Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης
Τμήμα Μαθηματικών
Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα Σπουδών
Θεωρητική Πληροφορική και Θεωρία Συστημάτων και Ελέγχου

Ευστάθεια πινάκων και συστημάτων με τη μέθοδο των ιδιοτιμών και ιδιοδομών Εφαρμογές με MATLAB

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΣΤΑΥΡΙΔΗΣ ΦΩΤΙΟΣ

Επιβλέπουσα: Μ. Γουσίδου - Κουτίτα
Αναπληρώτρια Καθηγήτρια Α.Π.Θ

Θεσσαλονίκη, Δεκέμβριος 2010

Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης
Τμήμα Μαθηματικών
Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα Σπουδών
Θεωρητική Πληροφορική και Θεωρία Συστημάτων και Ελέγχου

Ευστάθεια πινάκων και συστημάτων με τη μέθοδο των ιδιοτιμών και ιδιοδομών Εφαρμογές με MATLAB

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΣΤΑΥΡΙΔΗΣ ΦΩΤΙΟΣ

Επιβλέπουσα : Μ. Γουσίδου - Κουτίτα
Αναπληρώτρια Καθηγήτρια Α.Π.Θ

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 14η Ιανουαρίου 2011.

……	……	……
Μ. Γουσίδου - Κουτίτα	Ν. Καραμπετάκης	Γ. Ραχώνης
Αν. Καθηγήτρια Α.Π.Θ.	Αν. Καθηγητής Α.Π.Θ.	Επ. Καθηγητής Α.Π.Θ.

……..
Σταυρίδης Φώτιος
Πτυχιούχος Μαθηματικός Α.Π.Θ.

Copyright © Σταυρίδης Φώτιος, 2010.
Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ' ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευτεί ότι εκφράζουν τις επίσημες θέσεις του Α.Π.Θ.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στο κεφάλαιο 1 θα ασχοληθούμε με τη σταθεροποίηση ενός γραμμικού συστήματος ελέγχου επιλέγοντας κατάλληλα το διάνυσμα ελέγχου. Αυτό συνδέεται με την επίλυση του προβλήματος της τοποθέτησης των πόλων. Η επιλογή της τοποθέτησης των πόλων, εκτός από την ευστάθεια του γραμμικού συστήματος μπορεί να ικανοποιεί και κάποια κριτήρια απόδοσης. Στο τέλος του κεφαλαίου θα ασχοληθούμε με τα προβλήματα ελέγχου H_∞ και την έννοια της μιγαδικής ακτίνας σταθερότητας.

Στο κεφάλαιο 2 θα αναπτύξουμε κάποιους αλγόριθμους και εφαρμογές σε MATLAB ορισμένων θεμάτων που παρουσιάζουμε στο κεφάλαιο 1.

Ακολουθεί βιβλιογραφία.

ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ

Σταθεροποίηση ενός γραμμικού συστήματος, διάνυσμα ελέγχου, Lyapunov, ανιχνευσιμότητα, πρόβλημα της τοποθέτησης των πόλων, τύπος του Ackermann, ιδιοδομή, πρόβλημα του Γραμμικού Τετραγωνικού Βαθμιστή, Αλγεβρικές Εξισώσεις Ricatti, προβλήματα ελέγχου H_∞ , μιγαδική ακτίνα σταθερότητας, MATLAB

ABSTRACT

In chapter 1, we will consider the problem of stabilizing a linear control system by choosing the control vector appropriately. This is connected with the solution of the pole placement problem or the eigenvalue assignment problem (EVA problem).Since there are no set guidelines as to where the poles need to be placed, very often we choose to place the poles in such a way that not only the system is stabilized, but a certain performance criterion is satisfied (LQR problems).The next topic is the H_∞ control problems and finally the concept of the complex stability radius.

In chapter 2 we will make some algorithms and examples from some of the topics we described in chapter.

KEY WORDS

Stabilization of a linear system, control vector, Lyapunov equations, detectability, EVA problem, Ackermann norm, eigenstructure, LQR problem, Ricatti equations (ARE), H_∞ control problems, complex stability radius, MATLAB

Ευχαριστίες προς
την επιβλέπουσα καθηγήτρια μου, κ. Μαρία Γουσίδου – Κουτίτα
και τη θεία μου Ελένη Μαυρομάτη που στάθηκε αρωγός στην ολοκλήρωση
αυτού του Μ.Π.Σ.

Αφιερωμένο στη
μνήμη της μητέρας μου,
Ειρήνης Μαυρομάτη

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ 4
ABSTRACT 5
ΠΡΟΛΟΓΟΣ 9
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 11
1.1 Εισαγωγή 11
1.2 Κατάσταση – Σταθεροποίηση της ανατροφοδότησης 12
1.2.1 Ευστάθεια και Ελεγξιμότητα 13
1.2.2 Σταθεροποίηση μέσω εξισώσεων του Lyapunov. 16
1.3 Ανιχνευσιμότητα 22
1.4 Η ιδιοτιμή και το πρόβλημα απόδοσης της ιδιοδομής. 24
1.4.1 Αντιστοίχιση της ιδιοτιμής με την κατάσταση ανατροφοδότησης 27
1.4.2 Αντιστοίχιση της ιδιοτιμής με την έξοδο ανατροφοδότησης 29
1.4.3 Αντιστοίχιση ιδιοδομής 30
1.5 Τα τετραγωνικά προβλήματα βελτιστοποίησης 31
1.5.1 Το πρόβλημα συνεχούς χρόνου Γραμμικού Τετραγωνικού Βαθμιστή 32
1.5.2 Το πρόβλημα διακριτού χρόνου LQR 40
1.6 H_∞ προβλήματα ελέγχου 41
1.6.1 Υπολογισμός της H_∞ νόρμας 43
1.6.2 Το Πρόβλημα Ελέγχου H_∞ : Μια υπόθεση ανάδρασης κατάστασης 50
1.6.3 Το Πρόβλημα Ελέγχου H_∞ : Μια υπόθεση ανάδρασης εξόδου 52
1.7 Η μιγαδική ακτίνα σταθερότητας και οι εξισώσεις Ricatti 54
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 60
2.1 Μέθοδος εύρεσης ενός σταθεροποιήσιμου πίνακα ανατροφοδότησης (Armstrong 1975) 60
2.2 Ο αλγόριθμος διχοτόμησης για τον υπολογισμό της H_∞ νόρμας 63
2.3 Μια Μέθοδος Διχοτόμησης για τον υπολογισμό της Μιγαδικής Ακτίνας Σταθερότητας 67
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ 73

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η παρούσα διπλωματική εργασία εκπονήθηκε στα πλαίσια του μεταπτυχιακού προγράμματος σπουδών "ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΕΛΕΓΧΟΥ " κατά το ακαδημαϊκό έτος 2010-2011.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω την επιβλέπουσα καθηγήτρια μου κα. Γουσίδου για τις γνώσεις που μου μετέδωσε κατά τη διάρκεια του μεταπτυχιακού και τη στήριξη και υπομονή της τόσο στο διδακτικό, όσο και στο ανθρώπινο κομμάτι, καθώς επίσης και τον κ. Καραμπετάκη γιατί η υλοποίηση των αλγορίθμων πραγματοποιήθηκε στο MATLAB το οποίο ο ίδιος μας είχε διδάξει.

Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω τους καθηγητές μου για την άρτια συνεργασία που είχαμε κατά τη διάρκεια των μεταπτυχιακών σπουδών μου στο τμήμα Μαθηματικών του Αριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης, για τα απαραίτητα εφόδια και γνώσεις με τα οποία με εφοδίασαν, καθώς επίσης και για την υποστήριξη τους στην ολοκλήρωση του Μ.Π.Σ. όταν λόγω συνθηκών σκεφτόμουν να μην το ολοκληρώσω.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

1.1 Εισαγωγή

Θα ασχοληθούμε με το πρόβλημα της σταθεροποίησης ενός γραμμικού συστήματος ελέγχου επιλέγοντας κατάλληλα το διάνυσμα ελέγχου. Μαθηματικά , το πρόβλημα είναι να βρούμε ένα πίνακα ανατροφοδότησης K τέτοιον ώστε το A-BK να είναι σταθερό στη συνεχή χρονική υπόθεση ή διακριτά σταθερό στη διακριτή χρονική υπόθεση. Τις απαραίτητες και επαρκείς προϋποθέσεις για την ύπαρξη της σταθεροποίησης πίνακα ανατροφοδότησης και τις κατά Lyapunov μεθόδους για τη δημιουργία τέτοιων πινάκων θα τις αναλύσουμε στην παράγραφο 1.2.

Έπειτα θα εισάγουμε μια διπλή έννοια για τη σταθεροποίηση , που ονομάζεται ανιχνευσιμότητα και η σχέση της με ένα Lyapunov πίνακα εξίσωσης θα επαληθευθεί στην παράγραφο 1.3.

Σε συγκεκριμένες πρακτικές καταστάσεις , η σταθεροποίηση ενός συστήματος δεν είναι αρκετή. Ένας σχεδιαστής θα πρέπει να είναι σε θέση να ελέγχει τις ιδιοτιμές του A-BK έτσι ώστε να προκύπτουν συγκεκριμένα εμπόδια σχεδιασμού. Αυτό αποτελεί την απαρχή του προβλήματος του προσδιορισμού της ιδιοτιμής (EVA) ή το επονομαζόμενο πρόβλημα της τοποθέτησης των πόλων. Μαθηματικά η δυσκολία έγκειται στο να βρεθεί ένας πίνακας ανατροφοδότησης K τέτοιος ώστε το A-BK να έχει ένα προκαθορισμένο φάσμα. Ένα πολύ γνωστό και πολύ σημαντικό αποτέλεσμα του προβλήματος αυτού είναι: *Δεδομένου ότι έχουμε ένα πραγματικό ζευγάρι πινάκων (A,B) και Λ μια αυθαίρετη ομάδα n μιγαδικών αριθμών , κλειστών ως προς τους μιγαδικούς συζυγείς , υπάρχει ένας πραγματικός πίνακας K τέτοιος ώστε το φάσμα των A-BK είναι η ομάδα Λ αν και μόνο αν το (A,B) είναι ελέγξιμο. Ο πίνακας K είναι μοναδικός στην περίπτωση της απλής εισαγωγής δεδομένων.*

Αυτό το σημαντικό πρόβλημα εξακριβώνεται στο θεώρημα 1.4.1. Η απόδειξη αυτού του αποτελέσματος εποικοδομητική και οδηγεί σε αρκετούς πολύ γνωστούς τύπους, ο πιο σημαντικός από τους οποίους είναι ο τύπος του Ackermann. Ωστόσο , αυτοί οι τύποι δεν παράγουν αριθμητικά βιώσιμες μεθόδους για την τοποθέτηση του πόλου.

Εφόσον δεν υπάρχουν συγκεκριμένες κατευθυντήριες γραμμές ως προς το που πρέπει να τοποθετηθούν οι πόλοι (οι ιδιοτιμές) πολύ συχνά , στην πράξη , γίνεται ένας συμβιβασμός με τον οποίο δημιουργείται ένας πίνακας ανατροφοδότησης κατά τέτοιο τρόπο ώστε όχι μόνο σταθεροποιείται το σύστημα αλλά και ικανοποιείται κάποιο συγκεκριμένο κριτήριο απόδοσης. Αυτό μας οδηγεί στο πολύ γνωστό πρόβλημα του Γραμμικού Τετραγωνικού Βαθμιστή (LQR problem). Και τα δύο προβλήματα συνεχή χρόνου LQR και διακριτού χρόνου LQR θα τα αναλύσουμε στην παράγραφο 1.5. Οι λύσεις στα προβλήματα LQR προαπαιτούν τις λύσεις συγκεκριμένων εξισώσεων δευτέρου βαθμού που ονομάζονται Αλγεβρικές Εξισώσεις Ricatti (AREs).

Το επόμενο θέμα που θα ασχοληθούμε είναι τα προβλήματα ελέγχου H_∞.Τα προβλήματα ελέγχου H_∞ αφορούν τη σταθεροποίηση διαταραγμένων εκδοχών ενός συστήματος, όταν συγκεκριμένα όρια διατάραξης είναι γνωστά. Οι λύσεις των προβλημάτων του H_∞ απαιτούν επίσης λύσεις συγκεκριμένων AREs. Στην παράγραφο 1.6 θα παρουσιάσουμε δυο αλγόριθμους για τον υπολογισμό της H_∞ νόρμας .

Την έννοια της ακτίνας σταθερότητας θα τη μελετήσουμε στο τελευταίο τμήμα της παραγράφου 1.7 όπου διαπιστώνουμε μια σχέση ανάμεσα στη μιγαδική ακτίνα σταθερότητας και σε μια ARE (θεώρημα 1.7.3) και περιγράφουμε έναν αλγόριθμο διχοτόμησης για τον καθορισμό της μιγαδικής ακτίνας σταθερότητας.

1.2 Κατάσταση – Σταθεροποίηση της ανατροφοδότησης

Θα μελετήσουμε το πρόβλημα της σταθεροποίησης του γραμμικού συστήματος

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \qquad \textbf{(1.2.1)}$$

Υποθέτουμε ότι το διάνυσμα $x(t)$ είναι γνωστό και επιλέγουμε

$$u(t) = v(t) - Kx(t) \qquad \textbf{(1.2.2)}$$

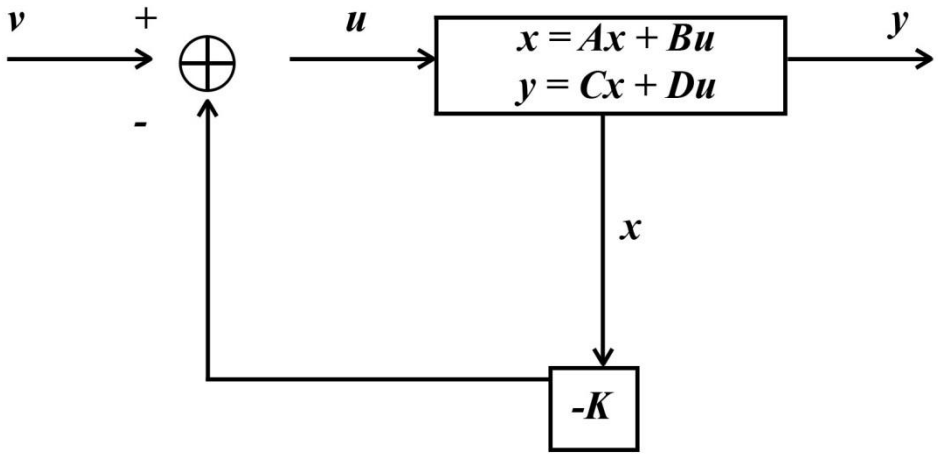
όπου K είναι ένας σταθερός πίνακας και το $v(t)$ είναι ένα διάνυσμα εισόδου αναφοράς. Τότε εισάγοντας αυτό το διάνυσμα εισόδου μέσα στο σύστημα έχουμε το εξής σύστημα :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A - BK)x(t) + Bu(t) \\ y &= (C - DK)x(t) + Du(t) \end{aligned} \qquad \textbf{(1.2.3)}$$

Το πρόβλημα της σταθεροποίησης του συστήματος (1.2.1) γίνεται το πρόβλημα εύρεσης του K έτσι ώστε το σύστημα (1.2.3) να γίνεται σταθερό. Επομένως το **πρόβλημα της κατάστασης-σταθεροποίησης της ανατροφοδότησης** μπορεί να δηλωθεί ως εξής : *Δεδομένου ότι έχουμε ένα ζευγάρι πινάκων (A,B) να βρεθεί ένας πίνακας K ώστε το A-BK να είναι σταθερό.*

Γραφικά το πρόβλημα της κατάστασης ανατροφοδότησης μπορεί να παρασταθεί όπως στην εικόνα 1.

Στην επόμενη υποπαράγραφο θα ερευνήσουμε τις συνθήκες υπό τις οποίες υπάρχει ένας πίνακας K. Ο πίνακας **K** όταν υπάρχει ονομάζεται **πίνακας σταθεροποίησης της ανατροφοδότησης** και σε αυτήν την περίπτωση το ζεύγος πινάκων **(A,B)** ονομάζεται **σταθεροποιήσιμο ζεύγος**. Το σύστημα (1.2.3) ονομάζεται **σύστημα κλειστού βρόγχου** και ο πίνακας **A-BK** ονομάζεται **πίνακας κλειστού βρόγχου**.



Εικόνα 1

Αναλογικά για το σύστημα διακριτού χρόνου

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k$$
$$y_k = Cx_k + Du_k$$

αν υπάρχει ένας πίνακας K τέτοιος ώστε το A-BK να είναι διακριτά σταθερό , δηλαδή να έχει όλες τις ιδιοτιμές του μέσα στο μοναδιαίο κύκλο , τότε το ζευγάρι **(A,B)** θα ονομαστεί **διακριτό σταθεροποιήσιμο ζευγάρι** και ο πίνακας **K** θα ονομαστεί **διακριτός σταθεροποιήσιμος πίνακας ανατροφοδότησης**.

1.2.1 Ευστάθεια και Ελεγξιμότητα

Σ΄ αυτήν την παράγραφο περιγράφουμε απαραίτητες και επαρκείς συνθήκες για ένα ζευγάρι (A,B) ώστε να είναι σταθεροποιήσιμο. Ξεκινάμε με τη σταθερή χρονική υπόθεση.

Θεώρημα 1.2.1. *Χαρακτηρισμός της σταθερής χρονικής σταθεροποιησιμότητας.*

Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα :

i. το (A,B) είναι σταθεροποιήσιμο
ii. ο βαθμός $\left(A-\lambda I, B\right)$ = n για όλα τα Re(λ) ≥ 0. Με άλλα λόγια οι ασταθείς καταστάσεις του A είναι ελέγξιμες.
iii. Για όλα τα λ και x≠0 έτσι ώστε $x^{*}A=\lambda x^{*}$ και Re(λ) ≥ 0 , έχουμε $x^{*}B\neq 0$.

Απόδειξη i → ii

Χωρίς απώλεια της γενικότητας υποθέτουμε ότι το ζευγάρι (A,B) μας δίνεται στη μορφή

$$PAP^{-1}=\bar{A}=\begin{pmatrix}\bar{A}_{11} & \bar{A}_{12}\\ 0 & \bar{A}_{22}\end{pmatrix} \quad , \quad PB=\bar{B}=\begin{pmatrix}\bar{B}_{1}\\ 0\end{pmatrix}$$

Όπου το $\left(\bar{A}_{11},\bar{B}_{1}\right)$ είναι ελέγξιμο. Δεδομένου ότι το $\left(\bar{A}_{11},\bar{B}_{1}\right)$ είναι ελέγξιμο , σύμφωνα με το κριτήριο της ελεγξιμότητας της ιδιοτιμής έχουμε ότι $rank\left(\lambda I-\bar{A}_{11},\bar{B}_{1}\right)=p$ όπου p είναι η τάξη του $\bar{A}_{11}$.

Συνεπώς $rank\left(\lambda I-\bar{A},\bar{B}_{1}\right)=rank\begin{pmatrix}\lambda I-\bar{A}_{11} & -\bar{A}_{12} & \bar{B}_{1}\\ 0 & \lambda I-\bar{A}_{22} & 0\end{pmatrix}<$ n αν και μόνο αν $rank\left(\lambda I-\bar{A}_{22}\right)<n-p$ δηλαδή αν και μόνο αν το λ είναι μια ιδιοτιμή του $\bar{A}_{22}$.

Εφόσον το (A,B) είναι σταθεροποιήσιμο ζευγάρι τότε ο πίνακας $\bar{A}_{22}$ θα πρέπει να είναι σταθερός πίνακας. Αυτό μπορούμε να το δούμε ως εξής : Η σταθεροποιησιμότητα του ζευγαριού (A,B) συνεπάγεται τη σταθεροποιησιμότητα του ζευγαριού $\left(\bar{A},\bar{B}\right)$.Εφόσον το $\left(\bar{A},\bar{B}\right)$ είναι ένα σταθεροποιήσιμο ζευγάρι τότε υπάρχει ένας πίνακας K τέτοιος ώστε το $\bar{A}-\bar{B}\bar{K}$ είναι σταθερό. Αυτό σημαίνει ότι αν $\bar{K}=(\bar{K}_{1},\bar{K}_{2})$ τότε ο πίνακας $\begin{pmatrix}\bar{A}_{11}-\bar{B}_{1}\bar{K}_{1} & \bar{A}_{12}-\bar{B}_{1}\bar{K}_{2}\\ 0 & \bar{A}_{22}\end{pmatrix}$ είναι σταθερός πίνακας το οποίο συνεπάγεται ότι το $\bar{A}_{22}$ είναι σταθερό.

Πόρισμα 1.2.1

Αν το ζευγάρι **(A,B)** είναι **ελέγξιμο** τότε πρέπει να είναι **σταθεροποιήσιμο**.

Απόδειξη

Αν το (A,B) είναι ελέγξιμο, τότε ξανά σύμφωνα με το κριτήριο της ελεγξιμότητας της ιδιοτιμής ,έχουμε ότι ο, βαθμός $(A-\lambda I, B)$ = n για όλα τα Re(λ)≥0 .Συνεπώς το (A,B) είναι σταθεροποιήσιμο.

Το παραπάνω αποτέλεσμα μας λέει ότι η ελεγξιμότητα συνεπάγεται τη σταθεροποιησιμότητα. Ωστόσο το αντίστροφο δεν ισχύει. Η σταθεροποιησιμότητα είναι εγγυημένη αρκεί οι ασταθείς τρόποι να είναι ελέγξιμοι.

Το παρακάτω απλό παράδειγμα επεξηγεί το γεγονός.

$$\text{Έστω } A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \text{ και } b=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Το (A,b) δεν είναι ελέγξιμο και ο βαθμός (b, Ab , A^2b) =2.

Ωστόσο το διάνυσμα γραμμή f^T =(-126.5 , -149.5 , 0) είναι τέτοιο ώστε οι ιδιοτιμές του A-bf^T να είναι { -10±11.4891j , -3 }. Επομένως το A-bf^T είναι σταθερό , δηλαδή το (A,b) είναι σταθεροποιήσιμο.

Η διακριτή υπόθεση

Θεώρημα 1.2.2. *Χαρακτηρισμός της διακριτής σταθεροποιησιμότητας* .

Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα :

i. το (A,B) είναι διακριτό σταθεροποιήσιμο.

ii. ο βαθμός $(A-\lambda I, B)$ = n για όλα τα λ έτσι ώστε $|\lambda| \geq 1$.

iii. Για όλα τα λ και x≠0 έτσι ώστε $x^* A = \lambda x^*$ και $|\lambda| \geq 1$, έχουμε $x^* B \neq 0$.

1.2.2 Σταθεροποίηση μέσω εξισώσεων του Lyapunov.

Από τα παραπάνω , είναι εμφανές ότι για να βρούμε μια ανατροφοδότηση που να σταθεροποίει τον πίνακα K για ένα δεδομένο ζευγάρι (A,B) μπορούμε να υποθέσουμε ότι το ζευγάρι (A,B) είναι ελέγξιμο. Καθότι , αν το (A,B) δεν είναι ελέγξιμο αλλά σταθεροποιήσιμο , τότε μπορούμε πάντα να το θέτουμε στη μορφή

$$TAT^{-1} = \bar{A} = \begin{pmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ 0 & \bar{A}_{22} \end{pmatrix} \quad , \; TB = \bar{B} = \begin{pmatrix} \bar{B}_1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \textbf{(1.2.4)}$$

Όπου το $\left(\bar{A}_{11}, \bar{B}_1\right)$ είναι ελέγξιμο και το $\bar{A}_{22}$ είναι σταθερό.

Μόλις επιτευχθεί ένας σταθεροποιήσιμος πίνακας K_1 για το ελέγξιμο ζευγάρι $\left(\bar{A}_{11}, \bar{B}_1\right)$, ο σταθεροποιήσιμος πίνακας K για το ζευγάρι (A,B) μπορεί να επιτευχθεί ως

$$\begin{aligned} K &= \bar{K}T \\ \bar{K} &= (\bar{K}_1, \bar{K}_2) \end{aligned} \qquad \textbf{(1.2.5)}$$

και το $\bar{K}_2$ να είναι αυθαίρετο.

Μπορούμε επομένως να επικεντρώσουμε τις προσπάθειες μας στο να σταθεροποιήσουμε ένα ελέγξιμο ζευγάρι. Το θεώρημα 1.2.3 μας δείχνει πώς να σταθεροποιήσουμε ένα ελέγξιμο ζευγάρι χρησιμοποιώντας μια εξίσωση του Lyapunov.

Θεώρημα 1.2.3

Ας υποθέσουμε ότι το (A,B) είναι ελέγξιμο και ότι το β είναι ένα βαθμωτό μέγεθος ώστε $\beta > |\lambda \max(A)|$

Όπου το λmax(A) είναι η ιδιοτιμή του A με το μεγαλύτερο αληθινό μέρος. Έστω ότι το K ορίζεται ως :

$$K = B^T Z^{-1} \qquad \textbf{(1.2.6)}$$

Όπου το Z είναι απαραίτητα συμμετρικά θετικά ορισμένο και ικανοποιεί την εξίσωση του Lyapunov

$$-(A+bI)Z + Z[-(A+bI)]^T = -2BB^T \qquad \textbf{(1.2.7)}$$

Τότε το A-BK είναι σταθερό , δηλαδή το (A,B) είναι σταθεροποιήσιμο.

Απόδειξη

Εφόσον $\beta > |\lambda \max(A)|$, ο πίνακας $-\left(A+\beta I\right)$ είναι σταθερός. Επίσης δεδομένου ότι το (A,B) είναι ελέγξιμο το ζευγάρι $(-(A+\beta I), B)$ είναι ελέγξιμο. Συνεπώς η εξίσωση του Lyapunov (1.2.7) έχει μια μοναδική συμμετρική θετικά ορισμένη λύση Z.

Ξανά η εξίσωση (1.2.7) μπορεί να γραφεί ως :

$$(A - BB^T Z^{-1}) + Z(A - BB^T Z^{-1}) = -2\beta Z$$

Τότε από τη σχέση (1.2.7) έχουμε

$$(A - BK) + Z(A - BK) = -2\beta Z \qquad \textbf{(1.2.8)}$$

Εφόσον το Z είναι συμμετρικά θετικά ορισμένο , τότε το A-BK είναι σταθερό.

Αυτό μπορούμε να το διαπιστώσουμε ως εξής :

Έστω ότι το μ είναι μια ιδιοτιμή του A-BK και το y το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα. Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της εξίσωσης (1.2.8) πρώτα με το y^* από τα αριστερά κι έπειτα με το y από τα δεξιά έχουμε

$$2\,\mathrm{Re}(\mu) y^* Zy = -2\beta y^* Zy$$

Εφόσον το Z είναι θετικά ορισμένο, τότε $y^*Zy > 0$. Επομένως Re(μ) < 0 . Οπότε το A-BK είναι σταθερό.

Τα παραπάνω μας οδηγούν στην ακόλουθη μέθοδο για να βρίσκουμε έναν σταθεροποιήσιμο πίνακα ανατροφοδότησης (Armstrong 1975)

Μια μέθοδος με εξίσωση του Lyapunov για σταθεροποίηση

Έστω (A,B) ένα ελέγξιμο ζευγάρι. Η παρακάτω μέθοδος υπολογίζει σταθεροποιήσιμο πίνακα μετάβασης K.

Βήμα 1 :

Έστω αριθμός $\beta > |\lambda \max(A)|$, με λmax(A) να δηλώνει τη χαρακτηριστική ρίζα του A με το μεγαλύτερο πραγματικό μέρος.

Βήμα 2 :

Λύνουμε την εξίσωση Lyapunov ως προς Z :

$$-(A + bI)Z + Z[-(A + bI)]^T = -2BB^T$$

Βήμα 3 :

Παίρνουμε τον σταθεροποιήσιμο πίνακα ανάδρασης K

$$K = B^T Z^{-1}$$

Σημείωση στην αριθμητική αποτελεσματικότητα

Η εξίσωση Lyapunov στο βήμα 2 μπορεί να μην είναι καλώς προετοιμασμένη ακόμα και αν το ζευγάρι (A,B) είναι εύρωστα ελέγξιμο. Σε αυτήν την περίπτωση είσοδοι του σταθεροποιήσιμου πίνακα ανάδρασης K αναμένονται να είναι πολύ υψηλοί, πράγμα που προκαλεί πρακτικές δυσκολίες στην υλοποίησή της.

Παράδειγμα 1.2.1.

Εκκρεμές

m = 1kg

M=2kg

l = 0.5 m

g = 9.18 m/s^2

τότε

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3.6720 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 22.0320 & 0 \end{pmatrix}$$

Οι ιδιοτιμές του A είναι 0 , 0 , ±4.6938.Χωρίς έλεγχο εισόδου έχουμε αστάθεια στην κίνηση και το εκκρεμές θα πέσει. Θα σταθεροποιήσουμε την κίνηση χρησιμοποιώντας τη μέθοδο με τη χρήση εξίσωσης Lyapunov με τον πίνακα A που έχουμε και τον πίνακα

$$B=\begin{pmatrix} 0 \\ 0.4 \\ 0 \\ -0.4 \end{pmatrix}$$

<u>Βήμα 1 :</u>

Έστω β = 5. Αυτό θα κάνει τον πίνακα $-(A+\beta I)$ ευσταθή.

<u>Βήμα 2 :</u>

Έστω $Z=\begin{pmatrix} 0.0009 & -0.0044 & -0.0018 & 0.0098 \\ -0.0044 & 0.0378 & 0.0079 & -0.0593 \\ -0.0018 & 0.0079 & 0.0054 & 0.0270 \\ 0.0098 & -0.0593 & -0.0270 & 0.1508 \end{pmatrix}$

Ο πίνακας Z που υπολογίσαμε είναι συμμετρικός θετικά ορισμένος αλλά υψηλά αρρωστημένης κατάστασης.

<u>Βήμα 3 :</u>

$K = B^T Z^{-1} = 10^3(-0.5308 , -0.2403 , -.12808 , -0.2903)$.

Οι ιδιοτιμές του A-BK είναι (-5 ± 11.2865j , -5 ± 0.7632j)

Παρόλο που οι είσοδοι του πίνακα K έχουν μεγάλο μήκος το ζεύγος (A,B) είναι ανθεκτικά ελέγξιμο και αυτό διαπιστώνεται από το γεγονός ότι οι ιδιάζουσες τιμές του πίνακα ελεγξιμότητας είναι 8.9462 , 8.9462 , 0.3284 , 0.3284.

<u>Σημείωση</u>

Αν το ζευγάρι (A,B) δεν είναι ελέγξιμο αλλά σταθεροποιήσιμο , τότε μετά τη μετατροπή του (A,B) στη μορφή $(\bar{A},\bar{B})$

που δίνεται από τις σχέσεις

$$TAT^{-1}=\bar{A}=\begin{pmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ 0 & \bar{A}_{22} \end{pmatrix} \quad , \quad TB=\bar{B}=\begin{pmatrix} \bar{B}_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

.

Εφαρμόζοντας την παραπάνω μέθοδο στο $(\bar{A}_{11},\bar{B}_1)$ που είναι ελέγξιμο θα βρούμε

έναν σταθεροποιήσιμο πίνακα ανάδρασης $\bar{K}_1$ για το $\left(\bar{A}_{11}, \bar{B}_1\right)$. Βρίσκουμε ακόμα τον K που σταθεροποιεί το (A,B) σαν $\bar{K} = (\bar{K}_1, \bar{K}_2)T$ επιλέγοντας το $\bar{K}_2$ αυθαίρετα.

Παράδειγμα 1.2.2.

Έστω το σταθεροποιήσιμο αλλά μη ελέγξιμο ζευγάρι (A,B)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

<u>Βήμα 1 :</u>

$A = \bar{A}$, $B = \bar{B}$.

οπότε $T = I$.

έχουμε

$$\bar{A}_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \ , \ \bar{A}_{22} = -3 \ , \ \bar{B}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

.

<u>Βήμα 2 :</u>

Επιλέγουμε β_1 = 10. Η μοναδική συμμετρικά θετικά ορισμένη λύση Z_1 της εξίσωσης Lyapunov

$$-(\bar{A}_{11} + b_1 I)Z_1 + Z_1[-(\bar{A}_{11} + b_1 I)]^T = -2\bar{B}_1\bar{B}_1^T$$

Είναι η

$$Z_1 = \begin{pmatrix} 0.0991 & -0.0906 \\ -0.0906 & 0.0833 \end{pmatrix}$$

<u>Βήμα 3 :</u>

$$\bar{K}_1 = \bar{B}_1^T Z_1^{-1} = (-126.5, -149.5)$$

<u>Βήμα 4 :</u>

Επιλέγουμε

$$\bar{K}_2 = 0$$

Τότε

$$K = \bar{K} = (\bar{K}_1, \bar{K}_2) = (-126.5, -149.5)$$

Οι ιδιοτιμές του A-BK είναι -10 ± 11.489j , -3

Διακριτότητα – Ευστάθεια μέσω της εξίσωσης Lyapunov

Παρακάτω έχουμε το θεώρημα 1.2.3. για διακριτά-αναλογικά.

Θεώρημα 1.2.4.

Έστω σύστημα διακριτού χρόνου $x_{k+1} = Ax_k + Bu_k$ το οποίο είναι ελέγξιμο. Έστω 0 < β ≤ 1 τέτοιο ώστε $|\lambda| \geq \beta$ για κάθε χαρακτηριστική ρίζα του A. Ορίζουμε $\mathrm{K} = \mathrm{B}^{\mathrm{T}}(\mathrm{Z} + \mathrm{BB}^{\mathrm{T}})^{-1}\mathrm{A}$ με το Z να ικανοποιεί την εξίσωση Lyapunov $\mathrm{AZA}^{\mathrm{T}} - \beta^2\mathrm{Z} = 2\mathrm{BB}^{\mathrm{T}}$ και τότε ο A-BK είναι διακριτά ευσταθής.

Το παραπάνω θεώρημα μας οδηγεί στην παρακάτω Lyapunov μέθοδο για την ευστάθεια διακριτών συστημάτων. Η μέθοδος αυτή είναι από τους Armstrong – Rubstein (1976)

Μέθοδος Lyapunov εξίσωσης για την ευστάθεια διακριτών συστημάτων.

<u>Βήμα 1 :</u>

Βρίσκουμε έναν αριθμό β τέτοιο ώστε $0 < \beta < \min(1, \min|\lambda_i|)$ όπου $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ είναι οι ιδιοτιμές του (A).

<u>Βήμα 2 :</u>

Λύνουμε τη διακριτή εξίσωση Lyapunov $\mathrm{AZA}^{\mathrm{T}} - \beta^2\mathrm{Z} = 2\mathrm{BB}^{\mathrm{T}}$.

<u>Βήμα 3 :</u>

Υπολογίζουμε το διακριτό σταθεροποιήσιμο πίνακα ανάδρασης K ,

$\mathrm{K} = \mathrm{B}^{\mathrm{T}}(\mathrm{Z} + \mathrm{BB}^{\mathrm{T}})^{-1}\mathrm{A}$

Παράδειγμα 1.2.3.

Έστω το παράδειγμα πληθυσμού του Luenberger με

$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1 \quad \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 1$

,

Και

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

.

τότε $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Οι ιδιοτιμές του A είναι

$-1.9276, -0.7748, -0.0764 \pm 0.8147\,j$ και ο πίνακας A δεν είναι διακριτά ευσταθής.

Βήμα 1 :

Επιλέγουμε β = 0.5

Βήμα 2 :

Η λύση Z της διακριτής εξίσωσης Lyapunov $AZA^T - \beta^2 Z = 2BB^T$ είναι

$$Z = -\begin{pmatrix} -0.0398 & 0.0321 & -0.0003 & 0.0161 \\ 0.0321 & -0.1594 & 0.1294 & -0.0011 \\ -0.0003 & 0.1214 & -0.6374 & 6.5135 \\ 0.0161 & -0.0011 & 6.5135 & -2.5504 \end{pmatrix}$$

Βήμα 3 :

$K = (1.2167, 1.0342, 0.9886, 0.9696)$

Οι ιδιοτιμές του $A - BK$ είναι $-0.0742 \pm 0.4259\,j, -0.4390, 0.3708$ και ο $A - BK$ είναι διακριτά ευσταθής.

Σημείωση :

Αν το (A,B) δεν είναι διακριτά ελέγξιμο ζευγάρι αλλά είναι διακριτά ευσταθές , τότε μπορούμε να συνεχίσουμε με τον ίδιο τρόπο όπως στην περίπτωση του συνεχούς για να σταθεροποιήσουμε το (A,B)

Το παρακάτω παράδειγμα μας δείχνει τον τρόπο.

Παράδειγμα 1.2.4

Ας είναι $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -0.9900 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Το ζευγάρι (A,B) δεν είναι διακριτά ελέγξιμο αλλά είναι διακριτά ευσταθές.

Χρησιμοποιώντας τους συμβολισμούς $\bar{A} = A, \bar{B} = B$ έχουμε ότι οι ιδιοτιμές του $\bar{A}$ είναι (1.7321 , -1.7321 , -0.9900)

και $\bar{A}_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\bar{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Το ζευγάρι ($\bar{A}_{11,}\bar{B}_1$) είναι ελέγξιμο.

Θα εφαρμόσουμε τη Lyapunov μέθοδο για την ευστάθεια διακριτών συστημάτων στο ζευγάρι ($\bar{A}_{11,}\bar{B}_1$).

Βήμα 1 :

Επιλέγουμε β = 1

Βήμα 2 :

Η λύση Z_1 της διακριτής εξίσωσης Lyapunov $\bar{A}_{11}Z_1\bar{A}_1^T - Z_1 = 2\bar{B}_1\bar{B}_1^T$ είναι

$$Z_1 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 \end{pmatrix}$$

Βήμα 3 :

$$\bar{K}_1 = (0\,,\,2.4000)$$

Βήμα 4 :

Ο πίνακας $\bar{A}_{11} - \bar{B}_1\bar{K}_1$ είναι διακριτά ευσταθής . Διαλέγουμε $\bar{K} = (\,\bar{K}_1, 0\,)$ ώστε να επιτύχουμε ο $\bar{A} - \bar{B}\bar{K}$ να είναι διακριτά ευσταθής . Οι ιδιοτιμές του $\bar{A} - \bar{B}\bar{K}$ είναι 0.0746 , -0.0746 , -0.9900 και επομένως ο $\bar{A} - \bar{B}\bar{K}$ είναι διακριτά ευσταθής.

1.3 Ανιχνευσιμότητα

Η παρατηρησιμότητα είναι μια διπλή αρχή της ελεγξιμότητας. Μια διπλή αρχή στη σταθεροποιησιμότητα ονομάζεται **ανιχνευσιμότητα**.

Ορισμός 1.3.1.

Το ζευγάρι **(A,C)** είναι **ανιχνεύσιμο** αν υπάρχει πίνακας L τέτοιος ώστε ο A-LC να είναι ευσταθής.

Από το θεώρημα 1.2.1 μπορούμε να βγάλουμε τα εξής συμπεράσματα.

Θεώρημα 1.3.1. *Χαρακτηρισμός της ανιχνευσιμότητας συνεχούς χρόνου.*

Οι παρακάτω συνθήκες είναι ισοδύναμες :

i. Το (A,C) είναι ανιχνεύσιμο.
ii. Ο πίνακας $\begin{pmatrix} A - \lambda I \\ C \end{pmatrix}$ έχει πλήρη στήλη βαθμού για κάθε Re(λ) ≥ 0.
iii. Για κάθε λ και x ≠ 0 τέτοιο ώστε Ax = λx και Re(λ) ≥ 0 έχουμε ότι Cx ≠ 0
iv. Το (A^T,C^T)είναι σταθεροποιήσιμο .

Η ελεγξιμότητα και η παρατηρησιμότητα παίζουν πολύ σημαντικό ρόλο στην ύπαρξη ορισμένων και ημιορισμένων λύσεων στις εξισώσεις Lyapunov. Επομένως παρόμοια αποτελέσματα θα έπρεπε να αναμένονται και όταν εμπλέκεται και η ανιχνευσιμότητα.

Θεώρημα 1.3.2. *Ανιχνευσιμότητα και ευστάθεια*

Έστω (A,C) ανιχνεύσιμο και η εξίσωση Lyapunov $XA + A^TX = -C^TC$ **(1.3.1)** έχει θετικά ημιορισμένη λύση X. Τότε ο πίνακας A είναι ευσταθής.

Απόδειξη

Γίνεται με αντίφαση. Έστω ότι ο A είναι ασταθής και λ η χαρακτηριστική του ρίζα με Re(λ) ≥ 0 και x το αντίστοιχο χαρακτηριστικό διάνυσμα. Πολλαπλασιάζοντας την 1.3.1 από αριστερά με x^* και από δεξιά με x θα έχουμε $2\mathrm{Re}(\lambda)(x^*Xx) + x^*C^TCx = 0$.

Καθώς X ≥ 0 και Re(λ) ≥ 0 θα πρέπει να έχουμε Cx = 0. Αυτό όμως έρχεται σε αντίφαση με την αρχική υπόθεση. Επομένως το (A,C) είναι ανιχνεύσιμο.

Διακριτή ανιχνευσιμότητα

Ορισμός 1.3.2.

Το ζευγάρι **(A,C)** είναι **διακριτά ανιχνεύσιμο** αν υπάρχει πίνακας L τέτοιος ώστε ο A-LC να είναι διακριτά ευσταθής.

Θεώρημα 1.3.3.

Οι παρακάτω συνθήκες είναι ισοδύναμες :

i. Το (A,C) είναι διακριτά ανιχνεύσιμο

ii. $Rank\begin{pmatrix} A-\lambda I \\ C \end{pmatrix} = n$ για κάθε λ με $|\lambda| \geq 1$

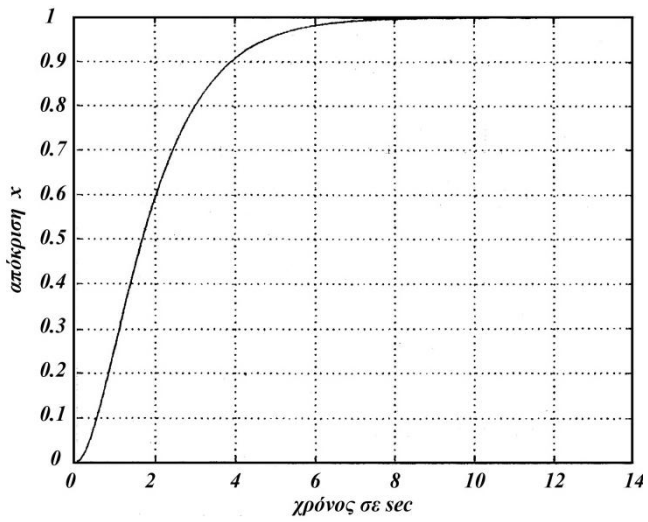
iii. Για κάθε λ και x ≠ 0 τέτοιο ώστε Ax = λx και $|\lambda| \geq 1$ έχουμε ότι Cx ≠ 0

iv. Το (A^T,C^T) είναι διακριτά ευσταθές.

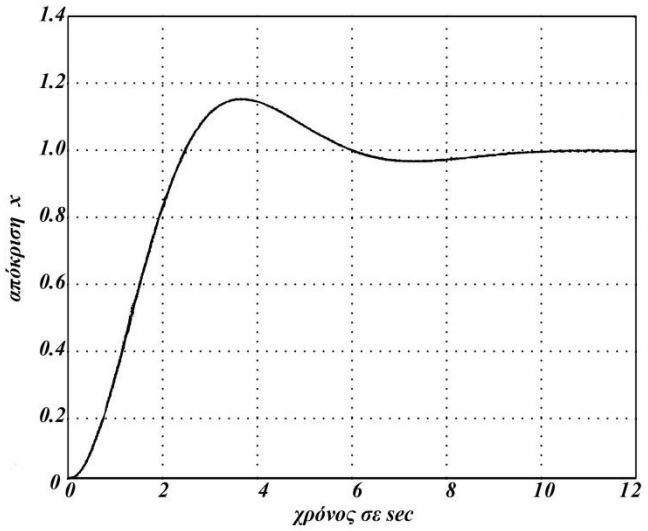
1.4 Η ιδιοτιμή και το πρόβλημα απόδοσης της ιδιοδομής.

