1 = -1 & \quad p_1 = 1/2 & \quad p_1 = 1/2 & \quad p_1 = 1/2 \\ p_1 - 3p_2 = 0 & \Rightarrow p_1 - 3p_2 = 0 & \Rightarrow p_2 = 1/6 & \Rightarrow p_2 = 1/6 \\ 2p_2 - 4p_3 = -1 & \quad 2p_2 - 4p_3 = -1 & \quad 2p_2 - 4p_3 = -1 & \quad p_3 = 1/3. \end{aligned}$$

Βρήκαμε δηλαδή ότι

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/6 \\ 1/6 & 1/3 \end{bmatrix}.$$

Ο P είναι εμφανώς συμμετρικός και επίσης

$$\begin{aligned}x^T P x &= (x_1 \quad x_2) \begin{bmatrix} 1/2 & 1/6 \\ 1/6 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} x_1^2 + \frac{1}{3} x_1 x_2 + \frac{1}{3} x_2^2 = \left(\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{3}\right)^2 + \frac{x_1^2}{4} + \frac{x_2^2}{9} \Rightarrow \\ &\Rightarrow x^T P x > 0, \forall (x_1, x_2) \neq (0, 0).\end{aligned}$$

Δηλαδή η συνάρτηση  $V(x) = x^T P x$  είναι συνάρτηση Lyapunov του συστήματος και το σύστημα κατά συνέπεια είναι ασυμπτωτικά ευσταθές όπως και περιμέναμε.  $\square$

Παρατηρούμε ότι η εξίσωση Lyapunov εκτός από το ότι μας απαλλάσσει απ' το να χρειάζεται να υπολογίσουμε μία αναλυτική λύση, αποτελεί επίσης έναν εναλλακτικό αριθμητικό τρόπο υπολογισμού της ευστάθειας. Αυτός ο τρόπος, όπως θα εξηγήσουμε και παρακάτω, είναι ιδιαίτερα πλεονεκτικός. Αυτό είναι διότι μας απαλλάσσει με τη σειρά του από το να χρειάζεται να βρούμε την Jordan κανονική μορφή ή να χρησιμοποιήσουμε κάποια αριθμητική μέθοδο λύσεως διαφορικών εξισώσεων (όπως παραδείγματος χάριν η Runge-Kutta τέταρτης τάξης), μεθόδους όπου τα λάθη αποκοπής μπορεί να προκαλέσουν προβλήματα.

Το ερώτημα που τίθεται τώρα, λόγω των προβλημάτων που αναφέρθηκαν όπως η μεγάλη διάσταση του προβλήματος, είναι εάν υπάρχει αλγόριθμος ο οποίος να λύνει γρήγορα και αξιόπιστα την εξίσωση Lyapunov. Η απάντηση είναι θετική και δίνεται εν μέρη στην παράγραφο που ακολουθεί (θεωρητικό υπόβαθρο του αλγορίθμου) και εν μέρη στο Κεφάλαιο δύο (κατασκευή αλγορίθμου και του αντίστοιχου κώδικα σε γλώσσα του MatLab).

### 2.2.3 Θεωρία Ελέγχου και εξίσωση Lyapunov

Σ' αυτή τη παράγραφο αναφερόμαστε στις διάφορες χρήσεις της εξίσωσης Lyapunov, όπως η ασυμπτωτική ευστάθεια, η παρατηρησιμότητα, η ελεγχιμότητα και η ευρωστία ενός συστήματος ελέγχου.

Όπως αναφέραμε και στην παράγραφο 2.2.3 η εξίσωση Lyapunov μπορεί να χρησιμοποιηθεί (Παράδειγμα 2.2.6) για να αποφανθούμε εάν ένα σύστημα είναι ασυμπτωτικά ευσταθές ή ασταθές, όπως βλέπουμε στο ακόλουθο Θεώρημα [1, Θεώρημα 7.2.3, σελ. 205], το οποίο χαρακτηρίζει την ασυμπτωτική ευστάθεια της αρχής των αξόνων σε σχέση με τη λύση της εξίσωσης Lyapunov.

**Θεώρημα 2.2.4** *Το σύστημα*

$$\dot{x} = Ax(t),$$

είναι ασυμπτωτικά ευσταθές εάν και μόνο εάν, για κάθε συμμετρικό θετικά ορισμένο πίνακα  $Q$  υπάρχει ένας μοναδικός συμμετρικός θετικά ορισμένος πίνακας  $P$  που ικανοποιεί την εξίσωση Lyapunov

$$PA + A^T P = -Q$$

και η λύση της αυτής της εξίσωσης Lyapunov δίνεται από

$$P = \int_0^{\infty} e^{A^T t} Q e^{A t} dt \quad (2.2.7)$$

για την  $PA + A^T P = -Q$  (2.2.5) και από

$$P = \int_0^{\infty} e^{A t} Q e^{A^T t} dt \quad (2.2.8)$$

για την  $AP + PA^T = -Q$  (2.2.9). □

**Απόδειξη:**

Έστω ότι ορίζω τον πίνακα  $P : P = \int_0^{\infty} e^{A^T t} Q e^{A t} dt$ . Θα δείξουμε ότι εάν το σύστημα είναι ασυμπτωτικά ευσταθές, τότε το  $P$  είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης (2.2.5) και είναι συμμετρικά θετικά ορισμένη. Χρησιμοποιώντας την έκφραση του  $P$  στην (2.2.5) έχουμε:

$$PA + A^T P = \int_0^{\infty} e^{A^T t} Q e^{A t} dt + \int_0^{\infty} A^T e^{A^T t} Q e^{A t} dt = \int_0^{\infty} \frac{d}{dt} (e^{A^T t} Q e^{A t}) dt = [e^{A^T t} Q e^{A t}]_0^{\infty}$$

Εφόσον  $A$  είναι ευσταθής,  $e^{A^T t} \rightarrow 0$  όταν  $t \rightarrow \infty$ . Τότε  $PA + A^T P = -Q$  που σημαίνει ότι το  $P$  ορισμένο από την (2.2.6) ικανοποιεί την (2.2.5).

Για να δείξουμε ότι το  $P$  είναι θετικά ορισμένο, πρέπει να δείξουμε ότι  $u^T P u > 0, \forall \vec{u} \neq \vec{0}$ . Χρησιμοποιώντας την (2.2.6) μπορούμε να γράψουμε

$$u^T P u = \int_0^{\infty} u^T e^{A^T t} Q e^{A t} u dt$$

Εφόσον οι εκθετικοί πίνακες  $e^{A^T t}$  και  $e^{A t}$  είναι και οι δύο μη ιδιόμορφοι και  $Q$  είναι θετικά ορισμένος, εμείς καταλήγουμε ότι:  $u^T P u > 0$ .

Για ν' αποδείξουμε ότι το  $P$  είναι μοναδικό, υποθέτουμε ότι υπάρχουν δύο λύσεις  $P_1$  και  $P_2$  της (2.2.5).

Τότε

$$A^T (P_1 - P_2) + (P_1 - P_2) A = 0$$

που συνεπάγεται ότι

$$e^{A^T t} (A^T (P_1 - P_2) + (P_1 - P_2) A) e^{A t} = 0$$

ή

$$\frac{d}{dt} [e^{A^T t} (P_1 - P_2) e^{A t}] = 0$$

και γι' αυτό το λόγο  $e^{A^T t} (P_1 - P_2) e^{A t}$  είναι ένας σταθερός πίνακας για όλα τα  $t$ .

Συνεπώς για  $t=0$  και για  $t=\infty$ , έχουμε

$$e^{A^T t}(P_1 - P_2)e^{A t}\Big|_{t=0} = e^{A^T t}(P_1 - P_2)e^{A t}\Big|_{t=\infty} \Leftrightarrow P_1 - P_2 = 0$$

Όμοια αποδεικνύεται ότι και η σχέση (2.2.8) είναι λύση της σχέσης (2.2.9). □

Στο παράδειγμα που ακολουθεί μετατρέπουμε την εξίσωση Lyapunov στην μορφή  $Mx = y$  όπου τα  $x$  και  $y$  προκύπτουν εάν τοποθετήσουμε τα στοιχεία του πίνακα  $P$  και  $Q$  σε μορφή πίνακα διανυσμάτων. Με τον τρόπο αυτό δίνουμε μία άλλη αριθμητική μέθοδο για την επίλυση της εξίσωσης Lyapunov.

**Παράδειγμα 2.2.7** Έστω  $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ ,  $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  και  $P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}$

Και λόγω συμμετρίας,  $p_{12} = p_{21}$ . Η εξίσωση μπορεί να γραφεί ως εξής

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Άρα

$$\begin{bmatrix} p_{12} & -p_{11} - p_{12} \\ p_{22} & -p_{12} - p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{12} & p_{22} \\ -p_{11} - p_{12} & -p_{12} - p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

η ισοδύναμα

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{12} \\ p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Η μοναδική λύση είναι η

Ελένη Θ. Μπαμπαλώνα

$$\begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{12} \\ p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5 \\ -0.5 \\ 1.0 \end{bmatrix} \Rightarrow P = \begin{bmatrix} 1.5 & -0.5 \\ -0.5 & 1.0 \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας  $P$  είναι θετικά ορισμένος γιατί οι υποορίζουσες

$$D_1 = 1.5 \text{ και } D_2 = \det \begin{vmatrix} 1.5 & -0.5 \\ -0.5 & 1.0 \end{vmatrix} = 1.25$$

είναι θετικές. Επομένως όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα βρίσκονται στο ανοικτό αριστερά μιγαδικό επίπεδο.  $\square$

Η εξίσωση Lyapunov μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να ελέγξει εάν ένας πίνακας  $A$  είναι ή όχι Hurwitz (ευσταθής), ως μία εναλλακτική λύση από το να υπολογίσουμε τις ιδιοτιμές του πίνακα  $A$ . Αρχικά επιλέγουμε έναν πίνακα  $Q$  θετικά ορισμένο (για παράδειγμα  $Q=I$ ) και λύνουμε την εξίσωση Lyapunov ως προς  $P$ . Εάν η εξίσωση Lyapunov έχει μία θετικά ορισμένη λύση, συμπεραίνουμε ότι ο πίνακας  $A$  είναι Hurwitz, αλλιώς όχι. Ωστόσο δεν υπάρχει κάποιο υπολογιστικό πλεονέκτημα λύνοντας την εξίσωση Lyapunov με αυτόν τον τρόπο, σε σχέση με το να υπολογίσουμε τις ιδιοτιμές του πίνακα  $A$  απευθείας. Άλλωστε ο υπολογισμός των ιδιοτιμών δίνει άμεσα πληροφορίες για την απόκριση του γραμμικού συστήματος. Το ενδιαφέρον που παρουσιάζει η εξίσωση Lyapunov είναι όχι τόσο η χρησιμότητά της στο να ελέγξουμε την ευστάθεια γραμμικών συστημάτων, όσο ότι μας παρέχει τη δυνατότητα της διαδικασίας εύρεσης μίας συνάρτησης Lyapunov για ένα γραμμικό σύστημα όταν ο πίνακας  $A$  είναι Hurwitz.

Στη συνέχεια δίνουμε μία διαφορετική απόδειξη του θεωρήματος ευστάθειας Lyapunov.

**Θεώρημα 2.2.8 Θεώρημα Ευστάθειας Lyapunov** Το ακόλουθο ομογενές, χρονικά αμετάβλητο, γραμμικό σύστημα

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

είναι ασυμπτωτικά ευσταθές *εάν και μόνον εάν* για έναν οποιοδήποτε συμμετρικό, θετικά ορισμένο πίνακα  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  υπάρχει συμμετρικός, θετικά ορισμένος πίνακας  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  τέτοιος ώστε να ισχύει η ακόλουθη εξίσωση

$$PA + A^T P = -Q \quad (2.2.5)$$

□

Δίνουμε τώρα μια φυσική ερμηνεία του Θεωρήματος Lyapunov. Αν ο ερμητιανός πίνακας  $P$  είναι θετικά ορισμένος, η γραφική παράσταση του  $V(x)$ , όπου  $V(x) = x^T P x$ , έχει παραβολική μορφή. Θεωρούμε τις διαδοχικές τιμές του  $V$  κατά μήκος της τροχιάς του  $\dot{x} = Ax$

Θέλουμε να ξέρουμε αν η τιμή του  $V$  θα αυξάνεται ή θα ελαττώνεται με την πάροδο του χρόνου καθώς η κατάσταση κινείται κατά μήκος της τροχιάς. Παίρνοντας την παράγωγο του  $V$  σαν συνάρτηση του χρόνου κατά μήκος μιας τροχιάς του  $\dot{x} = Ax$  παίρνουμε

$$\frac{d}{dt}(V(x(t))) = -x^T(t)Qx(t) \quad (2.2.10)$$

όπου  $Q \triangleq -(A^T P + PA)$

Αυτή η εξίσωση δίνει το ρυθμό μεταβολής του  $V(x)$  κατά μήκος κάθε τροχιάς του  $\dot{x} = Ax$ .

Αν  $Q$  είναι θετικά ορισμένος, η συνάρτηση  $-x^T(t)Qx(t)$  είναι πάντα αρνητική.

Ελένη Θ. Μπαμπαλώνα

Αυτό συνεπάγεται ότι  $V(x(t))$  μειώνεται ανάλογα με το χρόνο κατά μήκος μιας τροχιάς του  $\dot{x} = Ax$ .

Έτσι  $V(x(t))$  θα πλησιάζει στο 0 καθώς  $t \rightarrow \infty$ .

Τώρα, εφόσον  $V(x)$  είναι θετικά ορισμένη εμείς έχουμε  $V(x) = 0$  μόνο για  $x = 0$ .

Έτσι συμπεραίνουμε ότι αν εμείς μπορούμε να βρούμε θετικά ορισμένους πίνακες  $P$  και  $Q$  που σχετίζονται μεταξύ τους με τη σχέση (2.2.5) τότε κάθε τροχιά θα συγκλίνει στο 0 καθώς  $t \rightarrow \infty$ .

Η συνάρτηση  $V(x)$  θα λέγεται συνάρτηση Lyapunov του  $\dot{x} = Ax$ .

Μια συνάρτηση Lyapunov μπορεί να θεωρηθεί σαν η γενίκευση της θεωρίας της απόστασης ή της ενέργειας. Αν η απόσταση της κατάστασης κατά μήκος της τροχιάς του μειώνεται με το χρόνο, τότε  $x(t)$  πρέπει να τείνει στο 0 καθώς  $t \rightarrow \infty$ .

### **Απόδειξη Θεωρήματος (2.2.8)**

Ικανή: Αν ισχύει η συνθήκη (2.2.5) θα δείξουμε ότι το σύστημα είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

Θεωρούμε ότι  $V(x) = x^T P x$ . Τότε έχουμε  $\dot{V}(x) \triangleq \frac{d}{dt}(V(x)) = -x^T Q x$  κατά μήκος

$$\text{οποιασδήποτε τροχιάς του } \dot{x} = Ax. \text{ Επίσης έχουμε } \frac{\dot{V}}{V} = -\frac{x^T Q x}{x^T P x} \leq -\frac{(\lambda_Q)_{\min}}{(\lambda_P)_{\max}}, \quad (2.2.11)$$

όπου  $(\lambda_Q)_{\min}$  είναι η μικρότερη ιδιοτιμή του  $Q$  και  $(\lambda_P)_{\max}$  είναι η μεγαλύτερη ιδιοτιμή του  $P$ . Επειδή οι πίνακες  $Q, P$  είναι θετικά ορισμένοι, έχουμε  $(\lambda_Q)_{\min} > 0$  και  $(\lambda_P)_{\max} > 0$ . Αν

ορίσουμε  $a \triangleq \frac{(\lambda_Q)_{\min}}{(\lambda_P)_{\max}}$  τότε η ανίσωση (2.2.11) γίνεται  $\dot{V} \leq -aV$ , που συνεπάγεται ότι

$V(t) \leq e^{-a(t)}V(0)$ . Είναι φανερό ότι  $a > 0$ . Επομένως, η  $V(x)$  μειώνεται εκθετικά στο 0 για κάθε τροχιά του  $\dot{x} = Ax$ .

Επίσης  $V(x) = 0$  μόνο για  $x = 0$ . Άρα το σύστημα είναι ευσταθές κατά Lyapunov.



Η συμπεριφορά του  $\dot{x} = Ax$  για κάθε αρχική συνθήκη  $x_0$  τείνει στο  $0$  καθώς  $t \rightarrow \infty$ .

Αυτό αποδεικνύει ότι η μηδενική κατάσταση του  $\dot{x} = Ax$  είναι ασυμπτωτικά ευσταθής.

Αναγκαία: Θα δείξουμε τώρα ότι αν το σύστημα είναι ασυμπτωτικά ευσταθές τότε υπάρχουν συμμετρικά θετικά ορισμένοι πίνακες  $P$  και  $Q$ .

Εάν η μηδενική κατάσταση του  $\dot{x} = Ax$  είναι ασυμπτωτικά ευσταθής τότε οι ιδιοτιμές του  $A$  έχουν αρνητικά πραγματικά μέρη.

Επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα 2.2.4 για κάθε  $Q$ , υπάρχει ένας μοναδικός πίνακας  $P$  που ικανοποιεί την  $A^T P + PA = -Q$  και ο  $P$  μπορεί να εκφραστεί ως:

$$P = \int_0^{\infty} e^{A^T t} Q e^{At} dt \quad (2.2.6)$$

Τώρα θα δείξουμε ότι αν  $Q$  θετικά ορισμένος, τότε είναι και ο  $P$ . Εφόσον ο  $Q$  είναι θετικά ορισμένος, υπάρχει μη ιδιόμορφος πίνακας  $H$  τέτοιος ώστε  $Q = H^T H$ .

Θεωρούμε

$$x_0^T P x_0 = \int_0^{\infty} x_0^T e^{A^T t} H^T H e^{At} x_0 dt = \int_0^{\infty} \|H e^{At} x_0\|^2 dt \quad (2.2.12)$$

Εφόσον ο  $H$  είναι μη ιδιόμορφος και  $e^{At}$  είναι μη ιδιόμορφος για κάθε  $t$ , έχουμε ότι  $H e^{At} x_0 \neq 0$ ,  $t \in [0, \infty)$  εκτός αν  $x_0 = 0$ .

Συνεπώς συμπεραίνουμε ότι  $x_0^T P x_0 > 0$ ,  $\forall x_0 \neq 0$  και άρα ο πίνακας  $P$  είναι θετικά ορισμένος.  $\square$

Θα κάνουμε μερικά σχόλια για το Θεώρημα Lyapunov. Αφού το Θεώρημα ισχύει για κάθε θετικά ορισμένο ερμητιανό πίνακα  $Q$ , ο πίνακας  $Q$  στην (2.2.5) συχνά διαλέγεται να είναι ο μοναδιαίος πίνακας. Αφού  $P$  είναι ερμητιανός πίνακας, υπάρχουν  $n^2$  άγνωστοι αριθμοί να βρεθούν στο  $P$ . Εάν  $P$  είναι ένας πραγματικά συμμετρικός πίνακας τότε υπάρχουν  $n(n+1)/2$  άγνωστοι αριθμοί να βρεθούν. Έτσι η εξίσωση πινάκων (2.2.5) στην πραγματικότητα αποτελείται από  $n(n+1)/2$  γραμμικές αλγεβρικές εξισώσεις.

Για να χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα 2.2.8 πρώτα λύνουμε αυτές τις  $n(n+1)/2$  εξισώσεις του  $P$  και μετά ελέγχουμε αν ο  $P$  είναι θετικά ορισμένος ή όχι. Δεν είναι εύκολη προσπάθεια. Έτσι το Θ.(2.2.8) γενικά δε χρησιμοποιείται για να ορίσει την ευστάθεια του  $\dot{x} = Ax$ . Όμως είναι πολύ σημαντικό στη μελέτη της ευστάθειας των μη γραμμικών πολυμεταβλητών συστημάτων χρησιμοποιώντας την ονομαζόμενη δεύτερη μέθοδο Lyapunov.

Όπως είχαμε παρατηρήσει η εξίσωση Lyapunov (2.2.5) αποτελεί έναν εναλλακτικό τρόπο προσδιορισμού της ευστάθειας. Αυτός ο τρόπος μας οδηγεί ουσιαστικά στο να λύσουμε το γραμμικό σύστημα που προκύπτει από την εξίσωση (2.2.5) ώστε να μελετήσουμε την ευστάθεια του συστήματος. Από αριθμητικής απόψεως αυτό το γεγονός είναι σημαντικό διότι πρώτα απ' όλα υπάρχουν διαθέσιμοι αρκετοί αλγόριθμοι επίλυσης γραμμικών συστημάτων, όπως παραδείγματος χάριν η απαλοιφή Gauss ή οι ορίζουσες Cramer και διάφορα προγραμματιστικά μαθηματικά πακέτα όπως το Matlab, Mathematica ή Maple τα οποία έχουν ενσωματωμένες τις αντίστοιχες ρουτίνες-αλγορίθμους για την επίλυση τέτοιων συστημάτων.

Κατά δεύτερο λόγο η λύση γραμμικών συστημάτων από σύγχρονους ηλεκτρονικούς υπολογιστές είναι, σχετικά πάντοτε με την διάσταση του προβλήματος, εύκολη και γρήγορη διαδικασία.

Στο Παράδειγμα 2.2.7 καταφέραμε και λύσαμε αναλυτικά την εξίσωση Lyapunov λόγω της μικρής διάστασης των πινάκων του προβλήματος. Σε προβλήματα όπου οι εμπλεκόμενοι πίνακες έχουν διάσταση γενικά  $n \times n$  για να βρούμε μία αναλυτική λύση, μία ρητή έκφραση δηλαδή της λύσης, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη λύση του συστήματος αλγεβρικών εξισώσεων που το περιγράφουν.

## Αυτόνομα συστήματα

Θεωρούμε το αυτόνομο σύστημα

$$\dot{x} = f(x)$$

όπου  $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$  είναι τοπικά Lipschitz από μία περιοχή  $D \subset \mathbb{R}^n$  στο  $\mathbb{R}^n$ .

Παραθέτουμε τον ορισμό της συνάρτησης Lipschitz και το θεώρημα 2.2.9 ώστε να γίνει κατανοητό το θεώρημα ευστάθειας Lyapunov για ένα αυτόνομο σύστημα.

**Ορισμός 2.2.6** Έστω  $f: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  συνεχής και έστω ότι ικανοποιεί την συνθήκη

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L \|x - y\|$$

για κάθε  $x, y \in B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| \leq r\}$  και

για κάθε  $t \in [t_0, t_1]$  όπου  $L, r$  θετικοί αριθμοί.

Μία συνάρτηση  $f$  που ικανοποιεί αυτές τις συνθήκες λέμε ότι ικανοποιεί μία συνθήκη Lipschitz σε μία περιοχή του  $x_0$ , για  $t \in [t_0, t_1]$ , ή ότι είναι τοπικά Lipschitz στο  $x_0$ , στο χρονικό διάστημα  $[t_0, t_1]$ . Λέμε ότι η  $f$  είναι τοπικά Lipschitz στο  $x$  στο σύνολο  $[t_0, t_1] \times D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  εάν για κάθε  $x \in D$  υπάρχει μία γειτονιά  $D_0$  και μία σταθερά  $L_0 > 0$  έτσι ώστε να ισχύει η  $\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L \|x - y\|$  για κάθε  $x, y \in D_0$ , και για κάθε  $t \in [t_0, t_1]$ . □

Το θεώρημα που ακολουθεί παρέχει ικανές συνθήκες για την ύπαρξη και μοναδικότητα της λύσης της  $\dot{x} = f(t, x)$ , με  $x(t_0) = x_0$ , απαιτώντας την τοπική ισχύ της συνθήκης Lipschitz στα σημεία ενός συνόλου.

**Θεώρημα 2.2.9** [5, Khalil, 2002, σελίς 94] Έστω  $f(t, x)$  συνεχής και ότι  $f(t, x)$  τοπικά Lipschitz ως προς το  $x$  στο σύνολο  $D \subset \mathbb{R}^n$ , για κάθε  $t \geq t_0$ . Έστω  $W \subset D$  ένα κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του  $D$  με  $x_0 \in W$  και έστω ότι κάθε λύση της

$$\dot{x} = f(t, x), \text{ με } x(t_0) = x_0$$

παραμένει στο  $W$  για κάθε  $t \geq t_0$ . Τότε έχει μία μοναδική λύση ορισμένη για κάθε  $t \geq t_0$ .

□

Μία εφαρμογή του θεωρήματος αυτού φαίνεται στο παράδειγμα που ακολουθεί.

**Παράδειγμα 2.2.8** Έστω το σύστημα

$$\dot{x} = -x^3 = f(x), \text{ με } x \in \mathbb{R} \text{ και } x_0 = a$$

Η συνάρτηση είναι τοπικά Lipschitz στο σύνολο  $\mathbb{R}$ . Εάν για κάποια χρονική στιγμή η λύση  $x(t)$  είναι θετική, η παράγωγός της  $\dot{x}(t)$  θα είναι αρνητική και η  $x(t)$  θα μειώνεται. Ομοίως εάν κάποια χρονική στιγμή η  $x(t)$  είναι αρνητική, η παράγωγός της  $\dot{x}(t)$  θα είναι θετική και η λύση  $x(t)$  θα αυξάνεται. Επομένως για μία οποιαδήποτε αρχική συνθήκη  $x_0 = a$ , η λύση θα ανήκει στο κλειστό και φραγμένο σύνολο  $\{x \in \mathbb{R} \mid \|x\| \leq a\}$ . Έτσι, σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα, χωρίς να υπολογίσουμε τη λύση η εξίσωση έχει μοναδική λύση για κάθε  $t \geq t_0$ .

**Θεώρημα 2.2.10** [5, Khalil, 2002, σελίς 114] Έστω  $x = 0$  σημείο ισοροπίας του συστήματος  $\dot{x} = f(x)$ , με  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  όπου  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  μία περιοχή του  $\theta$  και  $f(0) = 0$ . Εάν υπάρχει μία συνεχής διαφορίσιμη συνάρτηση  $V : D \rightarrow \mathbb{R}$  τέτοια ώστε

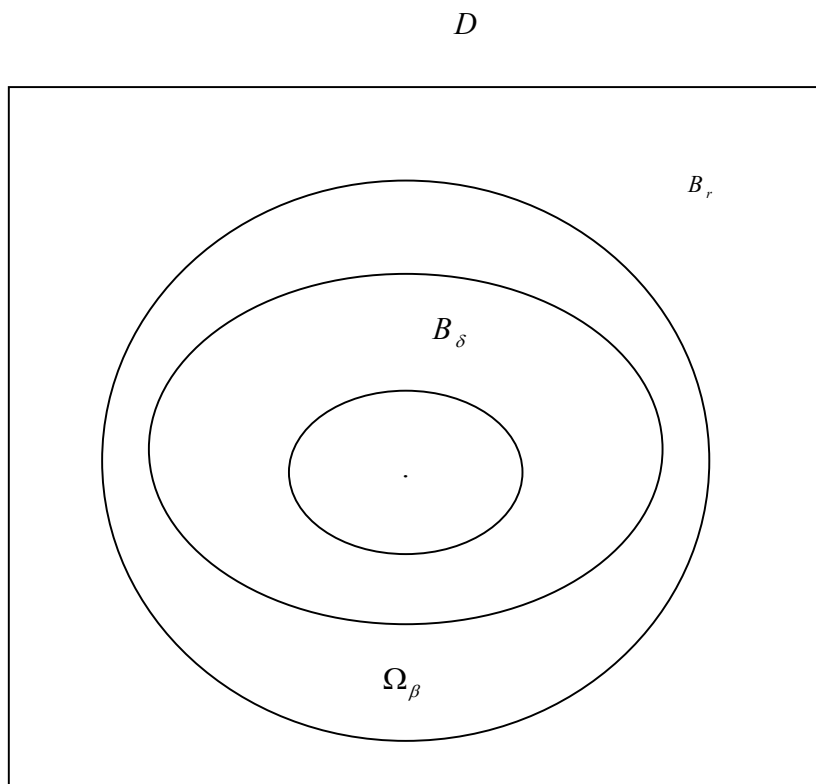
$$V(0) = 0 \text{ και } V(x) > 0 \text{ στο } D - \{0\}$$

$$\dot{V}(x) \leq 0 \text{ στο } D$$

Τότε το  $x = 0$  είναι ευσταθές. Εάν επιπλέον

$$\dot{V}(x) < 0 \text{ στο } D - \{0\}$$

τότε το  $x = 0$  είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.



