



ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
“ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΚΑΙ Ε-
ΛΕΓΧΟΥ”

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΥΡΕΣΗ ΒΕΛΤΙΣΤΩΝ ΕΛΕΓΚΤΩΝ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Καλλιόπη Αμπατζή – Νάκου

Επιβλέπων: Νικόλαος Καραμπετάκης
Επ. Καθηγητής Α.Π.Θ.

Εγκρίθηκε από την τριμελή επιτροπή την

.....
Ν. Καραμπετάκης
Επ. Καθηγητής Α.Π.Θ.

.....
Μ. Γουσίδου-Κουτίτα
Επ. Καθηγήτρια Α.Π.Θ..

.....
Α.Ι. Βαρδουλάκης
Καθηγητής Α.Π.Θ.

Θεσσαλονίκη, Δεκέμβριος 2007

.....
Καλλιόπη Αμπατζή-Νάκου
Πτυχιούχος Μαθηματικός Α.Π.Θ.

Copyright © Καλλιόπη Αμπατζή-Νάκου, 2007.
Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευτεί ότι εκφράζουν τις επίσημες θέσεις του Α.Π.Θ.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Για την επίλυση προβλημάτων βέλτιστου προγραμματισμού και ελέγχου είναι απαραίτητη η χρήση αριθμητικών μεθόδων. Όμως, η ποσότητα αριθμητικών υπολογισμών που απαιτούνται έστω και για ένα σχετικά απλό πρόβλημα απαγορεύουν την επίλυση με το χέρι. Αυτός είναι ο λόγος του γεγονότος ότι ο λογισμός των μεταβολών είχε χρησιμοποιηθεί ελάχιστα στη μηχανική και στις εφαρμοσμένες επιστήμες μέχρι πρόσφατα.

Με την έλευση των ψηφιακών υπολογιστών, έγινε εφικτή η λύση πολύπλοκων προβλημάτων του βέλτιστου ελέγχου, σε λογικό χρονικό διάστημα και με ένα λογικό κόστος. Για την επίλυση ενός προβλήματος, ο υπολογιστής χρησιμοποιεί επαναληπτικές μεθόδους, οι οποίες έχουν το χαρακτηριστικό να λύνουν το πρόβλημα βήμα-βήμα και όχι με κάποιον «σαρωτικό» τρόπο.

Στην εργασία αυτή γίνεται αναφορά σε τρεις επαναληπτικές αριθμητικές μεθόδους για την επίλυση προβλημάτων συνοριακών τιμών δύο σημείων. Στο Κεφάλαιο 1 δίνονται κάποιες εισαγωγικές έννοιες για την καλύτερη κατανόηση των παρακάτω κεφαλαίων, στο Κεφάλαιο 2 γίνεται μια εκτενής αναφορά στη μέθοδο της μέγιστης κλίσης και στα Κεφάλαια 3 και 4 αναφέρονται συνοπτικά οι μέθοδοι της μεταβολής των ακρότατων και της ημιγραμμικοποίησης αντίστοιχα. Στο Κεφάλαιο 5 γίνεται μια σύγκριση των τριών μεθόδων και τέλος, στο Κεφάλαιο 6 δίνονται κάποιες εφαρμογές του αλγόριθμου της μέγιστης κλίσης μέσω του Mathematica.

ΛΕΞΕΙΣ – ΚΛΕΙΔΙΑ

προβλήματα συνοριακών τιμών δύο σημείων, μέθοδος της μέγιστης κλίσης, μέθοδος μεταβολής των ακρότατων, μέθοδος ημιγραμμικοποίησης

ABSTRACT

Numerical methods are necessary to solve optimal programming and control problems. However, the amount of numerical computations required for even a relatively simple problem is forbidding if it must be done by hand. This is why the calculus of variations found very little use in engineering and applied science until quite recently.

With the development of digital computers, it is now possible to solve complicated optimal control problems, in a reasonable length of time and at a reasonable cost. The computer uses iterative methods to solve the problem, which have the characteristic of solving the problem step by step and not with some kind of sweeping method.

In this thesis we present three iterative, numerical methods of solving two-point boundary-value problems. In Chapter 1 we present some basic theory, so that the reader will have a better understanding of the following chapters, in Chapter 2 we present the method of steepest descent thoroughly and in Chapters 3 and 4 we present concisely the methods variation of extremals and quasilinearization respectively. In Chapter 5 we compare the characteristics among the methods and in Chapter 6 we present the algorithm of the steepest descent method in Mathematica and also some numerical examples.

KEY WORDS

two-point boundary-value problems, method of steepest descent, method of variation of extremals, method of quasilinearization

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

1. ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ.....	7
1.1 Βασικές έννοιες της θεωρίας του Βέλτιστου Ελέγχου.....	7
1.1.1 Περιγραφή του συστήματος.....	7
1.1.2 Το πρόβλημα του βέλτιστου ελέγχου.....	11
1.1.3 Ταξινόμηση των συστημάτων.....	12
1.1.4 Εξισώσεις των εξόδων.....	13
1.2 Προβλήματα συνοριακών τιμών δύο σημείων.....	14
2. Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ ΜΕΓΙΣΤΗΣ ΚΛΙΣΗΣ.....	17
2.1 Η μέθοδος της μέγιστης κλίσης στο βέλτιστο	
έλεγχο.....	18
2.1.1 Ελαχιστοποίηση των συναρτήσεων.....	18
2.1.2 Ελαχιστοποίηση των συναρτησιακών.....	22
2.1.3 Αλγόριθμος της μεθόδου.....	24
2.2 Η μέθοδος της μέγιστης κλίσης σε προβλήματα	
βελτιστοποίησης.....	28
2.3 Παραδείγματα.....	30
Παράδειγμα 2.1.....	30
Παράδειγμα 2.2.....	35
3. Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ ΤΩΝ	
ΑΚΡΟΤΑΤΩΝ.....	37
Παράδειγμα 3.1.....	40

4. Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ ΗΜΙΓΡΑΜΜΙΚΟΠΟΙΗΣΗΣ.....	42
<i>Παράδειγμα 4.1.....</i>	<i>46</i>
<i>Παράδειγμα 4.2.....</i>	<i>48</i>
5. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ.....	50
6. ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ.....	53
<i>Παράδειγμα 6.1.....</i>	<i>57</i>
<i>Παράδειγμα 6.2.....</i>	<i>60</i>
<i>Παράδειγμα 6.3.....</i>	<i>62</i>
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....	71

1. ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ

1.1 Βασικές έννοιες της θεωρίας του Βέλτιστου Ελέγχου

Η θεωρία βέλτιστου ελέγχου, η οποία παίζει πολύ σημαντικό ρόλο στον σχεδιασμό μοντέρνων συστημάτων, είναι ένας τομέας των μαθηματικών όπου μελετάται ο τρόπος χειρισμού των παραμέτρων που επηρεάζουν ένα σύστημα, έτσι ώστε να παραχθεί το βέλτιστο αποτέλεσμα.

Ο στόχος της θεωρίας του βέλτιστου ελέγχου είναι ο καθορισμός των σημάτων ελέγχου τα οποία θα προκαλέσουν μια διαδικασία να ικανοποιήσει τους φυσικούς περιορισμούς και συγχρόνως να ελαχιστοποιήσει, ή να μεγιστοποιήσει, κάποια κριτήρια απόδοσης.

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζουμε κάποιες βασικές έννοιες του βέλτιστου ελέγχου που θα μας βοηθήσουν στην κατανόηση των παρακάτω κεφαλαίων.