Είδαμε πως ένα ασταθές σύστημα μπορεί πιθανώς να σταθεροποιηθεί χρησιμοποιώντας έλεγχο ανάδρασης. Παρόλα αυτά σε πρακτικές περιπτώσεις η σταθεροποίηση από μόνη της μπορεί να μην είναι αρκετή. Η ευστάθεια του συστήματος χρειάζεται να ελέγχεται και/ή η απόκριση του συστήματος χρειάζεται να τροποποιείται. Για να εμφανιστούν συγκεκριμένοι περιορισμοί σχεδιασμού , ο σχεδιαστής θα πρέπει να είναι ικανός να διαλέξει τον πίνακα ανάδρασης έτσι ώστε το σύστημα κλειστού βρόγχου να έχει συγκεκριμένες μεταβατικές ιδιότητες που θα ορίζονται από τις ιδιοτιμές του συστήματος. Αυτό το διευκρινίζουμε με τη βοήθεια ενός συστήματος δεύτερης τάξης.

Θεωρούμε το σύστημα δεύτερης τάξης $u = v - f^T x(t)$



Εικόνα 2



Εικόνα 3

Οι πόλοι αυτού του συστήματος δεύτερης τάξης είναι της μορφής $\lambda_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$.Η ποσότητα ζ ονομάζεται λόγος απόσβεσης και το ω_n φυσική συχνότητα. Οι αποκρίσεις του δυναμικού συστήματος βασίζονται πάνω στα ζ και ω_n. Γενικά, για μια συγκεκριμένη τιμή του ω_n, όσο μεγαλύτερη είναι η τιμή του ζ ($\zeta \geq 1$) τόσο ομαλότερες αλλά πιο αργές γίνονται οι αποκρίσεις. Από την άλλη όταν το ζ μικραίνει ($0 \leq \zeta \leq 1$) οι αποκρίσεις γίνονται πιο γρήγορες αλλά με ταλάντωση. Οι εικόνες 2 και 3 αποτυπώνουν αυτές τις καταστάσεις.

Για την Εικόνα 2 $\omega_n = 1$ και $\zeta = 3$. Χρειάζεται περίπου 8 χρονικές μονάδες για να φτάσει τη μόνιμη κατάσταση τιμής 1.

Για την Εικόνα 3 $\omega_n = 1$ και $\zeta = 3$. Η απόκριση είναι πολύ πιο γρήγορη καθώς φτάνει τη μόνιμη κατάσταση τιμής 1 σε 3 χρονικές μονάδες , αλλά δεν διατηρεί αυτή την τιμή καθώς ταλαντεύεται μέχρι να σταθεροποιηθεί στην τιμή 1.

Αυτές οι ποσότητες πρέπει να επιλεχθούν με τέτοιο τρόπο ώστε να εκπληρώνουν μια μεταβατική απόκριση. Αν οι πόλοι είναι κοντά στον jω-άξονα στο αριστερό μισό , τότε οι μεταβατικές αποκρίσεις παραμορφώνονται σχετικά αργά. Από την άλλη αν οι πόλοι είναι μακριά από τον jω-άξονα τότε προκαλούνται ταχύτατες παραμορφώσεις στις αποκρίσεις μετάβασης. Κανονικά ,*‘ Οι πόλοι κλειστού βρόγχου για ένα σύστημα μπορούν να επιλεχθούν ως ένα επιθυμητό ζευγάρι από τους επικρατέστερους πόλους δεύτερης τάξης , με τους υπόλοιπους πόλους να έχουν επιλεχθεί έτσι ώστε να έχουν πραγματικά μέρη που θα αντιστοιχούν σε επαρκή μεγέθη απόσβεσης , ώστε το σύστημα θα μιμηθεί μιας δεύτερης τάξης απόκριση με μια λογική προσπάθεια ελέγχου.’* (Franklin 1986). Οι επικρατέστεροι πόλοι είναι οι πόλοι που έχουν επικρατέστερη αποτελεσματικότητα στη συμπεριφορά της απόκρισης μετάβασης. Σε ότι αφορά την ανησυχία για τη μετάβαση απόκρισης, οι πόλοι με μεγέθη από πραγματικά μέρη είναι περίπου πέντε φορές μεγαλύτεροι.

Ορισμένα παραδείγματα :

<u>Περίπτωση 1 :</u>

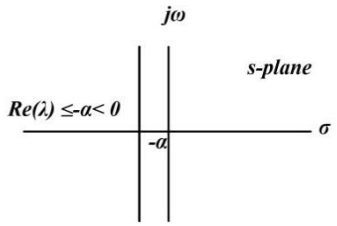
Υποθέτουμε ότι ζητείται η απόκριση του συστήματος κλειστού βρόγχου να έχει έναν ελάχιστο ρυθμό παραμόρφωσης $\alpha > 0$, τέτοιο ώστε $Re(\lambda) \leq -\alpha$ για όλες τις ιδιοτιμές του λ. Τότε οι ιδιοτιμές θα βρίσκονται μετατοπισμένες στο μισό αριστερό επίπεδο όπως φαίνεται στην Εικόνα 4

<u>Περίπτωση 2 :</u>

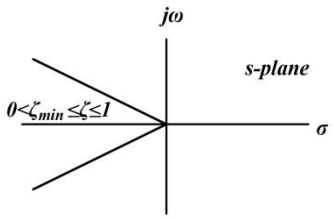
Υποθέτουμε ότι ζητείται το σύστημα να έχει τον ελάχιστο λόγο απόσβεσης ζ_{min}. Τότε οι ιδιοτιμές θα βρίσκονται στον τομέα όπως φαίνεται στην Εικόνα 5

<u>Περίπτωση 3 :</u>

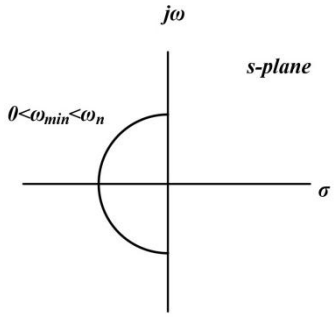
Υποθέτουμε ότι το σύστημα ζητείται να έχει μια ελάχιστη φυσική συχνότητα ω_n Τότε οι ιδιοτιμές του πίνακα κλειστού βρόγχου θα βρίσκονται εκτός του μισού του κυκλικού δίσκου με $0 < \omega_{min} \leq \omega_n$ όπως φαίνεται και στην Εικόνα 6



Εικόνα 4



Εικόνα 5



Εικόνα 6

Στο ερώτημα για το που πρέπει να τοποθετούνται οι ιδιοτιμές :

Αν οι ιδιοτιμές του συστήματος κλειστού βρόγχου μετακινούνται αρκετά μακριά από τις ιδιοτιμές του ανοιχτού συστήματος , τότε από τη ρητή παράσταση του διανύσματος ανάδρασης στην απλή περίπτωση εισόδου φαίνεται ότι απαιτείται μια μεγάλη ανάδραση f.

Από το νόμο ελέγχου $u = v - f^T x(t)$ φαίνεται ότι θα απαιτηθούν μεγάλες είσοδοι ελέγχου και υπάρχουν πρακτικά περιορισμοί στο πόσο μεγάλες μπορεί να είναι αυτές οι είσοδοι. Κατά αυτό τον τρόπο αν και χρειάζεται οι ιδιοτιμές να μετακινηθούν για να σταθεροποιηθεί ένα σύστημα ‘ Ο σχεδιαστής δεν πρέπει να επιχειρήσει την εναλλαγή της δυναμικής συμπεριφοράς της μεθόδου του ανοιχτού βρόγχου περισσότερο από όσο χρειάζεται.

1.4.1 Αντιστοίχιση της ιδιοτιμής με την κατάσταση ανατροφοδότησης

Το πρόβλημα της αντιστοίχισης των ιδιοτιμών σε συγκεκριμένες επιθυμητές τοποθεσίες του μιγαδικού επιπέδου χρησιμοποιώντας τη θεωρία ελέγχου (1.2.2) καλείται **EVA πρόβλημα με κατάσταση ανατροφοδότησης** (EVA Problem by state feedback). Στη θεωρία ελέγχου είναι πιο γνωστό ως το πρόβλημα τοποθέτησης των πόλων.

Η ακριβής μαθηματική έκφραση του προβλήματος είναι η εξής :

Δίνονται $A \in \mathbb{R}^{nxn}$, $B \in \mathbb{R}^{nxm}$, ($m \le n$) $\kappa\alpha\iota$ $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_n)$, όπου το Λ είναι κλειστό κάτω από τους μιγαδικούς συζυγείς. Να βρεθεί $K \in \mathbb{R}^{mxn}$ $\tau\acute{\varepsilon}\tau o\iota o\varsigma$ $\acute{\omega}\sigma\tau\varepsilon$ $\Omega(\mathrm{A}-\mathrm{BK}) = \Lambda$.

Εδώ το Ω(R) κανονικοποιείται για το φάσμα του R.

Ο πίνακας **K** καλείται **πίνακας κατάστασης ανατροφοδότησης**.

Το θεώρημα 1.4.1 μας δίνει τις συνθήκες ύπαρξης και μοναδικότητας του πίνακα K.

Θεώρημα 1.4.1 *Το θεώρημα EVA κατάστασης ανατροφοδότησης.*

Το EVA πρόβλημα επιλύεται για κάθε Λ αν και μόνο αν το (A,B) είναι ελέγξιμο. Η λύση είναι μοναδική αν και μόνο αν το σύστημα είναι απλό σύστημα εισόδου (π.χ. αν το B είναι διάνυσμα). Στην περίπτωση πολλαπλής εισόδου, αν το σύστημα επιλύεται, υπάρχουν απείρως πολλές λύσεις.

Απόδειξη

Αποδεικνύουμε πρώτα τη μοναδικότητα. Η απόδειξη θα γίνει με αντίφαση.

Υποθέτουμε ότι το σύστημα (A,B) δεν είναι ελέγξιμο. Τότε, σύμφωνα με τα κριτήρια ελεγξιμότητας των ιδιοτιμών, έχουμε ότι $rank(A-\lambda I, B) < n$, για κάποια λ. Έτσι υπάρχει ένα διάνυσμα $z \neq 0$ τέτοιο ώστε $z^T(A-\lambda I) = 0$, $z^T B = 0$. Αυτό σημαίνει ότι για κάθε K, έχουμε $z^T(A-\lambda I, BK) = 0$, το οποίο συνεπάγεται ότι το λ είναι μια ιδιοτιμή του A-BK για κάθε K και έτσι το λ δεν μπορεί να αντιστοιχηθεί ξανά.

Αποδεικνύουμε την ύπαρξη.

<u>Περίπτωση 1 :</u> Για την περίπτωση της απλής εισόδου.

Ύπαρξη :

Αποδεικνύουμε ότι αν το (A,b) είναι ελέγξιμο, τότε υπάρχει μοναδικό διάνυσμα f τέτοιο ώστε ο πίνακας $A - bf^T$ να έχει το επιθυμητό φάσμα.

Θεωρούμε τη μορφή ελεγκτή $(C, \tilde{b})$ του ελέγξιμου ζευγαριού (A,b) f

$$TAT^{-1} = C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \cdots & -\alpha_n \end{pmatrix} \qquad \textbf{(1.4.1)}$$

και

$$\tilde{b} = Tb = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

(1.4.2)

Θα δείξουμε τώρα ότι υπάρχει μια σειρά διανυσμάτων $\hat{f}^T$ τέτοια ώστε ο κλειστού βρόγχου πίνακας $C - \tilde{b}\hat{f}^T$ έχει το επιθυμητό φάσμα.

Ας είναι $d(\lambda) = \lambda^n + d_n\lambda^{n-1} + \cdots + d_1$ το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του επιθυμητού πίνακα κλειστού βρόγχου και $\hat{f}^T = (\hat{f}_1, \hat{f}_2, ..., \hat{f}_n)$.

Τότε

$$C - \tilde{b}\hat{f}^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\alpha_1 - \hat{f}_1 & -\alpha_2 - \hat{f}_2 & \cdots & \cdots & -\alpha_n - \hat{f}_n \end{pmatrix}$$

(1.4.3)

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $c'(\lambda)$ του $C - \tilde{b}\hat{f}^T$ είναι το $\lambda^n + (a_n + \hat{f}_n)\lambda^{n-1} + ... + \alpha_1 + \hat{f}_1$. Συγκρίνοντας του συντελεστές των $c'(\lambda)$ και d(λ) αμέσως έχουμε ότι $\hat{f}_i = d_i - a_i \quad , \quad i = 1, 2, ..., n$ **(1.4.4)**

Έτσι το διάνυσμα $\hat{f}$ είναι ολοκληρωτικά καθορισμένο από τους συντελεστές του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του πίνακα C και τους συντελεστές του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του επιθυμητού πίνακα κλειστού βρόγχου. Αν το διάνυσμα $\hat{f}$ είναι γνωστό, τότε το διάνυσμα f για το οποίο ο πίνακας κλειστού βρόγχου $A - bf^T$ έχει το επιθυμητό φάσμα μπορεί να βρεθεί από τη σχέση :

$$f^T = \hat{f}^T T$$

(1.4.5)

Μοναδικότητα : Από την κατασκευή του είναι φανερό ότι το $\hat{f}$ είναι μοναδικό. Θα δείξουμε ότι η μοναδικότητα του $\hat{f}$ συνεπάγεται τη μοναδικότητα και του f. Η απόδειξη θα γίνει με αντίφαση.

Υποθέτουμε ότι υπάρχει $g \neq f$ τέτοιο ώστε $\Omega(A - bg^T) = \Omega(A - bf^T)$.

Τότε $\Omega(C - \tilde{b}\hat{f}^T) = \Omega(C - \tilde{b}\hat{g}^T)$ όπου $\hat{g}^T = g^T T^{-1} \neq \hat{f}^T$ το οποίο αντιφάσκει με τη μοναδικότητα του διανύσματος $\hat{f}$.

<u>Περίπτωση 2 :</u> Για την περίπτωση της πολλαπλής εισόδου.

Ύπαρξη :

Καθώς το (A,B) είναι ελέγξιμο τότε υπάρχει ένας πίνακας F και ένα διάνυσμα g τέτοιο ώστε (A-BF,Bg) να είναι ελέγξιμο (Chen 1984).

Έτσι από την περίπτωση 1 υπάρχει ένα διάνυσμα h τέτοιο ώστε ο πίνακας A-BF-Bgh^T να έχει το επιθυμητό φάσμα. Τότε για K=F+gh^T , έχουμε ότι το A-BK έχει το επιθυμητό φάσμα.

Μοναδικότητα :

Από τη στιγμή που το ζευγάρι (F,g) δεν είναι μοναδικό , υπάρχουν απείρως πολλοί πίνακες ανατροφοδότησης στην περίπτωση της πολλαπλής εισόδου.

Ο τύπος Bass-Gura

Για την περίπτωση της απλής εισόδου έχουμε ότι

$$f = T^T \hat{f} = [(C_M W)^T]^{-1}(d - a) \qquad \textbf{(1.4.6)}$$

Όπου d είναι το διάνυσμα των συντελεστών του επιθυμητού χαρακτηριστικού πολυωνύμου , a το διάνυσμα των συντελεστών του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του A , C_M είναι ο πίνακας ελεγξιμότητας και W είναι ένας συγκεκριμένος πίνακας Toeplitz.

Η παραπάνω φόρμουλα είναι γνωστή ως **τύπος Bass-Gura** (Kailath 1980)

Ο τύπος Ackermann (1972)

Μια κοντινή φόρμουλα για την περίπτωση της απλής εισόδου διανύσματος ανάδρασης f είναι ο γνωστός **τύπος του Ackermann** :

$$f = e_n^T C_M^{-1} d(A) \qquad \textbf{(1.4.7)}$$

Όπου C_M είναι ο πίνακας ελεγξιμότητας και $d(A)$ είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του επιθυμητού πίνακα κλειστού βρόγχου.

<u>Σημείωση :</u>

Καθώς το $T = C_M^{-1}$ μπορεί να βρίσκεται σε πολύ αρρωστημένη κατάσταση ο υπολογισμός του f με χρήση της εποικοδομητικής απόδειξης του θεωρήματος 1.4.1 η μέσω του τύπου Bass-Gura ή του τύπου του Ackermann μπορεί να είναι πολύ ασταθής αριθμητικά .

1.4.2 Αντιστοίχιση της ιδιοτιμής με την έξοδο ανατροφοδότησης

Η επίλυση του EVA προβλήματος χρησιμοποιώντας το νόμο της ανάδρασης, απαιτεί γνώση της πλήρους κατάστασης του διανύσματος $x(t)$. Δυστυχώς, σε συγκεκριμένες περιπτώσεις, η πλήρης κατάσταση δεν είναι μετρήσιμη ή γίνεται ‘’ακριβή’’ η ανάδραση της κατάστασης κάθε μεταβλητής όταν η διάταξη του συστήματος είναι μεγάλη. Σε αυτές τις περιπτώσεις, ο νόμος της ανάδρασης χρησιμοποιώντας την έξοδο είναι πιο πρακτικός. Έτσι καθορίζουμε το νόμο της εξόδου ανάδρασης ως εξής :

$$u(t) = -Ky(t) \quad , \quad y(t) = Cx(t) \qquad \textbf{(1.4.8)}$$

Έχουμε το κλειστού βρόγχου σύστημα

$$\dot{x}(t) = (A - BKC)x(t)$$

Το EVA εξόδου ανάδρασης πρόβλημα μπορεί να οριστεί ως εξής :

Δίνεται το σύστημα 1.2.1. Να βρεθεί ένας πίνακας ανάδρασης K τέτοιος ώστε ο πίνακας A-BKC έχει ένα προκαθορισμένο σύνολο ιδιοτιμών.

Το επόμενο είναι ένα γνωστό αποτέλεσμα του Kimura (1975) πάνω στην επίλυση του προβλήματος εξόδου ανάδρασης.

Θεώρημα 1.4.2 *Το EVA πρόβλημα εξόδου ανάδρασης*

Ας είναι το (A,B) ελέγξιμο και το (A,C) παρατηρήσιμο και rank(B) = m και rank(C) =r. Υποθέτουμε ότι n ≤ r+m-1. Τότε ένα σχεδόν αυθαίρετο σύνολο από διακεκριμένες ιδιοτιμές μπορεί να αντιστοιχηθεί από το νόμο της εξόδου ανάδρασης (1.4.8).

1.4.3 Αντιστοίχιση ιδιοδομής

Ως τώρα έχουμε θεωρήσει ως πρόβλημα μόνο την αντιστοίχιση των ιδιοτιμών. Παρόλα αυτά, αν η απόκριση του συστήματος χρειάζεται να μεταβάλλεται παροδικά, τότε πρέπει να θεωρήσουμε ως πρόβλημα την αντιστοίχιση και των ιδιοτιμών και των ιδιοδιανυσμάτων. Αυτό μπορεί να δειχθεί ως εξής (Andry 1983) :

Υποθέτουμε ότι οι ιδιοτιμές $\lambda_k, k=1,2,...,n$ του πίνακα A είναι διακεκριμένες. Ας είναι $M=(v_1,v_2,...,v_n)$ ο πίνακας των ιδιοδιανυσμάτων, τα οποία είναι απαραίτητα μη ιδιάζοντα (ομαλά).
Τότε κάθε λύση του συστήματος

$$\dot{x}(t)=Ax(t) \quad , \quad x(0)=x_0$$

Που παριστάνει μια ελεύθερη απόκριση μπορεί να γραφεί ως

$$x(t)=\sum_{t=1}^{n} a_i e^{\lambda_i t} v_i$$

Όπου $a=(a_1,a_2,...,a_n)^T = M^{-1}x_o$.

Έτσι, από τα παραπάνω βλέπουμε ότι οι ιδιοτιμές καθορίζουν την τιμή για την οποία το σύστημα εξασθενεί ή αναπτύσσεται και τα ιδιοδιανύσματα καθορίζουν το σχήμα της απόκρισης.

Το πρόβλημα της αντιστοίχισης των ιδιοτιμών και των ιδιοδιανυσμάτων καλείται **πρόβλημα της αντιστοίχισης της ιδιοδομής** και διατυπώνεται ως εξής :

Δίνονται τα σύνολα $S=(\mu_1,\mu_2,...\mu_n)$ και $M=(v_1,v_2,...,v_n)$ από βαθμωτά μεγέθη και διανύσματα και τα δύο κλειστά στους συζυγείς μιγαδικούς. Να βρεθεί πίνακας ανάδρασης K τέτοιος ώστε ο πίνακας A+BK να έχει τα $\mu_i s$ ως ιδιοτιμές και τα $v_i s$ ως τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα.

Το επόμενο αποτέλεσμα (Moore 1976) δίνει μια απαραίτητη και επαρκή συνθήκη για την επίλυση του προβλήματος αντιστοίχισης της ιδιοδομής με κατάσταση ανάδρασης.

Ορίζει $R_\lambda = \begin{bmatrix} N_\lambda \\ M_\lambda \end{bmatrix}$ όπου οι στήλες του R_λ σχηματίζουν μια βάση για το μηδενικό χώρο του πίνακα $(\lambda I - A, B)$.

Θεώρημα 1.4.3. *Το Θεώρημα αντιστοίχισης ιδιοδομής με κατάσταση ανάδρασης.*

Υποθέτουμε ότι οι αριθμοί $\{\mu_i\}$ στο σύνολο S είναι διακεκριμένοι και αυτοσυζυγείς. Τότε υπάρχει ένας πίνακας K τέτοιος ώστε: $(A+BK)v_i = \mu_i v_i$, $i = 1,2,...n$ αν και μόνο αν ικανοποιούνται οι ακόλουθες συνθήκες :

i. Τα διανύσματα $v_1, v_2, ..., v_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα

ii. $v_i = v_i^*$ οποτεδήποτε $\mu_i = \mu_i^*$, $i = 1,2,...,n$

iii. $v_i \in span\{N_{\mu_i}\}$, $i = 1,2,...,n$

Αν ο B έχει πλήρη βαθμό και ο K υπάρχει τότε είναι μοναδικός. Τότε τα $\mu_i s$ είναι όλα πραγματικά και διακεκριμένα , μια έκφραση για τον K είναι $K = (-M_{\mu_1} z_1, -M_{\mu_2} z_2, ..., -M_{\mu_n} z_n)(v_1, v_2, ..., v_n)^{-1}$
όπου το διάνυσμα z_i δίνεται από τη σχέση

$$v_i = N_{\mu_i} z_i \ , \quad i = 1,2,...,n \ .$$

Το επόμενο αποτέλεσμα πάνω στην αντιστοίχιση ιδιοδομής με την έξοδο ανάδρασης δόθηκε από τον Srinathkumar το 1978.