**Σχήμα (2.2.4)** Γεωμετρική παρουσίαση των συνόλων της απόδειξης του θεωρήματος

Ελένη Θ. Μπαμπαλώνα

Απόδειξη

Έστω  $\varepsilon > 0$ . Επιλέγουμε  $r \in (0, \varepsilon]$ , τέτοιο ώστε

$$B_r = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq r\} \subset D$$

Το σύνολο των σημείων  $x \in \mathbb{R}^n$  για τα οποία  $\|x\| = r$  είναι κλειστό και φραγμένο, άρα η  $V$  παίρνει ελάχιστο σε αυτό. Έστω  $k = \min_{\|x\|=r} V(x)$ . Λόγω του ότι  $V(x) > 0$  στο  $D - \{0\}$  έχουμε ότι  $k > 0$ .

Επιλέγουμε  $\beta \in (0, k)$ , και ορίζουμε το σύνολο

$$\Omega_\beta = \{x \in B_r \mid V(x) \leq \beta\}$$

Τότε το σύνολο  $\Omega_\beta$  ανήκει στο εσωτερικό του συνόλου  $B_r$ . Πράγματι, έστω ότι δεν ισχυε αυτό. Τότε, θα υπήρχε ένα σημείο  $x_0 \in \Omega_\beta \cap \partial B_r$ . Για το σημείο αυτό θα ισχυε  $V(x_0) \geq k > \beta$ , το οποίο είναι άτοπο διότι  $V(x) \leq \beta$ ,  $\forall x \in \Omega_\beta$ . Παρατηρούμε ότι εφόσον ισχύει

$$\dot{V}(x) \leq 0 \Rightarrow V(x(t)) \leq V(x(0)) \leq \beta, \quad \forall t \geq 0$$

κάθε τροχιά που ξεκινά από το σύνολο  $\Omega_\beta$  στη χρονική στιγμή  $t = 0$ , παραμένει στο  $\Omega_\beta$ , για όλα τα  $t \geq 0$ .

Αφού το σύνολο  $\Omega_\beta$  είναι κλειστό εξ ορισμού και φραγμένο λόγω του ότι  $\Omega_\beta \subset B_r$ , τότε συμπεραίνουμε από το θεώρημα (1) ότι η  $\dot{x} = f(x)$  έχει μοναδική λύση, ορισμένη για όλα τα  $t \geq 0$  όταν  $x(0) \in \Omega_\beta$ . Αφού η συνάρτηση  $V(x)$  είναι συνεχής και ισχύει  $V(x) = 0$ , τότε υπάρχει  $\delta > 0$  τέτοιο ώστε

$$\|x\| \leq \delta \Rightarrow V(x) < \beta$$

Τότε

$$B_\delta \subset \Omega_\beta \subset B_r$$

και

$$x(0) \in B_\delta \Rightarrow x(0) \in \Omega_\beta \Rightarrow x(t) \in \Omega_\beta \Rightarrow x(t) \in B_\delta$$

Επομένως

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < r \leq \varepsilon, \quad \forall t \geq 0$$

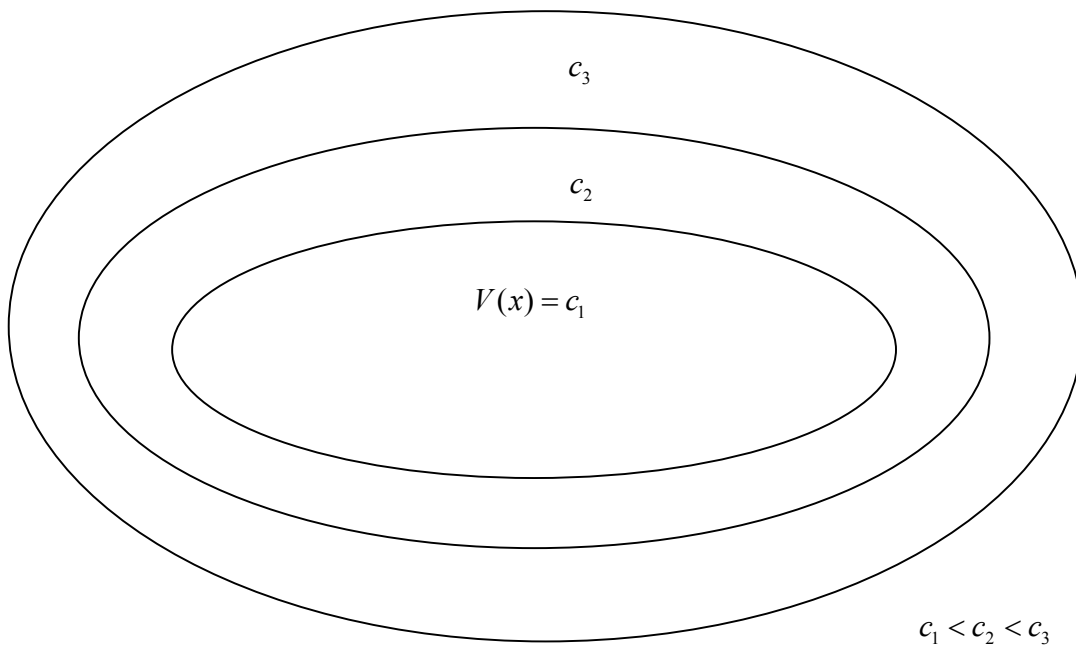
το οποίο μας αποδεικνύει ότι το σημείο ισορροπίας  $x = 0$  είναι ευσταθές. Υποθέτουμε ότι ισχύει η σχέση  $\dot{V}(x) < 0$  στο σύνολο  $D - \{0\}$ . Για να δείξουμε την ασυμπτωτική ευστάθεια, θα πρέπει να δείξουμε ότι  $x(t) \rightarrow 0$  καθώς  $t \rightarrow \infty$ , δηλαδή για κάθε  $k > 0$ , υπάρχει  $T > 0$  τέτοιο ώστε  $\|x(t)\| < k, \quad \forall t \geq T$ . Όμως όπως ορίσαμε προηγουμένως, για κάθε  $k > 0$ , υπάρχει  $h > 0$  τέτοιο ώστε  $\Omega_h \subset B_k$ . Επομένως αρκεί να δείξουμε ότι  $V(x(t)) \rightarrow 0$  καθώς  $t \rightarrow \infty$ . Λόγω του ότι  $V(x) \geq 0$ , μονότονα φθίνουσα και φραγμένη από το  $\theta$ , ισχύει

$$V(x) \rightarrow c \geq 0 \text{ καθώς } t \rightarrow \infty.$$

Θα δείξουμε ότι  $c = 0$ . Υποθέτουμε ότι  $c > 0$ . Θα καταλήξουμε σε άτοπο. Λόγω του ότι η  $V(x)$  είναι συνεχής, υπάρχει ένα  $g > 0$  τέτοιο ώστε  $B_g \subset \Omega_c$ . Το όριο  $V(x) \rightarrow c > 0$  συνεπάγεται ότι η τροχιά  $x(t)$  βρίσκεται έξω από το σύνολο  $B_g$  για όλα τα  $t \geq 0$ . Έστω  $-\zeta = \max_{g \leq \|x\| \leq r} \dot{V}(x)$ , το οποίο υπάρχει γιατί η συνεχής συνάρτηση  $\dot{V}(x)$  έχει μέγιστο στο συμπαγές σύνολο  $\{g \leq \|x\| \leq r\}$ . Από τη σχέση  $\dot{V}(x) < 0$  στο σύνολο  $D - \{0\}$ , έχουμε ότι  $-\zeta < 0$ . Επομένως

$$V(x(t)) = V(x(0)) + \int_0^t \dot{V}(x(\tau)) d\tau \leq V(x(0)) - \zeta t$$

Εφόσον το δεξί σκέλος στην παραπάνω ανισότητα τελικά γίνεται αρνητικό, αυτή η ανισότητα έρχεται σε αντίφαση με την υπόθεση ότι  $c > 0$ . □



**Σχήμα (2.2.5)** Επίπεδες επιφάνειες της εξίσωσης Lyapunov



Η συνεχής διαφορίσιμη συνάρτηση  $V(x)$  που ικανοποιεί τις συνθήκες

$$V(0) = 0 \text{ και } V(x) > 0 \text{ στο } D - \{0\}$$

$$\dot{V}(x) \leq 0 \text{ στο } D$$

λέγεται συνάρτηση Lyapunov. Η επιφάνεια  $V(x) = c$ , για κάποιο  $c > 0$ , λέγεται επιφάνεια Lyapunov.

**Παράδειγμα 2.2.8** Θεωρούμε το απλό εκκρεμές χωρίς τριβή του οποίου το σύστημα περιγράφεται από τις εξισώσεις

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -a \sin x_1\end{aligned}$$

και θα μελετήσουμε την ευστάθεια στο σημείο ισορροπίας  $x = 0$ . Ως υποψήφια συνάρτηση Lyapunov επιλέγουμε την συνάρτηση της ολικής ενέργειας του συστήματος

$$V(x) = a(1 - \cos x_1) + \frac{1}{2} x_2^2$$

Παρατηρούμε ότι  $V(x) = 0$  και  $V(x)$  θετικά ορισμένη στην περιοχή  $-2\pi < x_1 < 2\pi$ . Η παράγωγος της συνάρτησης  $V(x)$  κατά μήκος των τροχιών του συστήματος δίνεται από την

$$\dot{V}(x) = a\dot{x}_1 \sin x_1 + x_2 \dot{x}_2 = ax_2 \sin x_1 - ax_2 \sin x_1 = 0$$

Επομένως ικανοποιούνται οι συνθήκες του θεωρήματος ευστάθειας Lyapunov και άρα συμπεραίνουμε ότι η αρχή των συντεταγμένων είναι ευσταθής. Επειδή  $\dot{V}(x) \equiv 0$  μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η αρχή των αξόνων δεν είναι ασυμπτωτικά ευσταθής, αφού κάθε λύση  $x(t, x_0)$  με  $x_0 \neq 0$  θα παραμείνει στην επιφάνεια  $V(x) = V(x_0) = c \neq 0$ , για κάθε

Ελένη Θ. Μπαμπαλώνα

$t \geq t_0$ . Δηλαδή τροχιές που ξεκινούν από την επιφάνεια  $V(x) = c$  παραμένουν στην ίδια επιφάνεια για κάθε χρονική στιγμή.  $\square$

**Παράδειγμα 2.2.9** Θεωρούμε το εκκρεμές με τριβή που ορίζεται από το σύστημα

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -a \sin x_1 - bx_2\end{aligned}$$

Θεωρούμε πάλι την υποψήφια συνάρτηση Lyapunov της ενέργειας

$$V(x) = a(1 - \cos x_1) + \frac{1}{2}x_2^2$$

$$\dot{V}(x) = a\dot{x}_1 \sin x_1 + x_2\dot{x}_2 = -bx_2^2$$

Η παράγωγος  $\dot{V}(x)$  είναι αρνητικά ημιορισμένη. Δεν είναι αρνητικά ορισμένη γιατί  $\dot{V}(x) = 0$  για  $x_2 = 0$  ασχέτως με την τιμή του  $x_1$ , δηλαδή  $\dot{V}(x) = 0$  κατά μήκος του  $x_1$ -άξονα. Επομένως μπορούμε μόνο να συμπεράνουμε ότι η αρχή είναι ευσταθής. Επιπλέον όταν  $b > 0$  η αρχή είναι ασυμπτωτικά ευσταθής όπως γνωρίζουμε. Η συνάρτηση όμως Lyapunov της ενέργειας δεν αρκεί να το δείξει αυτό. Προς το παρόν ας βρούμε μία συνάρτηση Lyapunov  $V(x)$  τέτοια ώστε  $\dot{V}(x)$  να είναι αρνητικά ορισμένη. Ξεκινώντας από την συνάρτηση Lyapunov της ενέργειας, ας αντικαταστήσουμε τον όρο  $\left(\frac{1}{2}\right)x_2^2$  με την πιο γενική τετραγωνική μορφή  $\left(\frac{1}{2}\right)x^T Px$  για έναν  $2 \times 2$  θετικά ορισμένο πίνακα  $P$ :

$$\begin{aligned}V(x) &= \frac{1}{2}x^T Px + a(1 - \cos x_1) = \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + a(1 - \cos x_1)\end{aligned}$$

Για να είναι η τετραγωνική μορφή  $\left(\frac{1}{2}\right)x^T P x$  θετικά ορισμένη, θα πρέπει τα στοιχεία του πίνακα  $P$  να ικανοποιούν τις σχέσεις

$$p_{11} > 0, \quad p_{11}p_{22} - p_{12}^2 > 0$$

Η παράγωγος  $\dot{V}(x)$  δίνεται από την σχέση

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= (p_{11}x_1 + p_{12}x_2 + a \sin x_1)x_2 + (p_{12}x_1 + p_{22}x_2)(a - \sin x_1 - bx_2) = \\ &= a(1 - p_{22})x_2 \sin x_1 - ap_{12}x_1 \sin x_1 + (p_{11} - p_{12}b)x_1x_2 + (p_{12} - p_{22}b)x_2^2 \end{aligned}$$

Τώρα πρέπει να επιλέξουμε  $p_{11}$ ,  $p_{12}$  και  $p_{22}$  τέτοια ώστε η  $\dot{V}(x)$  να είναι αρνητικά ορισμένη. Λόγω του ότι το γινόμενο  $x_2 \sin x_1$  και  $x_1x_2$  είναι αόριστα, μπορούμε να τα ακυρώσουμε θέτοντας  $p_{22} = 1$  και  $p_{11} = bp_{12}$ . Με την επιλογή που κάναμε πρέπει το  $p_{22}$  να ικανοποιεί την σχέση  $0 < p_{12} < b$  για να είναι η  $V(x)$  θετικά ορισμένη. Ας θέσουμε  $p_{12} = b/2$ . Τότε, η  $\dot{V}(x)$  δίνεται από την

$$\dot{V}(x) = -\frac{1}{2}abx_1 \sin x_1 - \frac{1}{2}bx_2^2$$

Ισχύει  $x_1 \sin x_1 > 0$  για  $\forall 0 < |x_1| < \pi$ . Παίρνοντας  $D = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x_1| < \pi\}$ , παρατηρούμε ότι η  $V(x)$  είναι θετικά ορισμένη και η  $\dot{V}(x)$  είναι αρνητικά ορισμένη πάνω στο σύνολο  $D$ . Άρα η αρχή των αξόνων είναι ασυμπτωτικά ευσταθής.

Με αυτό το παράδειγμα δίνει έμφαση σε ένα πολύ σημαντικό σημείο του θεωρήματος ευστάθειας Lyapunov. Ότι οι συνθήκες του θεωρήματος είναι μόνο ικανές. Η αποτυχία της συνάρτησης Lyapunov στο να χαρακτηρίσει την ευστάθεια ενός σημείου ισορροπίας δεν σημαίνει ότι το σημείο ισορροπίας δεν είναι ευσταθές η ασυμπτωτικά ευσταθές. Απλά

σημαίνει ότι δεν μπορούμε να βγάλουμε κάποιο συμπέρασμα για την ευστάθεια του σημείου με χρήση της συνάρτησης αυτής, οπότε πρέπει να επιλέξουμε κάποια άλλη μέθοδο.

Στη συνέχεια παραθέτουμε δύο θεωρήματα, πάνω στα οποία βασίζεται το παράδειγμα ενός μη γραμμικού συστήματος που ακολουθεί, το οποίο γραμμικοποιώντας το αποτυχαίνουμε να βγάλουμε συμπεράσματα για την ευστάθειά του, οπότε κάνουμε χρήση της συνάρτησης Lyapunov.

**Θεώρημα 2.2.11** [Khalil,2002,σελίς 125] Έστω  $x=0$  ένα σημείο ισορροπίας για το μη γραμμικό σύστημα

$$\dot{x} = f(x).$$

Έστω  $V : D \rightarrow \mathbb{R}$  μία συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση (με συνεχείς παραγώγους) τέτοια ώστε  $V(0) = 0$  και  $V(x_0) > 0$  για κάποιο  $x_0$  με αυθαίρετα μικρό  $\|x_0\|$ . Ορίζουμε ένα σύνολο  $U$  τέτοιο ώστε  $U = \{x \in B_r \mid V(x) > 0\}$  όπου  $B_r = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq r\}$  και υποθέτουμε ότι  $\dot{V}(x) > 0$  στο σύνολο  $U$ . Τότε, το  $x=0$  είναι ασταθές.  $\square$

**Θεώρημα 2.2.12** [Khalil,2002,σελίς 134] Το σημείο ισορροπίας  $x=0$  του συστήματος  $\dot{x} = Ax$  είναι ευσταθές εάν και μόνο εάν όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα  $A$  ικανοποιούν την  $\operatorname{Re} \lambda_i \leq 0$  και για κάθε ιδιοτιμή με  $\operatorname{Re} \lambda_i = 0$  και αλγεβρική πολλαπλότητα  $q_i \geq 2$ ,  $\operatorname{rank}(A - \lambda_i I) = n - q_i$ , όπου  $n$  είναι η διάσταση του  $x$ . Το σημείο ισορροπίας  $x=0$  είναι ασυμπτωτικά ευσταθές εάν και μόνο εάν όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα  $A$  ικανοποιούν την  $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$ .  $\square$

**Παράδειγμα 2.2.10** Θεωρούμε το σύστημα

$$\dot{x} = ax^3$$

Γραμματικοποιώντας το παραπάνω σύστημα στην αρχή των αξόνων έχουμε,

$$A = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=0} = 3ax^2 \Big|_{x=0} = 0$$

Υπάρχει μία ιδιοτιμή που βρίσκεται στον φανταστικό άξονα. Επομένως με τη γραμμικοποίηση που κάναμε δεν καταφέραμε να καθορίσουμε την ευστάθεια της αρχής των αξόνων. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η αρχή των αξόνων ενδεχομένως να είναι είτε ασυμπτωτικά ευσταθής, είτε ευσταθής, είτε ασταθής, εξαρτώμενη πάντα από την τιμή της παραμέτρου  $a$ . Εάν  $a < 0$ , η αρχή των αξόνων είναι ασυμπτωτικά ευσταθής όπως μπορούμε να διαπιστώσουμε και από την συνάρτηση Lyapunov  $V(x) = x^4$ , της οποίας η παράγωγος είναι  $\dot{V}(x) = 4x^3 \dot{x} = 4x^3 ax^3 = 4ax^6 < 0$  για  $x \neq 0$ . Εάν  $a = 0$ , το σύστημα είναι γραμμικό και η αρχή των αξόνων είναι ευσταθής σύμφωνα με το θεώρημα (2.2.12). Εάν  $a > 0$ , η αρχή είναι ασταθής όπως διαπιστώνουμε από το θεώρημα (2.2.11) και τη συνάρτηση Lyapunov  $V(x) = x^4$ , της οποίας η παράγωγος είναι  $\dot{V}(x) = 4ax^6 > 0$  για  $x \neq 0$ .

□

#### 2.2.4 Αλγόριθμος Επίλυσης της Εξίσωσης Lyapunov με τη μέθοδο Schur

Βάση των όσων προαναφέραμε στην προηγούμενη παράγραφο αλλά και στο Κεφάλαιο 1, φαίνεται ότι η λύση της εξίσωσης Lyapunov

$$PA + A^T P = -Q \tag{2.2.13}$$

ή

$$AP + PA^T = -Q \tag{2.2.14}$$

αποτελεί σημαντικό εργαλείο στην ανάλυση και μελέτη συστημάτων ελέγχου.

Υπάρχουν και άλλοι τρόποι υπολογισμού ([2, παρ. 8.4, σελ. 262]) που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ώστε αναλυτικά να βρούμε μία λύση των παραπάνω εξισώσεων Lyapunov.

Παρόλα αυτά, από αριθμητικής απόψεως αυτές οι μέθοδοι υπονοούν τον υπολογισμό δυνάμεων του πίνακα  $A$ . Γενικότερα υπονοούν πράξεις με πίνακες που μπορεί να είναι σε αρρωστημένη κατάσταση και άρα κατ' επέκταση πράξεις που μπορεί να δημιουργήσουν μεγάλα, μη αποδεκτά, λάθη. Βλέπουμε λοιπόν ότι οι αναλυτικές μέθοδοι δεν αποτελούν «ακριβές» εργαλείο για την επίλυση εξισώσεων κι έτσι πρέπει να καταφύγουμε σε μεθόδους της Αριθμητικής Ανάλυσης.

Εφόσον για την επίλυση της εξίσωσης Lyapunov θα πρέπει ουσιαστικά να λύσουμε ένα γραμμικό σύστημα με  $n$  εξισώσεις και  $n$  αγνώστους, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε διάφορους αλγορίθμους επίλυσης γραμμικών συστημάτων όπως η απαλοιφή Gauss.

Το πρόβλημα αυτών των μεθόδων όμως είναι ότι χρειάζονται πολλές επαναλήψεις (δηλαδή πολύ χρόνο) και αρκετή διαθέσιμη μνήμη στον υπολογιστή για να πραγματοποιηθούν. Μπορεί τα αποτελέσματα που παράγουν να είναι ακριβή αλλά τα παραπάνω μειονεκτήματα μας οδηγούν στο να επιλέξουμε μία άλλη μέθοδο. Αυτή η μέθοδος βασίζεται στη Schur μορφή ενός πίνακα.

Έστω λοιπόν η επόμενη εξίσωση Lyapunov

$$PA + A^T P = -Q$$

Μπορούμε να περάσουμε στη Schur μορφή του πίνακα  $A$  με κατάλληλους πολλαπλασιασμούς ως εξής. Έστω  $\Lambda$  ορθογώνιος πίνακας (δηλ.  $\Lambda\Lambda^T = I$ ) τότε

$$\begin{aligned} PA + A^T P &= PIA + A^T IP = \\ P\Lambda\Lambda^T A + A^T \Lambda\Lambda^T P &= -Q \Rightarrow \\ (\Lambda^T P\Lambda)(\Lambda^T A\Lambda) + (\Lambda^T A^T \Lambda)(\Lambda^T P\Lambda) &= -\Lambda^T Q\Lambda \quad (2.2.15) \end{aligned}$$

Εάν τώρα  $R^T$  όπου

$$R^T = \Lambda^T A \Lambda \Rightarrow A = \Lambda R^T \Lambda^T$$

είναι η πραγματική Schur μορφή του πίνακα  $A$  και  $R$  όπου

$$\Lambda^T A^T \Lambda = R \Rightarrow A^T = \Lambda R \Lambda^T$$

είναι η πραγματική Schur μορφή του πίνακα  $A^T$  και

$$\Lambda^T P \Lambda = Y \quad \text{και} \quad \Lambda^T Q \Lambda = W$$

τότε η εξίσωση (2.2.15) γράφεται

$$Y R^T + R Y = -W \quad (2.2.16)$$

Η εξίσωση (2.2.16) όμως και λόγω της ιδιαίτερης δομής του πίνακα  $R$  μπορεί να λυθεί αλγοριθμικά κατά τον ακόλουθο τρόπο :

Ας είναι κατ' αρχάς  $Y=(y_1, y_2, \dots, y_n)$  και  $W=(w_1, w_2, \dots, w_n)$  και  $R=(r_{ij})$  όπου  $y_i, i=1, \dots, n$  είναι οι στήλες του  $Y$  ενώ  $w_i, i=1, \dots, n$  ανάλογα είναι οι στήλες του  $W$ . Αν υποθέσουμε ακόμη ότι οι στήλες  $y_{k+1}$  έως  $y_n$  έχουν υπολογισθεί, τότε θα έχουμε δύο περιπτώσεις

### **Περίπτωση 1<sup>η</sup>** ( $r_{k,k-1}=0$ )

Στην περίπτωση αυτή η στήλη  $y_k$  υπολογίζεται λύνοντας το «σχεδόν» τριγωνικό σύστημα

$$(R + r_{kk}I)y_k = w_k - \sum_{j=k+1}^n r_{kj}y_j.$$

Αν ο πίνακας  $R$  τυχαίνει να είναι άνω τριγωνικός (όλες οι ιδιοτιμές του  $A$  είναι πραγματικές) τότε ιδιαίτερα έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
 (R + r_{vv}I)y_v &= w_v \\
 (R + r_{v-1,v-1}I)y_{v-1} &= w_{v-1} - r_{v-1,v}y_v \\
 &\vdots \\
 (R + r_{11}I)y_1 &= w_1 - r_{12}y_2 - \dots - r_{1v}y_v.
 \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι η παραπάνω ακολουθία μπορεί να υλοποιηθεί σχετικά εύκολα σε ρουτίνα ηλεκτρονικού υπολογιστή. Εάν όμως  $r_{k,k-1} \neq 0$  για κάποιο  $k$  αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα καρούμπαλο Schur και κατά συνέπεια μπορούμε να υπολογίσουμε ταυτόχρονα τις στήλες  $y_k$  και  $y_{k-1}$  ως εξής:

**Περίπτωση 2<sup>η</sup>** ( $r_{k,k-1} \neq 0$ )

$$\begin{aligned}
 R(y_{k-1}, y_k) + (y_{k-1}, y_k) \begin{bmatrix} r_{k-1,k-1} & r_{k,k-1} \\ r_{k-1,k} & r_{k,k} \end{bmatrix} &= \\
 (w_{k-1}, w_k) - \sum_{j=k+1}^v (r_{k-1,j}y_j, r_{kj}y_j). &
 \end{aligned}$$

Έχοντας τώρα στη διάθεσή μας έναν αλγόριθμο που υπολογίζει την λύση της μετασχηματισμένης εξίσωσης Lyapunov μπορούμε να υπολογίσουμε εύκολα τη λύση της αρχικής. Αυτό γίνεται μέσω της «αντίστροφης» εξίσωσης

$$P = \Lambda Y \Lambda^T.$$

Για να εξηγήσουμε καλύτερα και εις βάθος τον αλγόριθμο επίλυσης θα συνεχίσουμε με ένα παράδειγμα.