1.1.1 Περιγραφή του συστήματος

Όταν ασχολούμαστε με φυσικά συστήματα θέλουμε η έξοδος που θα αποκτηθεί να προέλθει από μια είσοδο, η οποία θα ελαχιστοποιεί κάποιο κριτήριο απόδοσης (για παράδειγμα το κόστος). Άρα τα απαραίτητα στοιχεία που πρέπει να έχει ένα σωστά διατυπωμένο πρόβλημα βέλτιστου ελέγχου είναι τα εξής:

1. Το μαθηματικό μοντέλο της διαδικασίας που θα ελεγχθεί.
2. Διατύπωση φυσικών περιορισμών.
3. Διατύπωση κάποιου κριτηρίου απόδοσης.

Το Μαθηματικό Μοντέλο

Ένα σημαντικό κομμάτι του κάθε προβλήματος ελέγχου είναι ο σχεδιασμός της διαδικασίας. Το **μαθηματικό μοντέλο** είναι η αναπαράσταση του συστήματος και αποτελείται από ένα σύνολο σχέσεων οι οποίες περιγράφουν την έξοδο του συστήματος για διαφορετικές εισόδους. Ο σκοπός μας είναι η απόκτηση της πιο απλοποιημένης μαθηματικής περιγραφής η οποία προβλέπει ικανοποιητικά την έξοδο του συστήματος σε οποιαδήποτε προσδοκώμενη είσοδο.

Έτσι αν,

$$x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$$

είναι οι **μεταβλητές κατάστασης**, ή απλά οι **καταστάσεις**, της διαδικασίας σε χρόνο t και

$$u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)$$

είναι οι εισοδοί ελέγχου στην διαδικασία σε χρόνο t , τότε το σύστημα μπορεί να περιγραφεί από n διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= a_1(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t), t) \\ \dot{x}_2(t) &= a_2(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t), t) \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ \dot{x}_n(t) &= a_n(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t), t) \end{aligned}$$

Ορίζουμε το

$$x(t) \triangleq \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

ως το **διάνυσμα κατάστασης** του συστήματος, και το

$$u(t) \triangleq \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_n(t) \end{bmatrix}$$

ως το **διάνυσμα εισόδου**. Τότε, οι εξισώσεις κατάστασης μπορούν να γραφούν ως εξής:

$$\dot{x}(t) = a(x(t), u(t), t)$$

Το διάνυσμα κατάστασης μπορεί να αναφέρεται σε κάποιες περιπτώσεις και ως **τροχιά κατάστασης**.

Φυσικοί Περιορισμοί

Μετά την επιλογή του μαθηματικού μοντέλου, το επόμενο βήμα είναι ο καθορισμός των φυσικών περιορισμών των μεταβλητών κατάστασης και ελέγχου.

Ορισμός 1.1

Μία είσοδος ονομάζεται **αποδεκτή** αν ικανοποιεί τους περιορισμούς της εισόδου του συστήματος στο χρονικό διάστημα $[t_0, t_f]$.

Ορισμός 1.2

Ένα διάνυσμα κατάστασης ονομάζεται **αποδεκτό** αν ικανοποιεί τους περιορισμούς των μεταβλητών κατάστασης του συστήματος στο χρονικό διάστημα $[t_0, t_f]$.

Το Κριτήριο Απόδοσης

Στα περισσότερα συστήματα, η αποδεκτή έξοδος μπορεί να αποκτηθεί από διαφορετικές εισόδους από τις οποίες, η καθεμιά θα δίνει και διαφορετική έξοδο. Σκοπός μας είναι να βρούμε έναν τρόπο με τον οποίο, αφού υπολογίσουμε την κάθε έξοδο, να διαλέξουμε, αν γίνεται, την «καλύτερη». Γι' αυτόν τον λόγο χρειάζεται το **κριτήριο απόδοσης**.

Ορισμός 1.3

Ένας **βέλτιστος ελεγκτής**, ορίζεται σαν ένας ελεγκτής που *ελαχιστοποιεί*, ή *μεγιστοποιεί* αναλόγως με το εκάστοτε πρόβλημα, το κριτήριο απόδοσης.

Υπάρχουν περιπτώσεις όπου από την διατύπωση του προβλήματος φαίνεται ξεκάθαρα τι να επιλεγεί ως κριτήριο απόδοσης, ενώ σε άλλα προβλήματα η επιλογή είναι καθαρά υποκειμενική.

Το κριτήριο απόδοσης ενός συστήματος υπολογίζεται από μια σχέση της μορφής

$$J = h(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), u(t), t) dt \quad (1.1)$$

όπου t_0 και t_f είναι ο αρχικός και ο τελικός χρόνος αντίστοιχα και οι h και g είναι βαθμωτές συναρτήσεις.

Ξεκινώντας από την αρχική κατάσταση $x(t_0) = x_0$ και εφαρμόζοντας μια είσοδο $u(t)$, για $t \in [t_0, t_f]$, το σύστημα ακολουθεί κάποια τροχιά κατάστασης. Το κριτήριο απόδοσης αναθέτει έναν μοναδικό πραγματικό αριθμό σε κάθε τροχιά του συστήματος, που αντιστοιχεί σε διαφορετική είσοδο.

1.1.2 Το Πρόβλημα του Βέλτιστου Ελέγχου

Με βάση τα προαναφερθέντα μπορούμε να διατυπώσουμε με σαφήνεια **το πρόβλημα του βέλτιστου ελέγχου** το οποίο ορίζεται ως εξής:

Να βρεθεί μια *επιτρεπτή είσοδος* u^* που προκαλεί στο σύστημα

$$\dot{x}(t) = a(x(t), u(t), t)$$

να ακολουθήσει μια *επιτρεπτή τροχιά* x^* , η οποία ελαχιστοποιεί το κριτήριο απόδοσης

$$J = h(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), u(t), t) dt$$

Ο u^* ονομάζεται **βέλτιστος ελεγκτής** και η x^* **βέλτιστη τροχιά**.

Εδώ πρέπει να τονιστεί πως δεν μπορούμε να ξέρουμε εκ των προτέρων αν υπάρχει βέλτιστος ελεγκτής για το πρόβλημά μας. Σε κάποιες περιπτώσεις είναι πολύ πιθανόν να μην βρεθεί κάποιος ελεγκτής ο οποίος να είναι αποδεκτός και συγχρόνως να αναγκάζει το σύστημα να ακολουθήσει κάποια αποδεκτή τροχιά.

Συνήθως, προσπαθούμε να βρούμε κάποιον βέλτιστο ελεγκτή, χωρίς να έχουμε αποδείξει εκ των προτέρων ότι υπάρχει, γιατί δεν υπάρχουν θεωρήματα που να αποδεικνύουν την ύπαρξη ή όχι βέλτιστου ελεγκτής κι έτσι είναι πολύ δύσκολο να το ελέγξουμε.

Ένα άλλο πρόβλημα που μπορεί να προκύψει είναι το ότι ακόμα και να υπάρχει βέλτιστος ελεγκτής, μπορεί να μην είναι μοναδικός. Βέλτιστοι ελεγκτές τέτοιου είδους

μπορεί να περιπλέξουν τους υπολογισμούς, έχουν όμως το προτέρημα να επιτρέπουν τη δυνατότητα επιλογής ανάμεσα σε διάφορες μορφές ελεγκτών. Η συγκεκριμένη δυνατότητα είναι χρήσιμη στον σχεδιαστή διότι έτσι, θα μπορεί να λάβει υπ' όψιν και άλλους παράγοντες, όπως το κόστος, το μέγεθος, την αξιοπιστία και άλλα, που πιθανόν να μην συμπεριλαμβάνονταν στο κριτήριο απόδοσης.