Θεώρημα 1.4.4 *Το θεώρημα εξόδου ανάδρασης αντιστοίχισης ιδιοδομής.*

Ας είναι το (A,B) ελέγξιμο και το (A,C) παρατηρήσιμο και rank(B) = m και rank(C) = r.

Τότε οι max(m,r) ιδιοτιμές και τα max(m,r) ιδιοδιανύσματα με τις min(m,r) εγγραφές σε κάθε ιδιοδιάνυσμα μπορούν να αντιστοιχηθούν από το νόμο εξόδου ανάδρασης 1.4.8.

<u>Σημείωση:</u>

Αριθμητικά αποτελεσματικοί αλγόριθμοι για το πρόβλημα εξόδου ανάδρασης είναι σπάνιοι. Ίσως, η πρώτη περιεκτική εργασία σε αυτό το πλαίσιο είναι από τους Misra και Patel (1989) , όπου για τους αλγόριθμους τόσο για τα συστήματα απλής εισόδου, όσο και για τα συστήματα πολλαπλής εισόδου χρησιμοποιήθηκαν πεπλεγμένες μετατοπίσεις.

1.5 Τα τετραγωνικά προβλήματα βελτιστοποίησης

Είδαμε ότι αν ένα σύστημα είναι ελέγξιμο, τότε οι κλειστού βρόγχου ιδιοτιμές μπορούν να τοποθετηθούν σε αυθαίρετα επιλεγμένες θέσεις του μιγαδικού επιπέδου. Αλλά η έλλειψη ύπαρξης μιας συγκεκριμένης κατευθυντήριας γραμμής για την τοποθέτηση αυτών των ιδιοτιμών καθιστούν τη διαδικασία σχεδιασμού δύσκολη στην πράξη. Ένας σχεδιαστής πρέπει να χρησιμοποιήσει την προσωπική του διαίσθηση στο

πως θα χρησιμοποιήσει την ελευθερία της επιλογής των ιδιοτιμών για να επιτευχθούν οι σκοποί του σχεδιασμού.

Είναι επιθυμητό να έχει μια μέθοδο σχεδιασμού η οποία να χρησιμοποιηθεί σαν αρχική διεργασία σχεδιασμού καθώς ο σχεδιαστής αναπτύσσει τη διορατικότητά του.

Ένας 'συμβιβασμός' γίνεται συχνά στην πράξη για να επιτύχει την αρχική διεργασία σχεδιασμού. Αντί να προσπαθεί να τοποθετήσει τις ιδιοτιμές στις επιθυμητές θέσεις, το σύστημα είναι ευσταθές όταν ικανοποιεί συγκεκριμένα κριτήρια επίδοσης.

Ειδικά, το επόμενο πρόβλημα που είναι γνωστό ως το **Γραμμικό Τετραγωνικό Πρόβλημα Βελτιστοιποίησης** (Linear Quadratic Optimization Problem – LQR Problem) έχει λυθεί.

1.5.1 Το πρόβλημα συνεχούς χρόνου Γραμμικού Τετραγωνικού Βαθμιστή

Δίνονται οι πίνακες Q και R.Να βρεθεί ένα σήμα ελέγχου $u(t)$ τέτοιο ώστε η τετραγωνική συνάρτηση κόστους $J_c(x) = \int_0^\infty [x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)]dt$ που υπόκειται στη σχέση να ελαχιστοποιείται.

Οι πίνακες Q και R παριστάνουν βάρη για τις καταστάσεις και τα διανύσματα ελέγχου αντίστοιχα. Η τετραγωνική μορφή $x^T Qx$ παριστάνει την παρέκκλιση της κατάστασης x από την αρχική κατάσταση και ο όρος $u^T Ru$ παριστάνει το 'κόστος' του ελέγχου. Οι πίνακες Q και R χρειάζεται να επιλεγούν σύμφωνα με τις απαιτήσεις ενός συγκεκριμένου σχεδιασμού. Να σημειωθεί ότι το μέγεθος του σήματος ελέγχου u μπορεί να ελεγχθεί κατάλληλα με την κατάλληλη επιλογή του R.Στην πραγματικότητα, όπως θα δούμε στο θεώρημα 1.5.1 αν διαλέξουμε μεγάλο R τότε το $u(t)$ θα είναι μικρό, όπως και επιθυμούμε. Η επιλογή του Q σχετίζεται με το ποιες καταστάσεις θέλουμε να διατηρήσουμε μικρές.

Δυστυχώς, είναι και πάλι δύσκολο να ορίζουμε μια συγκεκριμένη κατευθυντήρια γραμμή για την επιλογή των πινάκων Q και R.Σύμφωνα με τον Kailath (1980 *) ' η επιλογή αυτών των ποσοτήτων είναι περισσότερο τέχνη παρά επιστήμη '*. Για ένα ουσιώδες πρόβλημα βελτιστοποίησης υποθέτουμε ότι ο Q είναι συμμετρικά θετικά ημιορισμένος και ο R είναι συμμετρικά θετικά ορισμένος.

Εκτός αν αναφερθεί κάτι διαφορετικό, θα θεωρούμε αυτές τις υποθέσεις σε ολόκληρο το κεφάλαιο.

Η επίλυση αυτού του προβλήματος μπορεί να επιτευχθεί μέσω της επίλυσης της επίλυσης μιας εξίσωσης τετραγωνικών πινάκων η οποία καλείται ARE, όπως φαίνεται στο παρακάτω αποτέλεσμα (Moore και Anderson 1990)

Θεώρημα 1.5.1 *Το θεώρημα συνεχούς χρόνου Γραμμικού Τετραγωνικού Βαθμιστή.*

Υποθέτουμε ότι το ζευγάρι (A,B) είναι ευσταθές και το ζευγάρι (A,C) ανιχνεύσιμο. Τότε υπάρχει μοναδικός βέλτιστος έλεγχος $u^0(t)$ ο οποίος ελαχιστοποιεί τη $J_c(x)$. Το διάνυσμα $u^0(t)$ δίνεται από τη σχέση $u^0(t) = -Kx(t)$ όπου $K = R^{-1}B^T X$ και X είναι η μοναδική θετικά ημιορισμένη λύση της ARE :

$$XA + A^T X + Q - XBR^{-1}B^T X = 0 \qquad \textbf{(1.5.1)}$$

Επιπλέον ο κλειστού βρόγχου πίνακας A-BK είναι ευσταθής και η ελάχιστη τιμή της $J_c(x)$ ισούται με $x_0{}^T X x_0$ όπου $x_0 = x(0)$.

Θα δώσουμε μια απόδειξη του κομματιού του βέλτιστου ελέγχου του θεωρήματος υποθέτωντας ότι η λύση υπάρχει.

Απόδειξη

$$\frac{d}{dt}(x^T Xx) = \dot{x}^T Xx + x^T X\dot{x} = (Ax + Bu)^T Xx + x^T X(Ax + Bu) =$$
$$(u^T B^T + x^T A^T)Xx + x^T X(Ax + Bu) = x^T(A^T X + XA)x + u^T B^T Xx + x^T XBu =$$
$$x^T(XBR^{-1}B^T X - Q)x + u^T B^T Xx + x^T XBu =$$
$$x^T XBR^{-1}B^T Xx + u^T B^T Xx + x^T XBu + u^T Ru - u^T Ru - x^T Qx =$$
$$(u^T + x^T XBR^{-1})R(u + R^{-1}B^T Xx) - (x^T Qx + u^T Ru)$$

ή

$$x^T Qx + u^T Ru = -\frac{d}{dt}(x^T Xx) + (u^T + x^T XBR^{-1})R(u + R^{-1}B^T Xx)$$

Ολοκληρόνωντας από t ως T

$$\int_0^T (x^T Qx + u^T Ru)dt = -x^T(T)Xx(T) + x_0{}^T Xx_0 + \int_0^T (u + R^{-1}B^T Xx)^T R(u + R^{-1}B^T Xx)$$

Αφήνοντας T $\to \infty$ παρατηρούμε ότι $x(T) \to \infty$, έτσι επιτύχαμε

$$J_C(x) = x_0{}^T Xx_0 + \int_0^T (u + R^{-1}B^T Xx)^T R(u + R^{-1}B^T Xx)$$

Καθώς ο R είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος, συνεπάγεται ότι $J_C(x) \geq x_0{}^T Xx_0$ για όλα τα x_0 και όλους τους ελέγχους u.

Καθώς ο πρώτος όρος $x_0{}^T Xx_0$ είναι ανεξάρτητος του u η ελ'αχιστη τιμή του $J_C(x)$ εμφανίζεται όταν $u^o(t) = -R^{-1}B^T Xx(t) = -Kx(t)$.

Ως εκ τούτου η ελάχιστη τιμή του $J_C(x)$ είναι $x_0{}^T Xx_0$.

Ορισμός 1.5.1

$$\text{H ARE } XA + A^T X + Q - XSX = 0 \qquad \textbf{(1.5.2)}$$

όπου $S = BR^{-1}B^T$ καλείται **Συνεχούς Χρόνου Αλγεβρική Εξίσωση Ricatti**
(Continuous Time Algebraic Ricatti Equation για συντομία CARE)

Ορισμός 1.5.2

Ο πίνακας $$H = \begin{pmatrix} A & -S \\ -Q & -A^T \end{pmatrix} \qquad \textbf{(1.5.3)}$$

είναι ο Χαμιλτονιανός πίνακας που είναι συνδεδεμένος με την CARE 1.5.2

Ορισμός 1.5.3

Μια συμμετρική λύση X της CARE τέτοια ώστε ο $A - SX$ να είναι ευσταθής καλείται **σταθεροποιητική λύση**.

Θεώρημα 1.5.2

Υποθέτουμε ότι το ζευγάρι (A,B) είναι ευσταθές και το ζευγάρι (A,C) ανιχνεύσιμο. Τότε ο Χαμιλτονιανός πίνακας της σχέσης 1.5.3 έχει n ιδιοτιμές με αρνητικά πραγματικά μέρη, καμία ιδιοτιμή στο φανταστικό άξονα και n ιδιοτιμές με θετικά πραγματικά μέρη. Σε αυτήν την περίπτωση η CARE 1.5.2 έχει μια μοναδική ευσταθή λύση X. Επιπλέον, οι ιδιοτιμές κλειστού βρόγχου, που είναι οι ιδιοτιμές του $A - BK$, είναι οι ευσταθείς ιδιοτιμές του H.

Σημείωση :

Η μοναδική ευσταθής λύση της 1.5.2 μπορεί να επιτευχθεί με την κατασκευή ενός αμετάβλητου υποχώρου που θα είναι συνδεδεμένος με την ευσταθείς ιδιοτιμές του Χαμιλτονιανού πίνακα H της σχέσης 1.5.3. Συγκεκριμένα, αν ο πίνακας H δεν έχει φανταστικές ιδιοτιμές και $\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ είναι ο πίνακας που αποτελείται από στήλες των αντίστοιχων ιδιοδιανυσμάτων των ευσταθών ιδιοτιμών του H, τότε υποθέτοντας ότι ο X_1 είναι ομαλός (μη ιδιάζων) έχουμε ότι ο πίνακας $X = X_2 X_1^{-1}$ είναι η μοναδική ευσταθής λύση της CARE.

Ο συνεχούς χρόνου LQR αλγόριθμος

Από το θεώρημα 1.5.1 έχουμε τον επόμενο LQR αλγόριθμο σχεδιασμού

Αλγόριθμος 1.5.1 *Ο συνεχούς χρόνου LQR αλγόριθμος*

Είσοδοι :

Οι πίνακες A, B, Q, R *και* $x(0) = x_0$

Έξοδοι :

X : Η λύση της CARE

K : Ο LQR πίνακας ανάδρασης κέρδους

$Jc_{\min}$: Η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης κόστους $Jc(x)$

Υποθέσεις :

1.Το ζευγάρι (A,B) είναι ευσταθές και το ζευγάρι (A,C) ανιχνεύσιμο

2. Ο Q είναι συμμετρικά θετικά ημιορισμένος και ο R είναι συμμετρικά θετικά ορισμένος.

Βήμα 1 :

Υπολογίζουμε την ευσταθή λύση X της CARE :

$$XA + A^T X + Q - XSX = 0 \ , \ S = BR^{-1}B^T .$$

Βήμα 2 :

Υπολογίζουμε τον πίνακα ανάδρασης κέρδους

$$K = R^{-1}B^T X$$

Βήμα 3 :

Υπολογίζουμε την ελάχιστη τιμή της $Jc(x)$:

$$Jc_{\min} = x_0^T X x_0$$

Παράδειγμα 1.5.1

Θεωρούμε και πάλι τα δεδομένα του παραδείγματος 1.2.1 με

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3.6720 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 22.0320 & 0 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.4 \\ 0 \\ -0.4 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad Q = I_4 \ , \ R = 1 \ , x_o = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Επιπλέον

Βήμα 1 :

Υπολογίζουμε την ευσταθή λύση X της CARE (χρησιμοποιώντας την εντολή care του MATLAB) :

$$X = 10^3 \begin{pmatrix} 0.0031 & 0.0042 & 0.0288 & 0.0067 \\ 0.0042 & 0.0115 & 0.0818 & 0.0191 \\ 0.0288 & 0.0818 & 1.8856 & 0.4138 \\ 0.0067 & 0.0191 & 0.4138 & 0.0911 \end{pmatrix}$$

Βήμα 2 :

Ο πίνακας ανάδρασης κέρδους είναι ο $K = (-1, \ -3.0766, \ -132.7953, \ -28,7861)$

Βήμα 3 :

Η ελάχιστη τιμή της $Jc(x)$ είναι 3100.3

Οι ιδιοτιμές του $A - BK$ είναι $(-4.8994, \ -4.5020, \ -0.4412 \pm 0.3718j)$. Έτσι η X είναι η μοναδική θετικά ορισμένη ευσταθής λύση της CARE. (Σημειώνουμε ότι οι εγγραφές του K είναι μικρότερες σε σχέση με αυτές του παραδείγματος 1.2.1)

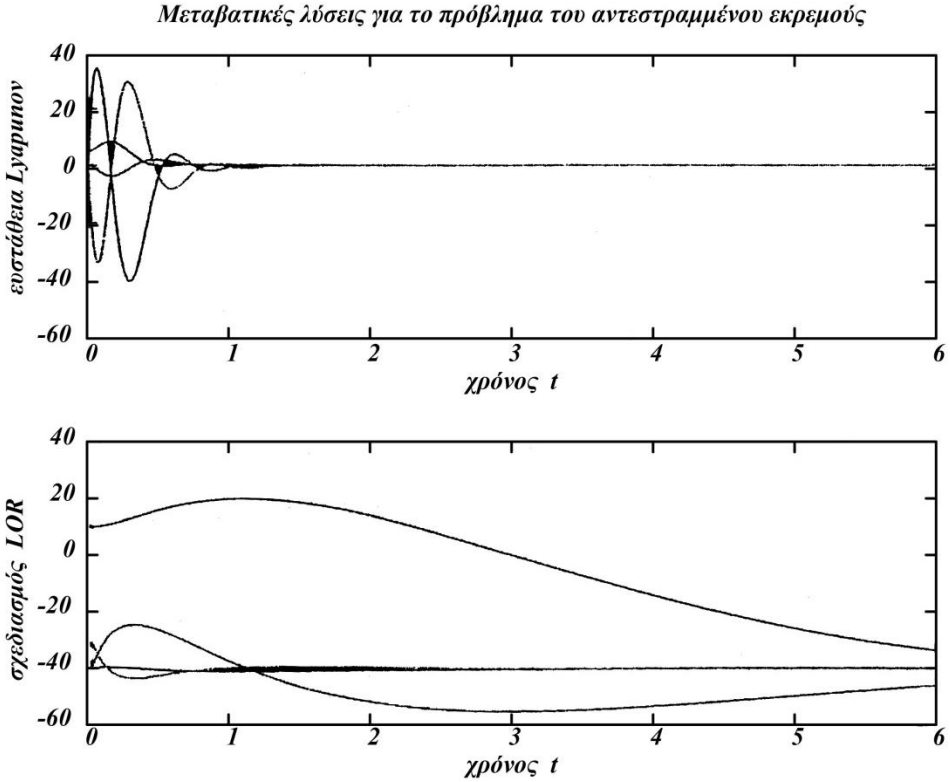
Σύγκριση των μεταβατικών αποκρίσεων με την ευστάθεια Lyapunov

Οι εικόνες 7 και 8 δείχνουν τις μεταβατικές αποκρίσεις με

(i) Το K του παραδείγματος 1.2.1

(ii) Το K του παραδείγματος 1.5.1

Η αρχική κατάσταση είναι $x(0) = (5,0,0,0)^T$.



Εικόνες 7, 8

Στην Εικόνα 7 οι μεταβατικές λύσεις αρχικά έχουν μεγάλα μεγέθη και στη συνέχεια εξασθενούν γρήγορα.

Στην Εικόνα 8 οι λύσεις έχουν μικρότερα μεγέθη, αλλά ο ρυθμός εξασθένησης είναι πολύ πιο αργός.

Το μεγαλύτερο μέγεθος στην εικόνα 7 είναι μεγαλύτερο κατά έξι περίπου φορές από το αντίστοιχο στην εικόνα 8. Σε ορισμένα δυναμικά συστήματα, ισχυρές αρχικές ταλαντώσεις στις καταστάσεις συνιστώσεων πρέπει να αποφεύγονται, αλλά κάποιες φορές είναι επιθυμητή η γρήγορη ευστάθεια. Σε άλλες περιπτώσεις απαιτείται μια πιο αργή αλλά ομαλή ευστάθεια.

Να σημειωθεί ότι οι μεταβατικές λύσεις στην περίπτωση της εικόνας 7 εξαρτώνται από το β ενώ στην περίπτωση της εικόνας 8 από τα Q και R.

Ιδιότητες ευστάθειας και ανθεκτικτότητας του σχεδιασμού LQR

Ο σχεδιασμός LQR έχει κάποιες πολύ ευνοϊκές ιδιότητες ευστάθειας και ανθεκτικτότητας.

Εγγυημένες ιδιότητες ευστάθειας :

Ξεκάθαρα οι ιδιοτιμές κλειστού βρόγχου του σχεδιασμού LQR εξαρτώνται από τους πίνακες Q και R.Θα δείξουμε πως η επιλογή του R επηρεάζει τους πόλους κλειστού βρόγχου.

Υποθέτουμε ότι $R = \rho I$, όπου το ρ είναι θετικό βαθμωτό μέγεθος. Τότε ο συναφής Χαμιλτονιανός πίνακας είναι ο $\mathrm{H} = \begin{pmatrix} \mathrm{A} & -\frac{1}{\rho}\mathrm{BB}^{\mathrm{T}} \\ -Q & -\mathrm{A}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}$.

Οι ιδιοτιμές κλειστού βρόγχου είναι οι ρίζες με αρνητικά πραγματικά μέρη του χαρακτηριστικού πολυωνύμου

$$d_c(s) = \det(sI - H)$$

Ας είναι $Q = C^T C$.Μπορεί να δειχθεί ότι

$$d_c(s) = (-1)^n d(s)d(-s)\det[I + \frac{1}{\rho}G(s)G^T(-s)]$$

Όπου $d(s) = \det(sI - A)$ και $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$.

Περίπτωση 1 : *Χαμηλού κέρδους*

Όταν $\rho \to \infty$ τότε $u(t) = -\left(\frac{1}{\rho}\right)B^T Xx(t) \to 0$. Έτσι ο ελεγκτής LQR έχει χαμηλό κέρδος .

Σε αυτήν την περίπτωση από την έκφραση του $d_c(s)$ συνεπάγεται ότι $(-1)^n d_c(s) \to d(s)d(-s)$

Καθώς οι ρίζες με αρνητικά πραγματικά μέρη του $d_c(s)$, οι οποίες είναι οι ιδιοτιμές κλειστού βρόγχου, είναι ευσταθείς αυτό σημαίνει ότι καθώς το ρ αυξάνεται

- Οι ευσταθείς ιδιοτιμές ανοιχτού βρόγχου παραμένουν ευσταθείς
- Οι ασταθείς αντικατοπτρίζονται σε ολόκληρο το φανταστικό άξονα
- Αν οποιεσδήποτε ανοιχτού βρόγχου ιδιοτιμές είναι ακριβώς στον jω άξονα, οι κλειστού βρόγχου ιδιοτιμές ξεκινούν να κινούνται ακριβώς από τα αριστερά τους.

Περίπτωση 2 : *Υψηλού κέρδους*

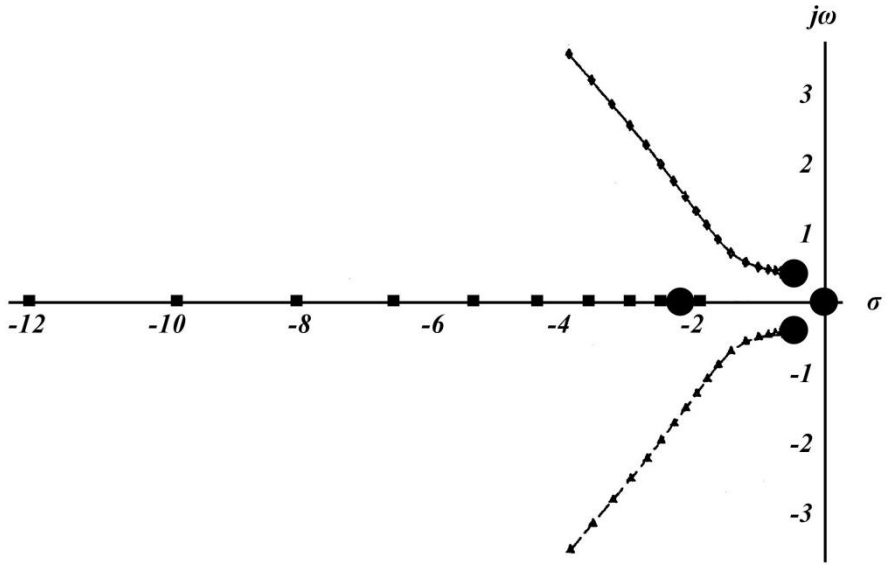
Αν το $\rho \to 0$ τότε το $u(t)$ γίνεται μεγάλο και έτσι ο ελεγκτής LQR έχει υψηλό κέρδος. Σε αυτή την περίπτωση για πεπερασμένο s, οι ιδιοτιμές κλειστού βρόγχου προσεγγίζουν τις πεπερασμένες ρίζες του συστήματος ή τις ευσταθείς εικόνες τους.