**Παράδειγμα 2.2.11**

Έστω η επόμενη εξίσωση Lyapunov



Επίλυση Εξισώσεων Lyapunov  
με εφαρμογές στην Θεωρία Ελέγχου

$$PA + A^T P = -Q$$

όπου  $A, P \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Μετασχηματίζοντας την παραπάνω εξίσωση όπως προείπαμε καταλήγουμε στην

$$YR^T + RY = W.$$

Έστω ακόμη ότι η πραγματική Schur μορφή του πίνακα  $A$  είναι

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ 0 & r_{22} & r_{23} \\ 0 & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

και οι μετασχηματισμένοι πίνακες  $Y = \Lambda^T P \Lambda$  και  $W = \Lambda^T Q \Lambda$  του αλγορίθμου οι παρακάτω

$$Y = (y_1 \quad y_2 \quad y_3) = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y_{12} & y_{22} & y_{23} \\ y_{13} & y_{23} & y_{33} \end{bmatrix} \text{ και}$$

$$W = (w_1 \quad w_2 \quad w_3) = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} \\ w_{21} & w_{22} & w_{23} \\ w_{31} & w_{32} & w_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} \\ w_{12} & w_{22} & w_{23} \\ w_{13} & w_{23} & w_{33} \end{bmatrix}.$$

Τότε επειδή υπάρχει ένα Schur bump στον πίνακα  $R$ , ο  $2 \times 2$  πίνακας  $\begin{bmatrix} r_{22} & r_{23} \\ r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$ , μπορούμε

να υπολογίσουμε τις στήλες  $y_2, y_3$  ταυτόχρονα ως εξής:

Κατ' αρχάς

$$\begin{aligned}
 YR^T + RY = W &\Rightarrow \\
 \begin{bmatrix} \mathcal{Y}_{11} & \mathcal{Y}_{12} & \mathcal{Y}_{13} \\ \mathcal{Y}_{12} & \mathcal{Y}_{22} & \mathcal{Y}_{23} \\ \mathcal{Y}_{13} & \mathcal{Y}_{23} & \mathcal{Y}_{33} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} r_{11} & 0 & 0 \\ r_{12} & r_{22} & r_{32} \\ r_{13} & r_{23} & r_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ 0 & r_{22} & r_{23} \\ 0 & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{Y}_{11} & \mathcal{Y}_{12} & \mathcal{Y}_{13} \\ \mathcal{Y}_{12} & \mathcal{Y}_{22} & \mathcal{Y}_{23} \\ \mathcal{Y}_{13} & \mathcal{Y}_{23} & \mathcal{Y}_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} \\ w_{12} & w_{22} & w_{23} \\ w_{13} & w_{23} & w_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow \\
 \begin{bmatrix} \mathcal{Y}_{11}r_{11} + \mathcal{Y}_{12}r_{12} + \mathcal{Y}_{13}r_{13} & \mathcal{Y}_{12}r_{22} + \mathcal{Y}_{13}r_{23} & \mathcal{Y}_{12}r_{32} + \mathcal{Y}_{13}r_{33} \\ \mathcal{Y}_{12}r_{11} + \mathcal{Y}_{22}r_{12} + \mathcal{Y}_{23}r_{13} & \mathcal{Y}_{22}r_{22} + \mathcal{Y}_{23}r_{23} & \mathcal{Y}_{22}r_{32} + \mathcal{Y}_{23}r_{33} \\ \mathcal{Y}_{13}r_{11} + \mathcal{Y}_{23}r_{12} + \mathcal{Y}_{33}r_{13} & \mathcal{Y}_{23}r_{22} + \mathcal{Y}_{33}r_{23} & \mathcal{Y}_{23}r_{32} + \mathcal{Y}_{33}r_{33} \end{bmatrix} & + \\
 \begin{bmatrix} r_{11}\mathcal{Y}_{11} + r_{12}\mathcal{Y}_{12} + r_{13}\mathcal{Y}_{13} & r_{11}\mathcal{Y}_{12} + r_{12}\mathcal{Y}_{22} + r_{13}\mathcal{Y}_{23} & r_{11}\mathcal{Y}_{13} + r_{12}\mathcal{Y}_{23} + r_{13}\mathcal{Y}_{33} \\ r_{22}\mathcal{Y}_{12} + r_{23}\mathcal{Y}_{13} & r_{22}\mathcal{Y}_{22} + r_{23}\mathcal{Y}_{23} & r_{22}\mathcal{Y}_{23} + r_{23}\mathcal{Y}_{33} \\ r_{32}\mathcal{Y}_{12} + r_{33}\mathcal{Y}_{13} & r_{32}\mathcal{Y}_{22} + r_{33}\mathcal{Y}_{23} & r_{32}\mathcal{Y}_{23} + r_{33}\mathcal{Y}_{33} \end{bmatrix} & = W \Rightarrow \\
 (y_2 \ y_3) \begin{bmatrix} r_{22} & r_{32} \\ r_{23} & r_{33} \end{bmatrix} + R(y_2 \ y_3) & = (w_2 \ w_3).
 \end{aligned}$$

Μπορούμε δηλαδή να λύσουμε ένα μέρος των εξισώσεων από τη λύση του οποίου θα βρούμε τις δύο στήλες  $(y_2, y_3)$  που ψάχνουμε. Μετά από πράξεις έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ 0 & r_{22} & r_{23} \\ 0 & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \mathcal{Y}_{12} & \mathcal{Y}_{13} \\ \mathcal{Y}_{22} & \mathcal{Y}_{23} \\ \mathcal{Y}_{32} & \mathcal{Y}_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathcal{Y}_{12} & \mathcal{Y}_{13} \\ \mathcal{Y}_{22} & \mathcal{Y}_{23} \\ \mathcal{Y}_{32} & \mathcal{Y}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{22} & r_{32} \\ r_{23} & r_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{12} & w_{13} \\ w_{22} & w_{23} \\ w_{32} & w_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow \\
 \begin{bmatrix} r_{11}\mathcal{Y}_{12} + r_{12}\mathcal{Y}_{22} + r_{13}\mathcal{Y}_{32} + r_{22}\mathcal{Y}_{12} + r_{23}\mathcal{Y}_{13} & r_{11}\mathcal{Y}_{13} + r_{12}\mathcal{Y}_{23} + r_{13}\mathcal{Y}_{33} + r_{32}\mathcal{Y}_{12} + r_{33}\mathcal{Y}_{13} \\ r_{22}\mathcal{Y}_{22} + r_{23}\mathcal{Y}_{32} + r_{22}\mathcal{Y}_{22} + r_{23}\mathcal{Y}_{23} & r_{22}\mathcal{Y}_{23} + r_{23}\mathcal{Y}_{33} + r_{32}\mathcal{Y}_{22} + r_{33}\mathcal{Y}_{23} \\ r_{32}\mathcal{Y}_{22} + r_{33}\mathcal{Y}_{32} + r_{22}\mathcal{Y}_{32} + r_{23}\mathcal{Y}_{33} & r_{32}\mathcal{Y}_{23} + r_{33}\mathcal{Y}_{33} + r_{32}\mathcal{Y}_{32} + r_{33}\mathcal{Y}_{33} \end{bmatrix} & = \\
 \begin{bmatrix} r_{11} + r_{22} & r_{12} & r_{13} & r_{23} & 0 & 0 \\ 0 & r_{22} + r_{22} & r_{23} & 0 & r_{23} & 0 \\ 0 & r_{32} & r_{22} + r_{33} & 0 & 0 & r_{23} \\ r_{32} & 0 & 0 & r_{11} + r_{33} & r_{12} & r_{13} \\ 0 & r_{32} & 0 & 0 & r_{22} + r_{33} & r_{23} \\ 0 & 0 & r_{32} & 0 & r_{32} & r_{33} + r_{33} \end{bmatrix} & \begin{pmatrix} \mathcal{Y}_{12} \\ \mathcal{Y}_{22} \\ \mathcal{Y}_{32} \\ \mathcal{Y}_{13} \\ \mathcal{Y}_{23} \\ \mathcal{Y}_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_{12} \\ w_{22} \\ w_{32} \\ w_{13} \\ w_{23} \\ w_{33} \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Το παραπάνω σύστημα είναι πλέον σε μορφή  $Ax=b$  και μπορεί να λυθεί εύκολα με παραδείγματος χάριν απαλοιφή Gauss. Έχοντας υπολογίσει τις στήλες  $y_2, y_3$  του  $y$

μπορούμε τώρα να βρούμε και την  $y_1$  εύκολα γιατί απλώς απομένει να βρούμε μόνο την  $y_{11}$  (λόγω της συμμετρικότητας του  $y$ ). Συγκεκριμένα

$$2y_{11}r_{11} = w_{11} - 2(y_{12}r_{12} + y_{13}r_{13}) \Rightarrow y_{11} = \frac{w_{11}}{2r_{11}} - \frac{(y_{12}r_{12} + y_{13}r_{13})}{r_{11}}.$$

□

**Παράδειγμα 2.2.12** Εκτελούμε τώρα τον παραπάνω αλγόριθμο και για ένα αριθμητικό παράδειγμα. Συγκεκριμένα λύνουμε την εξίσωση Lyapunov

$$PA + A^T P = -I_{4 \times 4} \quad (2.2.17)$$

όπου

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1/2 & -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \text{ και η Schur μορφή του είναι}$$

$$R = \begin{bmatrix} -0.1936 & 0.9335 & -0.4036 & 0.5287 \\ -1.4676 & -0.1936 & -0.6364 & 1.7444 \\ 0 & 0 & -0.3064 & -1.4277 \\ 0 & 0 & 0.1831 & -0.3064 \end{bmatrix} \text{ με ορθογώνιο πίνακα}$$

μετασχηματισμού  $Q$  τον

$$Q = \begin{bmatrix} -0.4622 & 0.3034 & 0.7792 & -0.2950 \\ -0.3558 & -0.4903 & -0.2993 & -0.7372 \\ 0.7884 & -0.2372 & 0.4123 & -0.3901 \\ 0.1995 & 0.7819 & -0.3650 & -0.4661 \end{bmatrix}.$$

Ελένη Θ. Μπαμπαλώνα

Η εξίσωση (2.2.17) μετασχηματίζεται τώρα στην επόμενη

$$YR^T + RY = W. \quad (2.2.18)$$

Λύνουμε την εξίσωση (2.2.18) χρησιμοποιώντας τον προηγούμενο αλγόριθμο.

$$YR^T + RY = W \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} \mathcal{Y}_{11} & \mathcal{Y}_{12} & \mathcal{Y}_{13} & \mathcal{Y}_{14} \\ \mathcal{Y}_{12} & \mathcal{Y}_{22} & \mathcal{Y}_{23} & \mathcal{Y}_{24} \\ \mathcal{Y}_{13} & \mathcal{Y}_{23} & \mathcal{Y}_{33} & \mathcal{Y}_{34} \\ \mathcal{Y}_{14} & \mathcal{Y}_{24} & \mathcal{Y}_{34} & \mathcal{Y}_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{11} & r_{21} & 0 & 0 \\ r_{12} & r_{22} & 0 & 0 \\ r_{13} & r_{23} & r_{33} & r_{43} \\ r_{14} & r_{24} & r_{34} & r_{44} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & r_{24} \\ 0 & 0 & r_{33} & r_{34} \\ 0 & 0 & r_{43} & r_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{Y}_{11} & \mathcal{Y}_{12} & \mathcal{Y}_{13} & \mathcal{Y}_{14} \\ \mathcal{Y}_{12} & \mathcal{Y}_{22} & \mathcal{Y}_{23} & \mathcal{Y}_{24} \\ \mathcal{Y}_{13} & \mathcal{Y}_{23} & \mathcal{Y}_{33} & \mathcal{Y}_{34} \\ \mathcal{Y}_{14} & \mathcal{Y}_{24} & \mathcal{Y}_{34} & \mathcal{Y}_{44} \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} & w_{14} \\ w_{21} & w_{22} & w_{23} & w_{24} \\ w_{31} & w_{32} & w_{33} & w_{34} \\ w_{41} & w_{42} & w_{43} & w_{44} \end{pmatrix} \quad (\text{Σύστημα 2.2.19})$$

Επειδή ο R έχει δύο Schur bumps θα έχουμε

Επίλυση Εξισώσεων Lyapunov  
με εφαρμογές στην Θεωρία Ελέγχου

$$\begin{aligned}
 & (y_3 \ y_4) \begin{bmatrix} r_{33} & r_{43} \\ r_{34} & r_{44} \end{bmatrix} + R(y_3 \ y_4) = (w_3 \ w_4) \Rightarrow \\
 & \begin{pmatrix} y_{13} & y_{14} \\ y_{23} & y_{24} \\ y_{33} & y_{34} \\ y_{43} & y_{44} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} -0.3064 & 0.1831 \\ -1.4277 & -0.3064 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.1936 & 0.9335 & -0.4036 & 0.5287 \\ -1.4676 & -0.1936 & -0.6364 & 1.7444 \\ 0 & 0 & -0.3064 & -1.4277 \\ 0 & 0 & 0.1831 & -0.3064 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_{13} & y_{14} \\ y_{23} & y_{24} \\ y_{33} & y_{34} \\ y_{34} & y_{44} \end{pmatrix} = \\
 & \begin{bmatrix} -0.5 & 0.9335 & -0.4036 & 0.5287 & -1.4277 & 0 & 0 & 0 \\ -1.4676 & -0.5 & -0.6364 & 1.7444 & 0 & -1.4277 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.6128 & -2.8554 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1831 & -0.6128 & 0 & 0 & 0 & -1.4277 \\ 0.1831 & 0 & 0 & -0.4036 & -0.5 & 0.9335 & 0 & 0.5287 \\ 0 & 0.1831 & 0 & -0.6364 & -1.4676 & -0.5 & 0 & 1.7444 \\ 0 & 0 & 0.1831 & 0 & 0 & 0 & -0.6128 & -1.4277 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1831 & 0 & 0 & 0.1831 & -0.6128 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_{13} \\ y_{23} \\ y_{33} \\ y_{43} \\ y_{14} \\ y_{24} \\ y_{34} \\ y_{44} \end{pmatrix} \\
 & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} y_{13} \\ y_{23} \\ y_{33} \\ y_{43} \\ y_{14} \\ y_{24} \\ y_{34} \\ y_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.7371 \\ 6.3866 \\ 5.7303 \\ -0.8735 \\ 2.4921 \\ 0.0080 \\ -0.8735 \\ 1.1098 \end{pmatrix} \Rightarrow y_3 = \begin{pmatrix} -0.7371 \\ 6.3866 \\ 5.7303 \\ -0.8735 \end{pmatrix}, y_4 = \begin{pmatrix} 2.4921 \\ 0.0080 \\ -0.8735 \\ 1.1098 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Έχοντας υπολογίσει τις δύο τελευταίες στήλες του  $y$ , δηλαδή τις  $y_3$  και  $y_4$ , συνεχίζουμε με τον υπολογισμό και των άλλων δύο στηλών, των  $y_1$  και  $y_2$ . Από το σύστημα (2.5.19) προκύπτουν οι σχέσεις:

Ελένη Θ. Μπαμπαλώνα

$$2(r_{11}y_{11} + r_{12}y_{12} + r_{13}y_{13} + r_{14}y_{14}) = w_{11}$$

$$2(r_{21}y_{12} + r_{22}y_{22} + r_{23}y_{23} + r_{24}y_{24}) = w_{22}$$

$$r_{11}y_{12} + r_{12}y_{22} + r_{13}y_{23} + r_{14}y_{24} + r_{21}y_{11} + r_{22}y_{12} + r_{23}y_{13} + r_{24}y_{14} = w_{12}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -0.1936 & 0.9335 & 0 \\ 0 & -1.4676 & -0.1936 \\ -1.4676 & -0.3872 & 0.9335 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{12} \\ y_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.1151 \\ 3.5504 \\ -2.2429 \end{pmatrix} \quad (\text{Σύστημα 2.2.20})$$

Από τη λύση του συστήματος (2.5.20) έχουμε

$$y_{11} = -10.5413$$

$$y_{12} = 0.0796$$

$$y_{22} = -18.9422$$

επομένως η λύση της εξίσωσης (2.2.18) με τη μέθοδο Schur είναι η εξής:

$$Y = \begin{pmatrix} -10.5413 & 0.0796 & -0.7371 & 2.4921 \\ 0.0796 & -18.9422 & 6.3866 & 0.0080 \\ -0.7371 & 6.3866 & 5.7303 & -0.8735 \\ 2.4921 & 0.0080 & -0.8735 & 1.1098 \end{pmatrix}$$

## 2.2.5 Αριθμητική Λύση της Εξίσωσης του πίνακα Lyapunov

Η εξίσωση του πίνακα **Lyapunov**  $PA + A^T P = C \triangleq -Q$ , συναντιέται συχνά στη σύγχρονη θεωρία ελέγχου λόγω του ότι παίζει βασικό ρόλο στη θεωρία ευστάθειας **Lyapunov** των γραμμικών συστημάτων. Στην ενότητα αυτή παρουσιάζουμε έναν αριθμητικό αλγόριθμο για την επίλυση της παραπάνω εξίσωσης.

### Ταυτότητες Newton

Ο Αλγόριθμος θα αρχίσει αφού πρώτα καθορίσουμε τους συντελεστές  $\{p_j\}$  στην χαρακτηριστική εξίσωση πολυωνύμου

$$\begin{aligned} 0 &= |\lambda I - A| = \lambda^{n_x} + p_{n_x-1} \lambda^{n_x-1} + \dots + p_1 \lambda + p_0 = \\ &= (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3) \dots (\lambda - \lambda_{n_x}) \end{aligned} \quad (2.2.21)$$

Όμως με τη βοήθεια των ταυτοτήτων Newton έχουμε

$$\begin{aligned} &(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3) \dots (\lambda - \lambda_{n_x}) = \\ &= \lambda^{n_x} - \sum_1 \lambda^{n_x-1} + \sum_2 \lambda^{n_x-2} - \sum_3 \lambda^{n_x-3} + \dots + (-1)^{n_x-1} \sum_{n_x-1} \lambda + (-1)^{n_x} \sum_{n_x} \end{aligned}$$

Όπου

$$\begin{aligned} \sum_1 &= \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{n_x} \\ \sum_2 &= \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \dots + \lambda_1 \lambda_{n_x} + \lambda_2 \lambda_3 + \dots + \lambda_2 \lambda_{n_x} + \dots + \lambda_{n_x-1} \lambda_{n_x} \\ \sum_3 &= \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 + \dots + \lambda_1 \lambda_2 \lambda_{n_x} + \dots + \lambda_1 \lambda_3 \lambda_4 + \dots + \lambda_1 \lambda_3 \lambda_{n_x} + \lambda_1 \lambda_{n_x-1} \lambda_{n_x} + \dots + \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 + \dots + \lambda_{n_x-2} \lambda_{n_x-1} \lambda_{n_x} \\ \sum_{n_x-1} &= \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_{n_x-1} + \lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_{n_x} + \dots \\ \sum_{n_x} &= \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_{n_x} \end{aligned}$$

Άρα

$$\begin{aligned} &\lambda^{n_x} + p_{n_x-1} \lambda^{n_x-1} + p_{n_x-2} \lambda^{n_x-2} + p_{n_x-3} \lambda^{n_x-3} + \dots + p_1 \lambda + p_0 = \\ &= \lambda^{n_x} - \sum_1 \lambda^{n_x-1} + \sum_2 \lambda^{n_x-2} - \sum_3 \lambda^{n_x-3} + \dots + (-1)^{n_x-1} \sum_{n_x-1} \lambda + (-1)^{n_x} \sum_{n_x} \end{aligned}$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές των δυνάμεων του  $\lambda$  έχουμε

$$\begin{aligned} p_{n_x-1} &= -\sum_1 = -\sum_j \lambda_j \\ p_{n_x-2} &= \sum_2 = \sum_{i \neq j} \lambda_i \lambda_j \\ p_{n_x-3} &= -\sum_3 = -\sum_{i \neq j \neq k} \lambda_i \lambda_j \lambda_k \\ &\vdots \\ p_0 &= (-1)^{n_x} \sum_{n_x} = (-1)^{n_x} \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \cdots \lambda_{n_x} \end{aligned}$$

Έστω

$$s_l = Tr[A^l],$$

όπου το **ίχνος** ενός τετραγωνικού πίνακα  $n \times n$   $A = [a_{ij}]$ , που συμβολίζουμε με  $Tr[A] = a_{11} + \cdots + a_{nn}$  (από το trace) είναι το άθροισμα των διαγώνιων στοιχείων του πίνακα  $A$ . Εάν  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα  $A$ , τότε ισχύει  $Tr[A] = \sum_i \lambda_i$ ,

Οπότε οι **ταυτότητες Newton** μπορούν να γραφούν ισοδύναμα, σαν συνάρτηση του ίχνους διαδοχικών δυνάμεων του  $A$  ως εξής,



Επίλυση Εξισώσεων Lyapunov  
με εφαρμογές στην Θεωρία Ελέγχου

$$\begin{aligned}
 0 &= s_1 + p_{n_x-1} \\
 0 &= s_2 + p_{n_x-1}s_1 + 2p_{n_x-2} \\
 &\vdots \\
 0 &= s_{n_x-1} + p_{n_x-1}s_{n_x-2} + p_2s_1 + (n_x - 1)p_1 \\
 0 &= s_{n_x} + p_{n_x-1}s_{n_x-1} + \dots + p_1s_1 + (n_x)p_0
 \end{aligned}$$

Με τη βοήθεια των παραπάνω εξισώσεων μπορούμε να βρούμε τους συντελεστές  $\{p_j\}$  αφού τις λύσουμε διαδοχικά ως προς  $p_{n_x-1}, p_{n_x-2}, \dots, p_0$ .

### Αλγόριθμος Jameson

Εξετάζουμε τώρα την εξίσωση του πίνακα **Lyapunov**

$$PA + A^T P = C \triangleq -Q,$$

όπου  $Q \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ . Αν ο πίνακας  $Q$  είναι συμμετρικός, τότε η λύση  $P$  είναι και αυτή συμμετρική.

Σύμφωνα με τον **Αλγόριθμο Jameson** για να δημιουργήσουμε μία λύση  $P$  πρέπει να δημιουργήσουμε την εξής ακολουθία πινάκων, η οποία όπως θα διαπιστώσουμε, δημιουργείται με χρήση της επαναληπτικής σχέσης

$$C_k \triangleq C_{k-1}A - A^T C_{k-1} + A^T C_{k-2}A, k = 2, \dots, n_x,$$

όπου  $C_0=0$  και  $C_1=C=-Q$ .

Δηλαδή

Ελένη Θ. Μπαμπαλώνα

$$\begin{aligned}
C_0 &\triangleq 0 \\
C_1 &\triangleq C = PA + A^T P \\
C_2 &\triangleq C_1 A - A^T C_1 + A^T C_0 A = PAA + A^T PA - A^T PA - A^T A^T P = PA^2 - (A^T)^2 P \\
&\vdots \\
C_{n_x} &\triangleq C_{n_x-1} A - A^T C_{n_x-1} + A^T C_{n_x-2} A = PA^{n_x} - (-1)^{n_x} (A^T)^{n_x} P.
\end{aligned}$$

Σε όρους αυτών των πινάκων έχουμε

$$\begin{aligned}
&C_{n_x} - p_{n_x-1} C_{n_x-1} + \dots + (-1)^{n_x-2} p_2 C_2 + (-1)^{n_x-1} p_1 C_1 = \\
&= PA^{n_x} - (-1)^{n_x} (A^T)^{n_x} P - p_{n_x-1} PA^{n_x-1} + p_{n_x-1} (-1)^{n_x-1} (A^T)^{n_x-1} P + \dots + \\
&+ (-1)^{n_x-2} p_2 PA^2 - (-1)^{n_x-2} p_2 (A^T)^2 P + (-1)^{n_x-1} p_1 PA + (-1)^{n_x-1} p_1 (A^T) P = \\
&= P \left\{ A^{n_x} - p_{n_x-1} A^{n_x-1} + \dots + (-1)^{n_x-2} p_2 A^2 + (-1)^{n_x-1} p_1 A \right\} + \\
&+ (-1)^{n_x} \left\{ -(A^T)^{n_x} - p_{n_x-1} (-1)^{n_x-1} (A^T)^{n_x-1} - \dots - p_2 (A^T)^2 - p_1 (A^T) \right\} P.
\end{aligned}$$

Σύμφωνα με το θεώρημα Caley–Hamilton και ο πίνακας  $A$  και ο  $A^T$  ικανοποιούν την χαρακτηριστική εξίσωση (2.2.21). Επομένως το άθροισμα της τελευταίας ομάδας αγκύλων στην δεξιά πλευρά της παραπάνω σχέσης θα είναι ίσο με  $p_0 I$ .

Άρα θα έχουμε

$$\begin{aligned}
&C_{n_x} - p_{n_x-1} C_{n_x-1} + \dots + (-1)^{n_x-2} p_2 C_2 + (-1)^{n_x-1} p_1 C_1 = \\
&= P \left\{ A^{n_x} - p_{n_x-1} A^{n_x-1} + \dots + (-1)^{n_x-2} p_2 A^2 + (-1)^{n_x-1} p_1 A \right\} + \\
&+ (-1)^{n_x} p_0 IP.
\end{aligned}$$

Αν λύσουμε ως προς  $P$  θα έχουμε

$$P = WJ^{-1},$$

όπου

$$W = C_{n_x} - p_{n_x-1}C_{n_x-1} + \dots + (-1)^{n_x-2} p_2 C_2 + (-1)^{n_x-1} p_1 C_1$$

$$J = A^{n_x} - p_{n_x-1}A^{n_x-1} + \dots + (-1)^{n_x-2} p_2 A^2 + (-1)^{n_x-1} p_1 A + (-1)^{n_x} p_0 I.$$

**Παράδειγμα 2.2.12** Εφαρμογή του **Αλγορίθμου Jameson**

Έστω το σύστημα δύο διαστάσεων  $\dot{x} = Ax$ , με

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Για να δείξουμε ότι η αρχή συντεταγμένων είναι συνολικά ασυμπτωτικά ευσταθής θα αναζητήσουμε μία συνάρτηση **Lyapunov**

$$V(x) = x^T P x$$

όπου  $P > 0$  είναι λύση της

$$PA + A^T P = -Q$$

Επιλέγουμε για απλούστευση  $Q = I$ .

Η χαρακτηριστική εξίσωση του πίνακα  $A$  είναι

$$\det(\lambda I - A) = |\lambda I - A| = 0$$

δηλαδή

$$p_0 + p_1 \lambda + \lambda^2 = 0,$$

Ελένη Θ. Μπαμπαλώνα

της οποίας οι συντελεστές προσδιορίζονται εύκολα, για συστήματα μικρής τάξης. Όμως για να δείξουμε την διεργασία για συστήματα μεγαλύτερης τάξης, χρησιμοποιούμε τις ταυτότητες Newton

$$\begin{aligned}0 &= s_1 + p_1 \Leftrightarrow -s_1 = p_1 \\0 &= s_2 + p_1 s_1 + 2p_0 \Leftrightarrow p_0 = -\frac{1}{2}(s_2 + p_1 s_1)\end{aligned}$$

όπου

$$\begin{aligned}s_1 &= \text{Tr}[A] = -3 \\s_2 &= \text{Tr}[A^2] = 5.\end{aligned}$$

Έτσι έχουμε

$$\begin{aligned}p_1 &= 3 \\p_0 &= 2.\end{aligned}$$

Υπολογίζουμε τώρα τους πίνακες

$$\begin{aligned}C_0 &= 0 \\C_1 &= C = -I \\C_2 &= CA - A^T C = -A + A^T = -\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Άρα

$$W = C_2 - p_1 C_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - (3) \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$J = A^2 - p_1 A + p_0 I = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} - (3) \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -6 \\ 0 & 12 \end{bmatrix}$$

$$P = WJ^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/6 & 1/12 \\ 0 & 1/12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/6 \\ 1/6 & 1/3 \end{bmatrix} > 0.$$

Τότε θα είναι

$$V(x) = x^T P x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 1/6 \\ 1/6 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} x_1^2 + \frac{1}{3} x_1 x_2 + \frac{1}{3} x_2^2 = \left( \frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{3} \right)^2 + \frac{x_1^2}{4} + \frac{x_2^2}{9} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V(x) = x^T P x > 0, \forall (x_1, x_2) \neq (0, 0)$$

και

$$\dot{V}(x) = -x^T Q x = - \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = -(x_1^2 + x_2^2) < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dot{V}(x) = -x^T Q x < 0, \forall (x_1, x_2) \neq (0, 0)$$

Αρα η αρχή συντεταγμένων είναι συνολικά ασυμπτωτικά ευσταθής.

Η ύπαρξη και φύση των λύσεων της εξίσωσης **Lyapunov**, δίνεται από το παρακάτω Λήμμα.

**Λήμμα 2.2.1** [Kalman and Bertram, 1960] Η εξίσωση πίνακα **Lyapunov**  $PA + A^T P = -Q$ , έχει μία μοναδική λύση **P** (όχι απαραίτητα θετικά ορισμένη) για οποιονδήποτε δεδομένο πίνακα **Q** όταν οι ιδιοτιμές  $\{\lambda_j\}$  του πίνακα **A** ικανοποιούν την

$$\lambda_j \neq -\lambda_k \quad \text{για όλα τα } j, k = 1, \dots, n_x$$

### Απόδειξη

Με τη βοήθεια του αλγόριθμου **Jameson** μπορούμε να αποδείξουμε την μοναδικότητα των λύσεων της εξίσωσης **Lyapunov**.