Όταν λέμε πως το u^* ελαχιστοποιεί το κριτήριο απόδοσης, εννοούμε ότι

$$\begin{aligned} J^* &\triangleq h(x^*(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(x^*(t), u^*(t), t) dt \\ &\leq h(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), u(t), t) dt \end{aligned}$$

για όλα τα $u \in U$ και $x \in X$, όπου U είναι το σύνολο των αποδεκτών εισόδων και X το σύνολο των αποδεκτών τροχιών κατάστασης.

Η παραπάνω ανισότητα δηλώνει ότι ένας βέλτιστος ελεγκτής και η αντίστοιχη τροχιά του, είναι η αιτία που το κριτήριο απόδοσης θα πάρει τιμή μικρότερη, ή το πολύ ίση, από οποιοδήποτε άλλο κριτήριο απόδοσης. Ψάχνουμε δηλαδή το απόλυτο (ή ολικό) ελάχιστο του J , όχι απλά ένα τοπικό ελάχιστο. Φυσικά, ένας τρόπος για την εύρεση του ολικού ελαχίστου είναι να βρούμε όλα τα τοπικά ελάχιστα και στη συνέχεια απλά να διαλέξουμε ένα, του οποίου το κριτήριο απόδοσης έχει την μικρότερη τιμή.

1.1.3 Ταξινόμηση των συστημάτων

Τα συστήματα περιγράφονται από όρους όπως, **γραμμικά**, **μη γραμμικά**, **εξαρτώμενα του χρόνου** και **ανεξάρτητα του χρόνου**. Θα ταξινομήσουμε τα συστήματα με βάση τη μορφή των εξισώσεων κατάστασης. Για παράδειγμα, αν ένα σύστημα είναι **μη γραμμικό** και **εξαρτώμενο του χρόνου**, οι εξισώσεις κατάστασης γράφονται ως εξής:

$$\dot{x}(t) = a(x(t), u(t), t)$$

Συστήματα **μη γραμμικά** και **ανεξάρτητα του χρόνου** αναπαριστώνται από εξισώσεις κατάστασης της μορφής

$$\dot{x}(t) = a(x(t), u(t))$$

Αν ένα σύστημα είναι **γραμμικό** και **εξαρτώμενο του χρόνου**, έχει τις εξής εξισώσεις κατάστασης:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

όπου $A(t)$ και $B(t)$ είναι πίνακες διαστάσεων $n \times n$ και $n \times m$ αντίστοιχα με στοιχεία που μεταβάλλονται με τον χρόνο. Οι εξισώσεις κατάστασης για συστήματα **γραμμικά** και **ανεξάρτητα του χρόνου** έχουν τη μορφή

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),$$

όπου οι A και B είναι σταθεροί πίνακες.

1.1.4 Εξισώσεις των εξόδων

Οι **έξοδοι** ενός συστήματος συμβολίζονται με $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$. Αν οι έξοδοι είναι συναρτήσεις των εισόδων και των καταστάσεων, **μη γραμμικές** και **εξαρτώμενες του χρόνου**, γράφουμε τις εξισώσεις των εξόδων ως εξής:

$$y(t) = c(x(t), u(t), t).$$

Αν η έξοδος σχετίζεται με τις καταστάσεις και τις εισόδους με μια σχέση **γραμμική** και **ανεξάρτητη του χρόνου**, τότε

$$y(t) = Cx(t) + Du(t),$$

όπου C και D είναι σταθεροί πίνακες διαστάσεων $q \times n$ και $q \times m$ αντίστοιχα.

1.2 Προβλήματα συνοριακών τιμών δύο σημείων

Ο λογισμός των μεταβολών χρησιμοποιείται στην θεωρία του βέλτιστου ελέγχου για να βρεθεί ένα σύνολο αναγκαίων συνθηκών, οι οποίες πρέπει να ικανοποιούνται από έναν βέλτιστο ελεγκτή και την αντίστοιχη τροχιά του. Αυτές οι αναγκαίες συνθήκες βελτιστοποίησης οδηγούν σε ένα πρόβλημα συνοριακών τιμών δύο σημείων, συνήθως μη γραμμικό, το οποίο πρέπει να λυθεί έτσι ώστε να καθοριστεί μια συγκεκριμένη έκφραση για τον βέλτιστο ελεγκτή.

Παρακάτω θα χρησιμοποιήσουμε, για ευκολία, τον εξής ορισμό:

Ορισμός 1.4

Έστω το σύστημα των εξισώσεων κατάστασης

$$\dot{x}(t) = \underbrace{A(t)x(t) + B(t)u(t)}_{a(x(t),u(t),t)}$$

και ο δείκτης απόδοσης που θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε είναι ο

$$J = \underbrace{\frac{1}{2}x^T(t_f)Hx(t_f)}_{h(x(t_f),t_f)} + \int_{t_0}^{t_f} \underbrace{\frac{1}{2}[x^T(t)Q(t)x(t) + u^T(t)R(t)u(t)]}_{g(x(t),u(t),t)} dt \quad (1.2\alpha)$$

όπου οι πίνακες H και Q είναι συμμετρικοί και θετικά ημι-ορισμένοι ενώ ο R είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος.

Η συνάρτηση H , που δίνεται από τον τύπο

$$H(x(t),u(t),p(t),t) = \frac{1}{2} \left[\underbrace{x^T(t)Q(t)x(t) + u^T(t)R(t)u(t)}_{g(x(t),u(t),t)} \right] + \quad (1.2\beta)$$

$$+ p^T(t) \left[\underbrace{A(t)x(t) + B(t)u(t)}_{a(x(t),u(t),t)} \right]$$

καλείται **Χαμιλτονιανή**.

Να σημειωθεί ότι η σχέση (1.2α) είναι, ουσιαστικά, η σχέση (1.1) διατυπωμένη με μορφή πινάκων.

Η επίλυση του προβλήματος εύρεσης βέλτιστου ελέγχου $u(t)$ που ελαχιστοποιεί το κριτήριο απόδοσης J ανάγεται στην επίλυση του προβλήματος συνοριακών τιμών δύο σημείων, το οποίο συνοψίζεται από τις εξής εξισώσεις :

$$\dot{x}^*(t) = \frac{\partial H}{\partial p} = a(x^*(t), u^*(t), t) \quad (1.3)$$

$$\dot{p}^*(t) = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\left[\frac{\partial a}{\partial x}(x^*(t), u^*(t), t) \right]^T p^*(t) - \frac{\partial g}{\partial x}(x^*(t), u^*(t), t) \quad (1.4)$$

$$0 = \frac{\partial H}{\partial u} = \left[\frac{\partial a}{\partial u}(x^*(t), u^*(t), t) \right]^T p^*(t) + \frac{\partial g}{\partial u}(x^*(t), u^*(t), t) \quad (1.5)$$

$$x^*(t_0) = x_0 \quad (1.6)$$

$$p^*(t_f) = \frac{\partial h}{\partial x}(x^*(t_f)) \quad (1.7)$$

όπου οι μεταβλητές κατάστασης και ελέγχου δεν δεσμεύονται από περιορισμούς, ο τελικός χρόνος t_f είναι σταθερός και το $x(t_f)$ είναι ελεύθερο.