Αν το $s \to \infty$ τότε οι ιδιοτιμές κλειστού βρόγχου θα προσεγγίσουν τις ρίζες στο άπειρο στην αποκαλούμενη ευστάθεια Butterworth προτύπου. (Friedland 1986). Ένα παράδειγμα δίνεται στην εικόνα 9.

Αυτές οι ιδιότητες παρέχουν καλή διορατικότητα στην ιδιότητα ευστάθειας των ελεγκτών LQR και έτσι μπορούν να χρησιμοποιηθούν από έναν σχεδιαδιαστή ως κατευθυντήρια γραμμή για την τοποθέτηση των πόλων.

Ιδιότητες ανθεκτικότητας του σχεδιασμού LQR :

Μια σημαντική απαίτηση του σχεδιασμού ενός συστήματος ελέγχου είναι ότι το σύστημα κλειστού βρόγχου πρέπει να είναι ανθεκτικό σε αβεβαιότητες που προκύπτουν από λάθη εξαιτίας του μοντέλου, θορύβους και διαταραχές. Θα δειχθεί ότι ο σχεδιασμός LQR έχει μερικές επιθυμητές ιδιότητες ανθεκτικότητας.



Απεικόνιση των μορφών Butterworth

Εικόνα 9

Τα κλασικά ισχυρά μέτρα ανθεκτικότητας είναι το κέρδος και τα περιθώρια φάσης όπως έχουν οριστεί και με το διάγραμμα του Bode για ένα **απλό σύστημα απλής εισόδου απλής εξόδου (SISO system)**.

Το περιθώριο κέρδους ορίζεται ως το ποσό του κέρδους που απαιτείται για να καταστεί ο βρόχος εκ νέου ενότητα όπου η φασική γωνία είναι180°. Δηλαδή, είναι το αντίστροφο του κέρδους κατά τη συχνότητα, όπου η γωνία φάσης είναι180°. Έτσι, το περιθώριο κέρδους είναι ένα μέτρο με το οποίο το κέρδος του συστήματος πρέπει να αυξηθεί ώστε το σύστημα κλειστού βρόχου να γίνει λίγο ασταθές. Ομοίως, η διαφορά μεταξύ της φάσης της επέμβασης και των 180° όταν το κέρδος βρόχου είναι η μονάδα ονομάζεται περιθώριο φάσης. Έτσι το περιθώριο φάσης είναι το ελάχιστο ποσό της διαφοράς φάσης που απαιτείται για να καταστήσει το σύστημα ασταθές.

Οι ιδιότητες ανθεκτικότητας του σχεδιασμού LQR για ένα **σύστημα πολλαπλής εισόδου πολλαπλής εξόδου (MIMO system)** μπορεί να μελετηθεί από την εξέταση της

διαφοράς απόδοσης του πίνακα $I + G_{LQ}(s)$, όπου το $G_{LQ}(s)$ είναι ο LQR βρόγχος συνάρτησης μεταφοράς πίνακας που δίνεται από τη σχέση :

$$\sigma_{\min}(I + G_{LQ}(j\omega)) = 1.1076$$
$$\sigma_{\min}(I + G_{LQ}^{-1}(j\omega)) = 0.5426$$

Η βέλτιστη ταυτότητα διαφοράς απόδοσης είναι :

$$[I + K(-sI - A)^{-1}B]^T R[I + K(sI - A)^{-1}B] = R + B^T(-sI - A)^{-T}Q(sI - A)^{-1}B$$

ή

$$(I + G_{LQ}^{\ T}(-s))R(I + G_{LQ}(s)) = R + G^T(-s)QG(s)\text{, } \textit{όπου } G(s) = (sI - A)^{-1}B\text{ .}$$

Από την παραπάνω εξίσωση έχουμε

$$(I + G_{LQ}^{\ *}(j\omega))R(I + G_{LQ}(j\omega)) \geq R$$

Έχει δειχθεί από τους Safonov και Athans (1977) ότι αν ο R είναι διαγώνιος πίνακας τέτοιος ώστε

$$(I + G_{LQ}^{\ *}(j\omega))(I + G_{LQ}(j\omega)) \geq I$$

τότε υπάρχει τουλάχιστον 60° του περιθωρίου φάσης σε κάθε κανάλι εισόδου και το περιθώριο κέρδους είναι το άπειρο. Αυτό σημαίνει ότι μια φάση μετατόπισης έως και 60° μπορεί να γίνει ανεκτή κάθε ένα από τα κανάλια εισόδου ταυτόχρονα και το κέρδος σε κάθε κανάλι μπορεί να αυξηθεί επ 'αόριστον χωρίς να χάσει τη σταθερότητα. Από τα παραπάνω συνεπάγεται για όλα τα ω ότι

$$\sigma_{\min}(I + G_{LQ}(j\omega)) \geq 1.$$

Αυτό σημαίνει ότι ο LQR σχεδιασμός πάντα οδηγεί σε μειωμένη ευαισθησία.

Για περισσότερες λεπτομέρειες μπορούμε να ανατρέξουμε στους Anderson και Moore (1990), στο άρθρο “Βέλτιστος Έλεγχος” του F.L. Lewis (1996) που βρίσκεται στο “Εγχειρίδιο Ελέγχου” του William Levine , Lewis (1986,1992) Maciejowski (1989).

Παράδειγμα 1.5.2

Θεωρούμε και πάλι το παράδειγμα 10.5.1 και πάλι.

Για $\omega = 1$, $G_{LQ}(j\omega) = -1.9700 + 0.5345j$

Έχουμε ότι

$$\sigma_{\min}(I + G_{LQ}(j\omega)) = 1.1076$$

$$\sigma_{\min}(I + G_{LQ}^{-1}(j\omega)) = 0.5426$$

Περιθώριο κέρδους = 0.4907
Περιθώριο φάσης = 60.0998

LQR σταθερότητα με πολλαπλασιαστική αβεβαιότητα

Η ανισότητα

$$\sigma_{\min}(I + G_{LQ}(j\omega)) \geq 1$$

Συνεπάγεται ότι

$$\sigma_{\min}(I + G_{LQ}(j\omega))^{-1} \geq \frac{1}{2}$$

Το οποίο σημαίνει ότι ο σχεδιασμός LQR παραμένει ευσταθής για όλα τα χωρίς μέτρου πολλαπλασιαστικής αβεβαιότητας Δ για τα οποία $\sigma_{\min}(\Delta(j\omega)) \leq \frac{1}{2}$.

1.5.2 Το πρόβλημα διακριτού χρόνου LQR

Στην περίπτωση του διακριτού χρόνου, η συνάρτηση που πρέπει να ελαχιστοποιηθεί είναι η

$$J_D(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(x_k^T Q x_k + u_k^T R u_k) \qquad \textbf{(1.5.4)}$$

και η συναφής ARE είναι η :

$$A^T XA - X + Q - A^T XB(R + B^T XB)^{-1} B^T XA = 0 \qquad \textbf{(1.5.5)}$$

η παραπάνω εξίσωση ονομάζεται **Διακριτού Χρόνου Αλγεβρική Εξίσωση Ricatti** (Discrete-time Algebraic Ricatti Equation DARE).

Ένα θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας του βέλτιστου ελέγχου u_k^0 παρόμοιο με το θεώρημα 1.5.1 είναι το εξής (για απόδειξη Sage and White 1977).

Θεώρημα 1.5.3 *Το θεώρημα διακριτού χρόνου LQR*

Ας είναι το (A,B) διακριτά ευσταθές και (A,Q) διακριτά ανιχνεύσιμο. Τότε ο βέλτιστος έλεγχος u_k^0, $k = 0,1,2,\ldots H_\infty$ που ελαχιστοποιεί την $J_D(x)$ δίνεται από τη σχέση $u_k^0 = Kx_k$, όπου $K = (R + B^T XB)^{-1} B^T XA$ και X είναι η μοναδική θετικά ημιορισμένη λύση της DARE 1.5.5. Επιπλέον το σύστημα κλειστού βρόγχου $x_{k+1} = (A - BK)x_k$ είναι διακριτά ευσταθές (π.χ. όλες οι ιδιοτιμές του βρίσκονται αυστηρά εντός του μοναδιαίου κύκλου) και η ελάχιστη τιμή της $J_D(x)$ είναι $x_0^T X x_0$, όπου x_0 είναι η αρχική κατάσταση.

Ορισμός 1.5.4

Μια συμμετρική λύση X της DARE η οποία κάνει τον πίνακα $A-BK$, όπου $K=(R+B^TXB)^{-1}B^TXA$ διακριτά ευσταθή , ονομάζεται **διακριτά ευσταθής λύση της DARE**.

Παράδειγμα 1.5.3

Δίνονται $A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}$, $Q=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

Η λύση X της DARE είναι $X=10^3\begin{pmatrix}0.0051 & -0.0542 & 0.0421\\ -0.542 & 1.09954 & -0.9344\\ 0.0421 & -0.9344 & 0.8127\end{pmatrix}$

Ο διακριτός LQR πίνακας κέρδους $K=(-.0437\,,2.5872\,,-3.4543)$
Και οι ιδιοτιμές του $A-BK$ είναι : -0.4266 , -0.2186 , -0.1228
Έτσι η X είναι μια διακριτά ευσταθής λύση.

1.6 H_∞ προβλήματα ελέγχου

Μέχρι στιγμής έχουμε εξετάσει την σταθεροποίηση του συστήματος αγνοώντας οποιαδήποτε επενέργεια των διαταραχών στο σύστημα. Όμως, γνωρίζουμε ήδη ότι στην πράξη στο σύστημα επιδρούν κάποιου είδους διαταραχές. Ως εκ τούτου, είναι επιθυμητό να σταθεροποιηθούν οι διαταραγμένες εκδόσεις ενός συστήματος, αναλαμβάνοντας κάποια όρια διαταραχών. Αυτή η κατάσταση προκαλεί το γνωστό **"H_∞ πρόβλημα ελέγχου "**.

Η H_∞ θεωρία ελέγχου αποτέλεσε αντικείμενο εντατικής μελέτης για τα τελευταία είκοσι χρόνια περίπου, από τότε που καθιερώθηκε από τον James (1981). Σήμερα υπάρχει άριστη βιβλιογραφία στην περιοχή: τα βιβλία του Francis (1987), Kimura (1996), Zhou (1996), Green και Limebeer (1995) κ.ά. και τα πρωτότυπα έγγραφα από τον Francis και Doyle (1987), Doyle (1989) κλπ.

Ας είναι $\sigma_{\max}(M)$ και $\sigma_{\min}(M)$ η μεγαλύτερη και η μικρότερη ιδιάζουσα τιμή του M .

Ορισμός 1.6.1

Η H_∞νόρμα της ευσταθούς συνάρτησης μεταφοράς $G(s)$ η οποία υποδηλώνεται από την $\|G\|_\infty$ ορίζεται ως :

$$\|G\|_\infty=\sup_{\omega\in\mathbb{R}}\sigma_{\max}(G(j\omega))$$

Φυσική ερμηνεία της H_∞νόρμας

Έστω το σύστημα

$$y(s) = G(s)u(s)$$

Όταν το σύστημα οδηγείται με μια ημιτονοειδή είσοδο του μεγέθους μονάδα σε μια συγκεκριμένη συχνότητα, το $\sigma_{\max}(G(j\omega))$ είναι το μεγαλύτερο δυνατό μέγεθος της εξόδου για το αντίστοιχο ημιτονοειδούς εισόδου. Έτσι η H_∞ νόρμα δίνει τη μεγαλύτερη δυνατή ενίσχυση σε όλες τις συχνότητες μιας μονάδας ημιτονοειδούς εισόδου.

Μια περαιτέρω συζήτηση των H_∞ προβλημάτων ελέγχου είναι πέρα από τον στόχο μας. Η αρχική διατύπωση ήταν σε μια ρύθμιση εισόδου / εξόδου. Ωστόσο, λόγω της ελκυστικότητάς υπολογισμού της, η πρόσφατη διαμόρφωση κατάστασης χώρου διάστημα **(state-space)** έχει γίνει πιο δημοφιλής. Δηλώνουμε μόνο τις δύο απλοποιημένες εκδόσεις των διαμορφωμένων καταστάσεων χώρου των H_∞ προβλημάτων ελέγχου και αναφέρουμε το συσχετισμό τους με της ARE. Πρώτα αποδεικνύουμε το επόμενο αρκετά γνωστό αποτέλεσμα που δείχνει πως η H_∞ νόρμα ενός ευσταθούς πίνακα συνάρτησης μεταφοράς σχετίζεται με μια ARE ή ισοδύναμα, με τους συνδεδεμένους Χαμιλτονιανους πίνακες.

Ορίζουμε τον Χαμιλτονιανό πίνακα των συντελεστών των πινάκων του συστήματος 1.2.1

$$M_\gamma = \begin{pmatrix} A + BR^{-1}D^TC & BR^{-1}B^T \\ -C^T(I + DR^{-1}D^T)C & -(A + BR^{-1}D^TC)^T \end{pmatrix} \qquad \textbf{(1.6.1)}$$

Όπου $R = \gamma^2 I - D^T D$.

Θεώρημα 1.6.1

Ας είναι $G(s)$ μια ευσταθής συνάρτηση μεταφοράς και έστω $\gamma > 0$. Τότε ισχύει $\|G\|_\infty < \gamma$ αν και μόνο αν $\sigma_{\max}(D) < \gamma$ και το M_γ που έχει οριστεί από τη σχέση 1.6.1 δεν έχει καθόλου φανταστικές ιδιοτιμές.

Απόδειξη

Θα κάνουμε την απόδειξη για $D = 0$.Χωρίς καμία απώλεια της γενικότητας υποθέτουμε ότι $\gamma = 1$. Αλλιώς μπορούμε να μετατρέψουμε το G σε $\gamma^{-1}G$ και το B σε $\gamma^{-1}B$ και να δουλέψουμε με τα νέα G κ$\alpha\iota$ B.

Καθώς $\gamma = 1$ και $D = 0$ έχουμε ότι $R = I$.Χρησιμοποιώντας το συμβολισμό :

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix}$$

Ένας εύκολος υπολογισμός δείχνει ότι

$$\Gamma(s) = I - G(-s)^T G(s) \qquad \textbf{(1.6.2)}$$

τότε

$$\Gamma^{-1}(s)=\begin{bmatrix} A & BB^T & B \\ -C^TC & -A^T & 0 \\ 0 & B^T & I \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} M_\gamma & & B \\ & & 0 \\ 0 & \mathrm{B}^T & \mathrm{I} \end{bmatrix} \qquad \textbf{(1.6.3)}$$

Έτσι από τα παραπάνω συνεπάγεται ότι το M_γ που έχει οριστεί από τη σχέση 1.6.1 δεν έχει καθόλου φανταστικές ιδιοτιμές αν και μόνο αν το $\Gamma^{-1}(s)$ δεν έχει καθόλου πόλους στο φανταστικό άξονα. Θα δείξουμε ότι αυτό αληθεύει αν και μόνο αν $\|G\|_\infty < 1$.

Αν $\|G\|_\infty < 1$ τότε $I - G(j\omega)^* G(j\omega) > 0$ για κάθε ω και ως εκ τούτου το $\Gamma^{-1}(s) = (\mathrm{I} - G(-s)^T G(s))^{-1}$ δεν έχει κανένα πόλο στο φανταστικό άξονα. Από την άλλη αν $\|G\|_\infty \geq 1$ τότε $\sigma_{\max}(G(j\omega)) = 1$ για κάποια ω, το οποίο σημαίνει ότι το 1 είναι η ιδιοτιμή του $G(j\omega)^* G(j\omega)$ υπονοώντας ότι ο $I - G(j\omega)^* G(j\omega)$ είναι ιδιάζων.

Η απόδειξη εύκολα γίνεται και για την περίπτωση που $D \neq 0$.

Το επόμενο παράδειγμα που δόθηκε από τον Kimura (1996) απεικονίζει το θεώρημα 1.6.1

Παράδειγμα 1.6.1

Έστω $G(s) = \dfrac{1}{s+a}$, $a > 0$

Και ο συνδεδεμένος Χαμιλτονιανός πίνακας

$$H = \begin{pmatrix} -a & 1 \\ -1 & a \end{pmatrix}$$

Τότε ο H δεν έχει καμιά φανταστική ιδιοτιμή αν και μόνο αν $a > 1$.

Καθώς $\|G\|_\infty = \sup_\omega \dfrac{1}{\sqrt{\omega^2 + a^2}} = \dfrac{1}{a}$, έχουμε για $a > 1$ ότι $\|G\|_\infty < 1$.

1.6.1 Υπολογισμός της H_∞ νόρμας

Μια απευθείας μέθοδος υπολογισμού της H_∞ νόρμας είναι :

<u>Βήμα 1 :</u>

Υπολογίζουμε τον πίνακα $G(j\omega)$ με τη μέθοδο Hessenberg

<u>Βήμα 2 :</u>

Υπολογίζουμε τη μεγαλύτερη ιδιάζουσα τιμή του $G(j\omega)$.

<u>Βήμα 3 :</u>

Επαναλαμβάνουμε τα βήματα 1 και 2 για πολλές τιμές του ω.

Φυσικά, τα παραπάνω δεν είναι πρακτικά και υπολογιστικά είναι ακατόρθωτα. Το θεώρημα 1.6.1 μας δίνει μια πολύ πιο εφικτή πρακτικά μέθοδο υπολογισμού της H_∞ νόρμας.

Βήμα 1 :

Διαλέγουμε το γ

Βήμα 2 :

Εξετάζουμε αν $\|G\|_\infty < \gamma$ υπολογίζοντας τις ιδιοτιμές του M_γ και βλέποντας αν ο πίνακας M_γ έχει κάποια φανταστική ιδιοτιμή

Βήμα 3 :

Επαναλαμβάνουμε αυξάνοντας ή μειώνοντας το γ ανάλογα με το αν $\|G\|_\infty < \gamma$ ή $\|G\|_\infty \geq \gamma$.

Η μέθοδος διχοτόμησης (αλγόριθμος 1.6.1) που θα παρουσιάσουμε (Boyd 1989) είναι μια αποτελεσματική και συστηματική εφαρμογή των ανωτέρω ιδέας.

Αλγόριθμος 1.6.1 *Ο αλγόριθμος διχοτόμησης για τον υπολογισμό της H_∞ νόρμας*

Είσοδοι :

Οι πίνακες A_{nxn} , B_{nxm} , C_{rxn} , D_{rxm}

γ_{lb} : Το κατώτερο φράγμα για την H_∞ νόρμα

γ_{ub} : Το ανώτερο φράγμα για την H_∞ νόρμα

$\varepsilon > 0$: Η ανοχή λάθους

Έξοδοι :

Μια προσέγγιση της H_∞ νόρμας με μια σχετική ακρίβεια του $\in$

Υποθέσεις :

Ο A είναι ευσταθής.

Βήμα 1 :

Θέτουμε $\gamma_L \equiv \gamma_{lb}$ *και* $\gamma_U \equiv \gamma_{ub}$

Βήμα 2 :

Επαναλαμβάνουμε μέχρι $\gamma_U - \gamma_L \leq 2\varepsilon\gamma_L$

Υπολογίζουμε $\gamma = \dfrac{\gamma_L + \gamma_U}{2}$

Ελέγχουμε αν το M_γ που έχει οριστεί από τη σχέση 1.6.1 έχει φανταστική ιδιοτιμή

Αν όχι θέτουμε $\gamma_U = \gamma$

Αλλιώς θέτουμε $\gamma_L = \gamma$.

Σημείωση :

Έπειτα από k επαναλήψεις έχουμε ότι $\gamma_U - \gamma_L = 2^{-k}(\gamma_{ub} - \gamma_{lb})$. Έτσι, κατά την έξοδο, ο αλγόριθμος είναι εγγυημένος για να δώσει μια προσέγγιση της H_∞ νόρμας με μια σχετική ακρίβεια του $\in$.

Σύγκλιση :

Η σύγκλιση του αλγορίθμου είναι γραμμική και είναι ανεξάρτητη από τα στοιχεία των πινάκων A_{nxn} , B_{nxm} , C_{rxn} , D_{rxm}

Σημείωση :

Ένας ισοδύναμος αλγόριθμος για τον παραπάνω αλγόριθμο διχοτόμησης προτάθηκε επίσης από τον Robel (1989)

Παρατήρηση :

Η κατάσταση ότι το M_γ δεν έχει φανταστική ιδιοτιμή (στο βήμα 2) μπορεί επίσης να εκφράστει σε όρους από την παρακάτω εξίσωση Ricatti :

$$XA + A^T X + \gamma^{-1} XBR^{-1}B^T X + \gamma^{-1} C^T C = 0$$

(υποθέτοντας ότι D=0)

Παράδειγμα 1.6.2 :

$$\gamma_{lb} = \max\{\sigma_{\max}(D), \sqrt{Trace\frac{(C_G O_G)}{n}}$$

$$\gamma_{ub} = \sigma_{\max}(D) + 2\sqrt{nTrace(C_G O_G)}$$

όπου C_G και O_G είναι η **ελεγξιμότητα** και **η παρατηρησιμότητα Grammians** αντίστοιχα και

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \ , \ B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ , \ C = (1,1,1) \ , \ D = 0 \ , \ \varepsilon = 0.0014$$

Βήμα 1 :

$\gamma_L = 0.2887$

$\gamma_U = 1.7321$

Βήμα 2 :

- Επανάληψη 1

$\gamma = 1.0104$

Οι ιδιοτιμές του M_γ είναι : 2 , 4 , -0.1429 , -2 , -4 . Καθώς το M_γ δεν έχει αμιγώς φανταστικές ιδιοτιμές, συνεχίζουμε.

- Επανάληψη 2

$\gamma = 0.6495$

Οι ιδιοτιμές του M_γ είναι : 2 , 4 , 0±1.1706j , -2 , -4 . Καθώς το M_γ έχει μια αμιγώς φανταστική ιδιοτιμή, θέτουμε

$\gamma_L = 0.6495$

$\gamma_U = 1.0103$

• Επανάληψη 3

$\gamma = 0.8299$

Οι ιδιοτιμές του M_γ είναι : 2 , 4 , 0±0.6722j , -2 , -4 . Καθώς το M_γ έχει μια αμιγώς φανταστική ιδιοτιμή, θέτουμε

$\gamma_L = 0.8299$

$\gamma_U = 1.0103$

Οι τιμές του γ σε διαδοχικές επαναλήψεις διαπιστώθηκε ότι ήταν : 0.9202 , 0.9653 , 0.9878 , 0.9991 , 0.9998 και 1 και οι επαναλήψεις σταματούν στο σημείο αυτό καθώς ικανοποιείται το κριτήριο διακοπής. Έτσι παίρνουμε ότι η H_∞ νόρμα ισούται με 1.