Χρησιμοποιώντας τις ταυτότητες Newton στην μορφή (1)

$$\begin{aligned}
 p_{n_x-1} &= -\sum_1 = -\sum_j \lambda_j \\
 p_{n_x-2} &= \sum_2 = \sum_{i \neq j} \lambda_i \lambda_j \\
 \text{δηλαδή} \quad p_{n_x-3} &= -\sum_3 = -\sum_{i \neq j \neq k} \lambda_i \lambda_j \lambda_k \\
 &\vdots \\
 p_0 &= (-1)^{n_x} \sum_{n_x} = (-1)^{n_x} \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \cdots \lambda_{n_x}
 \end{aligned}$$

από την

$$J = A^{n_x} - p_{n_x-1} A^{n_x-1} + \cdots + (-1)^{n_x-2} p_2 A^2 + (-1)^{n_x-1} p_1 A + (-1)^{n_x} p_0 I.$$

συμπεραίνουμε ότι

$$J = (A + \lambda_1 I)(A + \lambda_2 I) \cdots (A + \lambda_{n_x} I).$$

Λόγω του ότι η ορίζουσα γινομένου τετραγωνικών πινάκων είναι το γινόμενο των επί μέρους ορίζουσών, υπάρχει ο αντίστροφος του  $J$  και η  $PA + A^T P = -Q$ , έχει μοναδική λύση, αν και μόνο εάν η  $-\lambda_j$  δεν είναι ιδιοτιμή του πίνακα  $A$  για κάποιο  $j$ , δηλαδή, αν και μόνο εάν ισχύει  $\lambda_j \neq -\lambda_k$  για όλα τα  $j, k = 1, \dots, n_x$ .

□

Η συνθήκη  $\lambda_j \neq -\lambda_k$  για όλα τα  $j, k = 1, \dots, n_x$ , ισχύει αν όλες οι ιδιοτιμές είναι πραγματικές και αρνητικές (ή θετικές), όμως δεν ισχύει αν υπάρχει συζυγές ζεύγος καθαρά φανταστικών ιδιοτιμών, ή αν το μηδέν είναι επαναλαμβανόμενη ιδιοτιμή.

**Πόρισμα 2.2.1** [2,σελίδα 248] Μοναδικότητα των λύσεων της εξίσωσης Lyapunov  $PA + A^T P = -Q$ . Έστω  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  οι ιδιοτιμές του πίνακα  $A$ . Τότε η παραπάνω εξίσωση, έχει μοναδική λύση  $P$  εάν και μόνο εάν  $\lambda_i + \lambda_j \neq 0$  για  $i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, n$ .

**Παράδειγμα 2.2.13** Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

τότε

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I_{2 \times 2}) &= \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 0 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = \\ &= -4 + 2\lambda - 2\lambda + \lambda^2 = -4 + \lambda^2 \end{aligned}$$

οπότε

$$\det(A - \lambda I_{2 \times 2}) = 0$$

όταν

$$\lambda = \pm 2$$

Άρα η εξίσωση Lyapunov

$$PA + A^T P = -Q,$$

όπου

$$Q = -I_{2 \times 2}$$

δεν έχει μοναδική λύση, γιατί για δύο διαφορετικές ιδιοτιμές του πίνακα  $A$ ,  $\lambda_1 = 2$  και  $\lambda_2 = -2$ , ισχύει  $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ .

## 2.3 Ελεγχιμότητα-Παρατηρησιμότητα

Προτού συνεχίσουμε με τις άλλες χρήσεις της εξίσωσης Lyapunov θα αναφερθούμε σε δύο πολύ σημαντικές έννοιες της Θεωρίας Ελέγχου, την παρατηρησιμότητα και την ελεγχιμότητα.

Ιστορικά αυτές οι έννοιες εισήχθησαν από τον Kalman και όπως είπαμε στην αρχή της παραγράφου σχετίζονται με την ύπαρξη λύσης σε διάφορα προβλήματα της Θεωρίας Ελέγχου. Για περισσότερες πληροφορίες παραπέμπουμε τον αναγνώστη στα [6, παράγραφος 6, σελ. 44] και στο [2, παράγραφος 5.2.5. σελ. 215].

Έστω λοιπόν το ακόλουθο γραμμικό, μη χρονικά μεταβαλλόμενο σύστημα ελέγχου

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0 \quad \{\Sigma\} \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned}$$

όπου  $x(t): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  είναι το διάνυσμα κατάστασης,  $y(t): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$  το διάνυσμα εξόδου,  $u(t): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^l$  το διάνυσμα εισόδου,  $x(0) = x_0$  οι αρχικές συνθήκες του συστήματος και  $A, B, C, D$  σταθεροί πίνακες οι οποίοι έχουν διαστάσεις αντίστοιχα  $n \times n, n \times l, m \times n, n \times m$ .

**Ορισμός 2.3.1** Το διάνυσμα κατάστασης  $x(t)$  του συστήματος  $\{\Sigma\}$  θα λέγεται **ελέγξιμο** αν μπορούμε να βρούμε μία τμηματικά συνεχή συνάρτηση εισόδου  $u(t)$  που να μπορεί να οδηγήσει το  $x(t)$  από την αρχική του κατάσταση  $x(t_a)$  στην τελική του  $x(t_f)$  σε ένα πεπερασμένο χρονικά διάστημα  $t_f - t_a > 0$ . □

Με άλλα λόγια, αυτό που μας λέει ο Ορισμός 2.3.1 είναι ότι εάν το διάνυσμα κατάστασης  $x(t)$  είναι ελέγξιμο τότε μπορούμε να κατευθύνουμε, με μια κατάλληλη είσοδο, τη λύση του συστήματος  $\{\Sigma\}$   $x(t_a, x(t_a), t)$  προς μία οποιαδήποτε περιοχή του χώρου κατάστασης σε ένα πεπερασμένο χρόνο.



**Παράδειγμα 2.3.1** Έστω το ακόλουθο σύστημα ελέγχου

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u(t).$$

Παρατηρούμε ότι εάν η είσοδος  $u(t) = 0$ , η ελεύθερη απόκριση του συστήματος (η λύση δηλαδή της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης  $\dot{x} = Ax$ ) είναι ασυμπτωτικά ευσταθής αφού

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(0)e^{-t} \\ x_2(0)e^{-t} \end{pmatrix} \text{ και } \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0, \forall x(0) \in \mathbb{R}^2 - \{0\}.$$

Από την άλλη όμως βλέπουμε ότι για την ολική απόκριση του συστήματος θα έχουμε

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -x_1(t) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -x_2(t) \end{aligned}$$

Άρα ενώ μπορούμε να επηρεάσουμε την μεταβλητή  $x_1(t)$  προς μία οποιαδήποτε κατεύθυνση επιλέγοντας κατάλληλα τη συνάρτηση εισόδου  $u = u(t)$  δεν μπορούμε παρά ταύτα να ελέγξουμε την μεταβλητή  $x_2(t)$  η οποία θα κατευθυνθεί προς την αρχή των συντεταγμένων. Εάν αφήσουμε δηλαδή το σύστημα να «τρέξει» από κάποιο σημείο που χαρακτηρίζεται απ' το διάνυσμα των αρχικών συνθηκών δεν θα μπορέσουμε να πλησιάσουμε περιοχές στις οποίες τα σημεία που τις αποτελούν έχουν δεύτερη συντεταγμένη με μεγαλύτερη τιμή από την  $x_2(t_0)$ . Το διάνυσμα κατάστασης με άλλα λόγια δεν μπορεί να ελεγχθεί, να κατευθυνθεί προς μία οποιαδήποτε περιοχή του χώρου κατάστασης και άρα το σύστημα μας δεν είναι ελέγξιμο.

Μία άλλη θεμελιώδους σημασίας στη Θεωρία Ελέγχου ιδιότητα και δυική της ελεγχιμότητας είναι η παρατηρησιμότητα (observability). Για να την ορίσουμε θεωρούμε πάλι το σύστημα ελέγχου  $\{\Sigma\}$ .

**Ορισμός 2.3.2** Το διάνυσμα κατάστασης  $x(t)$  του συστήματος  $\{\Sigma\}$  θα λέγεται **παρατηρήσιμο** σ' ένα διάστημα  $[t_a, t_r] \subset \mathbb{R}$ , όταν μπορούμε να υπολογίσουμε το διάνυσμα των αρχικών συνθηκών  $x(t_a)$  έχοντας γνώση, πληροφορίες μόνο για τα διανύσματα εισόδου  $u(t)$  και εξόδου  $y(t)$ , για  $t \in [t_a, t_r]$ .  $\square$

Αυτό που μας λέει ο Ορισμός 2.3.2 με απλά λόγια είναι ότι εάν το διάνυσμα κατάστασης  $x(t)$ ,  $t \in [t_a, t_r]$  είναι παρατηρήσιμο τότε μπορούμε να προσδιορίσουμε τις αρχικές συνθήκες από τις οποίες ξεκίνησε το σύστημα και συνεπώς μπορούμε να ξέρουμε την εξέλιξη του συστήματος στον χρόνο.

**Παράδειγμα 2.3.2** Έστω το ακόλουθο σύστημα ελέγχου

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) &= (1 \quad 0) \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Όσον αφορά την παρατηρησιμότητα βλέπουμε τώρα ότι το διάνυσμα κατάστασης  $x(t)$  συνδέεται με το διάνυσμα εισόδου με τις παρακάτω εξισώσεις

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -x_1(t) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -x_2(t) + u(t)\end{aligned}$$

και με το διάνυσμα εξόδου

$$y(t) = x_1(t)$$

παρατηρούμε ότι το σύστημα δεν είναι παρατηρήσιμο διότι η έξοδος  $y = x_1$  δεν επηρεάζεται από την μεταβλητή  $x_2$  οπότε και δεν μπορούμε με γνώση μόνο αυτής και έλεγχο της εισόδου να προσδιορίσουμε επιθυμητές πληροφορίες για το  $x_2$ .  $\square$

Έχοντας ορίσει τις έννοιες της ελεγχιμότητας και της παρατηρησιμότητας τις συνδέουμε τώρα με την εξίσωση Lyapunov. Συγκεκριμένα παραθέτουμε τα ακόλουθα Θεωρήματα που μπορούν να βρεθούν μαζί με τις αποδείξεις τους και περισσότερες πληροφορίες στο [1, παρ. 7.2].

Έστω το σύστημα ελέγχου

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \quad x(0) = x_0 \quad \{\Sigma\} \\ y &= Cx + Du \end{aligned}$$

Ο πίνακας  $A$  στο σύστημα  $\{\Sigma\}$ , θα λέγεται εσωτερικά **ευσταθής** εάν είναι **Hurwitz**, εάν δηλαδή όλες οι ιδιοτιμές του βρίσκονται στο αριστερό μιγαδικό επίπεδο.

**Θεώρημα 2.3.1** [2,σελίδα 208] Έστω  $A$  ευσταθής πίνακας του συστήματος  $\{\Sigma\}$ . Ένας συμμετρικός θετικά ορισμένος πίνακας  $P$  είναι λύση της εξίσωσης Lyapunov

$$PA + A^T P = -C^T C \quad (2.3.1)$$

εάν και μόνο αν το σύστημα  $\{\Sigma\}$  είναι παρατηρήσιμο. □

**Απόδειξη:**

Ικανή:

Έστω  $A$  ευσταθής και  $\{\Sigma\}$  παρατηρήσιμο.

Εφόσον  $A$  ευσταθής, τότε από το Θεώρημα(2.2.4) υπάρχει μοναδικός θετικά ορισμένος πίνακας  $P$  της μορφής

$$P = \int_0^{\infty} e^{A^T t} C^T C e^{At} dt$$

που να είναι λύση της εξίσωσης (2.3.1).

Έστω ότι ο  $P$  δεν είναι θετικά ορισμένος, τότε υπάρχει ένα μη μηδενικό διάνυσμα  $x$  τέτοιο ώστε  $x^T P x = 0$ . Επομένως

Ελένη Θ. Μπαμπαλώνα

$$\int_0^{\infty} \|Ce^{At}x\|^2 dt = 0 \Rightarrow Ce^{At}x = 0 \quad (2.3.2)$$

Αναλύοντας τη σχέση (2.3.2) για  $t=0$ , έχουμε  $Ce^{A \cdot 0}x = 0 \Rightarrow Cx = 0$ ,

$$(Ce^{At}x)' = 0 \Rightarrow CAe^{At}x = 0 \stackrel{t=0}{\Rightarrow} CAx = 0. \text{ Άρα } CA^i x = 0, i = 0, 1, \dots, n-1, \text{ δηλ. } \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} x = 0.$$

Λόγω του ότι το  $\{\Sigma\}$  είναι παρατηρήσιμο ισχύει ότι  $\text{rank} \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \end{pmatrix} = n$ , επομένως έχουμε

ότι  $x = 0$ . Άτοπο. Άρα ο  $P$  είναι θετικά ορισμένος.

Αναγκαία:

Έστω  $A$  ευσταθής και  $P$  θετικά ορισμένος, λύση της (2.3.1).

Έστω ότι το  $\{\Sigma\}$  δεν είναι παρατηρήσιμο. Τότε, υπάρχει  $x \neq 0$  ιδιοάνυσμα του  $A$ , τέτοιο

$$\text{ώστε } \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} x = 0. \text{ Ας είναι } \lambda \text{ η ιδιοτιμή του διανύσματος } x, \text{ τότε έχουμε:}$$

$$PA + A^T P = -C^T C \Leftrightarrow x^T P A x + x^T A^T P x = -x^T C^T C x \Rightarrow x^T P \lambda x + \bar{\lambda} x^T P x = -x^T C^T C x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\lambda + \bar{\lambda}) x^T P x = -\|Cx\|^2 \Rightarrow (\lambda + \bar{\lambda}) x^T P x = 0$$

Εφόσον  $A$  ευσταθής,  $\lambda + \bar{\lambda} < 0$ . Άρα  $x^T P x = 0$ . Όμως  $P$  θετικά ορισμένος κι επομένως  $x = 0$ . Άτοπο. Άρα το  $\{\Sigma\}$  είναι παρατηρήσιμο.  $\square$

**Θεώρημα 2.3.2** [2,σελίδα 209] Έστω σύστημα  $\{\Sigma\}$  παρατηρήσιμο. Τότε ο  $A$  είναι ευσταθής εάν και μόνο αν υπάρχει μοναδικός συμμετρικός θετικά ορισμένος πίνακας  $P$  που ικανοποιεί την εξίσωση Lyapunov (2.3.1).

**Απόδειξη:**

Έχουμε ήδη αποδείξει το θεώρημα προς μια κατεύθυνση, δηλ. ότι αν  $A$  ευσταθής και το  $\{\Sigma\}$  παρατηρήσιμο, τότε η εξίσωση (2.3.1) έχει λύση το μοναδικό συμμετρικό θετικά ορισμένο πίνακα  $P$  που ορίζεται από τη σχέση

$$P = \int_0^{\infty} e^{A^T t} C^T C e^{A t} dt$$

**Αντίστροφο:**

Έστω  $\lambda$  η ιδιοτιμή του ιδιοδιανύσματος  $x$  του πίνακα  $A$ . Τότε, όπως στο Θεώρημα (2.3.1), έχουμε  $(\lambda + \bar{\lambda})x^T P x = -\|Cx\|^2$ . Εφόσον το  $\{\Sigma\}$  είναι παρατηρήσιμο,  $Cx \neq 0$  και  $P$  θετικά ορισμένος, τότε  $x^T P x > 0$ . Άρα  $\lambda + \bar{\lambda} < 0$ , που σημαίνει ότι ο  $A$  είναι ευσταθής.

□

Τα δυο παραπάνω θεωρήματα συνδυάζονται στο εξής θεώρημα:

**Θεώρημα 2.3.3** [2,σελίδα 209]  $A$ ς είναι  $P$  ένας συμμετρικός πίνακας που επαληθεύει την εξίσωση Lyapunov

$$PA + A^T P = -C^T C \quad (2.3.3)$$

που σχετίζεται με το σύστημα  $\{\Sigma\}$ , ο  $P$  δηλαδή είναι λύση της (2.3.3). Τότε

1. Εάν ο  $P$  είναι θετικά ορισμένος και το διάνυσμα κατάστασης  $x(t)$  του  $\{\Sigma\}$  είναι παρατηρήσιμο τότε ο  $A$  είναι ευσταθής.
2. Εάν ο  $A$  είναι ευσταθής και το διάνυσμα κατάστασης  $x(t)$  είναι παρατηρήσιμο τότε ο  $P$  είναι θετικά ορισμένος.
3. Εάν ο  $A$  είναι ευσταθής και ο  $P$  είναι θετικά ορισμένος τότε το διάνυσμα κατάστασης είναι παρατηρήσιμο.

□

Από το Θεώρημα 2.3.3 παρατηρούμε ότι η εξίσωση Lyapunov (2.3.3) μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως εργαλείο για να αποδείξουμε ότι ένα σύστημα είναι παρατηρήσιμο και ότι ακόμα περισσότερο αποτελεί συνδυαστικό κριτήριο ανάμεσα σε θεμελιώδους σημασίας έννοιες στη Θεωρία Ελέγχου όπως η ευστάθεια και η παρατηρησιμότητα.

Αφού τώρα η παρατηρησιμότητα και η ελεγχιμότητα είναι έννοιες δυικές θα έχουμε σε συνάρτηση με το προηγούμενο Θεώρημα και το επόμενο

**Θεώρημα 2.3.4** *Ας είναι  $P$  ένας συμμετρικός πίνακας που επαληθεύει την εξίσωση Lyapunov*

$$AP + PA^T = -BB^T \quad (2.3.4)$$

που σχετίζεται με το σύστημα  $\{\Sigma\}$ , ο  $P$  δηλαδή είναι λύση της (2.3.4). Τότε

1. *Εάν ο  $P$  είναι θετικά ορισμένος και το διάνυσμα κατάστασης  $x(t)$  του  $\{\Sigma\}$  είναι ελέγξιμο, τότε ο  $A$  είναι ευσταθής.*
2. *Εάν ο  $A$  είναι ευσταθής και το διάνυσμα κατάστασης είναι ελέγξιμο, τότε ο  $P$  είναι θετικά ορισμένος.*
3. *Εάν ο  $A$  είναι ευσταθής και ο  $P$  θετικά ορισμένος, τότε το διάνυσμα κατάστασης είναι ελέγξιμο. □*

Όπως προηγουμένως παρατηρούμε την πολύ στενή σχέση ανάμεσα στην ευστάθεια, την ελεγχιμότητα και την εξίσωση Lyapunov ενός συστήματος. Συγκρίνοντας τα Θεωρήματα 2.3.3 και 2.3.4 με τις συνθήκες Kalman:

$$\text{Rank}[B, AB, A^2B, \dots, A^{v-1}B] = v$$

για την ελεγχιμότητα και

$$\text{Rank}[C^T, A^T C^T, (A^T)^2 C^T, \dots, (A^T)^{v-1} C^T] = v$$

για την παρατηρησιμότητα, βλέπουμε ότι η μελέτη των εννοιών αυτών εάν γίνει με χρήση της εξίσωσης Lyapunov οδηγεί επίσης στην επίλυση ενός γραμμικού συστήματος με  $n^2$  εξισώσεις και  $n^2$  αγνώστους. Αυτό το γεγονός μας οδηγεί, εν μέρη, στο να βρούμε αλγορίθμους που επιλύουν την εξίσωση Lyapunov γρήγορα και αξιόπιστα.

**Θεώρημα 2.3.5** [2,σελίδα 348] Έστω  $(A,B)$  ένα ελέγξιμο σύστημα και  $\beta \in \mathbb{R}$  τέτοιο ώστε  $\beta > |\lambda_{\max}(A)|$ , όπου  $\lambda_{\max}(A)$  είναι η ιδιοτιμή του πίνακα  $A$  με το μεγαλύτερο πραγματικό μέρος. Υπάρχει πίνακας  $K$ , ο οποίος ορίζεται από τη σχέση

$$K = B^T Z^{-1} \quad (3.1)$$

όπου  $Z$  συμμετρικός θετικά ορισμένος πίνακας που ικανοποιεί την εξίσωση Lyapunov:

$$-(A + \beta I)Z + Z[-(A + \beta I)]^T = -2BB^T \quad (3.2)$$

τέτοιος ώστε  $A-BK$  ευσταθής, επομένως το σύστημα  $(A,B)$  να είναι ευσταθές.  $\square$

#### Απόδειξη

Εφόσον ισχύει  $\beta > |\lambda_{\max}(A)|$ , ο πίνακας  $-(A+\beta I)$  είναι ευσταθής. Κι εφόσον το σύστημα  $(A,B)$  είναι ελέγξιμο, τότε και το  $(-(A+\beta I), B)$  είναι ελέγξιμο. Επομένως λόγω του θεωρήματος (3.1), υπάρχει πίνακας  $Z$  συμμετρικός και θετικά ορισμένος, ο οποίος είναι και μοναδική λύση της εξίσωσης Lyapunov (3.2), η οποία μπορεί να γραφεί με τη μορφή

$$(A - BB^T Z^{-1})Z + Z(A - BB^T Z^{-1})^T = -2\beta Z \quad (3.3)$$

Αντικαθιστώ στην (3.3) την (3.1) κι έχουμε:

$$(A - BK)Z + Z(A - BK)^T = -2\beta Z$$

Εφόσον  $Z$  συμμετρικός και θετικά ορισμένος, τότε  $A-BK$  είναι ευσταθής, καθώς ισχύουν τα παρακάτω:

Ας είναι  $\mu$  μια ιδιοτιμή του  $A-BK$  και  $y$  το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα. Πολλαπλασιάζουμε δεξιά κι αριστερά τη σχέση  $2\operatorname{Re}(\mu)Z = -2\beta Z$  με το  $y$  και το  $y^T$  αντίστοιχα και έχουμε:

$$2\operatorname{Re}(\mu)y^T Z y = -2\beta y^T Z y$$

Εφόσον  $Z$  θετικά ορισμένος, ισχύει  $y^T Z y > 0$ . Άρα  $\operatorname{Re}(\mu) < 0$ , επομένως  $A-BK$  ευσταθής.

### Εξίσωση Lyapunov και Controllability και Observability Grammians.

**Ορισμός 2.3.3** Έστω  $A$  ένας ευσταθής πίνακας. Τότε ο πίνακας:

$$C_G = \int_0^{\infty} e^{At} B B^T e^{A^T t} dt$$

ονομάζεται controllability Grammian, και ο πίνακας:

$$O_G = \int_0^{\infty} e^{A^T t} C^T C e^{At} dt$$

ονομάζεται observability Grammian.

Με βάση αυτούς τους ορισμούς τα θεωρήματα και μπορούν να διαμορφωθούν ως εξής:

**Θεώρημα 2.3.5** [2,σελίδα 210] Controllability Grammian και εξίσωση Lyapunov.

Έστω  $A$  ένας ευσταθής πίνακας. Τότε ο Controllability Grammian  $C_G$  ικανοποιεί την εξίσωση Lyapunov

$$A C_G + C_G A^T = -B B^T$$

και είναι συμμετρικά θετικά ορισμένος εάν και μόνο εάν  $(A, B)$  είναι ελέγξιμο.  $\square$

**Θεώρημα 2.3.6** [2,σελίδα 210] Observability Grammian και εξίσωση Lyapunov.

Έστω  $A$  ένας ευσταθής πίνακας. Τότε ο Observability Grammian  $O_G$  ικανοποιεί την εξίσωση Lyapunov

$$O_G A + A^T O_G = -C^T C$$

και είναι συμμετρικά θετικά ορισμένος εάν και μόνο εάν  $(A, C)$  είναι παρατηρήσιμο.  $\square$

Προτού συνεχίσουμε με τον αλγόριθμο λύσης της εξίσωσης Lyapunov παραθέτουμε ένα ακόμη Θεώρημα το οποίο σχετίζει την εξίσωση Lyapunov με την ευρωστία ενός συστήματος ελέγχου. Για περισσότερες πληροφορίες και άλλου είδους προβλήματα όπου



μπορεί να εφαρμοστεί η εξίσωση Lyapunov παραπέμπουμε τον αναγνώστη στο [1, παράγραφος 7.2].

## 2.4 Εύρωστος έλεγχος

Ο εύρωστος έλεγχος ξεπήδησε σαν κλάδος της Θεωρίας Ελέγχου από την ανάγκη να μελετήσουμε πότε ένα σύστημα παραμένει ευσταθές κατά την διάρκεια διαταραχών (perturbations). Διαταραχές λέγονται οι μικρές αποκλίσεις που παρουσιάζονται στις τιμές των μεταβλητών ή παραμέτρων του προβλήματος και οφείλονται σε λάθη μετρήσεων, λάθη αποκοπής στους διάφορους υπολογισμούς, θόρυβο και τα λοιπά.

Για να μελετήσουμε το πρόβλημα λοιπόν έστω το σύστημα

$$\dot{x} = (A + E)x \quad (2.4.1)$$

όπου  $A$  ευσταθής πίνακας. Το ερώτημα που συνήθως καλείται να απαντήσει ο Εύρωστος Έλεγχος είναι κατά πόσο το σύστημα (2.4.1) συνεχίζει να παραμένει ευσταθές ενόσω ο  $E$  μεταβάλλεται.

Για να απαντήσουμε σ' αυτό το ερώτημα θα χρησιμοποιήσουμε πάλι την εξίσωση Lyapunov [1, Θεώρημα 7.7.1, σελ. 230].