(οι συναρτήσεις a, g και h έχουν οριστεί στις σχέσεις (1.2α) και (1.2β)).

Με τη βοήθεια των παραπάνω συνθηκών θέλουμε να υπολογίσουμε τις βέλτιστες τιμές των $x^*(t)$ και $u^*(t)$ με $t \in [t_0, t_f]$. Εύκολα μπορούμε να παρατηρή-

σοιμε ότι οι εκφράσεις για το $x^*(t)$ και το $u^*(t)$ είναι απόλυτα εξαρτημένες από την αρχική κατάσταση x_0 , αλλά και την τελική κατάσταση $p^*(t_f)$ και αυτός είναι ο λόγος που δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε γνωστές μεθόδους τις αριθμητικής ανάλυσης.

Ας θεωρήσουμε ότι η (1.5) μπορεί να επιλυθεί με τέτοιο τρόπο ώστε να αποκτήσουμε μια έκφραση του $u^*(t)$ συναρτήσει των $x^*(t)$, $p^*(t)$ και t δηλαδή,

$$u^*(t) = f(x^*(t), p^*(t), t).$$

Αν αυτή η έκφραση αντικατασταθεί στις εξισώσεις (1.3) και (1.4), έχουμε ένα σύνολο από $2n$ διαφορικές εξισώσεις πρώτου βαθμού, οι οποίες εμπεριέχουν μόνο $x^*(t)$, $p^*(t)$ και t . Οι συνθήκες για αυτές τις διαφορικές εξισώσεις (οι οποίες είναι γενικά μη γραμμικές) δίνονται από τις εξισώσεις (1.3) - (1.7).

Όλες οι αριθμητικές μέθοδοι για την επίλυση τέτοιων προβλημάτων περιέχουν είτε δυναμικό προγραμματισμό είτε επαναληπτικές διαδικασίες.

Ο δυναμικός προγραμματισμός, έτσι όπως εφαρμόζεται σε προβλήματα συνοριακών τιμών δύο σημείων, μπορεί να περιγραφεί σαν μια διαδικασία δημιουργίας πολλών λύσεων οι οποίες ικανοποιούν τις περιοριστικές συνθήκες που έχουν καθοριστεί στο ένα άκρο, χρησιμοποιώντας ως παραμέτρους τις μη καθορισμένες περιοριστικές συνθήκες. Αν επιλεγθεί το σωστό πεδίο τιμών των παραμέτρων, κάποιες από τις λύσεις θα προσπεράσουν, ή θα είναι κοντά, στις επιθυμητές περιοριστικές συνθήκες στο άλλο άκρο.

Οι επαναληπτικές μέθοδοι που χρησιμοποιούνται για την επίλυση προβλημάτων συνοριακών τιμών δύο σημείων, είναι τρεις:

- η μέθοδος της **μέγιστης κλίσης (method of steepest descent)**
- η μέθοδος της **μεταβολής των ακρότατων (variation of extremals)** και
- η μέθοδος της **ημιγραμμικοποίησης (quasilinearization)**

Στα επόμενα κεφάλαια θα αναφερθούμε εκτενέστερα στη μέθοδο της μέγιστης πτώσης και για τις μεθόδους μεταβολής των ακρότατων και ημιγραμμικοποίησης θα γίνει απλή αναφορά στην μεθοδολογία τους.

2. Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ ΜΕΓΙΣΤΗΣ ΚΛΙΣΗΣ

Η μέθοδος της μέγιστης πτώσης, είναι η πιο γνωστή μέθοδος μιας ευρύτερης κατηγορίας μεθόδων που λέγονται **μέθοδοι της κλίσης (gradient methods)**. Αυτές οι μέθοδοι, χαρακτηρίζονται από επαναληπτικούς αλγόριθμους βελτίωσης προσεγγίσεων των ελεγκτών $u(t)$, έτσι ώστε να πλησιάσουν πιο κοντά στις συνθήκες βελτιστοποίησης και τις περιοριστικές συνθήκες.

Ο λόγος για τον οποίον οι μέθοδοι της κλίσης προκαλούν το ενδιαφέρον, είναι το γεγονός ότι η εξίσωση του συστήματος λύνεται επακριβώς σε κάθε επανάληψη, με τον ελεγκτή να διαταράσσεται από βήμα σε βήμα με σκοπό να πλησιάσει προς την βέλτιστη λύση. Με άλλα λόγια, ο αλγόριθμος **προσομοιώνει** τη δυναμική απόκριση του συστήματος με ποικίλους ελεγκτές από την μία επανάληψη στην άλλη, και οι επιδράσεις της βελτιστοποίησης είναι αρκετά εμφανείς σε κάθε βήμα.

2.1 Η μέθοδος της μέγιστης κλίσης στον βέλτιστο έλεγχο

Ας δούμε πώς εφαρμόζεται η μέθοδος της μέγιστης κλίσης για την επίλυση προβλημάτων συνοριακών τιμών δύο σημείων.

2.1.1 Ελαχιστοποίηση των συναρτήσεων

Ας ξεκινήσουμε με ένα πρόβλημα λογισμού. Έστω f μια συνάρτηση δύο ανεξάρτητων μεταβλητών x_1 και x_2 . Συμβολίζουμε με $f(x_1, x_2)$ την τιμή της συνάρτησης f στο σημείο (x_1, x_2) και θέλουμε να βρούμε το σημείο (x_1^*, x_2^*) στο οποίο η f έχει την ελάχιστη τιμή, η οποία θα συμβολίζεται με $f(x_1^*, x_2^*)$.

Αν θεωρηθεί ότι οι μεταβλητές x_1 και x_2 δεν έχουν κάποιους περιορισμούς, τότε, για να είναι το σημείο (x_1^*, x_2^*) τοπικό ελάχιστο της συνάρτησης f θα πρέπει το διαφορικό της f να μηδενίζεται στο σημείο (x_1^*, x_2^*) , ή αλλιώς,

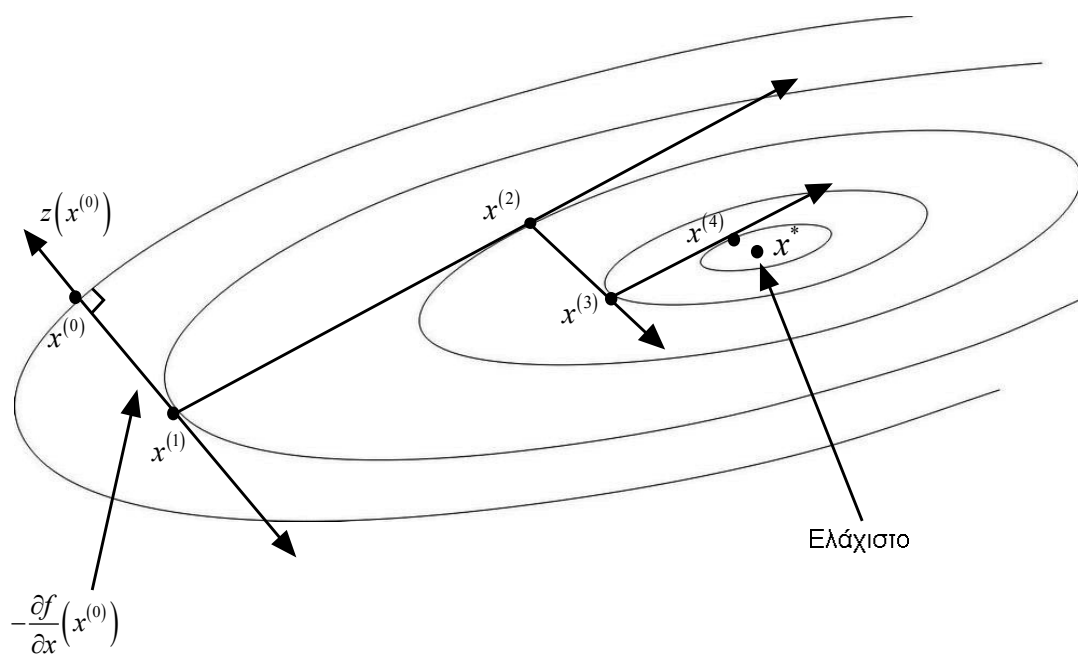
$$\begin{aligned} df(x_1^*, x_2^*) &= \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^*, x_2^*) \right] \Delta x_1 + \left[\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^*, x_2^*) \right] \Delta x_2 \\ &\triangleq \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x^*) \right]^T \Delta x = 0. \end{aligned}$$