Υπολογισμός των γ_{lb} **και** γ_{ub}

Για την πρακτική εφαρμογή του παραπάνω αλγορίθμου, χρειάζεται να γνωρίζουμε πώς να υπολογίσουμε τα γ_{lb} και γ_{ub} .Θα συζητήσουμε αυτή την άποψη τώρα

Ορισμός 1.6.2 :

Οι Hankel ιδιάζουσες τιμές είναι οι τετραγωνικές ρίζες των ιδιοτιμών του πίνακα $C_G O_G$, όπου C_G και O_G είναι η **ελεγξιμότητα** και **η παρατηρησιμότητα Grammians** αντίστοιχα.

Τα φράγματα γ_{lb} και γ_{ub} μπορούν να υπολογιστούν με χρήση των Hankel ιδιαζουσών τιμών ως εξής :

$$\gamma_{lb} = \max\{\sigma_{\max}(D), \sigma H_1\}$$

$$\gamma_{ub} = \sigma_{\max}(D) + 2\sum_{i=1}^{n} \sigma H_1 \qquad \textbf{(1.6.4)}$$

Όπου $\sigma H_k s$ είναι οι **διατεταγμένες Hankel ιδιάζουσες τιμές**. Αυτά τα φράγματα οφείλονται στους Enns (1984) και Glover (1984) και ο τύπος 1.6.4 είναι γνωστός ως τύπος των Enns και Glover.

Ένα σχήμα υπολογισμού των γ_{lb} και γ_{ub} είναι το εξής :

<u>Βήμα 1 :</u>

Επιλύουμε τις εξισώσεις Lyapunov

$$AC_G + C_G AT = -BB^T \ \kappa\alpha\iota \ O_G A + A^T O_G = -C^T C$$

για να υπολογίσουμε τα C_G και O_G .

Βήμα 2 :

Υπολογίζουμε τις ιδιοτιμές του πίνακα $C_G O_G$.

Βήμα 3 :

Βρίσκουμε τις Hankel ιδιάζουσες τιμές παίρνοντας τις τετραγωνικές ρίζες των ιδιοτιμών του πίνακα $C_G O_G$.

Βήμα 4 :

Υπολογίζουμε τα γ_{lb} και γ_{ub} παίρνοντας τον τύπο των Enns και Glover.

Εναλλακτικά, στον υπολογισμό των ιδιοτιμών μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τους εξής τύπους :

$$\gamma_{lb} = \max\{\sigma_{\max}(D), \sqrt{Trace\frac{(C_G O_G)}{n}}$$

$$\gamma_{ub} = \sigma_{\max}(D) + 2\sqrt{nTrace(C_G O_G)}$$

Σημείωση :

Μπορούν να αναμένονται αριθμητικές δυσκολίες στη διαμόρφωση του $C_G O_G$.

Ο αλγόριθμος των δύο βημάτων

Οι Bruinsma και Steinbuch (1990) ανέπτυξαν ένα αλγόριθμο δύο βημάτων για τον υπολογισμό της H_∞ νόρμας του $G(s)$.Ο αλγόριθμος τους θεωρείται ταχύτερος από τον αλγόριθμο διχοτόμησης που αναλύσαμε προηγουμένως. Η σύγκλιση φέρεται να είναι τετραγωνική.

Ο αλγόριθμος καλείται αλγόριθμος "δύο βημάτων" γιατί αρχίζει με κάποιο κατώτερο φράγμα $\gamma < \|G\|_\infty$ ως πρώτο βήμα και στο δεύτερο βήμα αυτό το κατώτερο φράγμα είναι επαναληπτικά βελτιωμένο και η διαδικασία συνεχίζεται μέχρι να ικανοποιηθεί κάποια "ανοχή".

Ένα νέο κατώτερο φράγμα για την H_∞ νόρμα

Ο αλγόριθμος των δύο βημάτων, όπως και ο αλγόριθμος διχοτόμησης, απαιτεί μια τιμή εκκίνησης για το γ_{lb}.Ο τύπος των Enns και Glover μπορεί να χρησιμοποιηθεί γι αυτόν τον σκοπό. Ωστόσο οι συντάκτες πρότειναν να χρησιμοποιηθεί ως τιμή εκκίνησης για το γ_{lb}:

$$\gamma_{lb} = \max\{\sigma_{\max}(0)), \sigma_{\max}(G(j\omega_p)), \sigma_{\max}(D)\}$$

Όπου $\omega_p = \lambda_i$, λ_i ένας πόλος του $G(s)$ με το λ_i να έχει επιλεγεί έτσι ώστε να μεγιστοποιεί το $\left|\frac{\mathrm{Im}(\lambda_i)}{\mathrm{Re}(\lambda_i)}\frac{1}{|\lambda_i|}\right|$ αν το $G(s)$ έχει πόλους με $\mathrm{Im}(\lambda_i) \neq 0$ ή να ελαχιστοποιούν το $|\lambda_i|$ αν το $G(s)$ έχει μόνο πραγματικούς πόλους.

Αλγόριθμος 1.6.2 Ο αλγόριθμος δύο βημάτων για τον υπολογισμό της H_∞ νόρμας

Είσοδοι :

Οι πίνακες A_{nxn} , B_{nxm} , C_{rxn} , D_{rxm}

Έξοδοι :

Μια προσέγγιση της H_∞ νόρμας.

Υποθέσεις :

Ο A είναι ευσταθής.

Βήμα 1 :

Υπολογίζουμε μια τιμή εκκίνησης για το γ_{lb} , χρησιμοποιώντας το παραπάνω κριτήριο.

Βήμα 2 :

Επαναλαμβάνουμε

2.1 Υπολογίζουμε το $\gamma = (1+2\in)\gamma_{lb}$

2.2 Υπολογίζουμε τις ιδιοτιμές του M_γ με την τιμή του γ που υπολογίστηκε στο βήμα 2.1. Ονομάζουμε τις αμιγώς φανταστικές ιδιοτιμές του M_γ $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_k$

2.3 Αν το M_γ δεν έχει μια αμιγώς φανταστική ιδιοτιμή θέτουμε $\gamma_{lb} = \gamma$ και σταματούμε.

2.4 Για $i = 1, 2, ..., k-1$ κάνουμε

(i) Υπολογίζουμε $m_i = \frac{1}{2}(\omega_i + \omega_{i+1})$.

(ii) Υπολογίζουμε τις ιδιάζουσες τιμές του $G(jm_i)$.

Ενημερώνουμε το $\gamma_{lb} = \max_i(\sigma_{\max} G(jm_i))$.

Τέλος του i

Βήμα 3 :

$$\|G\|_\infty = \frac{1}{2}(\gamma_{lb} + \gamma_{ub})$$

Τέλος

Σημείωση :

Οι Boyd και Balakrishnan (1990) πρότειναν επίσης έναν αλγόριθμο παρόμοιο με τον αλγόριθμο των δύο βημάτων. Ο αλγόριθμός τους συγκλίνει τετραγωνικά. Ο αλγόριθμος 1.6.2 πιστεύεται επίσης ότι συγκλίνει τετραγωνικά, αλλά καμία απόδειξη δεν έχε δοθεί. Επίσης ο Lin (1999) έχει παρουσιάσει άλλες αξιόπιστες και αποτελεσματικές μεθόδους τόσο για τα προβλήματα κατάστασης, όσο και για τα προβλήματα ανάδρασης εξόδου.

Σύνδεση μεταξύ της H_∞ νόρμας και την απόσταση των ασταθών πινάκων

Θα παρουσιάσουμε μια σύνδεση μεταξύ της H_∞ νόρμας της ανάλυσης του A και του $\beta(A)$ της απόστασης από το σύνολο των ασταθών πινάκων.

Θεώρημα 1.6.2

Ας είναι A ένας μιγαδικός ευσταθής πίνακας τότε $\beta(A) = \left\|(sI - A)^{-1}\right\|_\infty^{-1}$.

Υπολογισμός της H_∞ νόρμας ενός διακριτού ευσταθούς πίνακα συνάρτησης μεταφοράς

Ας είναι $M(z) = C(zI - A)^{-1}B$ ο πίνακας συνάρτησης μεταφοράς του ασυμπτωτικά ευσταθούς διακριτού χρόνου συστήματος :

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k$$
$$y_k = Cx_k + Du_k$$

Τότε

Ορισμός 1.6.3

Η **H_∞ νόρμα του** $M(z)$ ορίζεται ως εξής :

$$\left\|M(z)\right\|_\infty = \sup_{|z|\geq 1} \sigma_{\max}(M(z)) \quad \left\|M(z)\right\|_\infty = \sup_{|z|\geq 1} \sigma_{\max}(M(z))$$

Το επόμενο είναι ένα διακριτό ανάλογο του θεωρήματος 1.6.1. Η απόδειξη, η οποία παραλείπεται, έχει δοθεί από τον Zhou (1996).

Θεώρημα 1.6.3

Ας είναι

$$S = \begin{pmatrix} A - BB^T(A^T)^{-1}C^TC & BB^T(A^T)^{-1} \\ -(A^T)^{-1}C^TC & (A^T)^{-1} \end{pmatrix}$$

ο συμπλεκτικός πίνακας που είναι συνδεδεμένος με το παραπάνω ευσταθές διακριτού χρόνου σύστημα. Υποθέτουμε ότι ο A είναι μη ιδιάζων (ομαλός) και ότι το σύστημα δεν έχει καθόλου μη ελέγξιμες και μη παρατηρήσιμες ταλαντώσεις στο μοναδιαίο κύκλο.

Τότε $\left\|M(z)\right\|_\infty < 1$ αν και μόνο αν το S δεν έχει ιδιοτιμές στο μοναδιαίο κύκλο και $\left\|C(I - A)^{-1}B\right\|_2 < 1$.

Υπολογισμός της H_∞ νόρμας ενός διακριτού ευσταθούς συστήματος

Το παραπάνω θεώρημα μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως βάση για να αναπτύξουμε έναν αλγόριθμο διχοτόμησης, ανάλογο του Αλγορίθμου 1.6.1 για να υπολογίσουμε την H_∞ νόρμα ενός διακριτού ευσταθούς συστήματος.

1.6.2 Το Πρόβλημα Ελέγχου H_∞ : Μια υπόθεση ανάδρασης κατάστασης

Θεωρούμε το γραμμικό σύστημα ελέγχου :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + Ed(t) \ , \ x(0) = 0 \\ z(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \qquad \textbf{(1.6.5)}$$

Εδώ τα $x(t), u(t), z(t)$ παριστάνουν την κατάσταση, την είσοδο ελέγχου και τα ελεγχόμενα διανύσματα εξόδου αντίστοιχα. Το διάνυσμα $d(t)$ είναι το διάνυσμα διαταραχής, Οι πίνακες A, B, C, D, E έχουν κατάλληλες διαστάσεις. Ας υποθέσουμε ότι μιας κατάστασης ανατροφοδότησης νόμος ελέγχου

$$u(t) = Kx(t)$$

εφαρμόζεται στο σύστημα. Τότε το σύστημα κλειστού βρόγχου γίνεται :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A + BK)x(t) + Ed(t) \\ z(t) &= (C + DK)x(t) \end{aligned} \qquad \textbf{(1.6.6)}$$

Η συνάρτηση μεταφοράς από το d στο z είναι :

$$T_{zd}(s) = (C + DK)(sI - A - BK)^{-1} E \qquad \textbf{(1.6.7)}$$

Ας υποθέσουμε ότι η επίδραση του διανύσματος διαταραχής $d(t)$ στην έξοδο $z(t)$ μετράται από την H_∞ νόρμα του $T_{zd}(s)$. Ο στόχος του προβλήματος ελέγχου της κατάστασης ανατροφοδότησης H_∞ είναι να βρεθεί ένας συνεχούς ανατροφοδότησης πίνακας K έτσι ώστε το σύστημα κλειστού βρόχου να είναι ευσταθές και η H_∞ νόρμα του πίνακα μεταφοράς $T_{zd}(s)$ να είναι μικρότερη από μια προκαθορισμένη ανοχή.

Συγκεκριμένα, το πρόβλημα ανάδρασης κατάστασης αναφέρει τα εξής :
Δοθέντος ενός θετικού πραγματικού αριθμού γ , να βρεθεί πίνακας K διάστασης mxn τέτοιος ώστε το σύστημα κλειστού βρόγχου να είναι ευσταθές και $\|T_{zd}(s)\|_\infty < \gamma$.

Έτσι, επιλύοντας το παραπάνω πρόβλημα, θα σταθεροποιηθούν οι διαταραγμένες εκδοχές του αρχικού συστήματος, όσο το μέγεθος των διαταραχών δεν υπερβαίνει ένα συγκεκριμένο όριο ανοχής.

Το επόμενο θεώρημα που διατύπωσε ο Doyle (1989) δηλώνει μια λύση του παραπάνω προβλήματος από την άποψη της λύσης μιας ARE.

Θεώρημα 1.6.4 *Ένα πρόβλημα κατάστασης ανάδρασης H_∞*

Ας είναι το (A,C) παρατηρήσιμο και τα ζεύγη (A,B) και (A,E) ευσταθή. Υποθέτουμε ότι $DTD = I$ και $DTC = 0$. Τότε το H_∞ πρόβλημα που παρουσιάσαμε προηγουμένως, έχει λύση αν και μόνο αν υπάρχει μια θετικά ημιορισμένη λύση X της ARE :

$$A^T X + XA - X(BB^T - \frac{1}{\gamma^2} EE^T)X + C^T C = 0 \qquad \textbf{(1.6.8)}$$

τέτοια ώστε το

$$A(\frac{1}{\gamma^2} EE^T - BB^T)X$$

να είναι ευσταθές. Σε αυτή την περίπτωση ο πίνακας κατάστασης ανάδρασης K δίνεται από τη σχέση :

$$K = -B^T X \qquad \textbf{(1.6.9)}$$

Απόδειξη

Η απόδειξη μπορεί να γίνει σημειώνοντας τη σχέση μεταξύ της ARE 1.6.8 και του συνδεδεμένου Χαμιλτονιανού πίνακα :

$$H_\gamma = \begin{pmatrix} A & \frac{1}{\gamma^2} EE^T - BB^T \\ -C^T C & -A^T \end{pmatrix} \qquad \textbf{(1.6.10)}$$

όπως αναφέρθηκε στο θεώρημα 1.5.2 και μετά εφαρμόζοντας το θεώρημα 1.6.1 στον πίνακα συνάρτησης μεταφοράς $T_{zd}(s)$.

<u>Παρατηρήσεις :</u>

1. Για την εφαρμογή του θεωρήματος 1.6.1 στον πίνακα συνάρτησης μεταφοράς $T_{zd}(s)$ απαιτείται η αντικατάσταση των A, B, C, R του θεωρήματος 1.6.1 ως εξής :

$$A \to A + BK = A - BB^T X$$

$$C \to C + DK = C - DB^T X$$

$$B \to E$$

$$R \to \gamma^2 I - I = (\gamma^2 - 1)I$$

και χρησιμοποιώντας τις υποθέσεις $DTD = I$ και $DTC = 0$.

2. Η ARE 1.6.8 δεν είναι η συνηθισμένη LQR εξίσωση, η γνωστή μας CARE 1.5.2 γιατί ο όρος $BB^T - \frac{1}{\gamma^2} EE^T$ μπορεί να είναι αόριστος για συγκεκριμένες τιμές του γ. Ωστόσο όταν το $\gamma \to \infty$ η ARE 1.6.8 μετατρέπεται στην CARE με $R = I$:

$$XA + ATX - XBBTX + CTC = 0$$

3. Όταν το H_γ έχει φανταστικές ιδιοτιμές, τότε το H_∞ πρόβλημα όπως έχει οριστεί παραπάνω δεν έχει λύση.

Σε μια πιο ρεαλιστική κατάσταση, όταν χρησιμοποιείται μια πιο δυναμικής μέτρησης ανάδραση σε σχέση με αυτή που χρησιμοποιείται εδώ, η λύση του αντίστοιχου H_∞ προβλήματος ελέγχου δίνεται από ένα ζευγάρι εξισώσεων ARE. Λεπτομέρειες μπορούμε να βρούμε στους Doyle (1989) , Kimura (1996) Green και Limebeer (1995) Zhou (1996). Θα παρουσιάσουμε τα αποτελέσματα του Doyle (1989)

1.6.3 Το Πρόβλημα Ελέγχου H_∞ : Μια υπόθεση ανάδρασης εξόδου

Ας θεωρήσουμε το σύστημα που περιγράφεται από τις εξισώσεις του χώρου καταστάσεως

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_1\omega(t) + B_2u(t) \\ z(t) &= C_1x(t) + D_{12}u(t) \\ y(t) &= C_2x(t) + D_{21}\omega(t) \end{aligned} \qquad \textbf{(1.6.11)}$$

Όπου $x(t)$ το διάνυσμα κατάστασης, $\omega(t)$ το σήμα διαταραχής, $u(t)$ η είσοδος ελέγχου, $z(t)$ η ελεγχόμενη έξοδος και $y(t)$ η μετρήσιμη έξοδος.

Η συνάρτηση μεταφοράς από την είσοδο $\begin{bmatrix} \omega \\ u \end{bmatrix}$ στην έξοδο $\begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix}$ δίνεται από τη σχέση :

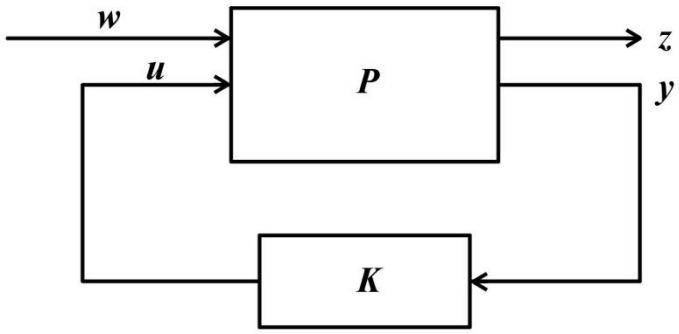
$$G(s) = \begin{pmatrix} 0 & D_{12} \\ D_{21} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} (sI - A)^{-1}(B_1, B_2) = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix}.$$

Ορίζουμε έναν ελεγκτή ανάδρασης $K(s)$ από τη σχέση $u = K(s)y$.

Τότε ο κλειστού βρόγχου συνάρτησης μεταφοράς πίνακας $T_{z\omega}(s)$ από το θόρυβο ω στην έξοδο z δίνεται από τη σχέση :

$$T_{z\omega}(s) = G_{11} + G_{12}K(I - G_{22}K)^{-1}G_{21}$$

Τότε, ο στόχος του H_∞ προβλήματος ελέγχου σ' αυτή την υπόθεση είναι να βρούμε έναν ελεγκτή $K(s)$ τέτοιο ώστε $\|T_{z\omega}(s)\|_\infty < \gamma$ για δοθέντα θετικό αριθμό γ. Στην Εικόνα 10 το P είναι το γραμμικό σύστημα που περιγράφεται από τη σχέση 1.6.11.



Εικόνα 10

Μια λύση για το παραπάνω H_∞ πρόβλημα ελέγχου δίνεται στο θεώρημα που ακολουθεί. Έχουμε τις ακόλουθες υποθέσεις :

i. Το (A, B_1) είναι ευσταθές και το (A, C_1) είναι ανιχνεύσιμο. **(1.6.12)**

ii. Το (A, B_2) είναι ευσταθές και το (A, C_2) είναι ανιχνεύσιμο. **(1.6.13)**

iii. $D_{12}^T(C_1, D_{12}) = (0, I)$ **(1.6.14)**

iv. $\begin{pmatrix} B_1 \\ D_{21} \end{pmatrix} D_{21}^T = \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix}$ **(1.6.15)**

Εδώ το I παριστάνει ένα μοναδιαίο πίνακα καταλλήλων διαστάσεων.

Θεώρημα 1.6.5 *Το θεώρημα εξόδου ανάδρασης H_∞*

Κάτω από τις υποθέσεις 1.6.12 , 1.613 , 1.6.14 , 1.6.15 το εξόδου ανάδρασης H_∞ πρόβλημα ελέγχου όπως δηλώθηκε παραπάνω έχει μια λύση αν και μόνο αν υπάρχουν μοναδικές συμμετρικές θετικά ημιορισμένες ευσταθείς λύσεις X και Y αντίστοιχα για το ζεύγος των ARE

$$XA + A^T X - X(B_2 B_2^T - \frac{1}{\gamma^2} B_1 B_1^T)X + C_1^T C_1 = 0 \qquad \textbf{(1.6.16)}$$

$$AY + YA^T - Y(C_2^T C_2 - \frac{1}{\gamma^2} C_1^T C_1)Y + B_1 B_1^T = 0 \qquad \textbf{(1.6.17)}$$

και $\rho(XY) < \gamma^2$, όπου $\rho(XY)$ είναι η **φασματική ακτίνα** του πίνακα XY .

Επιπλέον, σε αυτήν την περίπτωση, ένας τέτοιος ελεγκτής δίνεται από τη συνάρτηση μεταφοράς

$$K(s) = -F(sI - \hat{A})^{-1} ZL \qquad \textbf{(1.6.18)}$$

όπου

$$\hat{A} = A + \frac{1}{\gamma^2} B_1 B_1^T X + B_2 F + ZLC_2 \qquad \textbf{(1.6.19)}$$

και

$$F = -B_2^T X \quad , \quad L = -YC_2^T \quad , \quad Z = \left(I - \frac{1}{\gamma^2} YX \right)^{-1} \qquad \textbf{(1.6.20)}$$

Για την απόδειξη μπορούμε να ανατρέξουμε στον Doyle (1989)

Σημειώσεις :

1. Η δεύτερη εξίσωση Ricatti είναι δευτερεύουσα σε σχέση με την πρώτη και είναι του τύπου που ανακύπτουν από το φίλτρο του Kalman.
2. Μια γενική λύση χωρίς τις υποθέσεις 1.6.14 και 1.6.15 δόθηκε από τους Glover και Doyle (1988).