**Θεώρημα 2.4.2** [Bhattacharyya et al. (1995, pp. 519-520)] Έστω  $A$  ευσταθής πίνακας και  $E$  ο πίνακας διαταραχών που ορίζεται από την εξίσωση

$$E = \sum_{i=1}^k \pi_i E_i$$

όπου  $\pi_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$  και  $E_i, i = 1, 2, \dots, k$  είναι πίνακες  $n \times n$  με ιδιαίτερη μορφή, που οφείλεται στη φύση των διαταραχών. Έστω ακόμη  $Q$  ένας συμμετρικός, θετικά ορισμένος πίνακας και  $P$  η μοναδική, συμμετρική, θετικά ορισμένη λύση της εξίσωσης Lyapunov

$$PA + A^T P = -Q.$$

Τότε το σύστημα (2.4.1) παραμένει ευσταθές για όλα τα  $\pi_i \in \mathbb{R}$  τα οποία ικανοποιούν την ανίσωση

$$\sum_{i=1}^k |\pi_i|^2 < \frac{(\sigma_{\min}(Q))^2}{\sum_{i=1}^k \rho_i^2}$$

όπου  $\sigma_{\min}(Q)$  είναι η μικρότερη ιδιάζουσα τιμή (singular value) του  $Q$  και τα  $\rho_i$  δίνονται από

$$\rho_i = \|E_i^T P + P E_i\|_2.$$

### Απόδειξη

Υπό την προϋπόθεση ότι ο πίνακας  $A$  είναι ευσταθής με ελεγκτή ευστάθειας  $K$ , επιλέγουμε ως συνάρτηση Lyapunov την

$$V(x) = x^T P x$$

όπου  $P$  είναι συμμετρικά θετικά ορισμένη λύση της  $A^T P + P A + Q = 0$ . Αφού ο πίνακας  $A$  είναι ασυμπτωτικά ευσταθής, υπάρχει η παραπάνω λύση  $P$  λόγω του θεωρήματος ευστάθειας Lyapunov (2.2.8) που έχουμε αναφέρει. Παρατηρούμε ότι  $V(x) > 0$  για κάθε  $x \neq 0$  και  $V(x) \rightarrow \infty$  καθώς  $\|x\| \rightarrow \infty$ . Πρέπει  $\dot{V}(x) \leq 0$  για όλες τις τροχιές του συστήματος  $\dot{x}(t) = A x(t)$  για να είναι ευσταθής η διαταραγμένη εξίσωση

$$\dot{x}(t) = \left( A + \sum_{i=1}^k \pi_i E_i \right) x(t).$$

Παραγωγίζοντας την  $V(x) = x^T P x$  ως προς  $x$  έχουμε

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(x) &= \dot{x}^T Px + x^T P \dot{x} = \left[ \left( A + \sum_{i=1}^k \pi_i E_i \right) x \right]^T Px + x^T P \left( A + \sum_{i=1}^k \pi_i E_i \right) x = \\
 &= x^T \left( A + \sum_{i=1}^k \pi_i E_i \right)^T Px + x^T PAx + \left( x^T P \sum_{i=1}^k \pi_i E_i \right) x = \\
 &= x^T A^T Px + x^T PAx + \left( x^T \sum_{i=1}^k \pi_i E_i^T \right) Px + \left( x^T P \sum_{i=1}^k \pi_i E_i \right) x = \\
 &= x^T (A^T P + PA) x + x^T \left( \sum_{i=1}^k \pi_i E_i^T P + \sum_{i=1}^k \pi_i P E_i \right) x
 \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας την  $A^T P + PA + Q = 0$  στην έχουμε

$$\dot{V}(x) = -x^T Qx + x^T \left( \sum_{i=1}^k \pi_i E_i^T P + \sum_{i=1}^k \pi_i P E_i \right) x.$$

Λόγω ευστάθειας απαιτείται  $\dot{V}(x) \leq 0$  που είναι ισοδύναμο με

$$x^T \left( \sum_{i=1}^k \pi_i E_i^T P + \sum_{i=1}^k \pi_i P E_i \right) x \leq x^T Qx. \quad (2.4.2)$$

Χρησιμοποιώντας την αρχή του Rayleigh ,

$$\sigma_{\min}(Q) \leq \frac{x^T Qx}{x^T x} \leq \sigma_{\max}(Q), \text{ για κάθε } x \neq 0$$

και έχουμε

$$\sigma_{\min}(Q) x^T x \leq x^T Qx.$$

Επομένως ικανοποιείται η (2.4.2) εάν

Ελένη Θ. Μπαμπαλώνα

$$x^T \left( \sum_{i=1}^k \pi_i E_i^T P + \sum_{i=1}^k \pi_i P E_i \right) x \leq \sigma_{\min}(Q) x^T x. \quad (2.4.3)$$

Αφού

$$\begin{aligned} \left| x^T \left( \sum_{i=1}^k \pi_i E_i^T P + \sum_{i=1}^k \pi_i P E_i \right) x \right| &\leq \|x^T\|_2 \left\| \left( \sum_{i=1}^k \pi_i E_i^T P + \sum_{i=1}^k \pi_i P E_i \right) \right\|_2 \|x\|_2 \leq \\ &\leq \|x\|_2^2 \left( \sum_{i=1}^k |\pi_i| \|E_i^T P + P E_i\|_2 \right), \end{aligned}$$

η (2.4.3) ικανοποιείται εάν

$$\sum_{i=1}^k |\pi_i| \|E_i^T P + P E_i\|_2 \leq \sigma_{\min}(Q).$$

Έστω

$$\rho_i := \|E_i^T P + P E_i\|_2 = \sigma_{\max}(E_i^T P + P E_i). \quad (2.4.4)$$

Τότε η σχέση (2.4.4) μπορεί να γραφεί

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k |\pi_i| \|E_i^T P + P E_i\|_2 &= \\ &= \left( \underbrace{|\pi_1| |\pi_2| \dots |\pi_k|}_{\pi} \right) \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_k \end{pmatrix} \leq \sigma_{\min}(Q) \end{aligned}$$

που ικανοποιείται εάν

$$\|\pi\rho\|_2^2 \leq \|\pi\|_2^2 \|\rho\|_2^2 \leq \sigma_{\min}^2(Q).$$

Όμως ισχύει

$$\|\pi\|_2^2 = \sum_{i=1}^k |\pi_i|^2$$

και

$$\|\rho\|_2^2 = \sum_{i=1}^k |\rho_i|^2$$

Οπότε έχουμε

$$\sum_{i=1}^k |\pi_i|^2 \sum_{i=1}^k |\rho_i|^2 \leq \sigma_{\min}^2(Q)$$

Άρα

$$\sum_{i=1}^k |\pi_i|^2 \leq \frac{\sigma_{\min}^2(Q)}{\sum_{i=1}^k |\rho_i|^2}$$

Άρα βάση του παραπάνω θεωρήματος η ποσότητα

$$\rho'(K, Q) := \frac{\sigma_{\min}^2(Q)}{\sum_{i=1}^k \rho^2} = \frac{\sigma_{\min}^2(Q)}{\sum_{i=1}^k \|E_i^T P + P E_i\|}$$

καθορίζει την έκταση των διαταραχών για τις οποίες διασφαλίζεται η ευστάθεια και επομένως είναι η ακτίνα της υπερσφαίρας (μη ευκλείδειας) στον χώρο των παραμέτρων.

□

Οι ιδιάζουσες τιμές ενός πίνακα  $A$  είναι οι θετικές τετραγωνικές ρίζες των ιδιοτιμών του συμμετρικού, θετικά ημι-ορισμένου πίνακα  $A^T A$ . Κατά συνέπεια και όσον αφορά το Θεώρημα 2.4.2 αρκεί να υπολογίσουμε τις ιδιοτιμές του πίνακα με τη μέθοδο Schur, να βρούμε τις θετικές τετραγωνικές ρίζες αυτών και να τις κατατάξουμε σε αύξουσα σειρά.

Η νόρμα  $\|A\|_2$  που εμφανίζεται κι αυτή με τη σειρά της στο Θεώρημα 2.4.2 είναι η 2-νορμη ενός πίνακα που ορίζεται να είναι ίση με τη μεγαλύτερη ιδιάζουσα τιμή ( $\sigma_{\max}$ ) του πίνακα αυτού.

Για να δείξουμε λοιπόν ότι το ευσταθές σύστημα ελέγχου (με  $A$  ευσταθή) που περιγράφεται από τις εξισώσεις

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (A + E)x(t) + Bu, & x(0) &= x_0 \\ y &= Cx + Du\end{aligned}$$

όπου

$$E = \sum_{i=1}^k \pi_i E_i$$

είναι εύρωστο, αρκεί να υπολογίσουμε μία λύση της εξίσωσης Lyapunov του διαταραγμένου συστήματος το οποίο περιέχει διαταράξεις για κάποιο συμμετρικό, θετικά ορισμένο πίνακα  $Q$ . Στη συνέχεια και χρησιμοποιώντας τους πίνακες  $Q$  και  $P$  της εξίσωσης Lyapunov μπορούμε να μελετήσουμε κάτω υπό ποιες συνθήκες ισχύει η ανίσωση του Θεωρήματος 2.4.2. Άρα με χρήση της εξίσωσης Lyapunov μπορούμε εύκολα να υπολογίζουμε εάν ένα σύστημα ελέγχου είναι εύρωστο ακόμη και εάν η διάσταση του προβλήματος είναι μεγάλη ή οι διαταράξεις είναι πολλές.

Στο Κεφάλαιο 3 θα χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση Lyapunov και θα δείξουμε πότε ένα σύστημα ελέγχου είναι εύρωστο.

## 2.5. Αριθμητική λύση της γενικευμένης εξίσωσης Lyapunov για ιδιόμορφα συστήματα

Στην ενότητα αυτή θα ασχοληθούμε με τη λύση της γενικευμένης εξίσωσης Lyapunov για ιδιόμορφα συστήματα.

Όμως πρὶν προχωρήσουμε στη μελέτη της παραπάνω εξίσωσης θα πρέπει να αναφέρουμε κάποιες βασικές έννοιες που θα χρησιμοποιήσουμε.

**Ορισμός 2.5.1** Έστω οι πίνακες  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  και  $B \in \mathbb{R}^{r \times k}$ , τότε ο  $mr \times nk$  πίνακας που ορίζεται από τον:

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} \alpha_{11}B & \alpha_{12}B & \cdots & \alpha_{1n}B \\ \alpha_{21}B & \alpha_{22}B & \cdots & \alpha_{2n}B \\ \vdots & & & \vdots \\ \alpha_{m1}B & \alpha_{m2}B & \cdots & \alpha_{mn}B \end{pmatrix}$$

ονομάζεται **Kronecker γινόμενο των πινάκων**  $A$  και  $B$ .

□

Εάν οι πίνακες  $A$  και  $B$  είναι αντιστρέψιμοι, τότε το  $A \otimes B$  είναι αντιστρέψιμο και ισχύει  $(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$ .

### Παράδειγμα 2.5.1

Έστω οι πίνακες  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$  και  $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

Με βάση τον ορισμό θα έχουμε

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} 2 \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} & 1 \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \\ -1 \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} & 3 \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 4 & 2 \\ 2 & 6 & 1 & 3 \\ -4 & -2 & 12 & 6 \\ -1 & -3 & 3 & 9 \end{pmatrix}.$$

**Ορισμός 2.5.2** Έστω

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{pmatrix} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$$

(όπου  $\mathbf{x}_j$  είναι η  $j$  στήλη του πίνακα  $X$ ).

Αν  $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$  και  $X = (x_{ij})$  τότε ορίζουμε τον **τελεστή Vec** με πεδίο ορισμού το  $\mathbb{R}_{m,n}$  και πεδίο τιμών το  $\mathbb{R}_{mn,1}$ , έτσι ώστε

$$Vec(X) = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{m1} \end{pmatrix}$$

ή ισοδύναμα  $Vec(X) = (x_{11}, \dots, x_{m1}, x_{12}, \dots, x_{m2}, \dots, x_{1n}, \dots, x_{mn})^T$ .

□

Από τον ορισμό είναι φανερό ότι το  $(i,j)$  στοιχείο του πίνακα  $X$  είναι το  $(j-1)m+i$  στοιχείο του πίνακα  $Vec(X)$ .

Εάν  $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$  και  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  τότε ισχύει  $Vec(AX + XB) = ((I_n \otimes A) + (B^T \otimes I_m))vecX$ .



### 2.5.1 Η γενικευμένη Real Schur μέθοδος: QZ Αλγόριθμος

Σ' αυτή την ενότητα θα περιγράψουμε δύο κανονικές μορφές για το ζεύγος των πινάκων  $(A, B)$ : την **Hesseberg-τριγωνική** μορφή και τη **γενικευμένη RSF**. Η γενικευμένη RSF εκθέτει τις ιδιοτιμές του πίνακα pencil  $A - \lambda B$ , όπως και η RSF για τον πίνακα  $A$ .

Δοθέντων δύο πινάκων  $A$  και  $B$  διαστάσεων  $n \times n$ , ο αριθμός  $\lambda$  και το διάνυσμα  $x$  που ικανοποιούν την σχέση

$$Ax = \lambda Bx$$

ονομάζονται αντίστοιχα ιδιοτιμή και ιδιοδιάνυσμα του πίνακα pencil  $A - \lambda B$ . Το πρόβλημα των ιδιοτιμών ονομάζεται γενικευμένο πρόβλημα ιδιοτιμών και συχνά το συναντάμε ως **γενικευμένο πρόβλημα ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων**. Ο πίνακας pencil  $A - \lambda B$  για ευκολία γράφεται  $(A, B)$ .

Το ζεύγος  $(A, B)$  ονομάζεται regular εάν  $\det(A - \lambda B)$  είναι διάφορη του μηδενός. Διαφορετικά θα ονομάζεται ιδιόμορφο. Θεωρούμε μόνο κανονικούς πίνακες pencil σε αυτή την ενότητα. Εάν ο πίνακας  $B$  είναι μη ιδιόμορφος, τότε οι ιδιοτιμές του κανονικού ζεύγους πινάκων  $(A, B)$  είναι πεπερασμένες και είναι ίδιες για τον πίνακα  $AB^{-1}$  ή για τον  $B^{-1}A$ , διότι  $AB^{-1} = B(B^{-1}A)B^{-1}$ .

Εάν ο πίνακας  $B$  είναι ιδιόμορφος και ο βαθμός της  $\det(A - \lambda B)$  είναι  $r (< n)$ , τότε  $n-r$  ιδιοτιμές του πίνακα  $(A, B)$  είναι  $\infty$  και οι υπόλοιπες που απομένουν είναι τα μηδενικά της  $\det(A - \lambda B)$ .

### 2.5.2 QZ Αλγόριθμος

Υποθέτουμε ότι ο πίνακας  $B$  είναι μη ιδιόμορφος. Τότε η βασική ιδέα είναι να εφαρμόσουμε τον QR αλγόριθμο στον πίνακα  $C = B^{-1}A$  ή στον  $(AB^{-1})$ , χωρίς να υπολογίσουμε τον πίνακα  $C$ . Σε περίπτωση που ο πίνακας  $B$  είναι σχεδόν ιδιόμορφος, τότε τα στοιχεία του πίνακα  $C$  θα είναι πιο πολλά από αυτά των πινάκων  $A$  και  $B$  άρα οι ιδιοτιμές του πίνακα  $C$  θα υπολογίζονται χωρίς καμία ακρίβεια. Εάν οι πίνακες  $B^{-1}A$  και

Ελένη Θ. Μπαμπαλώνα

$AB^{-1}$  δεν υπολογίζονται, τότε η πιο εναλλακτική λύση είναι να μετατρέψουμε τους πίνακες  $A$  και  $B$  ταυτόχρονα σε τριγωνικές μορφές και να υπολογίσουμε τις ιδιοτιμές από αυτές τις μορφές. Λόγω του ότι χρησιμοποιούμε ομοιόμορφους μετασχηματισμούς για να διατηρηθεί η δομή των ιδιοτιμών των πινάκων έχουμε τη δυνατότητα να χρησιμοποιήσουμε το ζεύγος των μη ιδιόμορφων πινάκων  $(Q, Z)$  έτσι ώστε να διατηρήσουμε τη δομή των πινάκων. Τότε το ζεύγος των πινάκων  $(Q^T AZ, Q^T BZ)$  είναι ισοδύναμο με το ζεύγος των πινάκων  $(A, B)$ .

**Θεώρημα 2.5.1** [2, σελίδα 94] **Η γενικευμένη Real Schur ανάλυση.** Εάν δοθούν δύο πραγματικοί πίνακες  $A$  και  $B$  διαστάσεων  $n \times n$ , τότε υπάρχουν ορθογώνιοι πίνακες  $Q$  και  $Z$  τέτοιοι ώστε  $Q^T AZ$  να είναι ένας άνω real Schur πίνακας και  $Q^T BZ$  να είναι άνω τριγωνικός πίνακας:

$$Q^T AZ \equiv A', \text{ άνω real Schur πίνακας}$$

$$Q^T BZ \equiv B', \text{ άνω τριγωνικός πίνακας.}$$

□

Το ζεύγος  $(A', B')$  ονομάζεται **γενικευμένη RSF**.

Η μετατροπή στη γενικευμένη RSF γίνεται σε δύο στάδια.

**Στάδιο 1:** Οι πίνακες  $A$  και  $B$  μετατρέπονται σε άνω Hessenberg και άνω τριγωνικούς πίνακες αντίστοιχα με ταυτόχρονους ορθογώνιους μετασχηματισμούς, οπότε προκύπτουν οι εξής πίνακες:

$$Q^T AZ \equiv A, \text{ άνω Hessenberg πίνακας}$$

$$Q^T BZ \equiv B, \text{ άνω τριγωνικός πίνακας.}$$

**Στάδιο 2:** Το ζεύγος των  $(A, B)$  πινάκων, Hessenberg-τριγωνικός, μετατρέπεται στη γενικευμένη RSF με την εφαρμογή του **implicit QR επαναληπτικού Αλγόριθμου** στον πίνακα  $AB^{-1}$

Αυτή η διαδικασία είναι γνωστή ως **QZ Αλγόριθμος**.

Στη συνέχεια θα περιγράψουμε τα βήματα που αναφέραμε προηγουμένως πιο αναλυτικά.

### 2.5.3 Μετατροπή στη Hessenberg- τριγωνική μορφή.

Έστω δύο πίνακες  $A$  και  $B$  διαστάσεων  $n \times n$ . Τότε

**Βήμα 1:** Βρίσκουμε ορθογώνιο πίνακα  $U$  τέτοιο ώστε ο πίνακας

$$B \equiv U^T B$$

να είναι άνω τριγωνικός εφαρμόζοντας την QR παραγοντοποίηση του  $B$ .

Δημιουργούμε τον

$$A \equiv U^T A$$

**Βήμα 2:** Μετατρέπουμε τον  $A$  σε μορφή Hessenberg διατηρώντας παράλληλα την τριγωνική δομή του πίνακα  $B$ .

Το βήμα 2 περιγράφεται ως εξής:

Έχουμε τον πίνακα

$$A \equiv U^T A \equiv \begin{pmatrix} * & * & \dots & * \\ * & * & \dots & * \\ * & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \dots & * \end{pmatrix},$$

$$B \equiv U^T B \equiv \begin{pmatrix} * & * & \dots & \dots & * \\ 0 & * & \dots & \dots & * \\ 0 & 0 & \ddots & \dots & * \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & * \end{pmatrix}$$

Καταρχήν μηδενίζουμε το  $(n,1)$  στοιχείο του πίνακα  $A$  με τη βοήθεια περιστροφής Givens  $Q_{n-1,n}$  στο  $(n-1,n)$  επίπεδο,

$$A \equiv Q_{n-1,n} A = \begin{pmatrix} * & * & \dots & * \\ * & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & * & \dots & * \\ 0 & * & \dots & * \end{pmatrix}$$

Αυτή η μετατροπή εάν εφαρμοστεί στον πίνακα  $B$  από τα αριστερά θα επηρεάσει τη θέση  $(n,n-1)$  του πίνακα  $B$  κατά τον εξής τρόπο:

$$B \equiv Q_{n-1,n} B = \begin{pmatrix} * & * & \dots & \dots & * \\ 0 & * & \dots & \dots & * \\ 0 & 0 & * & \dots & * \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 \dots & 0 & * & * \end{pmatrix}$$

Η περιστροφή Givens  $Z_{n-1,n} = J(n-1, n, \theta)$  εφαρμόζεται τώρα δεξιά του πίνακα  $B$  για να μηδενίσει το  $(n,n-1)$  στοιχείο του πίνακα  $B$ . Αυτή η περιστροφή στη συνέχεια, όταν εφαρμόζεται δεξιά του πίνακα  $A$ , δεν αλλοιώνει το μηδενικό στοιχείο στη θέση  $(n,1)$  που είχαμε βρεί σε προηγούμενο βήμα. Άρα θα έχουμε:

$$B \equiv B Z_{n-1,n} = \begin{pmatrix} * & * & * & \dots & * \\ 0 & * & * & \dots & * \\ 0 & 0 & * & \dots & * \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & * \end{pmatrix}$$

$$A \equiv AZ_{n-1,n} = \begin{pmatrix} * & * & \dots & * \\ * & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & * & \dots & * \\ 0 & * & \dots & * \end{pmatrix}$$

Τα στοιχεία  $(n-1,1), (n-2,1), \dots, (3,1)$  του πίνακα  $A$  τώρα μηδενίζονται κάθε φορά που εφαρμόζουμε την κατάλληλη περιστροφή από αριστερά του πίνακα  $A$ , ενώ ταυτόχρονα παρατηρείται μία άλλη κατάλληλη περιστροφή Givens στα δεξιά του πίνακα  $B$  ώστε να μηδενιστούν τα στοιχεία που πρέπει. Στο τέλος του πρώτου βήματος, ο πίνακας  $A$  είναι Hesseberg στην πρώτη του στήλη, ενώ ο πίνακας  $B$  παραμένει άνω τριγωνικός:

$$A = \begin{pmatrix} * & * & \dots & * \\ * & * & \dots & * \\ 0 & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & * & \dots & * \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} * & * & \dots & \dots & * \\ 0 & * & \dots & \dots & * \\ 0 & 0 & \ddots & \dots & * \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots 0 & * \end{pmatrix}$$

Τα μηδενικά τώρα εμφανίζονται στη δεύτερη στήλη του πίνακα  $A$  στις κατάλληλες θέσεις ενώ παράλληλα διασφαλίζεται η τριγωνική δομή του πίνακα  $B$  με ανάλογο τρόπο.

Τελικά η διαδικασία συνεχίζεται έως ότου ο πίνακας  $A$  να γίνει άνω Hesseberg ενώ ο πίνακας  $B$  παραμένει άνω τριγωνικός.

$$A = \begin{pmatrix} * & * & \dots & * \\ * & * & \dots & * \\ 0 & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & * & \dots & * \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} * & * & \dots & \dots & * \\ 0 & * & \dots & \dots & * \\ 0 & 0 & \ddots & \dots & * \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots 0 & * \end{pmatrix}$$

## 2.5 4 Μετατροπή στη γενικευμένη Real Schur μορφή

Στην αρχή αυτής της διαδικασίας έχουμε τους πίνακες  $A$  και  $B$  να είναι άνω Hesseberg και άνω τριγωνικός αντίστοιχα. Μπορούμε να θεωρήσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι ο πίνακας  $A$  είναι unreduced άνω Hesseberg πίνακας.

Θα αναφέρουμε πρώτα το επαναληπτικό  $Q$  θεώρημα που θα χρησιμοποιήσουμε παρακάτω.

**Implicit  $Q$  Θεώρημα 2.5.2** [2, σελίδα 82] Έστω  $P = (p_1, p_2, \dots, p_n)$  και

$Q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$  ορθογώνιοι πίνακες τέτοιοι ώστε  $P^T A P = H_1$  και  $Q^T A Q = H_2$  είναι δύο unreduced άνω Hesseberg πίνακες. Υποθέτουμε ότι  $p_1 = q_1$ . Τότε  $H_1$  και  $H_2$  είναι στην ουσία ίδιοι με την έννοια ότι  $H_2 = D^{-1} H_1 D$ , όπου  $D = \text{diag}(\pm 1, \dots, \pm 1)$ . Επιπλέον  $p_i = \pm q_i, i = 1, 2, \dots, n$ .  $\square$

Η βασική ιδέα τώρα είναι να εφαρμόσουμε ένα επαναληπτικό QR βήμα στον πίνακα  $AB^{-1}$  χωρίς να υπολογίσουμε τον πίνακα αυτόν.

Επομένως ένα QZ βήμα, ανάλογο ενός επαναληπτικού QR βήματος, θα είναι ως εξής:

1. Υπολόγισε την πρώτη στήλη  $n_1$  του πίνακα  $N = (C - \alpha_1 I)(C - \alpha_2 I)$ , όπου  $C = AB^{-1}$  και  $\alpha_1$  και  $\alpha_2$  είναι κατάλληλες επιλεγμένες ιδιοτιμές, χωρίς να υπολογίσουμε τον πίνακα  $AB^{-1}$ .

(Σημειωτέον ότι  $n_1$  έχει έχει μόνο 3 μη μηδενικά στοιχεία και τα υπόλοιπα είναι 0).

2. Βρές ένα Householder πίνακα  $Q_1$  ώστε  $Q_1 n_1$  να είναι πολλαπλάσιο του  $e_1$ .
3. Δημιούργησε τους πίνακες  $Q_1 A$  και  $Q_1 B$ .
4. Μετέτρεψε ταυτόχρονα τον πίνακα  $Q_1 A$  σε άνω Hesseberg πίνακα  $A_1$ , και τον  $Q_1 B$  σε έναν άνω τριγωνικό πίνακα  $B_1$ :

$$A_1 \equiv Q^T (Q_1 A) Z : \text{άνω Hesseberg πίνακας;}$$

$$B_1 \equiv Q^T (Q_1 B) Z : \text{άνω τριγωνικός πίνακας.}$$

Χρησιμοποιώντας το επαναληπτικό Q θεώρημα (2.5.7) μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι ο πίνακας  $A_1 B_1^{-1}$  είναι, στην ουσία, ίδιος με αυτόν που θα είχαμε εάν εφαρμόζαμε απευθείας ένα επαναληπτικό QR βήμα στον πίνακα  $AB^{-1}$ .

Εφαρμόζοντας στη συνέχεια κάποια βήματα του QZ αλγορίθμου, καταλήγουμε σε έναν ημι-τριγωνικό πίνακα  $R = Q^T AZ$  και έναν άνω τριγωνικό πίνακα  $T = Q^T BZ$ , από τον οποίο οι γενικευμένες πλέον ιδιοτιμές είναι εύκολο να βρεθούν.

Πρέπει να αναφέρουμε ότι οι ιδιοτιμές  $\alpha_1$  και  $\alpha_2$  που έχουμε αναφέρει παραπάνω στο QZ βήμα είναι οι ιδιοτιμές του υποπίνακα 2x2 του πίνακα  $C = AB^{-1}$ . Ο 2x2 κάτω υποπίνακας του C μπορεί να υπολογιστεί χωρίς τον υπολογισμό του πίνακα  $B^{-1}$ .

### 2.5.5 Γενικευμένη εξίσωση Lyapunov για ιδιόμορφα συστήματα.

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε την γενικευμένη εξίσωση Lyapunov για ιδιόμορφα συστήματα

$$A^T XE + E^T XA = -Y, \quad (2.5.1)$$

όπου  $A, E, Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Ο πίνακας  $Y$  είναι συμμετρικός και το ίδιο ισχύει για τον πίνακα  $X$  εάν η παραπάνω εξίσωση (1) έχει μοναδική λύση.

Θα δείξουμε πρώτα πως προκύπτει η παραπάνω εξίσωση.

Θεωρούμε το σύστημα  $E\dot{x}(t) = Ax(t)$ , όπου  $E, A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  και  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ . Η λύση αυτού του συστήματος είναι ασυμπτωτικά ευσταθής εάν υπάρχει ένας ερμιτιανός πίνακας  $X$ , θετικά ορισμένος που ικανοποιεί την (1), όπου  $Y$  είναι ερμιτιανός πίνακας, θετικά ορισμένος. Για μια τέτοια λύση  $X$ , ο πίνακας  $E^* XE$  είναι ερμιτιανός, θετικά ορισμένος και έτσι έχουμε

$$V(t) := x^*(t)E^* XE x(t) > 0, \quad t \in [0, \infty)$$

Ελένη Θ. Μπαμπαλώνα

για όλες τις μη μηδενικές λύσεις της  $E\dot{x}(t) = Ax(t)$ . Έχουμε δηλαδή

$$\dot{V}(t) = \dot{x}^*(t)E^* XEx(t) + x^*(t)E^* XE\dot{x}(t) = (Ax(t))^* XEx(t) + x^*(t)E^* XAx(t).$$

$$\dot{V}(t) = x^*(t)(A^* XE + E^* XA)x(t) = -x^*(t)Yx(t) < 0.$$

Η τετραγωνική μορφή  $V(t)$  ονομάζεται γενικευμένη συνάρτηση Lyapunov για το σύστημα  $E\dot{x}(t) = Ax(t)$ .

Θα μελετήσουμε τώρα αναλυτικά την γενικευμένη εξίσωση Lyapunov

$$A^T XE + E^T XA = -Y, \quad (2.5.1)$$

Θεωρούμε ότι η (1) είναι ειδική περίπτωση της γενικευμένης εξίσωσης Sylvester

$$R^T XS + U^T XV = -Y, \quad (2.5.2)$$

για  $R=V=A$ ,  $S=U=E$ , όπου γενικά  $X, Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Η εξίσωση (2.5.2) μπορεί να γραφεί σαν ένα σύστημα γραμμικών διαφορικών εξισώσεων εφόσον είναι μία γραμμική εξίσωση. Τοποθετούμε τις στήλες του  $X$  σε μία γραμμή, την μία στήλη μετά την άλλη, οπότε προκύπτει το διάνυσμα που ορίζεται ως εξής

$$\text{vec}(X) = (x_{11}, \dots, x_{n1}, x_{12}, \dots, x_{n2}, \dots, x_{1m}, \dots, x_{nm})^T.$$

Συνεπώς η (2.5.2) γράφεται ισοδύναμα ως

$$(S^T \otimes R^T + V^T \otimes U^T) \text{vec}(X) = -\text{vec}(Y), \quad (2.5.3)$$

και η (2.5.1) γράφεται ισοδύναμα ως



$$(E^T \otimes A^T + A^T \otimes E^T) \text{vec}(X) = -\text{vec}(Y),$$

όπου  $\otimes$  δηλώνει το γινόμενο Kronecker δύο πινάκων. Η διάσταση του παραπάνω συστήματος είναι  $nm$ . Το παραπάνω σύστημα όμως των γραμμικών εξισώσεων, είναι αρκετά δύσκολο να λυθεί παρά μόνο εάν τα  $n$  και  $m$  είναι πολύ μικρά.