Το $\frac{\partial f}{\partial x}$ είναι η κλίση της συνάρτησης f ως προς x . Επειδή τα x_1 και x_2 είναι ανεξάρτητα, οι συνιστώσες του Δx θα είναι ανεξάρτητα αυθαίρετες άρα, από την παραπάνω σχέση προκύπτει πως

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x^*) = 0.$$

Με άλλα λόγια, για να είναι το $f(x^*)$ τοπικό ελάχιστο είναι υποχρεωτικό η κλίση της συνάρτησης f στο σημείο x^* να ισούται με μηδέν. Η σχέση $\frac{\partial f}{\partial x}(x^*) = 0$, η οποία είναι αναγκαία συνθήκη αλλά όχι ικανή, αναπαριστά δύο αλγεβρικές εξισώσεις οι οποίες συνήθως δεν είναι γραμμικές. Αν αυτές ότι οι δύο εξισώσεις δεν μπορούν να λυθούν με αναλυτικό τρόπο, θα πρέπει να βρεθεί ένας άλλος τρόπος καθορισμού του x^* .

Μια πιθανή προσέγγιση είναι να δούμε την ελαχιστοποίηση σαν ένα πρόβλημα ορειβασίας. Ας υποθέσουμε ότι η συνάρτηση f καθορίζει τους λόφους και τις κοιλάδες στον τρισδιάστατο χώρο $x_1, x_2, f(x_1, x_2)$. Ένας τρόπος για να βρεθεί ο πάτος της κοιλάδας είναι να διαλέξουμε ένα δοκιμαστικό σημείο $x^{(0)}$ και να κινηθούμε με κατεύθυνση κατηφορική μέχρι να βρεθεί ένα σημείο x^* από το οποίο, προς όποια κατεύθυνση και να κινηθούμε θα προκληθεί αύξηση της τιμής της συνάρτησης. Για να γίνει αποτελεσματική η διαδικασία αναρρίχησης, επιλέγουμε να μετακινηθούμε προς την κατεύθυνση της μέγιστης κλίσης, για να διανύσουμε την μικρότερη δυνατή απόσταση ως το κατώτερο σημείο του λόφου. Η κατεύθυνση της μέγιστης κλίσης από το σημείο $x^{(0)}$ καθορίζεται με τον υπολογισμό της κλίσης του λόφου στο σημείο $x^{(0)}$. Το διάνυσμα της κλίσης είναι κάθετο στην καμπύλη ανύψωσης όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.



Σχήμα 1.

Το $z(x^{(0)})$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα στην διεύθυνση της κλίσης στο σημείο $x^{(0)}$, δηλαδή

$$z(x^{(0)}) \triangleq \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x^{(0)})}{\left\| \frac{\partial f}{\partial x}(x^{(0)}) \right\|} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x^{(0)})}{\sqrt{\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^{(0)}) \right]^2 + \left[\frac{\partial f}{\partial x_2}(x^{(0)}) \right]^2}}. \quad (2.1)$$

Προχωρώντας προς στην κατεύθυνση του διανύσματος $-z(x^{(0)})$, η μεταβολή του x δίνεται από τον τύπο:

$$\Delta x \triangleq x^{(1)} - x^{(0)} = -\tau z(x^{(0)}), \quad (2.2)$$

όπου το $\tau > 0$ είναι το μέγεθος του βήματος. Με αυτή την επιλογή για το Δx , το διαφορικό, το οποίο είναι γραμμική προσέγγιση στην μεταβολή της f , γίνεται

$$df(x^{(0)}) = -\tau \left[\frac{\partial f}{\partial x} \right]^T z(x^{(0)}),$$

ή χρησιμοποιώντας την εξίσωση (2.1), η παραπάνω σχέση γίνεται

$$\begin{aligned} df(x^{(0)}) &= \frac{-\tau \left\{ \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^{(0)}) \right]^2 + \left[\frac{\partial f}{\partial x_2}(x^{(0)}) \right]^2 \right\}}{\left\| \frac{\partial f}{\partial x}(x^{(0)}) \right\|} \\ &= -\tau \sqrt{\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^{(0)}) \right]^2 + \left[\frac{\partial f}{\partial x_2}(x^{(0)}) \right]^2}. \end{aligned}$$

Αυτό σημαίνει ότι

$$df(x^{(0)}) \leq 0,$$

με την ισότητα να ισχύει αν και μόνο αν το $\frac{\partial f}{\partial x}$ είναι μηδέν στο σημείο $x^{(0)}$.

Συνεχίζουμε την επαναληπτική διαδικασία υπολογίζοντας το $z(x^{(1)})$, το οποίο είναι το μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση της κλίσης στο σημείο $x^{(1)}$, και χρησιμοποιούμε την γενίκευση της σχέσης (2.2) για να καθορίσουμε το επόμενο σημείο, το $x^{(2)}$.

$$\Delta x \triangleq x^{(i+1)} - x^{(i)} = -\tau z(x^{(i)})$$

Πρέπει επίσης να επιλέξουμε και μια κατάλληλη τιμή για το βήμα τ . Παρατηρώντας το Σχήμα 1 είναι προφανές ότι αν το τ είναι πολύ μεγάλο, θα ξεπεράσουμε το όριο, ενώ αν το τ είναι πολύ μικρό, θα θεωρηθούμε υπερβολικά διστακτικοί. Και στις δύο περιπτώσεις ο χρόνος υπολογισμού είναι υπερβολικός μια που περισσότερος χρόνος ξοδεύεται στη μέτρηση κλίσεων και λιγότερος στην αναρρίχηση. Το ιδανικό θα ήταν να επιλέγαμε το τ με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε να ελαχιστοποιηθεί ο χρόνος υπολογισμού. Όμως, μια που έτσι κι αλλιώς το πρόβλημα είναι δύσκολο από μόνο του, έχουν δημιουργηθεί διάφορες αυτοσχέδιες μέθοδοι για την επιλογή του κατάλληλου τ . Μια τέτοια μέθοδος είναι να γίνει αναζήτηση μιας απλής μεταβλητής για να καθορίσουμε την τιμή του τ που προκαλεί την μεγαλύτερη μείωση της συνάρτη-

σης f όταν κινείται στην κατεύθυνση του διανύσματος $-z(x^{(0)})$. Για να χρησιμοποιηθεί αυτή η τεχνική, πρέπει πρώτα να καθοριστεί η κατεύθυνση της μέγιστης κλίσης και ύστερα να κινηθούμε προς αυτή την κατεύθυνση μέχρι να σταματήσουν να μειώνονται οι τιμές της συνάρτησης. Ύστερα, μια νέα κατεύθυνση της κλίσης θα καθοριστεί και θα επαναληφθεί η διαδικασία αναρρίχησης. Αυτή η διαδικασία θα συνεχιστεί μέχρι να βρεθεί ένα σημείο στο οποίο η κλίση είναι μηδέν.