Παράδειγμα 1.6.3 ***Zhou (1996)***

Ας είναι

$A = a$, $B_1 = (1, 0)$, $B_2 = b_2$,

$C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $D_{12} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$C_2 = c_2$, $D_{21} = (0, 1)$

τότε

$$D_{12}^T(C_1, D_{12}) = (0,1)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = (0,1)$$

και

$$\begin{pmatrix}B_1\\ D_{21}\end{pmatrix} D_{21}^T = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$$

Έτσι οι υποθέσεις 1.6.14 και 1.6.15 ικανοποιούνται.

Ας είναι $a = -1$, $b_2 = c_2 = 1$ και έστω $\gamma = 2$.

$$T_{z\omega} = \begin{pmatrix}-1.7321 & 1 & -0.7321\\ 1 & 0 & 0\\ -0.7321 & 0 & -0.7321\end{pmatrix}$$

και $$\|T_{z\omega}\|_\infty = -0.7321 < \gamma = 2.$$

Βέλτιστος H$_\infty$ Έλεγχος

Το πρόβλημα εξόδου H$_\infty$ ελέγχου σε αυτό το τμήμα είναι γνωστό ως το Ημιβέλτιστο Πρόβλημα Ελέγχου H$_\infty$. Ιδανικά θα πρέπει να έχουμε υπόψη το H_∞ Πρόβλημα Βέλτιστου Ελέγχου σύμφωνα με το οποίο : *Να βρεθούν όλοι οι αποδεκτοί ελεγκτές* $K(s)$ *έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται το* $\|T_{z\omega}\|_\infty$.

Η εύρεση ενός βέλτιστου H_∞ ελεγκτή είναι απαιτητική τόσο θεωρητικά, όσο και υπολογιστικά, γι αυτό στην πράξη πολύ συχνά χρησιμοποιούνται ημιβέλτιστοι ελεγκτές καθώς είναι σχετικά κοντά στους βέλτιστους.

1.7 Η μιγαδική ακτίνα σταθερότητας και οι εξισώσεις Ricatti

Υποθέτουμε ότι οι πίνακες A,B,C είναι μιγαδικοί πίνακες. Το σύστημα

$$\dot{x} = (A + B\Delta C)x \qquad \textbf{(1.7.1)}$$

μπορεί να ερμηνευθεί ως ένα σύστημα κλειστού βρόχου με την εφαρμογή της ανάδρασης έξόδου (με άγνωστο πίνακα ανατροφοδότησης Δ) στο σύστημα 1.7.3 που δίνεται παρακάτω. Έτσι, η ακτίνα σταθερότητας συνδέεται με τη σταθεροποίηση της ανάδρασης εξόδου. Θα συζητήσουμε το ρόλο της **μιγαδικής ακτίνας σταθερότητας** $r_{\mathbb{C}}(A,B,C)$ σε συγκεκριμένα παραμετρικά προβλήματα βελτιστοποίησης. Ας υποθέσουμε το ακόλουθο παραμετρικό πρόβλημα βελτιστοποίησης :

Να ελαχιστοποιηθεί το

$$J_\rho(x) = \int_0^\infty \left[\|u(t)\|^2 - \rho\|y(t)\|^2 \right] dt \qquad \textbf{(1.7.2)}$$

που υπόκειται στο

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad , \quad y = Cx \qquad \textbf{(1.7.3)}$$

Αν το $\rho \le 0$, τότε έχουμε ένα συνηθισμένο LQR πρόβλημα , που μπορεί να λυθεί με την επίλυση της συναφούς εξίσωσης Ricatti. Θα δείξουμε τώρα ότι για συγκεκριμένες άλλες

τιμές $\rho > 0$ το παραπάνω πρόβλημα βελτιστοποίησης είναι ακόμα επιλύσιμο, συνδέοντας το ρ με την ακτίνα σταθερότητας. Το κλειδί γι αυτό είναι να δείξουμε την ύπαρξη μιας σταθεροποιήσιμης λύσης της συνδεδεμένης εξίσωσης Ricatti για μια δοθείσα τιμή του ρ.

Πριν να αναφέρουμε το κύριο αποτέλεσμα, σημειώνουμε το εξής, το οποίο δείχνει ότι για συγκεκριμένες τιμές του ρ, το κόστος ελαχιστοποίησης είναι πεπερασμένο. Για λόγους συντομίας θα γράφουμε r τη μιγαδική ακτίνα σταθερότητας $r_{\mathbb{C}}(A,B,C)$.

Θεώρημα 1.7.1

Ας είναι $J_\rho(x) = \int_0^\infty \left[\|u(t)\|^2 - \rho \|y(t)\|^2 \right] dt$.

Τότε :

(i) $inf\ J_\rho(0) = 0,$ αν και μόνο αν $\rho \le r^2$, αν και μόνο αν $I - \rho G^*(i\omega)G(i\omega) \ge 0$ για όλα τα $\omega \in \mathbb{R}$.

(ii) Υποθέτουμε ότι ο A είναι ευσταθής και $r < \infty$. Τότε για όλα τα $\rho \in (-\infty, r^2)$ έχουμε $|\inf\ J\rho(x_0)| < \infty$

Απόδειξη

Βλέπε Hinrichsen και Pritchard (1986).

Η ARE που συνδέεται με το παραπάνω πρόβλημα βελτιστοποίησης είναι η

$$XA + A^*X - \rho C^*C - XBB^*X = 0 \qquad \textbf{(1.7.4)}$$

Καθώς η εξίσωση εξαρτάται από το ρ, συμβολίζουμε αυτή την εξίσωση Ricatti ως ARE_ρ.Ο παραμετροποιημένος Χαμιλτονιανός πίνακας που συνδέεται με την ARE_ρ είναι ο

$$H_\rho = \begin{pmatrix} A & -BB^* \\ \rho C^*C & -A^* \end{pmatrix} \qquad \textbf{(1.7.5)}$$

Τα επόμενα θεωρήματα χαρακτηρίζουν τη μιγαδική ακτίνα r σε ότι αφορά τον H_ρ.

Θεώρημα 1.7.2 *Χαρακτηρισμός της μιγαδικής ακτίνας σταθερότητας.*

Ας είναι $H_\rho = \begin{pmatrix} A & -BB^* \\ \rho C^*C & -A^* \end{pmatrix}$. Τότε $\rho < r$ αν και μόνο αν ο H_{ρ^2} δεν έχει ιδιοτιμή στο μιγαδικό άξονα.

Απόδειξη

Βλέπε Hinrichsen και Pritchard (1986).

Παράδειγμα 1.7.1

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix},\ C=(-1,0)$$

Έχει υπολογιστεί ότι $r^2=\frac{3}{4}$

<u>Περίπτωση 1 :</u>

Ας είναι $\rho=0.5<r=0.8660$. Τότε,

$$H_{\rho^2}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0.25 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Οι ιδιοτιμές του H_{ρ^2} είναι $-0.4278\pm 0.8264j$ και $0.4278\pm 0.8264j$. Έτσι ο H_{ρ^2} δεν έχει μια αμιγώς φανταστική ιδιοτιμή.

<u>Περίπτωση 2 :</u>

Ας είναι $\rho=1>r=0.8660$. Τότε,

$$H_{\rho^2}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Οι ιδιοτιμές του H_{ρ^2} είναι $0.0000\pm 1.0000j, 0, 0$, οι οποίες είναι αμιγώς φανταστικές. Συνεπώς έχουμε επιτύχει ένα κατώτερο και ένα ανώτερο φράγμα για $0.5<r\le 1$.

Έχουμε ήδη αναφέρει τη σχέση ανάμεσα σε ένα Χαμιλτονιανό πίνακα και την συνδεδεμένη ARE. Στη θέαση του θεωρήματος 1.7.2 , συνεπώς , το ακόλουθο αποτέλεσμα δεν προκαλέι έκπληξη.

Θεώρημα 1.7.3 *Ακτίνα σταθερότητας και ARE*

Ας είναι A ένας ευσταθής μιγαδικός πίνακας και $r<\infty$. Ας είναι επίσης $\rho\in(-\infty,r^2)$. Τότε υπάρχει μια μοναδική Ερμιτιανή ευσταθής λύση X της εξίσωσης Ricatti

$$XA+A^*X-\rho C^*C-XBB^*X=0$$

Εξάλλου όταν $\rho=r^2$ υπάρχει μια μοναδική λύση X που έχει την ιδιότητα ο πίνακας $A-BB^*X$ να είναι ασταθής. Αντίστροφα αν ο πίνακας A είναι ευσταθής και αν υπάρχει μια Ερμιτιανή ευσταθής λύση X της παραπάνω εξίσωσης Ricatti, τότε υποχρεωτικά

$\rho \le r^2$.

<u>Υπενθύμιση :</u>

Σημειώνουμε ότι αν η εξίσωση Ricatti 1.7.4 έχει μια ευσταθή λύση X τότε ο έλεγχος

$$u(t) = -B^* Xx(t)$$

ελαχιστοποιεί τον δείκτη απόδοσης 1.7.2 και η ελάχιστη τιμή του δείκτη απόδοσης είναι $x_0^T X x_0$.

<u>Σημείωση :</u> Δεν υπάρχει εδώ παραδοχή ελεγξιμότητας για το ζεύγος (A, B).

Παράδειγμα 1.7.2

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{B} = (0,-1)^T, \quad C = (1,0)$$

Έχει υπολογιστεί ότι $r^2 = \frac{3}{4}$

Επιλέγουμε $\rho = \frac{1}{2}$. Τότε η μοναδική λύση X_ρ της εξίσωσης Ricatti :

Είναι η

$$X_\rho = \begin{pmatrix} -0.5449 & -0.2929 \\ -0.2929 & -0.3564 \end{pmatrix},$$

η οποία είναι συμμετρική.

Οι ιδιοτιμές του $A - BB^T X_\rho$ είναι $-0.3218 \pm 0.7769j$. Επομένως ο πίνακας $A - BB^T X_\rho$ είναι ευσταθής. Έτσι ο X_ρ έχει μια ευσταθή λύση. Αν το $\rho = \frac{3}{4}$ τότε η λύση

$$X = \begin{pmatrix} -1 & -0.5 \\ -0.5 & -1 \end{pmatrix}$$

είναι συμμετρική αλλά όχι ευσταθής. Οι ιδιοτιμές του $A - BB^T X_\rho$ είναι $0 \pm 0.7071j$.

Μια Μέθοδος Διχοτόμησης για τον υπολογισμό της Μιγαδικής Ακτίνας Σταθερότητας

Το θεώρημα 1.7.2 προτείνει ένα αλγόριθμο διχοτόμησης για τον υπολογισμό της μιγαδικής ακτίνας σταθερότητας $r_{\mathbb{C}}$.

Η ιδέα είναι να καθορίσουμε την $r_{\mathbb{C}}$ ως η τιμή του ρ για την οποία ο Χαμιλτονιανός πίνακας H_ρ που δίνεται από τη σχέση 1.7.5 και είναι συνδεδεμένος με την

εξίσωση Ricatti 1.7.4 , έχει μια ιδιοτιμή στο φανταστικό άξονα για πρώτη φορά. Αν ρ_0^- και ρ_0^+ είναι κάποιες κατώτερες και ανώτερες εκτιμήσεις για την ακτίνα σταθερότητας $r_{\mathbb{C}}$, τότε οι διαδοχικές καλύτερες εκτιμήσεις μπορούν να επιτευχθούν από τον ακόλουθο αλγόριθμο.

Αλγόριθμος 1.7.1 *Μια Μέθοδος Διχοτόμησης για τη Μιγαδική Ακτίνα Σταθερότητας*

Είσοδοι :

1. Οι πίνακες $A,\ B,\ C$

2. Κάποιες κατώτερες και ανώτερες εκτιμήσεις ρ_0^- και ρ_0^+ για την ακτίνα σταθερότητας ρ.

Έξοδοι :

Μια κατά προσέγγιση τιμή της μιγαδικής ακτίνας σταθερότητας ρ.

- Για k = 0,1,2,… κάνε μέχρι να συγκλίνει

Βήμα 1 :

Πάρε $\rho_k = \dfrac{\rho_k^- + \rho_k^+}{2}$ και υπολόγισε το $H_{\rho_k^2}$.

Βήμα 2 :

Αν το $H_{\rho_k^2}$ έχει ιδιοτιμές στο φανταστικό άξονα θέσε $\rho_{k+1}^- = \rho_k^-$ και $\rho_{k+1}^+ = \rho_k$

Αλλιώς θέσε $\rho_{k+1}^- = \rho_k$ και $\rho_{k+1}^+ = \rho_k^+$.

Παράδειγμα 1.7.3

Θεωρούμε το παράδειγμα 1.7.1

Παίρνουμε $\rho_0^- = 0,\ \rho_0^+ = 1$

- **k = 0**

Βήμα 1:

$\rho_0 = \dfrac{1}{2}$.

Το $H_{\rho_0^2}$ δεν έχει φανταστική ιδιοτιμή.

Βήμα 2:

$\rho_1^- = \dfrac{1}{2},\ \rho_1^+ = 1$

- **<u>k = 1</u>**

<u>Βήμα 1:</u>

$$\rho_1 = \frac{3}{4}$$

Το $H_{\rho_1^2}$ δεν έχει φανταστική ιδιοτιμή.

<u>Βήμα 2:</u>

$$\rho_2^- = \frac{3}{4}, \rho_2^+ = 1$$

- **<u>k = 2</u>**

<u>Βήμα 1:</u>

$$\rho_2 = \frac{7}{8}$$

Το $H_{\rho_2^2}$ δεν έχει φανταστική ιδιοτιμή.

<u>Βήμα 2:</u>

$$\rho_3^- = \frac{3}{4}, \rho_3^+ = \frac{7}{8}$$

- **<u>k = 3</u>**

<u>Βήμα 1:</u>

$$\rho_3 = \frac{13}{16}$$

Το $H_{\rho_3^2}$ δεν έχει φανταστική ιδιοτιμή.

<u>Βήμα 2:</u>

$$\rho_4^- = \frac{13}{16}, \rho_4^+ = \frac{7}{8}$$

- **<u>k = 4</u>**

$$\rho_4 = \frac{27}{32}$$

Η επανάληψη συγκλίνει προς την κατεύθυνση r = 0.8660.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

2.1 Μέθοδος εύρεσης ενός σταθεροποιήσιμου πίνακα ανατροφοδότησης (Armstrong 1975)

Μια μέθοδος με εξίσωση του Lyapunov για σταθεροποίηση

Έστω (A,B) ένα ελέγξιμο ζευγάρι. Η παρακάτω μέθοδος υπολογίζει σταθεροποιήσιμο πίνακα μετάβασης K.

Βήμα 1 :

Έστω αριθμός $\beta > |\lambda \max(A)|$, με λmax(A) να δηλώνει τη χαρακτηριστική ρίζα του A με το μεγαλύτερο πραγματικό μέρος.

Βήμα 2 :

Λύνουμε την εξίσωση Lyapunov ως προς Z :

$$-(A+bI)Z + Z[-(A+bI)]^T = -2BB^T$$

Βήμα 3 :

Παίρνουμε τον σταθεροποιήσιμο πίνακα ανάδρασης K

$$K=B^T Z^{-1}$$

Σημείωση στην αριθμητική αποτελεσματικότητα

Η εξίσωση Lyapunov στο βήμα 2 μπορεί να μην είναι καλώς προετοιμασμένη ακόμα και αν το ζευγάρι (A,B) είναι εύρωστα ελέγξιμο. Σε αυτήν την περίπτωση είσοδοι του σταθεροποιήσιμου πίνακα ανάδρασης K αναμένονται να είναι πολύ υψηλοί, πράγμα που προκαλεί πρακτικές δυσκολίες στην υλοποίησή της.

```
function K=MestLyap(A,B,beta)
%
% function K=MestLyap(A,B,beta)
% MestLyap: trofodotisi eustatheias enos sinexous xronou sistimatos me
% xrisi eksisosis Lyapunov
%  K=MestLyap(A,B,beta) ipologizei enan pinaka K tetoio oste to A-BK
% na einai eustathes me xrisi tis eksisosis Lyapunov
% I methodos dothike apo ton Armstrong (1975).
%
% INPUT : A    - nxn pinakas
%         B    - nxm pinakas
%         beta - ena thetiko klimakoto megethos tetoio oste
%                beta > | lambda_max(A) | ,
%            opou lambda_max(A) deixnei tin idiotimi tou A me to
%            megalitero pragmatiko meros
%
```

```
% OUTPUT : K – pinakas anadrasis tetoios oste to A-BK na einai
%            eustathes.
%
if (nargin < 3)
   error('Three arguments are expected.');
end
if (size(A,1)~=size(A,2))
   error('Matrix A must be square.');
end
[n,m]=size(B);
if (size(A,1)~=n)
   error('Matrix B has wrong dimensions.');
end

S=A + beta*eye(n);
eigval=eig(S);
min_real= min( real(eigval) );
if (min_real < 1E-12)
   error(' A + beta*I is not  stable');
end

Z=lyap(S,-2*B*B');
K=B'*inv(Z);          % Step 3
```

Παράδειγμα 1.2.1.

m = 1kg
M=2kg
l = 0.5 m
g = 9.18 m/s^2
τότε

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3.6720 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 22.0320 & 0 \end{pmatrix}$$

Οι ιδιοτιμές του A είναι 0 , 0 , ±4.6938.Χωρίς έλεγχο εισόδου έχουμε αστάθεια στην κίνηση και το εκκρεμές θα πέσει. Θα σταθεροποιήσουμε την κίνηση χρησιμοποιώντας τη μέθοδο με τη χρήση εξίσωσης Lyapunov με τον πίνακα A που έχουμε και τον πίνακα

$$B=\begin{pmatrix} 0 \\ 0.4 \\ 0 \\ -0.4 \end{pmatrix}$$

Βήμα 1 :

Έστω β = 5. Αυτό θα κάνει τον πίνακα $-(A+\beta I)$ ευσταθή.

Βήμα 2 :

Έστω $Z = \begin{pmatrix} 0.0009 & -0.0044 & -0.0018 & 0.0098 \\ -0.0044 & 0.0378 & 0.0079 & -0.0593 \\ -0.0018 & 0.0079 & 0.0054 & 0.0270 \\ 0.0098 & -0.0593 & -0.0270 & 0.1508 \end{pmatrix}$

Ο πίνακας Z που υπολογίσαμε είναι συμμετρικός θετικά ορισμένος αλλά υψηλά αρρωστημένης κατάστασης.

Βήμα 3 :

$K = B^T Z^{-1} = 10^3(-0.5308 , -0.2403 , -.12808 , -0.2903)$.

Οι ιδιοτιμές του A-BK είναι (-5 ± 11.2865j , -5 ± 0.7632j)

Παρόλο που οι είσοδοι του πίνακα K έχουν μεγάλο μήκος το ζεύγος (A,B) είναι ανθεκτικά ελέγξιμο και αυτό διαπιστώνεται από το γεγονός ότι οι ιδιάζουσες τιμές του πίνακα ελεγξιμότητας είναι 8.9462 , 8.9462 , 0.3284 , 0.3284.

Εφαρμογή στο MATLAB

```
%% example 1.2.1
clear
A=[0,1,0,0;0,0,-3.6720,0;0,0,0,1;0,0,22.0320,0];
B=[0;0.4;0;-0.4];
beta=5;
K=MestLyap(A,B,beta)
% epibebaiwsi
E=eig(A-B*K)
```

```
K =
  1.0e+003 *   -0.5308   -0.2423   -1.2808   -0.2923

E =
  -5.0000 +11.2865i
  -5.0000 -11.2865i
  -5.0000 + 0.7632i
  -5.0000 - 0.7632i
```

2.2 Ο αλγόριθμος διχοτόμησης για τον υπολογισμό της H_∞ νόρμας

Αλγόριθμος 1.6.1 *Ο αλγόριθμος διχοτόμησης για τον υπολογισμό της H_∞ νόρμας*

Είσοδοι :

Οι πίνακες A_{nxn} , B_{nxm} , C_{rxn} , D_{rxm}

γ_{lb} : Το κατώτερο φράγμα για την H_∞ νόρμα

γ_{ub} : Το ανώτερο φράγμα για την H_∞ νόρμα

$\varepsilon > 0$: Η ανοχή λάθους

Έξοδοι :

Μια προσέγγιση της H_∞ νόρμας με μια σχετική ακρίβεια του $\in$

Υποθέσεις :

Ο A είναι ευσταθής.

Βήμα 1 :

Θέτουμε $\gamma_L \equiv \gamma_{lb}$ *και* $\gamma_U \equiv \gamma_{ub}$

Βήμα 2 :

Επαναλαμβάνουμε μέχρι $\gamma_U - \gamma_L \le 2\varepsilon\gamma_L$

Υπολογίζουμε $\gamma = \dfrac{\gamma_L + \gamma_U}{2}$

Ελέγχουμε αν το M_γ που έχει οριστεί από τη σχέση 1.6.1 έχει φανταστική ιδιοτιμή

Αν όχι θέτουμε $\gamma_U = \gamma$

Αλλιώς θέτουμε $\gamma_L = \gamma$.

Σημείωση :

Έπειτα από k επαναλήψεις έχουμε ότι $\gamma_U - \gamma_L = 2^{-k}(\gamma_{ub} - \gamma_{lb})$. Έτσι, κατά την έξοδο, ο αλγόριθμος είναι εγγυημένος για να δώσει μια προσέγγιση της H_∞ νόρμας με μια σχετική ακρίβεια του ε .

Σύγκλιση :

Η σύγκλιση του αλγορίθμου είναι γραμμική και είναι ανεξάρτητη από τα στοιχεία των πινάκων A_{nxn} , B_{nxm} , C_{rxn} , D_{rxm}

Παρατήρηση :

Η κατάσταση ότι το M_γ δεν έχει φανταστική ιδιοτιμή (στο βήμα 2) μπορεί επίσης

να εκφράστει σε όρους από την παρακάτω εξίσωση Ricatti :

$$XA + A^T X + \gamma^{-1} XBR^{-1}B^T X + \gamma^{-1} C^T C = 0$$

(υποθέτοντας ότι D=0)

Έστω το γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \qquad \textbf{(1.2.1)}$$

Ορίζουμε τον Χαμιλτονιανό πίνακα των συντελεστών των πινάκων του συστήματος 1.2.1

$$M_\gamma = \begin{pmatrix} A + BR^{-1}D^T C & BR^{-1}B^T \\ -C^T (I + DR^{-1}D^T)C & -(A + BR^{-1}D^T C)^T \end{pmatrix} \qquad \textbf{(1.6.1)}$$

Όπου $R = \gamma^2 I - D^T D$.