### Παράδειγμα 2.5.2

Έστω οι πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ και } E = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Τότε

$$\begin{aligned} E^T \otimes A^T + A^T \otimes E^T &= \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 4 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} & 1 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \\ 2 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} & 3 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} & 1 \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \\ 1 \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} & 3 \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 8 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 12 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 6 & 3 \\ 2 & 6 & 3 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 6 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 12 & 3 \\ 2 & 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 6 & 6 & 2 \\ 8 & 18 & 3 & 6 \\ 8 & 3 & 18 & 6 \\ 4 & 9 & 9 & 18 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{άρα } (E^T \otimes A^T + A^T \otimes E^T) \text{vec}(X) = \begin{pmatrix} 16 & 6 & 6 & 2 \\ 8 & 18 & 3 & 6 \\ 8 & 3 & 18 & 6 \\ 4 & 9 & 9 & 18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Ελένη Θ. Μπαμπαλώνα

και

$$\begin{aligned}
 A^T XE + E^T XA &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 2x_1 + x_3 & 2x_2 + x_4 \\ x_1 + 3x_3 & x_2 + 3x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4x_1 + x_3 & 4x_2 + x_4 \\ 2x_1 + 3x_3 & 2x_2 + 3x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 8x_1 + 4x_3 + 2x_2 + x_4 & 4x_1 + 2x_3 + 6x_2 + 3x_4 \\ 4x_1 + 12x_3 + x_2 + 3x_4 & 2x_1 + 6x_3 + 3x_2 + 9x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8x_1 + 2x_3 + 4x_2 + x_4 & 4x_1 + x_3 + 12x_2 + 3x_4 \\ 4x_1 + 6x_3 + 2x_2 + 3x_4 & 2x_1 + 3x_3 + 6x_2 + 9x_4 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 16x_1 + 6x_3 + 6x_2 + 2x_4 & 8x_1 + 3x_3 + 18x_2 + 6x_4 \\ 8x_1 + 18x_3 + 3x_2 + 6x_4 & 4x_1 + 9x_3 + 9x_2 + 18x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 6 & 6 & 2 \\ 8 & 18 & 3 & 6 \\ 8 & 3 & 18 & 6 \\ 4 & 9 & 9 & 18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Άρα

$$(E^T \otimes A^T + A^T \otimes E^T) \text{vec}(X) = A^T XE + E^T XA.$$

Για να λύσουμε την εξίσωση (2.5.2) είναι απαραίτητη η χρήση των ιδιοτιμών του ζεύγους πινάκων  $(R, U)$  και  $(V, S)$ . Ένας πίνακας pencil  $\alpha R - \beta U$  ονομάζεται κανονικός εάν και μόνο εάν υπάρχει ένα ζεύγος μιγαδικών αριθμών  $(\alpha', \beta')$  τέτοιο ώστε ο πίνακας  $\alpha' R - \beta' U$  να είναι μη ιδιόμορφος. Εάν ισχύει  $\alpha R x = \beta U x$  για ένα διάνυσμα  $x \neq 0$ , το ζεύγος  $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$  είναι μία γενικευμένη ιδιοτιμή. Δύο γενικευμένες ιδιοτιμές  $(\alpha, \beta)$  και  $(\gamma, \delta)$  είναι ίσες εάν και μόνο εάν  $\alpha\delta = \beta\gamma$ . Το σύνολο όλων των γενικευμένων ιδιοτιμών του πίνακα pencil  $\alpha R - \beta U$  συμβολίζεται με  $\sigma(R, U)$ . Ακολουθεί ένα θεώρημα που δίνει όλες τις αναγκαίες και ικανές συνθήκες που αφορούν την ύπαρξη και τη μοναδικότητα των λύσεων της εξίσωσης (2.5.2).

**Θεώρημα 2.5.3** [12, σελίδα 34] Η εξίσωση (2.5.2) έχει μοναδική λύση εάν και μόνο εάν ισχύει

- (1) οι πίνακες  $\alpha R - \beta U$  και  $\alpha V - \beta S$  είναι κανονικοί πίνακες pencil, και

$$(2) \quad \sigma(R, U) \cap \sigma(V, S) = \emptyset \quad \square$$

Έστω ότι το ζεύγος  $(\alpha_i, \beta_i)$  δηλώνει τις ιδιοτιμές του πίνακα pencil  $\alpha A - \beta E$ . Για ευκολία διαλέγουμε μια πιο απλουστευμένη μορφή του παραπάνω πίνακα, την  $A - \lambda E$ , της οποίας οι ιδιοτιμές δίνονται από την σχέση  $\lambda_i = \beta_i / \alpha_i$  με  $\lambda_i = \infty$  όταν  $\alpha_i = 0$ . Εφαρμόζοντας το παραπάνω θεώρημα στην εξίσωση (1) έχουμε το ακόλουθο πόρισμα.

**Πόρισμα 2.5.1** Έστω ότι ο πίνακας  $A - \lambda E$  είναι ένας κανονικός πίνακας. Τότε:

Η εξίσωση (2.5.1) έχει μία μοναδική λύση εάν και μόνο εάν όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα  $A - \lambda E$  είναι πεπερασμένες και  $\lambda_i + \lambda_j \neq 0$  για δύο οποιοσδήποτε ιδιοτιμές  $\lambda_i$  και  $\lambda_j$  του πίνακα  $A - \lambda E$ . □

**Παράδειγμα 2.5.3** Έστω οι πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 9 & 8 \end{bmatrix} \text{ και } E = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda E) = p(\lambda) = 0$$

Οπότε

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda E) &= \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 9 & 8 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2\lambda & 2\lambda \\ 0 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-2\lambda & 2-2\lambda \\ 9 & 8-\lambda \end{vmatrix} = \\ &= 16 - 16\lambda - 2\lambda + 2\lambda^2 - 18 + 18\lambda = -2 + 2\lambda^2 \end{aligned}$$

Επομένως

$$-2 + 2\lambda^2 = 0 \text{ άρα } \lambda = \pm 1.$$

Άρα η γενικευμένη εξίσωση Lyapunov  $A^T X E + E^T X A = -Y$  δεν έχει μοναδική λύση, γιατί για δύο διαφορετικές ιδιοτιμές του πίνακα  $A - \lambda E$  ισχύει  $\lambda_1 + \lambda_2 = -1 + 1 = 0$ .

Έτσι προκύπτει ότι εάν κάποιος από τους πίνακες  $A$  και  $E$  είναι ιδιόμορφος τότε και η εξίσωση (2.5.1) είναι ιδιόμορφη. Επομένως για να έχουμε μία μοναδική λύση της εξίσωσης (2.5.1) θα πρέπει να θεωρήσουμε ότι ένας από τους πίνακες  $A$  και  $E$  είναι μη ιδιόμορφος. Αφού οι πίνακες  $A$  και  $E$  παίζουν συμμετρικό ρόλο, άρα ο πίνακας  $E$  είναι αντιστρέψιμος. Οπότε εάν πολλαπλασιάσουμε δεξιά και αριστερά την εξίσωση (2.5.1) με τον πίνακα  $E^{-1}$ , η εξίσωση γίνεται

$$\begin{aligned} E^{-T} A^T X E E^{-1} + E^{-T} E^T X A E^{-1} &= -E^{-T} Y E^{-1} \Rightarrow \\ \Rightarrow (E^{-T} A^T X) I + I (X A E^{-1}) &= -E^{-T} Y E^{-1} \Rightarrow \\ \Rightarrow (A E^{-1})^T X + X (A E^{-1}) &= -E^{-T} Y E^{-1}, \end{aligned}$$

οπότε έχει τη μορφή της εξίσωσης Lyapunov που ασχοληθήκαμε σε προηγούμενη ενότητα και άρα έχει μία θετικά ορισμένη λύση.

Θεωρούμε την γενικευμένη εξίσωση Lyapunov  $A^T X E + E^T X A = -Y$  (2.5.1), όπου  $E, A, Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$  είναι πίνακες που δίνονται και  $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$  είναι ο πίνακας που ζητείται.

Θεωρούμε έναν συνεχούς-χρόνου Lyapunov operator  $Lc : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  που δίνεται από την

$$Lc(X) := E^T X A + A^T X E .$$

Η εξίσωση (2.5.1) τότε μπορεί να γραφεί ως

$$Lc(X) = -Y .$$

Εάν  $x = \text{vec}(X)$  και  $g = \text{vec}(Y)$  είναι διανύσματα τάξεως  $n^2$ , τότε η εξίσωση (2.5.1) μπορεί να γραφεί σαν ένα γραμμικό σύστημα

$$Lc(x) = -g$$

όπου ο  $n^2 \times n^2$  πίνακας

$$Lc = E^T \otimes A^T + A^T \otimes E^T$$

είναι ο πίνακας που αντιπροσωπεύει τον συνεχούς-χρόνου Lyapunov operator  $Lc$  .

Στην περίπτωση αυτή μπορούμε να εφαρμόσουμε την θεωρία γραμμικών συστημάτων [10,11],για να καθορίσουμε τις συνθήκες της ύπαρξης και μοναδικότητας των λύσεων της εξίσωσης (2.5.1).

**Θεώρημα 2.5.4.** [10, σελίδα 46]. Έστω  $Lc = E^T \otimes A^T + A^T \otimes E^T$ ,  $x = \text{vec}(X)$ ,  $g = \text{vec}(Y)$ . Η γενικευμένη εξίσωση Lyapunov έχει λύση εάν και μόνο εάν  $\text{rank}[Lc, g] = \text{rank } Lc$ . Υπάρχει μία μοναδική λύση εάν και μόνο εάν ο πίνακας  $Lc$  είναι μη ιδιόμορφος.

**Παράδειγμα 2.5.4**

Έστω

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 9 & 8 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ και}$$

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(E) = 2 \neq 0 \qquad g = \text{Vec}(Y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} L_c &= E^T \otimes A^T + A^T \otimes E^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2 \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} & 0 \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} \\ 2 \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} & 1 \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} & 9 \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ 2 \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} & 8 \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 18 & 18 & 0 \\ 8 & 18 & 18 & 9 \\ 8 & 18 & 18 & 9 \\ 8 & 18 & 18 & 16 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$U_1 = [L_c, g] = \begin{pmatrix} 8 & 18 & 18 & 0 & 1 \\ 8 & 18 & 18 & 9 & 0 \\ 8 & 18 & 18 & 9 & 0 \\ 8 & 18 & 18 & 16 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{rank}(U_1) = 3 \neq \text{rank}(L_c) = 2$$

Άρα δεν υπάρχει λύση.

**Παράδειγμα 2.5.5**

Έστω οι πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(E) = 0$$

$$\begin{aligned} L_C &= E^T \otimes A^T + A^T \otimes E^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & 0 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ 0 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & 0 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & 0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ 0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & -1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$g = \text{Vec}(Y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$U = [L_C, g] = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{rank}(U) = 4 \neq \text{rank}(L_C) = 3$$

Άρα δεν υπάρχει λύση.

**Παράδειγμα 2.5.6**

Έστω οι πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{και } Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(E) = 0$$

$$\begin{aligned} L_C &= E^T \otimes A^T + A^T \otimes E^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & 0 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ 0 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & 0 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & 1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ 1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & 0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$g = \text{vec}(Y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$U = [L_C, g] = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{rank}(U) = 3 \neq \text{rank}(L_C) = 2$$

Άρα δεν υπάρχει λύση.

**Θεώρημα 2.5.5** [10, σελίδα 47]. Έστω  $\lambda E-A$  είναι ένας πίνακας regular pencil. Εάν όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα  $\lambda E-A$  είναι πεπερασμένες και βρίσκονται στο ανοικτό αριστερό ημιεπίπεδο, τότε για κάθε ερμιτιανό θετικά (ημι)ορισμένο πίνακα  $Y$ , η εξίσωση (2.5.1) έχει μοναδική ερμιτιανή θετικά (ημι)ορισμένη λύση  $X$ . Αντιστρόφως, εάν υπάρχουν ερμιτιανοί, θετικά ορισμένοι πίνακες  $X$  και  $Y$ , που ικανοποιούν την εξίσωση (2.5.1), τότε όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα pencil  $\lambda E-A$ , είναι πεπερασμένες και βρίσκονται στο ανοικτό αριστερό ημιεπίπεδο.

**Θεώρημα 2.5.6** [12, σελίδα 35] Έστω ότι ο πίνακας  $E$  είναι μη ιδιόμορφος και ο πίνακας  $Y$  είναι θετικά ορισμένος(ημιορισμένος).

1) Εάν  $\text{Re}(\lambda_i) < 0$  για όλες τις ιδιοτιμές  $\lambda_i$  του πίνακα  $A-\lambda E$ , τότε η λύση  $X$  της εξίσωσης (2.5.1) είναι θετικά ορισμένη (ημιορισμένη).  $\square$

### 2.5.6 Αλγόριθμος για τη γενικευμένη εξίσωση Lyapunov . Γενίκευση της Bartels-Stewart μεθόδου.

Αρχικά ο πίνακας pencil  $A-\lambda E$  μετασχηματίζεται στην γενικευμένη real Schur μορφή  $A_s - \lambda E_s$  με τη βοήθεια των πινάκων  $Q$  και  $Z$  (QZ-Αλγόριθμος):

$$A_s = Q^T A Z, \quad (2.5.4)$$

$$E_s = Q^T E Z \quad (2.5.5)$$

έτσι ώστε  $A_s$  είναι ένας άνω ημιτριγωνικός πίνακας και  $E_s$  είναι άνω τριγωνικός.

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση Lyapunov (2.5.1) έχουμε:

$$\begin{aligned} A^T X E + E^T X A &= -Y \Rightarrow (Q A_s Z^T)^T X Q E_s Z^T + (Q E_s Z^T)^T X Q A_s Z^T = -Y \Rightarrow \\ &\Rightarrow Z A_s^T Q^T X Q E_s Z^T + Z E_s^T Q^T X Q A_s Z^T = -Y \Rightarrow \\ &\Rightarrow Z^T Z A_s^T Q^T X Q E_s Z^T Z + Z^T Z E_s^T Q^T X Q A_s Z^T Z = -Z^T Y Z \Rightarrow \\ &\Rightarrow A_s^T Q^T X Q E_s + E_s^T Q^T X Q A_s = -Z^T Y Z \end{aligned}$$



Ορίζοντας

$$\begin{aligned} Y_s &= Z^T Y Z, \\ X_s &= Q^T X Q \end{aligned} \quad (2.5.5)$$

καταλήγουμε στην μετασχηματισμένη εξίσωση Lyapunov .

$$A_s^T X_s E_s + E_s^T X_s A_s = -Y_s, \quad (2.5.6)$$

η οποία είναι ισοδύναμη με την (2.5.1).

Έστω ότι οι πίνακες  $A_s, E_s, Y_s,$  και  $X_s$  διαχωρίζονται σε  $p \times p$  μπλόκ λαμβάνοντας υπόψη την υποδιαγώνια μορφή του ημιτριγωνικού πίνακα  $A$ . Συγκεκριμένα τα διαγώνια μπλόκ είναι  $1 \times 1$  ή  $2 \times 2$  πίνακες που αντιστοιχούν σε πραγματικές ιδιοτιμές ή σε συζυγή μιγαδικά ζευγάρια ιδιοτιμών του πίνακα pencil  $A_s - \lambda E_s$ , αντίστοιχα.

$$\begin{aligned} A_s &= \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1p} \\ & \ddots & \vdots \\ O & & A_{pp} \end{pmatrix}, & E_s &= \begin{pmatrix} E_{11} & \dots & E_{1p} \\ & \ddots & \vdots \\ O & & E_{pp} \end{pmatrix}, \\ Y_s &= \begin{pmatrix} Y_{11} & \dots & Y_{1p} \\ & \ddots & \vdots \\ Y_{p1} & & Y_{pp} \end{pmatrix}, & X_s &= \begin{pmatrix} X_{11} & \dots & X_{1p} \\ & \ddots & \vdots \\ X_{p1} & & X_{pp} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Η σχέση (2.5.6) μπορεί να λυθεί με μία προς μπροστά μπλόκ αντικατάσταση, που είναι πιο δύσκολο από αυτή που χρησιμοποιείται στην μέθοδο Bartels-Stewart για την κλασσική εξίσωση Lyapunov. Εφόσον ο πίνακας  $X_s$  είναι συμμετρικός, μόνο  $p(p+1)/2$  εξισώσεις Sylvester

Ελένη Θ. Μπαμπαλώνα

$$A_{kk}^T X_{kl} E_{ll} + E_{kk}^T X_{kl} A_{ll} = -\hat{Y}_{kl} \quad (2.5.7)$$

τάξεως το πολύ 2x2 με πίνακες  $\hat{Y}_{kl}$ , τέτοιους ώστε

$$\hat{Y}_{kl} = Y_{kl} + \sum_{\substack{i=1, j=1 \\ (i,j) \neq (k,l)}}^{k,l} (A_{ik}^T X_{ij} E_{jl} + E_{ik}^T X_{ij} A_{jl}) \quad (2.5.8)$$

πρέπει να λυθούν. Σύμφωνα με την (2.5.3) η λύση  $X_{ij}$  βρίσκεται με λύση του αντίστοιχου συστήματος γραμμικών εξισώσεων

$$(E_{ll}^T \otimes A_{kk}^T + A_{ll}^T \otimes E_{kk}^T) \text{vec}(X_{kl}) = -\text{vec}(\hat{Y}_{kl}).$$

Τοποθετούμε τα μπλόκς του άνω τριγώνου του πίνακα  $X_s$  ανά γραμμές π.χ. υπολογίζουμε δηλαδή τα  $X_{11}, \dots, X_{1p}, X_{22}, \dots, X_{2p}, \dots, X_{pp}$ . Υπολογίζοντας τους πίνακες  $\hat{Y}_{kl}$  από την (2.5.8) θα καταλήγαμε σε πολυπλοκότητα  $O(n^4)$ . Αυτό μπορεί να αποφευχθεί κατά κάποιον τρόπο με μία πολύπλοκη τεχνική που βασίζεται στο ανάπτυγμα της εξίσωσης (2.5.8) ως εξής:

$$\begin{aligned} \hat{Y}_{kl} = & Y_{kl} + \sum_{i=1}^k \left( A_{ik}^T \left( \sum_{j=1}^{l-1} X_{ij} E_{jl} \right) + E_{ik}^T \left( \sum_{j=1}^{l-1} X_{ij} A_{jl} \right) \right) + \\ & + \sum_{i=1}^{k-1} (A_{ik}^T X_{il} E_{ll} + E_{ik}^T X_{il} A_{ll}). \end{aligned}$$

Ορίζουμε το  $\hat{Y}_{kl}$  σε 2k-1 εναλλαγές

Επίλυση Εξισώσεων Lyapunov  
με εφαρμογές στην Θεωρία Ελέγχου

$$\begin{aligned}
 Y_{kl}^{(0)} &= Y_{kl}, \\
 Y_{kl}^{(2i-1)} &= Y_{kl}^{(2i-2)} + A_{ik}^T \left( \sum_{j=1}^{l-1} X_{ij} E_{jl} \right) + E_{ik}^T \left( \sum_{j=1}^{l-1} X_{ij} A_{jl} \right), i=1, \dots, k, \\
 Y_{kl}^{(2i)} &= Y_{kl}^{(2i-1)} + A_{ik}^T X_{il} E_{ll} + E_{ik}^T X_{il} A_{ll}, i=1, \dots, k-1, \\
 \hat{Y}_{kl} &= Y_{kl}^{(2k-1)}.
 \end{aligned}$$

Η εφαρμογή του αλγόριθμου υπολογίζει το  $Y_{kl}^{(2i-1)}$  ( $k \geq i$ ) ακριβώς πριν λυθεί η (2.5.7) για  $X_{il}$ . Αφού η  $X_{il}$  είναι γνωστή, η  $Y_{kl}^{(2i)}$  ( $k > i$ ) μπορεί να υπολογιστεί. Αυτό που μειώνει την πολυπλοκότητα σε  $O(n^3)$  είναι ότι το  $Y_{i,l}^{(2i-1)}, \dots, Y_{l,l}^{(2i-1)}$  ανανεώνεται ταυτόχρονα, όπου έχουμε να υπολογίσουμε τους όρους  $\sum_{j=1}^{l-1} X_{ij} E_{jl}$  και  $\sum_{j=1}^{l-1} X_{ij} A_{jl}$  μόνο μία φορά. Τελικά η λύση του πίνακα  $X$  δίνεται από το  $X_s$  από την (2.5.5).

**Παράδειγμα 2.5.7** Έστω οι πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 5 & 3 \\ 5 & 3 & 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$E = B = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 3 & 7 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 4 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Θέλω να λύσω την  $A^T X E + E^T X A = -\underset{Y}{I}$ . Θα ελέγξουμε αν έχει λύση και στη συνέχεια ποιά είναι η λύση.

Ελένη Θ. Μπαμπαλώνα

Κάνοντας μετατροπή σε Hessenberg-triangular μορφή χρησιμοποιώντας πίνακες Givens, έχουμε

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{7\sqrt{23}}{6} & \frac{95}{6\sqrt{282}} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{95}{6\sqrt{282}} & \frac{7\sqrt{23}}{6} \end{bmatrix}$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3\sqrt{411}}{14} & 0 & \frac{485}{14\sqrt{1219}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{485}{14\sqrt{1219}} & 0 & \frac{3\sqrt{411}}{14} \end{bmatrix}$$

$$P_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-4\sqrt{53}}{3} & \frac{31}{3\sqrt{201}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{31}{3\sqrt{201}} & \frac{-4\sqrt{53}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Επίλυση Εξισώσεων Lyapunov  
με εφαρμογές στην Θεωρία Ελέγχου

$$P_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3074}}{3\sqrt{411}} & 0 & 0 & \frac{25}{3\sqrt{411}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{25}{3\sqrt{411}} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3074}}{3\sqrt{411}} \end{bmatrix}$$

$$P_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3\sqrt{201}}{5\sqrt{106}} & 0 & -\frac{29}{5\sqrt{106}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{29}{5\sqrt{106}} & 0 & \frac{3\sqrt{201}}{5\sqrt{106}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5\sqrt{\frac{2}{1139}} & -\frac{33}{\sqrt{1139}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{33}{\sqrt{1139}} & 5\sqrt{\frac{2}{1139}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P_7 = \begin{bmatrix} \frac{10\sqrt{\frac{2}{3}} + \sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{25}{3\sqrt{6}}}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{4 + \left(\frac{10\sqrt{\frac{2}{3}} + \sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{25}{3\sqrt{6}}}\right)^2}} \\ \sqrt{4 + \left(\frac{10\sqrt{\frac{2}{3}} + \sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{25}{3\sqrt{6}}}\right)^2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{4 + \left(\frac{10\sqrt{\frac{2}{3}} + \sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{25}{3\sqrt{6}}}\right)^2}} & 0 & 0 & 0 & \frac{10\sqrt{\frac{2}{3}} + \sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{25}{3\sqrt{6}}}{3} \\ \sqrt{4 + \left(\frac{10\sqrt{\frac{2}{3}} + \sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{25}{3\sqrt{6}}}\right)^2} & 0 & 0 & 0 & \sqrt{4 + \left(\frac{10\sqrt{\frac{2}{3}} + \sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{25}{3\sqrt{6}}}\right)^2} \end{bmatrix}$$

$$P_8 = \begin{bmatrix} \frac{5}{3\sqrt{3}} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{3} & 0 & 0 & \frac{5}{3\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{17}}{5} & 0 & \frac{2\sqrt{2}}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2\sqrt{2}}{5} & 0 & \frac{\sqrt{17}}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Επίλυση Εξισώσεων Lyapunov  
με εφαρμογές στην Θεωρία Ελέγχου

$$P_9 = \begin{bmatrix} \frac{5}{\sqrt{34}} & \frac{3}{\sqrt{34}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{\sqrt{34}} & \frac{5}{\sqrt{34}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Θέτουμε

$$U = P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 P_6 P_7 P_8 P_9$$

οπότε

$$U = \begin{bmatrix} 0.656532 & 0.393919 & 0.525226 & 0.262613 & 0.262613 \\ 0.301435 & 0.364896 & 0.587006 & 0.523546 & 0.396626 \\ 0.273531 & 0.331116 & 0.03959 & 0.228542 & 0.872779 \\ 0.322616 & 0.124919 & 0.610472 & 0.704975 & 0.103194 \\ 0.546994 & 0.765791 & 0.0729325 & 0.328196 & 0.0364662 \end{bmatrix}$$

και

$$A = UA,$$

$$B = UB$$

Χρησιμοποιώντας πίνακες Givens, για να βρούμε τον πίνακα  $Q$  έχουμε,

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 717896605 \sqrt{\frac{5}{1611911089682705135247}} & 61857717 \sqrt{\frac{42059698}{1611911089682705135247}} \\ 0 & 0 & 0 & -61857717 \sqrt{\frac{42059698}{1611911089682705135247}} & 717896605 \sqrt{\frac{5}{1611911089682705135247}} \end{bmatrix}$$

$$T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 11695\sqrt{\frac{5}{78946053146}} & 3\sqrt{\frac{8695798669}{78946053146}} & 0 \\ 0 & 0 & -3\sqrt{\frac{8695798669}{78946053146}} & 11695\sqrt{\frac{5}{78946053146}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3245129}{3\sqrt{1315362602441}} & -\frac{26392\sqrt{1877}}{3\sqrt{1315362602441}} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{26392\sqrt{1877}}{3\sqrt{1315362602441}} & -\frac{3245129}{3\sqrt{1315362602441}} \end{bmatrix}$$

$$T_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{\sqrt{108915}} & \sqrt{\frac{108866}{108915}} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{\frac{108866}{108915}} & \frac{7}{\sqrt{108915}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Επίλυση Εξισώσεων Lyapunov  
με εφαρμογές στην Θεωρία Ελέγχου

$$T_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2273}{14\sqrt{43171}} & \frac{\sqrt{3294987}}{14} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3294987}}{14} & \frac{2273}{14\sqrt{43171}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{949}{2\sqrt{2260794}} & \frac{595\sqrt{23}}{2\sqrt{2260794}} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{595\sqrt{23}}{2} & -\frac{949}{2\sqrt{2260794}} \end{bmatrix}$$

και

$$Q = T_1 T_2 T_3 T_4 T_5 T_6$$

άρα

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0212107 & 0.781228 & 0.196884 & 0.592005 \\ 0 & 0.0930513 & 0.587548 & 0.545152 & 0.59071 \\ 0 & 0.0398006 & 0.205682 & 0.814576 & 0.540903 \\ 0 & 0.994639 & 0.0465375 & 0.0226037 & 0.0895313 \end{bmatrix}$$

Χρησιμοποιώντας πίνακες Givens, για να βρούμε τον πίνακα  $Z$  έχουμε,

$$Z_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{409}{\sqrt{196181}} & -\frac{170}{\sqrt{196181}} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{170}{\sqrt{196181}} & -\frac{409}{\sqrt{196181}} \end{bmatrix}$$

$$Z_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{32}{\sqrt{197205}} & -\sqrt{\frac{196181}{197205}} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{196181}{197205}} & \frac{32}{\sqrt{197205}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Z_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 93\sqrt{\frac{3}{91682}} & -\sqrt{\frac{65735}{91682}} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{65735}{91682}} & 93\sqrt{\frac{3}{91682}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Z_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{43130639}{\sqrt{1997612730577441}} & 26392\sqrt{\frac{197205}{1997612730577441}} \\ 0 & 0 & 0 & -26392\sqrt{\frac{197205}{1997612730577441}} & -\frac{43130639}{\sqrt{1997612730577441}} \end{bmatrix}$$

Επίλυση Εξισώσεων Lyapunov  
με εφαρμογές στην Θεωρία Ελέγχου

$$Z_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{112581\sqrt{\frac{123}{973140716501}}}{5} & -\frac{\sqrt{\frac{22769556680522}{973140716501}}}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{\frac{22769556680522}{973140716501}}}{5} & -\frac{112581\sqrt{\frac{123}{973140716501}}}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Z_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2874310529\sqrt{\frac{205}{13022575016213877709353}} & -12371434\sqrt{\frac{74019983}{13022575016213877709353}} \\ 0 & 0 & 0 & 12371434\sqrt{\frac{74019983}{13022575016213877709353}} & 2874310529\sqrt{\frac{205}{13022575016213877709353}} \end{bmatrix}$$

$$Z = Z_1 Z_2 Z_3 Z_4 Z_5 Z_6$$

$$Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.531988 & 0.214346 & 0.295419 & 0.76405 \\ 0 & 0.0610165 & 0.921445 & 0.345185 & 0.167521 \\ 0 & 0.779867 & 0.283518 & 0.485076 & 0.275909 \\ 0 & 0.32415 & 0.156883 & 0.747179 & 0.558604 \end{bmatrix}$$

$$A = QAZ$$

$$B = QBZ$$

Το Hessenberg-triangular ζευγάρι  $(A,B)$  μετατρέπεται σε γενικευμένη RSF χρησιμοποιώντας implicit QR επαναληπτική μέθοδο.