2.1.2 Ελαχιστοποίηση των συναρτησιακών

Θα μιλήσουμε τώρα για μια προέκταση της έννοιας της μέγιστης κλίσης η οποία έχει εφαρμοστεί σε προβλήματα βέλτιστου ελέγχου. Έστω ένας ήδη γνωστός ελεγκτής

$$u^{(i)}(t), t \in [t_0, t_f]$$

ο οποίος χρησιμοποιείται στην επίλυση των διαφορικών εξισώσεων

$$\dot{x}^{(i)}(t) = a(x^{(i)}(t), u^{(i)}(t), t) \quad (2.3)$$

$$\dot{p}^{(i)}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(x^{(i)}(t), u^{(i)}(t), p^{(i)}(t), t) \quad (2.4)$$

έτσι ώστε η τροχιά κατάστασης-σύζευξης (*state-costate trajectory*) $x^{(i)}, p^{(i)}$ να ικανοποιεί τους περιορισμούς

$$x^{(i)}(t_0) = x_0 \quad (2.5)$$

$$p^{(i)}(t_f) = \frac{\partial h}{\partial x}(x^{(i)}(t_f)). \quad (2.6)$$

Αν αυτός ο ελεγκτής ικανοποιεί και τη σχέση

$$\frac{\partial H}{\partial x}(x^{(i)}(t), u^{(i)}(t), p^{(i)}(t), t) = 0 \quad (2.7)$$

τότε τα $x^{(i)}(t), u^{(i)}(t)$ και $p^{(i)}(t)$ είναι ακρότατα. Έστω ότι η σχέση (2.7) δεν ικανοποιείται. Τότε, η μεταβολή του επαυξημένου συναρτησιακού J_a στον ελεγκτή κατάσταση-σύζευξης είναι

$$\begin{aligned} \delta J_a = & \left[\frac{\partial H}{\partial x}(x^{(i)}(t_f)) - p^{(i)}(t_f) \right]^T \delta x(t_f) \\ & + \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \begin{aligned} & \left[p^{(i)}(t) + \frac{\partial H}{\partial x}(x^{(i)}(t), u^{(i)}(t), p^{(i)}(t), t) \right]^T \delta x(t) \\ & + \left[\frac{\partial H}{\partial u}(x^{(i)}(t), u^{(i)}(t), p^{(i)}(t), t) \right]^T \delta u(t) \\ & + \left[a(x^{(i)}(t), u^{(i)}(t), t) - \dot{x}^{(i)}(t) \right]^T \delta p(t) \end{aligned} \right\} dt, \end{aligned}$$

όπου $\delta x(t) \triangleq x^{(i+1)}(t) - x^{(i)}(t), \delta u(t) \triangleq u^{(i+1)}(t) - u^{(i)}(t)$, και $\delta p(t) \triangleq p^{(i+1)}(t) - p^{(i)}(t)$.

Αν οι σχέσεις (2.3) - (2.6) ικανοποιούνται τότε

$$\delta J_a = \int_{t_0}^{t_f} \left[\frac{\partial H}{\partial u}(x^{(i)}(t), u^{(i)}(t), p^{(i)}(t), t) \right]^T \delta u(t) dt.$$

Να θυμηθούμε ότι το δJ_a είναι η ελάχιστη μεταβολή $\Delta J_a \triangleq J_a(u^{(i+1)}) - J_a(u^{(i)})$ και αν η νόρμα του $\delta u, \|u^{(i+1)} - u^{(i)}\|$ είναι μικρή, τότε το πρόσημο του ΔJ_a θα καθορίζεται από το πρόσημο του δJ_a . Μια που σκοπός μας είναι η ελαχιστοποίηση του J_a , θέλουμε να γίνει το ΔJ_a αρνητικό. Αν αλλάξουμε το u ως εξής

$$\delta u(t) = u^{(i+1)}(t) - u^{(i)}(t) = -\tau \frac{\partial H^{(i)}}{\partial u}(t), t \in [t_0, t_f]$$

με $\tau \geq 0$, τότε

$$\delta J_a = -\tau \int_{t_0}^{t_f} \left[\frac{\partial H^{(i)}}{\partial u}(t) \right]^T \left[\frac{\partial H^{(i)}}{\partial u}(t) \right] dt \leq 0 \quad (2.8)$$

επειδή η συνάρτηση προς ολοκλήρωση είναι μη αρνητική για όλα τα $t \in [t_0, t_f]$.

Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν

$$\frac{\partial H^{(i)}}{\partial u}(t) = 0 \quad (2.9)$$

για όλα τα $t \in [t_0, t_f]$.

Η επιλογή του δu με τέτοιο τρόπο, δηλαδή με το $\|\delta u\|$ επαρκώς μικρό, μας εξασφαλίζει ώστε η κάθε τιμή του δείκτη απόδοσης να είναι τουλάχιστον τόσο μικρή όσο και η προηγούμενη τιμή. Τελικά, όταν το J_a φτάνει σε ένα (σχετικό) ελάχιστο το διάνυσμα $\frac{\partial H}{\partial u}$ θα είναι μηδέν σε όλο το διάστημα $[t_0, t_f]$.

2.1.3 Ο Αλγόριθμος της μεθόδου της μέγιστης κλίσης

ΒΗΜΑ 1 Διαλέγουμε μια αρχική προσέγγιση για το $u^{(0)}(t)$, $t \in [t_0, t_f]$. (π.χ. αυτό γίνεται υποδιαιρώντας το διάστημα $[t_0, t_f]$ σε N υποδιαστήματα (συνήθως ίδιου πλάτους) και θεωρώντας τον ελεγκτή $u^{(0)}$ τμηματικά σταθερό στο καθένα από τα υποδιαστήματα, δηλαδή

$$u^0(t) = u^0(t_k), \quad t \in [t_k, t_{k+1}), k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (2.10)$$

ΒΗΜΑ 2 Χρησιμοποιώντας το $u^{(i)}$, ολοκληρώνουμε τις εξισώσεις κατάστασης από το t_0 ως το t_f με αρχικές συνθήκες $x(t_0) = x_0$ και αποθηκεύουμε το αποτέλεσμα $x^{(i)}$ σαν μια τμηματικά σταθερή διανυσματική συνάρτηση.

ΒΗΜΑ 3 Υπολογίζουμε το $p^{(i)}(t_f)$ αντικαθιστώντας το $x^{(i)}(t_f)$ του δεύτερου βήματος στην εξίσωση $p^{(i)}(t_f) = \frac{\partial h}{\partial x}(x^{(i)}(t_f))$. Χρησιμοποιώντας την τιμή $p^{(i)}(t_f)$ σαν την αρχική συνθήκη και τις τμηματικά σταθερές τιμές των $x^{(i)}$ που είναι ήδη αποθηκευμένες από το Βήμα 2, ολοκληρώνουμε τις συζευγμένες εξισώσεις από το t_f ως το t_0 , υπολογίζουμε το $\frac{\partial H^{(i)}}{\partial u}$ με $t \in [t_0, t_f]$ και αποθηκεύουμε τη συνάρτηση αυτή.