Εφαρμογή στο MATLAB

```
function [HINF g]=algorithm_1_6_1(A,B,C,D,epsi,tol)
% algorithmos dixotomisis 1.6.1
%
% HINFNRM: H- ? norm xrisimopoiontas algorithm dixotomisis.
% HINF = hinfnrm(A,B,C,D,epsi,tol) ipologizei tin H- ? norm me
% xrisi tis methodou dixotomisis ton Boyd, Balakrishnan kai Kabamba
%
% INPUT  : A - nxn pinakas katastasis
%          B - nxm pinakas elegxou
%          C - rxn pinakas eksodou
%          D - rxm pinakas
%          epsi – thetiko sfalma anoxis ( apaiteitai )
%          tol  - megali monada gia enan amigos fantastiko arithmo an
%                 paraleipeitai, tol = norm(A,'fro')*eps theoreitai.
% OUTPUT : HINF – ena klimakoto megethos , i H- ? norm

if (nargin < 5)
   error('At least five arguments are expected.');
end
if (nargin < 6)
   tol=norm(A,'fro')*eps;
end
if (size(A,1)~=size(A,2))
   error('Matrix A must be square.');
end
[n,m]=size(B);
r=size(C,1);
if (size(A,1)~=n || size(C,2)~=n || size(D,2)~=m || size(D,1) ~=r)
  error('Dimensions of A, B, C and D are incompatible.');
end
```

```
[cg]=lyap(A,B*B');  % solves the Lyapunov matrix equation  A*X + X*A' + B*B'=0
[og]=lyap(A',C'*C); % solves the Lyapunov matrix equation  A'*X + X*A + C'*C=0
gLowerBound=sqrt(trace(cg*og)/n);
gUpperBound=2*sqrt(n*trace(cg*og));
gLow=gLowerBound;
gHigh=gUpperBound;
k=0;
g=gLow;
while (gHigh-gLow > 2*epsi*gLow)
   % Step 2, repeat until
  k=k+1;
  g(k)=(gLow+gHigh)/2;
  R = g(k)*g(k)*eye(m) - D'*D;
  IR=inv(R);
  Mv=[A + B*IR*D'*C , B*IR*B'; -C'*(eye(m) + D*IR*D')*C, -(A +B*IR*D'*C)'];
  EMv = eig(Mv);
  remv= abs( real( EMv ) ); % absolute of real parts
  iemv= abs( imag( EMv ) ); % absolute of imag parts
  [memv,pos]=min(remv);     % find minimum and position
  if (memv < tol && iemv(pos) > tol )
     % we have found zero real part with not zero imag part
          gLow=g(k);
  else
     gHigh=g(k);
  end
end
HINF=g(k);  % an approximation to H_{inf} norm
```

Παράδειγμα 1.6.2 :

$$\gamma_{lb} = \max\{\sigma_{\max}(D), \sqrt{Trace\frac{(C_G O_G)}{n}}$$

$$\gamma_{ub} = \sigma_{\max}(D) + 2\sqrt{nTrace(C_G O_G)}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \;,\; B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \;,\; C = (1,1,1) \;,\; D = 0 \;,\; \varepsilon = 0.0014$$

Βήμα 1 :

$\gamma_L = 0.2887$

$\gamma_U = 1.7321$

Βήμα 2 :

- Επανάληψη 1

$\gamma = 1.0104$

Οι ιδιοτιμές του M_γ είναι : 2 , 4 , -0.1429 , -2 , -4 . Καθώς το M_γ δεν έχει αμιγώς φανταστικές ιδιοτιμές, συνεχίζουμε.

- Επανάληψη 2

$\gamma = 0.6495$

Οι ιδιοτιμές του M_γ είναι : 2 , 4 , 0±1.1706j , -2 , -4 . Καθώς το M_γ έχει μια αμιγώς φανταστική ιδιοτιμή, θέτουμε

$\gamma_L = 0.6495$

$\gamma_U = 1.0103$

- Επανάληψη 3

$\gamma = 0.8299$

Οι ιδιοτιμές του M_γ είναι : 2 , 4 , 0±0.6722j , -2 , -4 . Καθώς το M_γ έχει μια αμιγώς φανταστική ιδιοτιμή, θέτουμε

$\gamma_L = 0.8299$

$\gamma_U = 1.0103$

Οι τιμές του γ σε διαδοχικές επαναλήψεις διαπιστώθηκε ότι ήταν : 0.9202 , 0.9653 , 0.9878 , 0.9991 , 0.9998 και 1 και οι επαναλήψεις σταματούν στο σημείο αυτό καθώς ικανοποιείται το κριτήριο διακοπής. Έτσι παίρνουμε ότι η H_∞ νόρμα ισούται με 1.

Εφαρμογή στο MATLAB

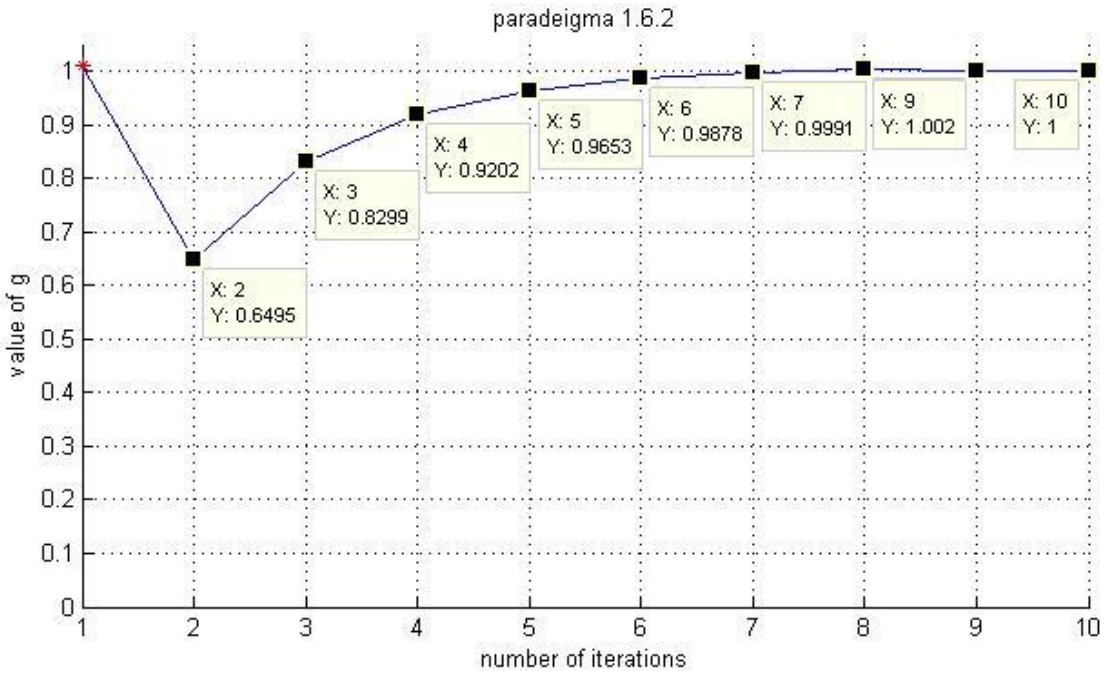
```
%% example 1.6.2
clear
A=[-1,2,3;0,-2,0;0,0,-4];
B=[1;0;0];
C=[1,1,1];
D=0;
epsi=0.0014;

[HINF g]=algorithm_1_6_1(A,B,C,D,epsi)

HINF =    1.0005
g =    1.0104    0.6495    0.8299    0.9202    0.9653    0.9878    0.9991    1.0047
1.0019    1.0005
```

Παρακάτω εμφανίζουμε τις εντολές στο matlab για την plot απεικόνιση.

```
hold on;
plot(g);
plot(g,'*r')
grid;
title('paradeigma 1.6.2');
xlabel('number of iterations');
ylabel('value of g');
axis([1,size(g,2),0,1.05]);
set(gca, 'LooseInset', [0,0,0,0]);
```



2.3 Μια Μέθοδος Διχοτόμησης για τον υπολογισμό της Μιγαδικής Ακτίνας Σταθερότητας

Το θεώρημα 1.7.2 προτείνει ένα αλγόριθμο διχοτόμησης για τον υπολογισμό της μιγαδικής ακτίνας σταθερότητας $r_{\mathbb{C}}$.

Θεώρημα 1.7.2 *Χαρακτηρισμός της μιγαδικής ακτίνας σταθερότητας.*

Ας είναι $H_\rho = \begin{pmatrix} A & -BB^* \\ \rho C^* C & -A^* \end{pmatrix}$. Τότε $\rho < r$ αν και μόνο αν ο H_{ρ^2} δεν έχει ιδιοτιμή στο μιγαδικό άξονα.

Η ιδέα είναι να καθορίσουμε την $r_{\mathbb{C}}$ ως η τιμή του ρ για την οποία ο Χαμιλτονιανός πίνακας H_ρ που δίνεται από τη σχέση 1.7.5 και είναι συνδεδεμένος με την εξίσωση Ricatti 1.7.4 , έχει μια ιδιοτιμή στο φανταστικό άξονα για πρώτη φορά.

Αν ρ_0^- και ρ_0^+ είναι κάποιες κατώτερες και ανώτερες εκτιμήσεις για την ακτίνα σταθερότητας $r_{\mathbb{C}}$, τότε οι διαδοχικές καλύτερες εκτιμήσεις μπορούν να επιτευχθούν από τον ακόλουθο αλγόριθμο.

Αλγόριθμος 1.7.1 *Μια Μέθοδος Διχοτόμησης για τη Μιγαδική Ακτίνα Σταθερότητας*

Είσοδοι :

1. Οι πίνακες A, B, C
2. Κάποιες κατώτερες και ανώτερες εκτιμήσεις ρ_0^- και ρ_0^+ για την ακτίνα σταθερότητας ρ .

Έξοδοι :

Μια κατά προσέγγιση τιμή της μιγαδικής ακτίνας σταθερότητας ρ .

- Για k = 0,1,2,… κάνε μέχρι να συγκλίνει

Βήμα 1 :

Πάρε $\rho_k = \dfrac{\rho_k^- + \rho_k^+}{2}$ και υπολόγισε το $H_{\rho_k^2}$.

Βήμα 2 :

Αν το $H_{\rho_k^2}$ έχει ιδιοτιμές στο φανταστικό άξονα θέσε $\rho_{k+1}^- = \rho_k^-$ και $\rho_{k+1}^+ = \rho_k$

Αλλιώς θέσε $\rho_{k+1}^- = \rho_k$ και $\rho_{k+1}^+ = \rho_k^+$.

Εφαρμογή στο MATLAB

```
function r=algorithm_1_7_1(A,B,C,epsi,r_est)
% algorithm_1_7_1: migadiki aktina statherotititas me xrisi tis methodou
%                  dixotomisis.
%  r=algorithm_1_7_1(A,B,C,epsi,r_est): ipologizei ti migadiki aktina
%  statherotitas tou montelou (A,B,C) me xrisi tis methodou
%  dixotomisis
%
% INPUT : A    - nxn pinakas katastasis
%         B    - nxm pinakas elegxou
%         C    - rxn pinakas eksodou for the output r.
%         r_est- dianysma [lb,ub] me anotera kai katotera fragmata
%                gia to r , an paraleipetai stin eisodo
```

```
%
%               r_est = [0 , 1] theoreitai
%
% OUTPUT : r – mia proseggisi sti migadiki aktina statherotitas.
%
% I methodos apo tous Hinrichsen and Pritchard( 1986b).

if (nargin < 4)
   error('At least 4 arguments are expected.');
end
if (size(A,1)~=size(A,2))
   error('Matrix A must be square.');
end
[n,m]=size(B);
r = size(C,1);
if (size(A,1)~=n )
   error('Matrix B has wrong dimensions.');
end
if (size(C,2)~=n )
   error('Matrix C has wrong dimensions.');
end
if (nargin < 5)
   r_est = [.0 , 1.0];
end
if (epsi < 0)
   error('Parameter epsi is not valid.');
end
lr = r_est(1);
ur=r_est(2);  % lower and upper bounds for r
dur = ur-lr;
if (dur < 0)
   error('Vector r_est is not valid.');
end
t=1;
r(t) = lr;     % for the case that the loop is not entered just.
while (dur > epsi)
   t=t+1;
   r(t) = (lr + ur)/2;
   H = [A , -B*B'; r(t)*r(t)*C'*C , -A']; % Step 1
   mreig = min( abs( real(eig(H)) ) );
   if (mreig < 1E-12)  % a least one eigenvalue on the imaginary axis
     ur = r(t);     % exact value is on the left of r
   else
     lr = r(t);     % exact value is on the right of r
   end
   dur = dur/2.0; % size of uncertainty interval
```

```
end
return
```

Παράδειγμα 1.7.1

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix},\ C=(-1,0)$$

Έχει υπολογιστεί ότι $r^2=\frac{3}{4}$

<u>Περίπτωση 1 :</u>

Ας είναι $\rho=0.5<r=0.8660$. Τότε,

$$H_{\rho^2}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0.25 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Οι ιδιοτιμές του H_{ρ^2} είναι $-0.4278\pm 0.8264j$ και $0.4278\pm 0.8264j$. Έτσι ο H_{ρ^2} δεν έχει μια αμιγώς φανταστική ιδιοτιμή.

<u>Περίπτωση 2 :</u>

Ας είναι $\rho=1>r=0.8660$. Τότε,

$$H_{\rho^2}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Οι ιδιοτιμές του H_{ρ^2} είναι $0.0000\pm 1.0000j, 0, 0$, οι οποίες είναι αμιγώς φανταστικές. Συνεπώς έχουμε επιτύχει ένα κατώτερο και ένα ανώτερο φράγμα για $0.5<r\le 1$.

Παράδειγμα 1.7.3

Θεωρούμε το παράδειγμα 1.7.1

Παίρνουμε $\rho_0^-=0, \rho_0^+=1$

- **<u>k = 0</u>**

<u>Βήμα 1:</u>

$\rho_0=\frac{1}{2}$.

Το $H_{\rho_0^2}$ δεν έχει φανταστική ιδιοτιμή.

Βήμα 2:

$\rho_1^- = \frac{1}{2}, \rho_1^+ = 1$

- **k = 1**

Βήμα 1:

$\rho_1 = \frac{3}{4}$

Το $H_{\rho_1^2}$ δεν έχει φανταστική ιδιοτιμή.

Βήμα 2:

$\rho_2^- = \frac{3}{4}, \rho_2^+ = 1$

- **k = 2**

Βήμα 1:

$\rho_2 = \frac{7}{8}$

Το $H_{\rho_2^2}$ δεν έχει φανταστική ιδιοτιμή.

Βήμα 2:

$\rho_3^- = \frac{3}{4}, \rho_3^+ = \frac{7}{8}$

- **k = 3**

Βήμα 1:

$\rho_3 = \frac{13}{16}$

Το $H_{\rho_3^2}$ δεν έχει φανταστική ιδιοτιμή.

Βήμα 2:

$\rho_4^- = \frac{13}{16}, \rho_4^+ = \frac{7}{8}$

- **k = 4**

$\rho_4 = \frac{27}{32}$

Η επανάληψη συγκλίνει προς την κατεύθυνση r = 0.8660.

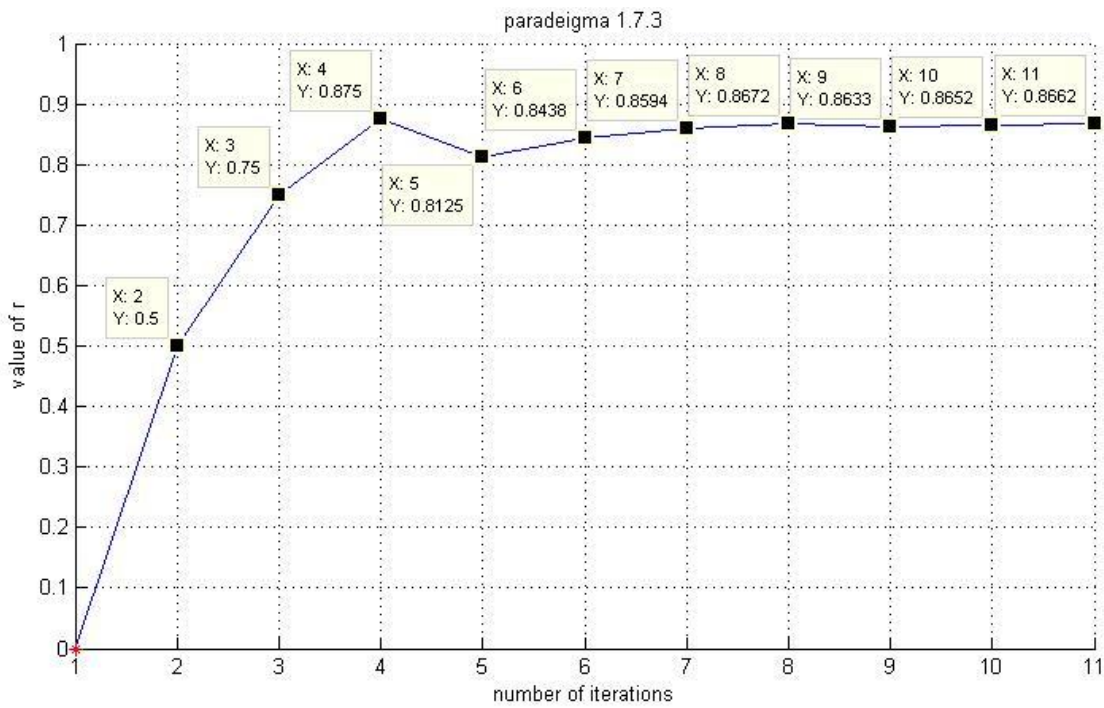
Εφαρμογή στο MATLAB

```
%% example 1.7.3
clear
A=[ 0,1;-1,-1];
B=[0;-1];
C= [ 1 ,0 ];
epsi=0.0014 ;
r=algorithm_1_7_1(A,B,C,epsi)
```

r = 0 0.5000 0.7500 0.8750 0.8125 0.8438 0.8594 0.8672 0.8633 0.8652 0.8662

Παρακάτω εμφανίζουμε τις εντολές στο matlab για την plot απεικόνιση.

```
hold on;
plot(r);
plot(r,'*r')
grid;
title('paradeigma 1.7.3');
xlabel('number of iterations');
ylabel('value of r');
axis([1,size(r,2),0,1]);
set(gca, 'LooseInset', [0,0,0,0]);
```



ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- **ΕΛΛΗΝΙΚΗ**

1) **Μαρία Χρ. Γουσίδου-Κουτίτα** ΄΄Αριθμητικές Μέθοδοι με εφαρμογές στη Θεωρία Ελέγχου΄΄ , 2006
2) **Μαρία Χρ. Γουσίδου-Κουτίτα** Πανεπιστημιακές Παραδόσεις ΄΄Αριθμητικές Μέθοδοι με εφαρμογές στην επίλυση Κανονικών και Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων΄΄ , 2009
3) **Μαρία Χρ. Γουσίδου-Κουτίτα** Πανεπιστημιακές Παραδόσεις ΄΄Υπολογιστικών Μαθηματικών ΙΙ΄΄ , 1993
4) **Μαρία Χρ. Γουσίδου-Κουτίτα** ΄΄Αριθμητική Ανάλυση΄΄ , 2004
5) **Νικόλαος Καραμπετάκης** ΄΄Βέλτιστος Έλεγχος Συστημάτων΄΄ , 2009

- **ΞΕΝΟΓΛΩΣΣΗ**

1) **Ackermann J.** ‘Der entwurf linear regelung systeme im zustandsraum’ , Regulungestechnik und prozessedatenverarbeitung , Vol. 7, pp.297-300 , 1972.
2) **Armstrong E.S.** ‘An extension of Bass’ algorithm for stabilizing linear continuous constant systems’ , IEEE Trans. Autom. Control, Vol 20 , pp 153-154 , 1975.
3) **Armstrong E.S. and Rubein G.T.** ‘A stabilizing algorithm for discrete constant systems’ , IEEE Trans. Autom. Control, Vol 21 , pp 629-631 , 1976.
4) **Biswa Nath Datta** ‘Numerical Methods for Linear Control Systems’ pp 343-391 , 2004.
5) **Boyd S.,Balakrishnan V. and Kabamba P**. ‘A bisection method for computing the H∞ norm of a transfer function matrix and related problems’ , Math. Control Signals Syst. , Vol. 2 pp 207-219 , 1989.
6) **Boyd S.,Balakrishnan V**. ‘A regularity result for the singular values of s transfer function matrix and a quadratically convergent algorithm for computing its L∞ norm’ , Syst. Control Lett. Pp 1-7 , 1990.
7) **Doyle J.,Glover K.,Khargonekar P.,and Franciw B.** ‘State-space solutions to standard H_2 and H∞ control problems’ , IEEE Trans. Autom. Control , Vol 34 , pp 831-847 , 1989.
8) **Friedland B.** Control System Design : An Introduction to State-Space Methods, McGraw-Hill, New York , 1986.
9) **Hinrichsen D.,Pritchard A.J.** ‘Stability radii of linear systems’ , Syst. Control Lett. , Vol. 7 , pp 1-10 , 1986a.
10) **Hinrichsen D.,Pritchard A.J.** ‘ Stability radius for structured perturbation and the algebraic Ricatti equation’ Syst. Control Lett. , Vol 8 , pp 105-113 , 1986b.
11) **Kailath T.** Linear Systems, Prentice Hall, Englewood Cliffs , NJ , 1980.
12) **Kimura H**. Chain-Scattering to H∞ Control, Birkhauser , Boston, 1996.
13) **Luenberger D.** Introduction to Dynamic Systems : Theory, Model and Applications, John Wiley, New York , 1979.

14) **Moore B.C.** ‘On the flexibility offered by state feedback in multivariable systems beyond closed loop eigenvalue assignment’ , IEEE Trans. Aytom. Control , Vol 21 AC-21 , pp 689-692 , 1976.
15) **Safonov M.G. and Athans M.** ‘Gain and phase margins of multiloop LQG regulators’ , IEEE Trans. Autom. Control , Vol AC-22 , pp 173-179 , 1997.
16) **Zhou K.Doyle J.C. and Glover K.** Robust and Optimal Control, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ , 1996.
17) **Zhou K. and Khargonekar P.** ‘ An algebraic Ricatti equation approach to H∞ optimization’ , Syst. Control Lett. , Vol 11(2) , pp 85-91 , 1988.