Ελένη Θ. Μπαμπαλώνα

Εφαρμόζουμε ένα implicit QR βήμα στον πίνακα  $AB^{-1}$ .

$$A_s = \begin{bmatrix} -1.37375 & -2.33616 & -1.62436 & 2.67668 & -0.544386 \\ 1.97876 & -0.395509 & 6.06141 & -6.71444 & 2.83065 \\ 0 & 0 & 3.90687 & -7.75371 & 6.38849 \\ 0 & 0 & 0 & -0.185785 & 1.83506 \\ 0 & 0 & 0 & -0.116109 & -0.186589 \end{bmatrix}$$

$$B_s = \begin{bmatrix} 4.08472 & 0 & 2.24533 & -1.80976 & -1.39747 \\ 0 & 0.536713 & 5.60538 & -7.78983 & 3.39646 \\ 0 & 0 & 9.17908 & -8.09428 & 6.35413 \\ 0 & 0 & 0 & 6.0504 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2.31613 \end{bmatrix}$$

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 4 \\ 5 & 3 & 1 & 4 & 3 \\ 5 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\{Q, A_s, T, B_s\} = \text{SchurDecomposition}[\{A, B\}]$$

$$Y_s = Q'YT$$

$$Y_s = \begin{bmatrix} -0.864111 & -3.98125 & -4.9064 & 0.13151 & 5.24938 \\ -0.154723 & -2.705 & -1.75997 & 1.02651 & -3.01747 \\ -3.00901 & 4.83338 & 4.46827 & 1.26895 & 7.42337 \\ 0.438978 & 0.380277 & -0.075988 & -0.148506 & -3.22392 \\ -1.11106 & 1.9808 & 5.82706 & 1.75742 & 3.61962 \end{bmatrix}$$

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

### ΕΛΕΓΧΟΣ ΤΟΥ ΓΡΑΜ. ΤΑΛΑΝΤΩΤΗ

#### 3.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό εφαρμόζουμε τα αποτελέσματα και γενικότερα τις ιδέες που παρουσιάσαμε στα δύο πρώτα κεφάλαια. Όπως τονίσαμε και την εισαγωγή της εργασίας σκοπός μας είναι να μελετήσουμε την εξίσωση Lyapunov και τις διάφορες εφαρμογές της. Εδώ, στο τρίτο Κεφάλαιο, χρησιμοποιούμε την εξίσωση Lyapunov για να δώσουμε λύσεις σε προβλήματα ευστάθειας, ευρωστίας όπως επίσης και παρατηρησιμότητας και ελεγχιμότητας. Συγκεκριμένα θα εξετάσουμε τις ιδιότητες ενός γραμμικού, πενταδιάστατου ταλαντωτή, ενός γραμμικού μοντέλου δηλαδή που για διάφορες τιμές των παραμέτρων του μας επιτρέπει να βάλουμε σ' εφαρμογή τις Θεωρίες που προαναφέραμε και να βγάλουμε χρήσιμα συμπεράσματα.

Στην αρχή του κεφαλαίου σχολιάζουμε το μοντέλο που επιλέξαμε, ξεκινώντας με την κλασική διαφορική εξίσωση πέμπτης τάξης κι έπειτα περνώντας με κατάλληλο μετασχηματισμό στις εξισώσεις κατάστασης. Η περιγραφή του μοντέλου στο πεδίο κατάστασης αποτελεί και το σύστημα εξισώσεων στο οποίο θα εφαρμόσουμε την εξίσωση Lyapunov και θα αποφανθούμε για το πότε το σύστημα είναι ευσταθές ή ασταθές. Έπειτα και για τιμές παραμέτρων που δημιουργούν ευσταθές σύστημα θα δείξουμε εάν και πότε το σύστημα είναι και εύρωστο. Το Κεφάλαιο κλείνει με την εξέταση της παρατηρησιμότητας και της ελεγχιμότητας του γραμμικού ταλαντωτή για συγκεκριμένες πάλι τιμές των παραμέτρων του.

#### 3.2 Μελέτη του γραμμικού ταλαντωτή τέταρτης τάξης με χρήση της εξίσωσης Lyapunov

Ο γραμμικός ταλαντωτής με υστέρηση (dumping) είναι ένα μηχανικό σύστημα που απαντάται σε διάφορες επιστήμες αλλά κυρίως στη μηχανική (υπάρχουν αρκετές ιστοσελίδες στο διαδίκτυο όπου κάποιος μπορεί να βρει πληροφορίες για διάφορες κλάσεις γραμμικών ταλαντωτών). Χρησιμοποιώντας φυσικούς νόμους το μοντέλο του γραμμικού ταλαντωτή περιγράφεται από την ακόλουθη διαφορική εξίσωση:

$$y^{(4)} - \alpha y''' - \beta y'' - \gamma y' - \delta y = u(t) \quad (3.2.1)$$

όπου  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  είναι οι πραγματικές παράμετροι του συστήματος,  $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  η καμπύλη λύσης,  $y(t_0) = y_0$  οι αρχικές συνθήκες του προβλήματος και  $u(t)$  η είσοδος του συστήματος παραδείγματος χάριν η τιμή μίας εξωτερικής δύναμης που θέτει σε κίνηση το σύστημα. Η εξίσωση (3.2.1) περιγράφει το σύστημα στο πεδίο του χρόνου και κλασικές μέθοδοι επίλυσης γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την εύρεση της λύσης  $y(t_0, y_0, t, u(t))$ .

Εμείς εδώ συνεχίζουμε με τον παρακάτω μετασχηματισμό που παράγει ένα νέο, σύστημα, διαφορικών εξισώσεων που περιγράφουν πλέον το σύστημα στο πεδίο κατάστασης. Έχουμε ότι για

$$\begin{aligned} x_1 &= y \Rightarrow \dot{x}_1 = \dot{y}, \\ x_2 &= \dot{x}_1 \Rightarrow \dot{x}_2 = \ddot{x}_1 \Rightarrow \dot{x}_2 = \ddot{y}, \\ x_3 &= \dot{x}_2 \Rightarrow \dot{x}_3 = \ddot{\dot{y}} \quad \text{και} \\ x_4 &= \dot{x}_3 \Rightarrow \dot{x}_4 = \ddot{\ddot{y}}. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι λόγω του παραπάνω μετασχηματισμού η εξίσωση (3.2.1) μετασχηματίστηκε στο παρακάτω σύστημα διαφορικών εξισώσεων

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \delta & \gamma & \beta & \alpha \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) \Rightarrow$$

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (3.2.2)$$

Η εξίσωση (3.2.2) αποτελεί το μοντέλο του συστήματος του γραμμικού ταλαντωτή το οποίο και θα μελετήσουμε.

Για να ελέγξουμε κατ' αρχάς ότι το σύστημα (3.2.2) είναι ευσταθές ή ασταθές μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ρουτίνα που υπολογίζει τη Schur μορφή του A και να κοιτάξουμε τα πρόσημα των πραγματικών μερών των ιδιοτιμών του A. Δίνοντας παραδείγματος χάριν τις τιμές  $\alpha=\beta=\gamma=\delta=1$  στις παραμέτρους του προβλήματος υπολογίζουμε τότε την Schur μορφή του A να είναι :

$$R = \begin{bmatrix} 1.9276 & -0.3524 & -0.2765 & -0.8068 \\ 0 & -0.7748 & 0.5015 & 0.0161 \\ 0 & 0 & -0.0764 & 1.0967 \\ 0 & 0 & -0.6052 & -0.0764 \end{bmatrix}.$$

Από την διαγώνιο του πίνακα R βλέπουμε ότι υπάρχει θετική ιδιοτιμή, η  $\lambda_1=1.9276$ , άρα το σύστημα θα είναι ασταθές.

Εάν όμως αλλάξουμε τις τιμές των παραμέτρων σε  $\alpha=-1$ ,  $\beta=-2$ ,  $\gamma=-1$ ,  $\delta=-1/2$ , τότε υπολογίζοντας πάλι την Schur μορφή του A

$$R = \begin{bmatrix} -0.1936 & 0.9335 & -0.4036 & 0.5287 \\ -1.4676 & -0.1936 & -0.6364 & 1.7444 \\ 0 & 0 & -0.3064 & -1.4277 \\ 0 & 0 & 0.1831 & -0.3064 \end{bmatrix}$$

βλέπουμε ότι έχουμε δύο ζεύγη συζυγών μιγαδικών ιδιοτιμών  $(\lambda_1, \lambda_2)$ , και  $(\lambda_3, \lambda_4)$  με αρνητικά πραγματικά μέρη,  $\lambda_1=-0.1936+1.1705i$ ,  $\lambda_2=-0.1936-1.1705i$ ,  $\lambda_3=-0.3064+0.5113i$ ,  $\lambda_4=-0.3064-0.5113i$ . Άρα το σύστημα είναι ευσταθές.

Γνωρίζουμε τώρα από την άλλη από το Θεώρημα 2.2.25 ότι το σύστημα (3.2.2) θα είναι ευσταθές εάν υπάρχει  $4 \times 4$  συμμετρικός, θετικά ορισμένος πίνακας P τέτοιος ώστε να ικανοποιεί την εξίσωση Lyapunov

$$PA + A^T P = -Q \quad (2.2.19)$$

όπου  $Q \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$  θετικά ορισμένος πίνακας,  $4 \times 4$  πραγματικός πίνακας.

Ελένη Θ. Μπαμπαλώνα

Για αυτό το σύστημα, λύνοντας τώρα την εξίσωση (2.2.19) με τον αλγόριθμο επίλυσης που περιγράψαμε στο προηγούμενο Κεφάλαιο και για  $Q = I_{4 \times 4}$  βρίσκουμε ότι ο P θα είναι

$$P = \begin{bmatrix} 3.5 & 4.5 & 3.75 & 1 \\ 4.5 & 11.25 & 9.5 & 5 \\ 3.75 & 9.5 & 11 & 5 \\ 1 & 5 & 5 & 5.5 \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας P είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος από το Θεώρημα Sylvester για τετραγωνικές μορφές, διότι

$$\Delta_1 = 3.5 > 0,$$

$$\Delta_2 = \det \begin{bmatrix} 3.5 & 4.5 \\ 4.5 & 11.25 \end{bmatrix} = 19.1250 > 0,$$

$$\Delta_3 = \det \begin{bmatrix} 3.5 & 4.5 & 3.75 \\ 4.5 & 11.25 & 9.5 \\ 3.75 & 9.5 & 11 \end{bmatrix} = 56.9219 > 0 \text{ και}$$

$$\Delta_4 = \det(P) = 142.3828 > 0.$$

Συνεπώς η συνάρτηση  $x^T P x > 0$ , είναι μία συνάρτηση Lyapunov του συστήματος και αυτό, όπως ήδη έχουμε δείξει με τον υπολογισμό της Schur μορφής του A, που σημαίνει με τη σειρά του ότι το σύστημα θα είναι ευσταθές.

Μπορούμε τώρα να ελέγξουμε εάν το σύστημά μας είναι και εύρωστο. Γι' αυτό θα χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα 2.4.2 του Κεφαλαίου 2.

Έστω ότι το σύστημα υπόκειται σε διαταραχές που ισοδυναμούν με διαφοροποίηση των τιμών των παραμέτρων  $\alpha$  και  $\gamma$  του συστήματός μας. Το σύστημα δηλαδή  $\dot{x} = Ax + Bu$  γίνεται λόγω των διαταραχών



Επίλυση Εξισώσεων Lyapunov  
με εφαρμογές στην Θεωρία Ελέγχου

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.5 & -1+\pi_2 & -2 & -1+\pi_1 \end{bmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \Rightarrow$$

$$\dot{x} = (A + E)x + Bu$$

όπου

$$E = \pi_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \pi_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \pi_1 E_1 + \pi_2 E_2.$$

Θέλουμε να βρούμε το «εύρος» ευρωστίας του συστήματος, το διάστημα τιμών των παραμέτρων  $\pi_1, \pi_2 \in \mathbb{R}$  δηλαδή για το οποίο το σύστημα παραμένει ευσταθές.

Γνωρίζουμε από το Θεώρημα 2.4.2 ότι το σύστημα θα παραμένει ευσταθές εάν

$$\sum_{i=1}^2 |\pi_i|^2 = \pi_1^2 + \pi_2^2 < \frac{(\sigma_{\min}(Q))^2}{\sum_{i=1}^2 \rho_i^2}$$

όπου  $\sigma_{\min}(Q)$  η μικρότερη ιδιάζουσα τιμή του  $Q$  και τα  $\rho_i$  δίνονται από

$$\rho_i = \|E_i^T P + P E_i\|_2.$$

Για να υπολογίσουμε το  $\sigma_{\min}(Q)$  χρειάζεται να βρούμε τις ιδιάζουσες τιμές του  $Q$  ή αλλιώς τις θετικές, τετραγωνικές ρίζες των ιδιοτιμών του  $Q^T Q$ . Ο  $Q$  όμως στην περίπτωσή μας είναι ο μοναδιαίος κατά συνέπεια

Ελένη Θ. Μπαμπαλώνα

$$Q = I_{4 \times 4} \Rightarrow Q^T Q = I_{4 \times 4}.$$

Άρα έχουμε ότι  $\sigma_{\min}(Q)=1$  διότι προφανώς ο μοναδιαίος έχει το 1 σαν ιδιοτιμή με πολλαπλότητα τέσσερα.

Για να υπολογίσουμε τα  $\rho_1, \rho_2$  χρειάζεται πρώτα να υπολογίσουμε τους πίνακες  $E_i^T P + P E_i$  αντίστοιχα για κάθε  $i$ .

Ξεκινώντας με το  $\rho_1$  θα έχουμε

$$\begin{aligned} M_1 &= E_1^T P + P E_1 = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3.5 & 4.5 & 3.75 & 1 \\ 4.5 & 11.25 & 9.5 & 5 \\ 3.75 & 9.5 & 11 & 5 \\ 1 & 5 & 5 & 5.5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3.5 & 4.5 & 3.75 & 1 \\ 4.5 & 11.25 & 9.5 & 5 \\ 3.75 & 9.5 & 11 & 5 \\ 1 & 5 & 5 & 5.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 5 & 5.5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 5.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 5 & 5 & 11 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Για να βρούμε την τιμή της 2-νόρμας  $\|E_1^T P + P E_1\|_2$  πρέπει να υπολογίσουμε τις θετικές, τετραγωνικές ρίζες των ιδιοτιμών του πίνακα

$$(E_1^T P + P E_1)^T (E_1^T P + P E_1) = M_1^T M_1.$$

Όμως

$$M_1^T M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 5 & 11 \\ 5 & 25 & 25 & 55 \\ 5 & 25 & 25 & 55 \\ 11 & 55 & 55 & 172 \end{bmatrix}.$$

Οι ιδιοτιμές του παραπάνω πίνακα είναι

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 12.3473 \text{ και } \lambda_4 = 210.6527.$$

Οπότε τελικά βρίσκουμε ότι

$$\rho_1 = \|M_1\|_2 = \sqrt{210.6527} = 14.5139.$$

Συνεχίζοντας κατά τον ίδιο τρόπο για το  $\rho_2$  υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} M_2 &= E_2^T P + P E_2 = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3.5 & 4.5 & 3.75 & 1 \\ 4.5 & 11.25 & 9.5 & 5 \\ 3.75 & 9.5 & 11 & 5 \\ 1 & 5 & 5 & 5.5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3.5 & 4.5 & 3.75 & 1 \\ 4.5 & 11.25 & 9.5 & 5 \\ 3.75 & 9.5 & 11 & 5 \\ 1 & 5 & 5 & 5.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 5 & 5.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5.5 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 10 & 5 & 5.5 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5.5 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Χρειαζόμαστε τώρα τις ιδιοτιμές του πίνακα

$$(E_2^T P + P E_2)^T (E_2^T P + P E_2) = M_2^T M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 10 & 5 & 5.5 \\ 10 & 156.25 & 50 & 55 \\ 5 & 50 & 25 & 27.5 \\ 5.5 & 55 & 27.5 & 30.25 \end{bmatrix}$$

που βρίσκονται με τη βοήθεια του MatLab να είναι

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 16.1112 \text{ και } \lambda_4 = 196.3888.$$

Ελένη Θ. Μπαμπαλώνα

Άρα τελικώς βρίσκουμε και το

$$\rho_2 = \|M_2\|_2 = \sqrt{196.3888} = 14.0139.$$

Έχοντας στη διάθεσή μας τα  $\rho_1$  και  $\rho_2$  προχωράμε στον υπολογισμό του διαστήματος τιμών των  $\pi_1$  και  $\pi_2$  που συντηρούν την ευστάθεια του συστήματος. Βρίσκουμε από την ανίσωση του Θεωρήματος 2.4.2 ότι

$$\frac{(\sigma_{\min}(Q))^2}{\sum_{i=1}^2 \rho_i^2} = \frac{1}{\rho_1^2 + \rho_2^2} = \frac{1}{210.6527 + 196.3888} = 0.0025.$$

Οπότε η ανίσωση που ψάχναμε γίνεται

$$\sum_{i=1}^2 |\pi_i|^2 < 0.0025 \Rightarrow \pi_1^2 + \pi_2^2 < 0.0025.$$

Καταλήγουμε ότι εάν οποιαδήποτε από τις παραμέτρους των αναταράξεων  $\pi_1$  ή  $\pi_2$  λάβει τιμή μεγαλύτερη του 0.05 το σύστημα θα καταστεί ασταθές. Αυτό με τη σειρά του μας οδηγεί στο να πιστέψουμε ότι ο γραμμικός ταλαντωτής και για τιμές των παραμέτρων που προαναφέραμε δεν είναι ένα ιδιαίτερα εύρωστο σύστημα. Μπορούμε βεβαίως να πραγματοποιήσουμε μία ανάλογη με την παραπάνω ανάλυση και για τις υπόλοιπες παραμέτρους του συστήματος ή ακόμη και για όλες μαζί.

Συνεχίζουμε με την εξέταση του προβλήματος τις ελεγκσιμότητας και παρατηρησιμότητας του γραμμικού ταλαντωτή. Έστω λοιπόν ότι στο μοντέλο του ευσταθούς ταλαντωτή που περιγράψαμε προηγουμένως, για τιμές δηλαδή των παραμέτρων  $\alpha = -1$ ,  $\beta = -2$ ,  $\gamma = -1$ ,  $\delta = -0.5$ , προσθέσουμε μία ακόμη εξίσωση που περιγράφει την έξοδο

Επίλυση Εξισώσεων Lyapunov  
με εφαρμογές στην Θεωρία Ελέγχου

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad \text{και}$$
$$y = Cx + Du = (1 \ 1 \ 1 \ 1)x + (1)u \quad \{\Sigma\}.$$

Τότε για να είναι το  $\{\Sigma\}$  παρατηρήσιμο πρέπει από το Θεώρημα 2.3.9 να βρούμε ένα συμμετρικό, θετικά ορισμένο  $P$  έτσι ώστε

$$PA + A^T P = -C^T C.$$

Χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο επίλυσης της εξίσωσης Lyapunov βρίσκουμε ότι

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1.5 & 0.75 & 1 \\ 1.5 & 3.25 & 1.5 & 2 \\ 0.75 & 1.5 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1.5 \end{bmatrix}.$$

Υπολογίζουμε τις ορίζουσες του Θεωρήματος Sylvester για τετραγωνικές μορφές να είναι

$$\Delta_1 = 1 > 0, \Delta_2 = 1 > 0, \Delta_3 = 0.2969 > 0 \quad \text{και} \quad \Delta_4 = \det(P) = 0.0703 > 0$$

άρα ο  $P$  είναι θετικά ορισμένος και επειδή ακόμα περισσότερο ο  $A$  είναι ευσταθής από το Θεώρημα 2.2.9 καταλήγουμε ότι το σύστημα είναι παρατηρήσιμο.

Για την ελεγχιμότητα χρησιμοποιούμε το Θεώρημα 2.3.10. Ψάχνουμε οπότε μία λύση της εξίσωσης Lyapunov

$$AP + PA^T = -BB^T$$

η οποία μπορεί να λυθεί με τον αλγόριθμο μας αφού αρκεί να βρούμε τους αναστρέφους των δύο μελών της εξίσωσης και έπειτα να εφαρμόσουμε τον αλγόριθμο βάζοντας όπου  $A$  τον  $A^T$  και όπου  $A^T$  τον  $A$ .

Βρίσκουμε ότι

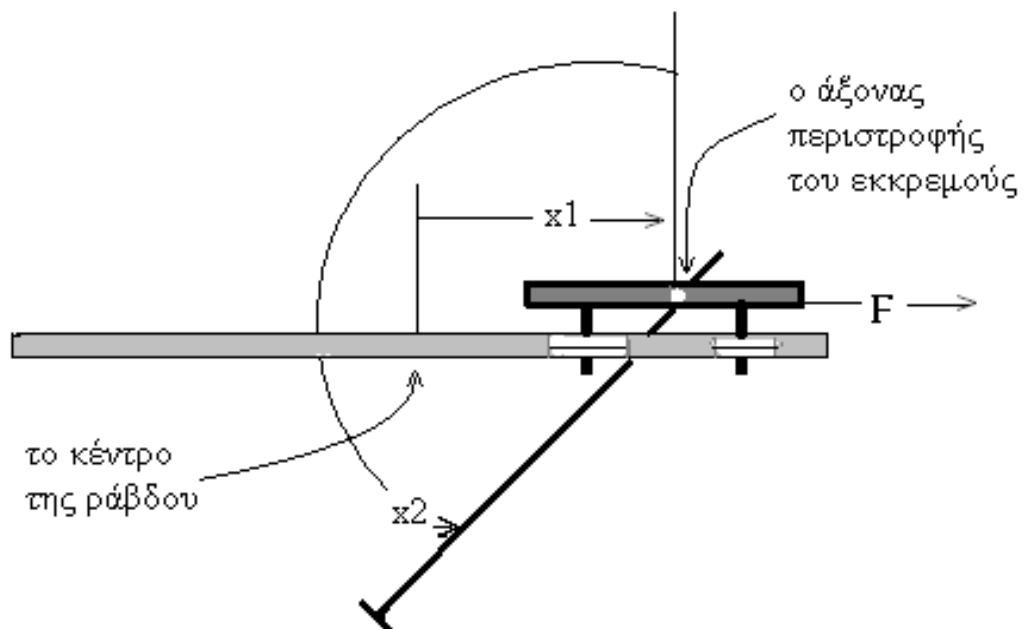
$$P = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1.5 \end{bmatrix}$$

και τις ορίζουσες Sylvester να είναι

$$\Delta_1 = 2 > 0, \Delta_2 = 2 > 0, \Delta_3 = 1 > 0 \text{ και } \Delta_4 = 1/5 > 0.$$

Επειδή τώρα ο  $A$  είναι ευσταθής από το Θεώρημα 2.3.10 καταλήγουμε ότι το σύστημα  $\{\Sigma\}$  θα είναι και ελέγξιμο.

**Παράδειγμα 3.2 (εκκρεμές)** Έχουμε το ακόλουθο σύστημα εκκρεμές



Σχήμα 3.1 Εκκρεμές

με

$$\dot{x} = Ax + Bu = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0.9165 & -1.314 & -0.0006475 \\ 0 & 83.3 & -10.2 & -0.05885 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 11.97 \\ 91.53 \end{pmatrix} u(t)$$

$$y = Cx = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Το σύστημα δεν είναι ευσταθές διότι οι ιδιοτιμές του  $A$  είναι  $\{0, 9.0483, -9.2213, -1, 1998\}$ .

Εξετάζω αν το σύστημα είναι ελέγξιμο.

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \ 1 \ .7 \ 9 \\ 9 \ 1 \ .5 \ 3 \end{bmatrix}$$

$$A B = \begin{bmatrix} 1 \ 1 \ .7 \ 9 \\ 9 \ 1 \ .5 \ 3 \\ -1 \ 5 \ .5 \ 5 \ 1 \ 3 \\ -1 \ 2 \ 5 \ .6 \ 4 \ 4 \ 5 \end{bmatrix}$$

$$A^2 B = \begin{bmatrix} -1 \ 5 \ .5 \ 5 \ 1 \\ -1 \ 2 \ 5 \ .6 \ 4 \\ 1 \ 0 \ 4 \ .4 \\ 7 \ 7 \ 9 \ 0 \ .5 \end{bmatrix}$$

$$A^3 B = \begin{bmatrix} 1 \ 0 \ 4 \ .4 \\ 7 \ 7 \ 9 \ 0 \ .5 \\ -2 \ 5 \ 7 \ .3 \ 8 \\ -1 \ 1 \ 9 \ 9 \ 0 \end{bmatrix}$$

Ισχύει  $\text{rank}\{B, AB, A^2B, A^3B\}=4$ , επομένως το σύστημα είναι ελέγξιμο.

Ελένη Θ. Μπαμπαλώνα

Ψάχνω χωρίς περιορισμούς στο  $u$ , έναν πίνακα  $K$  ώστε το σύστημα να έρθει σε ευστάθεια χρησιμοποιώντας την  $u(t)$  ως είσοδο, όπου  $V$  διάνυσμα αναφοράς, τέτοιο ώστε  $u(t) = V(t) - Kx(t)$ .

Βάσει του Θεωρήματος, επιλέγω  $\beta > |\lambda_{\max}(A)| = 9.0483$ , έστω  $\beta = 10$ , και λύνω την εξίσωση (3.2) ως προς  $Z$ . Μέσω Matlab προκύπτει :

$$Z = \begin{bmatrix} 0.099917 & 1.4496 & -0.99917 & -16.547 \\ 1.4496 & 36.322 & -12.445 & -363.22 \\ -0.99917 & -12.445 & 17.331 & 199.03 \\ -16.547 & -363.22 & 199.03 & 4090.5 \end{bmatrix}$$

Υπολογίζω και τον πίνακα  $K$  μέσω της σχέσης (3.1), άρα

$$K = [-65.5339 \quad 21.2070 \quad -15.2002 \quad 2.38]$$

Ο πίνακας  $K$  είναι ο ελεγκτής ο οποίος φέρνει το σύστημα σε ευστάθεια. Οι ιδιοτιμές του πίνακα  $A-BK$  είναι  $\{-8.9120+23.1523i, -8.9120-23.1523i, -9.7219+1.6504i, -9.7219-1.6504i\}$ .