ΒΗΜΑ 4 Αν

$$\left\| \frac{\partial H^{(i)}}{\partial u} \right\| \leq \gamma \quad (2.11)$$

όπου γ είναι μια προεπιλεγμένη θετική σταθερά, και

$$\left\| \frac{\partial H^{(i)}}{\partial u} \right\|^2 \triangleq \int_{t_0}^{t_f} \left[\frac{\partial H^{(i)}}{\partial u}(t) \right]^T \left[\frac{\partial H^{(i)}}{\partial u}(t) \right] dt, \quad (2.12)$$

τερματίζουμε την επαναληπτική διαδικασία.

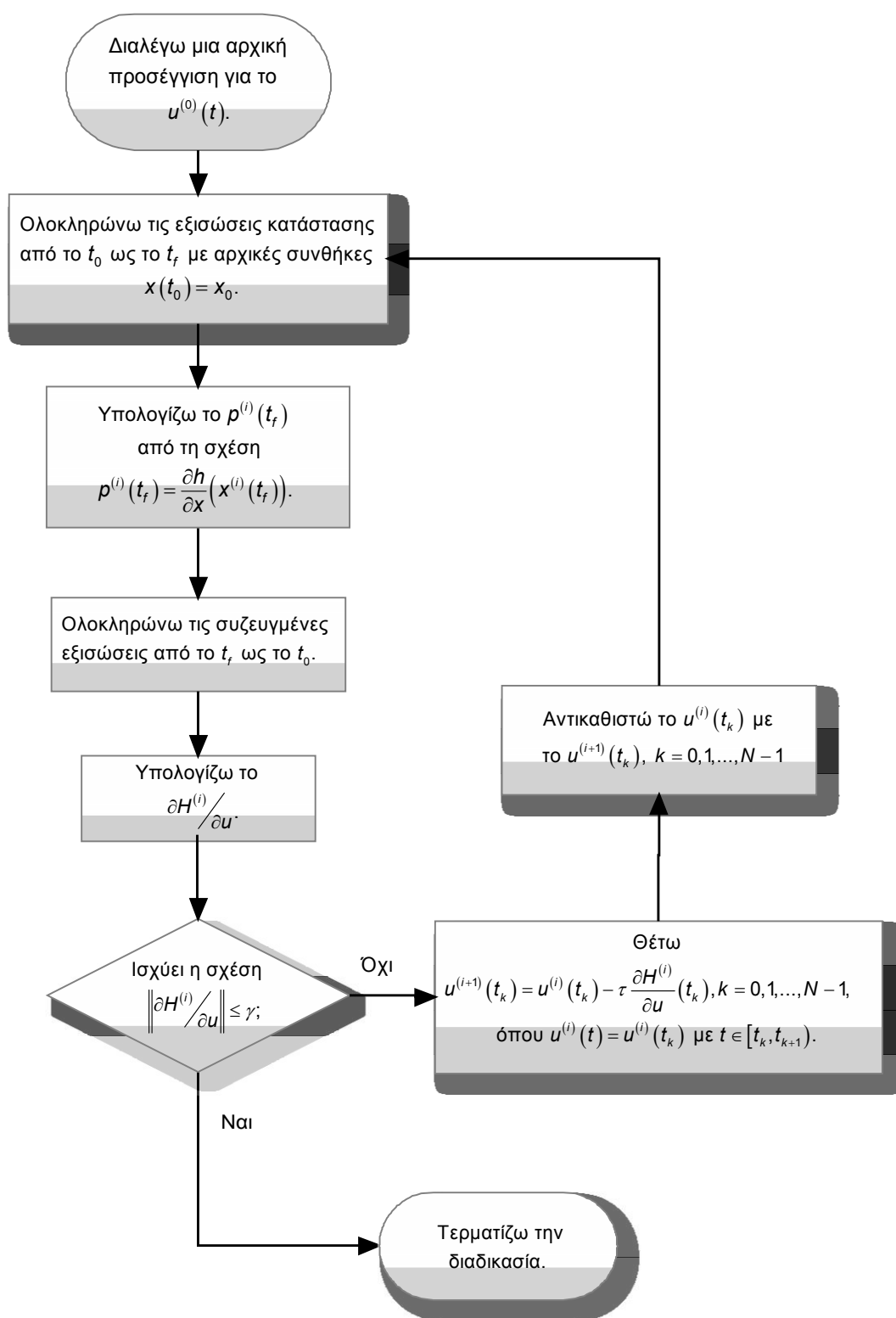
Αν η σχέση (2.11) δεν ικανοποιείται, δημιουργούμε μια νέα, τμηματικά σταθερή συνάρτηση που δίνεται από τον τύπο:

$$u^{(i+1)}(t_k) = u^{(i)}(t_k) - \tau \frac{\partial H^{(i)}}{\partial u}(t_k), \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (2.13)$$

όπου

$$u^{(i)}(t) = u^{(i)}(t_k), \quad \text{για } t \in [t_k, t_{k+1}), \quad k = 0, 1, \dots, N-1.$$

Αντικαθιστούμε το $u^{(i)}(t_k)$ με $u^{(i+1)}(t_k)$, $k = 0, 1, \dots, N-1$ και επιστρέφουμε στο Βήμα 2.



Σχήμα 2. Ο αλγόριθμος της μέγιστης κλίσης.

Η τιμή που θα δοθεί στην σταθερά τερματισμού γ εξαρτάται από το εκάστοτε πρόβλημα και την ακρίβεια που επιθυμούμε στην λύση. Ίσως να είναι καλύτερο να γίνουν διάφορα δοκιμαστικά τεστ πριν διαλέξουμε την τιμή του γ .

Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, το βήμα τ συνήθως καθορίζεται από κάποια αυτοσχέδια τεχνική. Μια πιθανή τεχνική είναι να διαλέξουμε μια τιμή του τ , η οποία προσπαθεί να επηρεάσει μια συγκεκριμένη τιμή του ΔJ_a (ίσως κάποιο καθορισμένο ποσοστό της προηγούμενης τιμής του ΔJ_a). Από τις εξισώσεις (2.8)-(2.12) παρατηρούμε ότι

$$\delta J_a = -\tau \left\| \frac{\partial H^{(i)}}{\partial u} \right\|^2 \leq 0.$$

Για να προκαλέσουμε μια αποτελεσματική μεταβολή ποσοστού q στο J_a , διαλέγουμε το τ με τέτοιο τρόπο ώστε

$$\tau = \frac{\frac{q}{100} |J_a|}{\left\| \frac{\partial H^{(i)}}{\partial u} \right\|^2}.$$

Αυτή η μέθοδος επιλογής του τ συνήθως απαιτεί την ικανότητα παρεμβολής στην εκτέλεση του προγράμματος για την αλλαγή της τιμής του q , μια που όσο το J_a πλησιάζει ένα ελάχιστο, $\left\| \frac{\partial H^{(i)}}{\partial u} \right\| \rightarrow 0$. Έτσι, αν το q δεν μειωθεί, το βήμα γίνεται μεγάλο και ίσως προκληθούν σοβαρές διακυμάνσεις.