## Παράρτημα

### QRmeHouse

**Σύνταξη:** [H,Out]=QRmeHouse(A)

**Παράμετροι:** A, H, Out

**Περιγραφή:** Υπολογίζει την QR ανάλυση ενός τετραγωνικού πίνακα με χρήση πινάκων Householder

### Κώδικας

```
% H synartisi QRmeHouse
% ypologizei tin QR analysi enos tetragonikou
% pinaka me xrisi pinakon Householder
% 29-6-2006

function [H,Out]=QRmeHouse(A)

%if nargin~=1, error('Give correct matrix');end
%if ndims(A)~=2, error('Only two dimensional matrices are allowed');end

w=length(A);
Q=eye(w,w);

for i=1:1:w-1
    x=[];e=[];
    for j=i:1:w
        x(j-i+1)=A(j,i); % take the first column of A as 1st vector
        if j==i % create unit vectors e
            e(j-i+1)=1;
        else
            e(j-i+1)=0;
        end
    end
    u=x'+sign(x(1))*norm(x)*e'; % build the transforming vector
    b=2/(u'*u);

    % create the Hessenberg matrix
    if i==1
        H=eye(w-i+1,w-i+1)-2*((u*u')/(u'*u));
    else
```

Ελένη Θ. Μπαμπαλώνα

```
E=eye(w-i+1,w-i+1)-2*((u*u')/(u'*u));
H=eye(w,w);
for k=i:1:w
    for l=i:1:w
        H(k,l)=E(k-i+1,l-i+1);
    end
end
end
end

% update matrix A by H*A
A=H*A;

% update matrix A by A*H
%A=A-b*A*(u'*u);

% create matrix Q, i.e. H(n)*...*H(2)*H(1)=Q
Q=H*Q;

end
Out=A;
H=Q';
```

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ QR ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗΣ ΜΕ ΠΙΝΑΚΕΣ HOUSEHOLDER, ΕΝΟΣ ΠΙΝΑΚΑ ΔΙΑΣΤΑΣΗΣ 4x4

```
>> A
```

```
A =
```

```
1  0  3  1
2  2  4  3
5  1  0  1
1  1  2  2
```

```
>> [H,Out]=QRmeHouse(A)
```

```
H =
```

Επίλυση Εξισώσεων Lyapunov  
με εφαρμογές στην Θεωρία Ελέγχου

```
-0.1796  0.1937  0.9645  0.0000  
-0.3592 -0.8134  0.0964 -0.4472  
-0.8980  0.3680 -0.2411  0.0000  
-0.1796 -0.4067  0.0482  0.8944
```

Out =

```
-5.5678 -1.7961 -2.3349 -2.5145  
0.0000 -1.6656 -3.4861 -2.6921  
0.0000 -0.0000  3.3757  1.1092  
0.0000 -0.0000  0.0000  0.4472
```

>> H\*Out

ans =

```
1.0000  0.0000  3.0000  1.0000  
2.0000  2.0000  4.0000  3.0000  
5.0000  1.0000  0.0000  1.0000  
1.0000  1.0000  2.0000  2.0000
```

Χρησιμοποιώντας την εντολή του Matlab,  $[Q,R]=qr(A)$ , έχουμε:

>>  $[Q,R]=qr(A)$

Q =

```
-0.1796  0.1937  0.9645  0.0000  
-0.3592 -0.8134  0.0964 -0.4472  
-0.8980  0.3680 -0.2411 -0.0000  
-0.1796 -0.4067  0.0482  0.8944
```

R =

```
-5.5678 -1.7961 -2.3349 -2.5145  
0 -1.6656 -3.4861 -2.6921  
0 0 3.3757 1.1092  
0 0 0 0.4472
```

## QRmeGivens

**Σύνταξη:** [Q,R]=QRmeGivens(A)

**Παράμετροι:** A, Q, R

**Περιγραφή:** Υπολογίζει την QR ανάλυση ενός τετραγωνικού πίνακα A με πραγματικές τιμές με χρήση πινάκων Givens.

### Κώδικας

```
% Η συνάρτηση QRmeGivens υπολογίζει την QR ανάλυση
% ενός τετραγωνικού πίνακα A με πραγματικές τιμές
% με χρήση πινάκων Givens
% 7-6-2006

function [Q,R]=QRmeGivens(A)

if nargin~=1, error('Give correct matrix');end
if ndims(A)~=2, error('Only two dimensional matrices are allowed');end

w=length(A);
E=eye(w,w);

% Υπολογισμός Givens block
for i=1:1:w-1
    for j=i+1:1:w
        t=0;c=0;s=0;J=[];
        if A(j,i)==0 & A(i,i)==0
            continue
        elseif abs(A(j,i))>=abs(A(i,i))
            t=A(i,i)/A(j,i);
            s=1/sqrt(1+t.^2);
            c=s*t;
        elseif abs(A(j,i))<abs(A(i,i))
            t=A(j,i)/A(i,i);
            c=1/sqrt(1+t.^2);
            s=c*t;
        end
    end
end

% Υπολογισμός πινάκων Givens
for k=1:1:w
    for l=1:1:w
        if k==l
            J(k,l)=1;
        end
    end
end
```

Επίλυση Εξισώσεων Lyapunov  
με εφαρμογές στην Θεωρία Ελέγχου

```
        else
            J(k,l)=0;
        end
    end
end
end

J(i,i)=c;
J(i,j)=s;
J(j,i)=-s;
J(j,j)=c;

% Υπολογισμος pinaka Q os ginomeno pinakon Givens
E=J*E;

% Ananeosi arxikou pinaka A, i.e. A=J*A

    for u=1:l:w
        a=A(i,u);
        b=A(j,u);
        A(i,u)=a*c+b*s;
        A(j,u)=-a*s+b*c;
    end

end
end

% Υπολογισμος telikon pinakon Q,R tis analysis QR
R=A;
Q=E';
```

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ QR ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗΣ ΜΕ ΠΙΝΑΚΕΣ GIVENS, ΕΝΟΣ ΠΙΝΑΚΑ ΔΙΑΣΤΑΣΗΣ 4x4

```
>> A=[1 0 3 1;2 2 4 3;5 1 0 1;1 1 2 2]
```

A =

```
1  0  3  1
2  2  4  3
5  1  0  1
1  1  2  2
```

Ελένη Θ. Μπαμπαλώνα

```
>> [Q,R]=QRmeGivens(A)
```

Q =

```
-0.1796  0.1937  0.9645  0.0000
-0.3592 -0.8134  0.0964 -0.4472
-0.8980  0.3680 -0.2411  0.0000
-0.1796 -0.4067  0.0482  0.8944
```

R =

```
-5.5678 -1.7961 -2.3349 -2.5145
-0.0000 -1.6656 -3.4861 -2.6921
 0.0000  0  3.3757  1.1092
 0.0000  0 -0.0000  0.4472
```

```
>> Q*R
```

ans =

```
1.0000  0.0000  3.0000  1.0000
2.0000  2.0000  4.0000  3.0000
5.0000  1.0000  0.0000  1.0000
1.0000  1.0000  2.0000  2.0000
```

Χρησιμοποιώντας την εντολή του Matlab,  $[Q1,R1]=qr(A)$ , έχουμε:

```
>> [Q1,R1]=qr(A)
```

Q1 =

```
-0.1796  0.1937  0.9645  0.0000
-0.3592 -0.8134  0.0964 -0.4472
-0.8980  0.3680 -0.2411 -0.0000
-0.1796 -0.4067  0.0482  0.8944
```

R1 =

Επίλυση Εξισώσεων Lyapunov  
με εφαρμογές στην Θεωρία Ελέγχου

```
-5.5678 -1.7961 -2.3349 -2.5145  
 0 -1.6656 -3.4861 -2.6921  
 0 0 3.3757 1.1092  
 0 0 0 0.4472
```

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ QR ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗΣ ΜΕ ΠΙΝΑΚΕΣ GIVENS, ΕΝΟΣ ΠΙΝΑΚΑ ΔΙΑΣΤΑΣΗΣ 3x3

```
>>A2 =
```

```
 0  1  1  
 1  2  3  
 1  1  1
```

```
>> [Q2,R2]=QRmeGivens(A2)
```

```
Q2 =
```

```
 0  0.8165  0.5774  
-0.7071  0.4082 -0.5774  
-0.7071 -0.4082  0.5774
```

```
R2 =
```

```
-1.4142 -2.1213 -2.8284  
 0  1.2247  1.6330  
 0  0 -0.5774
```

```
>> Q2*R2
```

```
ans =
```

```
 0  1.0000  1.0000  
 1.0000  2.0000  3.0000  
 1.0000  1.0000  1.0000
```

Χρησιμοποιώντας την εντολή του Matlab, [Q3,R3]=qr(A2), έχουμε:

Ελένη Θ. Μπαμπαλώνα

>> [Q3,R3]=qr(A2)

Q3 =

```
    0  0.8165  0.5774
 -0.7071  0.4082 -0.5774
 -0.7071 -0.4082  0.5774
```

R3 =

```
-1.4142 -2.1213 -2.8284
    0  1.2247  1.6330
    0    0 -0.5774
```



## HessmeHouse

**Σύνταξη:** [H,Out]=HessmeHouse(A)

**Παράμετροι:** A, H

**Περιγραφή:** Υπολογίζει την Hessenberg μορφή ενός τετραγωνικού πίνακα με χρήση πινάκων Householder.

### Κώδικας

```
% Υπολογίζει tin Hessenberg morfi enos tetragonikou  
% pinaka me xrisi pinakon Householder  
% 29-6-2006  
  
function [H,Out]=HessmeHouse(A)  
  
if nargin~=1, error('Give correct matrix');end  
if ndims(A)~=2, error('Only two dimensional matrices are allowed');end  
  
w=length(A);  
if w==2  
    Out=A;  
    H=eye(2,2);  
    return  
end  
Q=eye(w,w);  
  
for i=1:1:w-1  
    x=[];e=[];  
    for j=i+1:1:w  
        x(j-i)=A(j,i); % take the first column of A (from a(2,1)) as 1st vector  
        if j==i+1 % create unit vectors e  
            e(j-i)=1;  
        else  
            e(j-i)=0;  
        end  
    end  
end  
  
if x==0  
    H=eye(w,w);  
else  
    u=x'+sign(x(1))*norm(x)*e'; % build the transforming vector  
    b=2/(u'*u);
```

Ελένη Θ. Μπαμπαλώνα

```
% create the Hessenberg matrix
E=eye(length(u),length(u))-2*((u*u')/(u'*u));
H=eye(w,w);
for k=i+1:1:w
    for l=i+1:1:w
        H(k,l)=E(k-i,l-i);
    end
end
end

% update matrix A by H*A
A=H'*A;

% update matrix A by A*H
A=A*H;

% create matrix Q, i.e. H(n)*...*H(2)*H(1)=Q
Q=H'*Q;

end

% converts very small numbers to zero
for i=1:1:w
    for j=1:1:w
        if abs(A(i,j))<=10.^(-10)
            A(i,j)=0;
        end
    end
end
end

Out=A;
H=Q;
```

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΤΗΣ HESSENBERG ΜΟΡΦΗΣ ΕΝΟΣ  
ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΟΥ ΠΙΝΑΚΑ 4X4 ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΠΙΝΑΚΩΝ HOUSEHOLDER.

```
>> A=[1 0 3 -2;-4 1 0 0;2 1/2 5 3/2;1 -3 2 3]
```

A =

```
1.0000    0 3.0000 -2.0000
-4.0000  1.0000    0    0
2.0000  0.5000  5.0000  1.5000
1.0000 -3.0000  2.0000  3.0000
```

```
>> [H,Out]=HessmeHouse(A)
```

H =

```
1.0000    0    0    0
    0 -0.8729  0.4364  0.2182
    0 -0.3469 -0.2404 -0.9066
    0  0.3432  0.8670 -0.3613
```

Out =

```
1.0000  0.8729  1.0918  3.3236
4.5826  2.5714 -1.3625  1.3480
    0 -3.9545  2.7362 -0.7284
    0    0 -1.7104  3.6923
```

ΕΠΑΛΗΘΕΥΣΗ ΑΝ ΙΣΧΥΕΙ Η ΣΧΕΣΗ  $HAH^T = Out$

```
>> H*A*H'
```

ans =

```
1.0000  0.8729  1.0918  3.3236
4.5826  2.5714 -1.3625  1.3480
0.0000 -3.9545  2.7362 -0.7284
-0.0000  0.0000 -1.7104  3.6923
```

Ελένη Θ. Μπαμπαλώνα

ΕΠΑΛΗΘΕΥΣΗ ΑΝ Ο ΠΙΝΑΚΑΣ Η ΕΙΝΑΙ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΣ

```
>> H*H'
```

```
ans =
```

```
1.0000    0    0    0
    0 1.0000 -0.0000    0
    0 -0.0000 1.0000 -0.0000
    0    0 -0.0000 1.0000
```

```
>> H'*H
```

```
ans =
```

```
1.0000    0    0    0
    0 1.0000 0.0000 0.0000
    0 0.0000 1.0000 0.0000
    0 0.0000 0.0000 1.0000
```

ΕΠΑΛΗΘΕΥΣΗ ΑΝ ΙΣΧΥΕΙ Η ΣΧΕΣΗ  $H^T(Out)H = A$

```
>> H'*Out*H
```

```
ans =
```

```
1.0000 0.0000 3.0000 -2.0000
-4.0000 1.0000 0.0000 0.0000
2.0000 0.5000 5.0000 1.5000
1.0000 -3.0000 2.0000 3.0000
```

## Housegiazerzero

**Σύνταξη:** [u,sigma]=housegiazerzero(x)

**Παράμετροι:** x, u, sigma

**Περιγραφή:** Η συνάρτηση Housegiazerzero υπολογίζει έναν πίνακα Householder ο οποίος μετασχηματίζει ένα διάνυσμα σε πολλαπλάσιο του μοναδιαίου.

### Κώδικας

```
% Η συνάρτηση Housezero υπολογίζει έναν πίνακα Householder  
% ο οποίος μετασχηματίζει ένα διάνυσμα σε πολλαπλάσιο του  
% μοναδιαίου.  
% 1-7-2006
```

```
function [u,sigma]=housegiazerzero(x)
```

```
[m,n]=size(x);  
mm=max(abs(x));  
x=x/mm;
```

```
s=sign(x(1));  
if s==0  
    s=1;  
end
```

```
% Υπολογισμός του διανύσματος από το οποίο προέρχεται ο  
% πίνακας Householder  
sigma=s*norm(x,2);  
u=x+sigma*eye(m,1);  
sigma=-mm*sigma;
```

## mySCHUR

**Σύνταξη:** [SCHUR,Q]=mySCHUR(A)

**Παράμετροι:** A, Q

**Περιγραφή:** Υπολογίζει την πραγματική Schur μορφή ενός πίνακα A

### Κώδικας

```
% Η συνάρτηση mySCHUR
% υπολογίζει την πραγματική Schur μορφή
% ενός πίνακα A
% 29-6-2006

function [SCHUR,Q] = mySCHUR(A)

[m,n]=size(A);
if m~=n, error('Δοσε τετραγωνικο pinaka');return;end;

% Εξισσοροπισι του αρχικου pinaka gia kalyteri sugklisi
[F,G]=balance(A);

m=50;

% Μετατροπι αρχικου pinaka se Hessenberg matrix
[H,Out]=HessmeHouse(G);

% Double shift implicit QR algorithm
for i=1:m
Q=eye(n,n);
t=Out(n-1,n-1)+Out(n,n);
d=Out(n-1,n-1)*Out(n,n)-Out(n,n-1)*Out(n-1,n);
x=Out(1,1)*Out(1,1)-t*Out(1,1)+d+Out(1,2)*Out(2,1);
y=Out(2,1)*(Out(1,1)+Out(2,2)-t);
z=Out(2,1)*Out(3,2);
for k=0:n-3
[u,sigma]=housegiazero([x y z]);
c=eye(length(u),length(u))-2*u*u'/(u'*u);
```

Επίλυση Εξισώσεων Lyapunov  
με εφαρμογές στην Θεωρία Ελέγχου

```
Pk=eye(n,n);
Pk(k+1:k+3,k+1:k+3)=c;
Q=Q*Pk;
Out=Pk'*Out*Pk;
x=Out(k+2,k+1);
y=Out(k+3,k+1);
if k<n-3
    z=Out(k+4,k+1);
end
end
[u,sigma]=housegiazero([x y]');
c=eye(length(u),length(u))-2*u*u'/(u'*u);
Pk=eye(n,n);
Pk(n-1:n,n-1:n)=c;
Q=Q*Pk;
Out=Pk'*Out*Pk;

end

% Teliki eksodos
SCHUR=Out;
Q=Q*H;
```

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΓΙΑ ΠΙΝΑΚΑ A, ΔΙΑΣΤΑΣΤΑΣΗΣ 3x3, ΜΕ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

```
>> A=[1 0 -1;0 2 1;1 1 -1]
```

```
A =
```

```
1 0 -1
0 2 1
1 1 -1
```

```
>> [SCHUR,Q]=mySCHUR(A)
```

```
SCHUR =
```

```
0.5550 1.9067 -0.2663
-0.0000 -0.8019 -0.5417
0 -0.0000 2.2470
```

Ελένη Θ. Μπαμπαλώνα

Q =

```
-1.0000  0.0000   0
-0.0000 -1.0000   0
  0      0      1.0000
```

>> eig(A)

ans =

```
-0.8019
 0.5550
 2.2470
```

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΓΙΑ ΠΙΝΑΚΑ Α, ΔΙΑΣΤΑΣΤΑΣΗΣ 4x4, ΜΕ ΜΙΓΑΔΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΙΜΕΣ

>> A1=[1 0 2 3;-1 -0.3 6 1;-2.2 3.1 2 1;0 0 1.4 5.7]

A1 =

```
 1.0000   0   2.0000  3.0000
-1.0000 -0.3000  6.0000  1.0000
-2.2000  3.1000  2.0000  1.0000
  0      0   1.4000  5.7000
```

>> [SCHUR1,Q1]=mySCHUR(A1)

SCHUR1 =

```
 1.3866 -0.2768 -2.9751 -0.5172
-0.0000  5.1251 -3.2318  2.1073
 0.0000  0.0051  5.3511  3.4086
  0      0   -0.0000 -3.4627
```

Q1 =

```
-1.0000 -0.0000 -0.0000  0.0000
-0.0000  0.1987  0.9796 -0.0310
-0.0000 -0.5938  0.0952 -0.7989
  0  0.7797 -0.1772 -0.6006
```



Επίλυση Εξισώσεων Lyapunov  
με εφαρμογές στην Θεωρία Ελέγχου

```
>> eig(A1)
```

```
ans =
```

```
5.2381 + 0.0613i
```

```
5.2381 - 0.0613i
```

```
1.3866
```

```
-3.4627
```

## mylyap

**Σύνταξη:** X=mylyap(A,C)

**Παράμετροι:** A,C,X

**Περιγραφή:** Η συνάρτηση mylyap λύνει την εξίσωση Lyapunov

### Κώδικας

```
% Η συνάρτηση mylyap λύνει την εξίσωση Lyapunov
% 1-7-2006

function X = mylyap(A,C)

w=size(A,1);
if (w ~= size(A,2) | size(C,1)~= w | size(C,2)~=w)
    error(' Οι διαστάσεις των A και C πρέπει να είναι ίσες');
end;

if w==1 % Σε περίπτωση που ο A είναι αριθμός
    X = C/(2*A);
    return
end

[Q,SCHUR]=schur(A');
Newc=Q'*C*Q;
I=eye(w);
j=0;

if abs(SCHUR(w,w-1))<=10.^-10 % Υπολογισμός τελευταίας στήλης
    X(:,w)=inv(SCHUR+SCHUR(w,w)*I)*Newc(:,w);
    t=w-1;
else % Υπολογισμός τελευταίων στλών
    X(:,w-1:w)=reshape(inv([SCHUR+SCHUR(w-1,w-1)*I,SCHUR(w-1,w)*I;...
        SCHUR(w,w-1)*I,SCHUR+SCHUR(w,w)*I])*...
        [Newc(:,w-1);Newc(:,w)],w,2);
    t=w-2;
end

if t~=1
    for i=2:1:t % Υπολογισμός των στλών
        if abs(SCHUR(t-i+2,t-i+1))<=10.^-10
            X(:,t-i+2)=inv(SCHUR+SCHUR(t-i+2,t-i+2)*I)*...
```

Επίλυση Εξισώσεων Lyapunov  
με εφαρμογές στην Θεωρία Ελέγχου

```
(Newc(:,t-i+2)-X(:,t-i+3:w)*SCHUR(t-i+2,t-i+3:w)');

else
    X(:,t-i+1:t-i+2) = reshape(inv([SCHUR+SCHUR(t-i+1,t-i+1)*I,SCHUR(t-i+1,t-
i+2)*I;...
    SCHUR(t-i+2,t-i+1)*I,SCHUR+SCHUR(t-i+2,t-i+2)*I])*...
    reshape(Newc(:,t-i+1:t-i+2) - X(:,t-i+3:w)*...
    SCHUR(t-i+1:t-i+2,t-i+3:w)', 2*w,1),w,2);

end
end
end

% Υπολογισμός της λύσης
X(:,1)=inv((SCHUR+SCHUR(1,1)*I))*(Newc(:,1)-X(:,2:w)*SCHUR(1,2:w)');
```

$X=Q*X*Q'$ ;

ΛΥΣΗ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ LYAPUNOV  $XA + A^T X = C$

1) ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

```
>> A=[0 2 -1;-3 -2 2;-2 1 -1]
```

A =

```
0 2 -1
-3 -2 2
-2 1 -1
```

```
>> C=[-2 2 -3;-8 -6 -5;11 13 -2]
```

C =

```
-2 2 -3
-8 -6 -5
11 13 -2
```

```
>> X=mylyap(A,C)
```

X =

```
2.0000 0.0000 -2.0000
```

Ελένη Θ. Μπαμπαλώνα

```
2.0000 2.0000 1.0000  
-0.0000 -3.0000 0.0000
```

ΕΠΑΛΗΘΕΥΣΗ

```
>> X*A+A'*X
```

ans =

```
-2.0000 2.0000 -3.0000  
-8.0000 -6.0000 -5.0000  
11.0000 13.0000 -2.0000
```

ΛΥΣΗ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ LYAPUNOV  $XA + A^T X = -Q$

2) ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

```
>> A=[-1 1;0 -2]
```

A =

```
-1 1  
0 -2
```

```
>> Q=eye(2,2)
```

Q =

```
1 0  
0 1
```

```
>> Q1=-Q
```

Q1 =

```
-1 0  
0 -1
```

Επίλυση Εξισώσεων Lyapunov  
με εφαρμογές στην Θεωρία Ελέγχου

```
>> X=mylyap(A,Q1)
```

```
X =
```

```
0.5000 0.1667  
0.1667 0.3333
```

ΕΠΑΛΗΘΕΥΣΗ

```
>> X*A+A'*X
```

```
ans =
```

```
-1.0000 0.0000  
0.0000 -1.0000
```

ΛΥΣΗ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ LYAPUNOV  $XA + A^T X = -Q$

3) ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

```
>> A=[0 1 0 0;0 0 1 0;0 0 0 1;(-1/2) -1 -2 -1]
```

```
A =
```

```
0 1.0000 0 0  
0 0 1.0000 0  
0 0 0 1.0000  
-0.5000 -1.0000 -2.0000 -1.0000
```

```
>> C=-eye(4,4)
```

```
C =
```

```
-1 0 0 0  
0 -1 0 0  
0 0 -1 0
```

Ελένη Θ. Μπαμπαλώνα

```
0 0 0 -1
```

```
>> X=mylyap(A,C)
```

```
X =
```

```
3.5000 4.5000 3.7500 1.0000  
4.5000 11.2500 9.5000 5.0000  
3.7500 9.5000 11.0000 5.0000  
1.0000 5.0000 5.0000 5.5000
```

ΕΠΑΛΗΘΕΥΣΗ

```
>> X*A+A'*X
```

```
ans =
```

```
-1.0000 0.0000 0.0000 0.0000  
0.0000 -1.0000 -0.0000 -0.0000  
0.0000 -0.0000 -1.0000 0.0000  
0.0000 -0.0000 0 -1.0000
```

## lyap

**Σύνταξη:** X=lyap(A,Y,[],B)

**Παράμετροι:** A,Y,B,X

**Περιγραφή:** Η συνάρτηση lyap λύνει την γενικευμένη εξίσωση Lyapunov

## Κώδικας

```
syms a b c d e f g h i
A=fix(20*rand(3,3)-10);
B=fix(20*rand(3,3)-10);
[AA,BB,Q,Z]=qz(A,B,'real');
AA=single(AA)
BB=single(BB)
Q=single(Q)
Z=single(Z)
Y=[1 3 4;3 1 -2;4 -2 1];
Xs=[a b c;d e f;g h i]
Ys=Q'*Y*Q
SY=AA'*Xs*BB+BB'*Xs*AA+Ys
X=lyap(A,-Y,[],B)
```

## ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

AA =

```
2.8268 -6.7840 0.7807
5.9965 -2.8777 -6.6750
0 0 -10.3238
```

BB =

```
11.9320 0 -5.5497
0 7.4468 -9.1038
0 0 12.4697
```

Ελένη Θ. Μπαμπαλώνα

Q =

0.2738	-0.8533	-0.4437
0.9605	0.2191	0.1714
0.0491	0.4731	-0.8796

Z =

0.7239	0.6610	-0.1976
-0.0283	0.3146	0.9488
-0.6893	0.6813	-0.2465

Xs =

[ a, b, c ]  
[ d, e, f ]  
[ g, h, i ]

Ys =

2.4969	-2.8587	-0.5153
-2.8587	-3.7661	1.6554
-0.5153	1.6554	4.2691

X =

-0.4503	-0.0829	-0.0046
-0.0829	-0.0342	-0.0469
-0.0046	-0.0469	-0.2260

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

AA =

-12.1218	9.9776	2.6922
0	4.0066	2.2591
0	-0.8662	3.2178



Επίλυση Εξισώσεων Lyapunov  
με εφαρμογές στην Θεωρία Ελέγχου

BB =

0.1555	2.5538	0.5475
0	11.8482	0
0	0	7.6009

Q =

-0.6612	-0.3597	-0.6584
-0.3196	0.9290	-0.1865
0.6787	0.0871	-0.7292

Z =

-0.2610	0.7219	-0.6408
0.0227	-0.6591	-0.7517
-0.9651	-0.2108	0.1557

Xs =

[ a, b, c]  
[ d, e, f]  
[ g, h, i]

Ys =

-0.4547	-3.9102	0.9294
-3.9102	-1.5789	0.5733
0.9294	0.5733	5.0336

X =

-0.1433	0.0057	-0.2600
0.0057	0.0235	0.0632
-0.2600	0.0632	-1.2306

## **Βιβλιογραφία**

1. **Α.Ι.Βαρδουλάκης, Ν.Π.Καραμπετάκης**, *Διδακτικές Σημειώσεις για το μάθημα Θεωρία Συστημάτων Ι*, Θεσσαλονίκη, Έκδοση: Πανεπιστημιακό Τυπογραφείο Α.Π.Θ.
2. **Biswa Nath Datta**, *Numerical Methods for Linear Control Systems*, Elsevier Inc. 2004.
3. **Π.Χ.Γ. Βασιλείου, Γ. Τσακλίδης**, *Εφαρμοσμένη Θεωρία Πινάκων*, Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη 1998.
4. **Κ.Π.Καραμπετάκης**, *Διδακτικές Σημειώσεις για το μάθημα Θεωρία Συστημάτων ΙΙ*, Θεσσαλονίκη, Έκδοση: Πανεπιστημιακό Τυπογραφείο Α.Π.Θ.
5. **H.K. Khalil**, *Nonlinear Systems*, Prentice Hall Inc. 2002.
6. **Θ. Κυβεντίδης**, *Διαφορικές Εξισώσεις*, Εκδόσεις Ζήτη.
7. **Π.Ν. Παρασκευόπουλος**, *Εισαγωγή στον αυτόματο έλεγχο*, Αθήνα 1991.
8. **Thomas L. Vincent, Walter J. Grantham**, *Μη Γραμμικά Συστήματα Αυτόματου Ελέγχου και Βέλτιστος Έλεγχος*, Εκδόσεις Τζιόλα, Θεσσαλονίκη 2001.
9. **Tatjana Stykel**, *Analysis and Numerical Solution of Generalized Lyapunov Equations*, Technischen Universitat Berlin, Fakultat II- Mathematik und Naturwissenschaften, genehmigte Dissertation, Berlin 2002.
10. **P. Lancaster and M. Tismenetsky**. *The Theory of Matrices*. 2nd edition, Academic Press, Orlando, FL., 1985.
11. **F.R. Gantmacher**, *Theory of Matrices*, Chelsea, New York, 1959.
12. **Thilo Penzl**, *Numerical solution of generalized Lyapunov equations*, Technische Universitat Chemnitz-Zwickau, Fakultat fur Mathematik, Chemnitz, Germany, received 1996, revised 1997.

Επίλυση Εξισώσεων Lyapunov  
με εφαρμογές στην Θεωρία Ελέγχου