Όπως θα φανεί και στις εφαρμογές της μεθόδου στο Κεφάλαιο 6, δεν υπάρχει ένας συγκεκριμένος τρόπος επιλογής του βήματος τ για την επίλυση όλων των προβλημάτων. Ένας τρόπος που βοηθάει στη σύγκλιση του αλγόριθμου για ένα πρόβλημα, μπορεί για κάποιο άλλο να μην μπορεί να χρησιμοποιηθεί. Αυτός είναι και ο λόγος που δεν χρησιμοποιούμε τον ίδιο τρόπο επιλογής βήματος με τα απλά προβλήματα βελτιστοποίησης, μια που μετά από εφαρμογές, αποδείχτηκε ότι εκείνη η μέθοδος οδηγεί αρκετά συχνά σε απόκλιση του αλγόριθμου.

2.2 Η μέθοδος της μέγιστης κλίσης σε προβλήματα βελτιστοποίησης

Για να γίνει πιο κατανοητή η μέθοδος της μέγιστης κλίσης, θα κάνουμε μια σύνομη περιγραφή της μεθόδου σε ένα απλά προβλήματα βελτιστοποίησης.

Η διαδικασία που ακολουθείται σε προβλήματα βελτιστοποίησης είναι παρόμοια με τη διαδικασία που ακολουθείται στα προβλήματα του βέλτιστου ελέγχου, αλλά είναι πιο απλοποιημένη.

Αλγόριθμος της μέγιστης κλίσης σε προβλήματα βελτιστοποίησης

1). Διαλέγουμε ένα αρχικό σημείο x_0 ; $k = 0$.

2). Στο βήμα k η διεύθυνση μετάβασης δίνεται από τον τύπο $d_k = -\frac{\nabla f(x_k)}{\|\nabla f(x_k)\|}$.

Βρίσκουμε ένα τ_k έτσι ώστε

$$f(x_k + \tau_k d_k) = \underset{\lambda \geq 0}{\text{Min}} f(x_k + \lambda d_k).$$

Αυτό μπορεί να γίνει με ένας από τους εξής τρόπους:

α). Από την εξίσωση
$$\frac{df\left(x_k - \tau_k \frac{\nabla f(x_k)}{\|\nabla f(x_k)\|}\right)}{d\tau_k} = 0.$$

β). Αν η συνάρτηση είναι *τετραγωνική μορφή*, δηλαδή της μορφής

$$f(x) \approx f(x_k) + \tau_k \nabla^T f(x_k) d_k + \frac{1}{2} \tau_k^2 d_k^T \nabla^2 f(x_k) d_k$$

τότε

$$\tau_k = -\frac{\nabla^T f(x_k) d_k}{d_k^T H d_k} = \frac{\|\nabla f(x_k)\|^3}{\nabla f^T(x_k) H \nabla f(x_k)}$$

Θέτουμε $x_{k+1} = x_k + \tau_k d_k$.

3). Κριτήριο τερματισμού: αν ικανοποιείται το κριτήριο τερματισμού που θα επιλέξουμε, σταματάμε. Αν όχι, θέτουμε $k = k + 1$ και επιστρέφουμε στο βήμα 2.

Τα κριτήρια τερματισμού που χρησιμοποιούνται πιο συχνά είναι τα εξής:

a).
$$\text{Max}_{i=1, \dots, n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| < \varepsilon, \quad \varepsilon > 0.$$

β).
$$\|\nabla f\|^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 < \varepsilon, \quad \varepsilon > 0.$$

γ).
$$|f(x_{k+1}) - f(x_k)| < \varepsilon, \quad \varepsilon > 0.$$

όπου ε θα είναι μία σταθερά η οποία πάντα θα δίνεται.

2.3 Παραδείγματα

Στη συνέχεια θα δώσουμε ένα παράδειγμα εφαρμογής της μεθόδου σε πρόβλημα βελτιστοποίησης και ένα παράδειγμα εφαρμογής της μεθόδου σε πρόβλημα του βέλτιστου ελέγχου.

Παράδειγμα 2.1

Θέλουμε να βρούμε το ελάχιστο της συνάρτησης $f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 5$.

Επιλέγουμε σαν αρχική προσέγγιση το σημείο $x^0 = (2, 2, 2)^T$. Η κλίση της συνάρτησης σε κάθε σημείο x θα είναι

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(x)}{\partial x_2}, \frac{\partial f(x)}{\partial x_3} \right)^T = (2x_1, 4x_2, 6x_3)^T.$$

Άρα

$$\|\nabla f(x)\| = \sqrt{\nabla^T f(x) \nabla f(x)} = \sqrt{4x_1^2 + 16x_2^2 + 36x_3^2} = 2\sqrt{x_1^2 + 4x_2^2 + 9x_3^2}$$

το οποίο για $x_0 = (2, 2, 2)^T$ μας δίνει

$$\|\nabla f(x_0)\| = 2\sqrt{4 + 16 + 36} = 2\sqrt{56} = 4\sqrt{14}.$$

Σαν κριτήριο σύγκλισης θα χρησιμοποιήσουμε το δεύτερο, δηλαδή θα ελέγξουμε αν

$$\|\nabla f(x_k)\|^2 < \varepsilon, \quad \varepsilon > 0. \quad (2.14)$$

Έστω $\varepsilon = 0.1$. Προφανώς το κριτήριο δεν ικανοποιείται, οπότε προχωράμε στην εύρεση του x_1 .

Η διεύθυνση μετάβασης στο επόμενο σημείο είναι η

$$d_0 = -\frac{\nabla f(x_0)}{\|\nabla f(x_0)\|} = -\frac{1}{4\sqrt{14}}(4, 8, 12) = -\frac{1}{\sqrt{14}}(1, 2, 3)^T.$$

Θέτουμε $x_1 = x_0 + \tau_0 d_0$. Αντικαθιστώντας τα τ_0 και d_0 θα έχουμε

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + \tau_0 d_0 = (2, 2, 2)^T - \frac{1}{\sqrt{14}} \tau_0 (1, 2, 3)^T \\ &= \left(2 - \frac{1}{\sqrt{14}} \tau_0, 2 - \frac{2}{\sqrt{14}} \tau_0, 2 - \frac{3}{\sqrt{14}} \tau_0 \right)^T. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Για να βρούμε το τ_0 θα χρησιμοποιήσουμε τον πρώτο τρόπο που αναφέρει ο αλγόριθμος.

$$\begin{aligned} f(x_0 + \tau_0 d_0) &= \left(2 - \frac{1}{\sqrt{14}} \tau_0 \right)^2 + 2 \left(2 - \frac{2}{\sqrt{14}} \tau_0 \right)^2 + 3 \left(2 - \frac{3}{\sqrt{14}} \tau_0 \right)^2 - 5 \\ &= 4 - \frac{4}{\sqrt{14}} \tau_0 + \frac{1}{14} \tau_0^2 + 8 - \frac{16}{\sqrt{14}} \tau_0 + \frac{8}{14} \tau_0^2 + 12 - \frac{36}{\sqrt{14}} \tau_0 \\ &\quad + \frac{27}{14} \tau_0^2 - 5 \\ &= \frac{36}{14} \tau_0^2 - \frac{56}{\sqrt{14}} \tau_0 + 19 = \frac{18}{7} \tau_0^2 - \frac{56}{\sqrt{14}} \tau_0 + 19 \end{aligned}$$

Παραγωγίζουμε ως προς τ_0 και έχουμε

$$\frac{df(x_0 + \tau_0 d_0)}{d\tau_0} = \frac{36}{7} \tau_0 - \frac{56}{\sqrt{14}}. \quad (2.16)$$

Για να βρούμε το ελάχιστο της (2.16), την θέτουμε ίση με μηδέν. Άρα

$$\begin{aligned} \frac{36}{7} \tau_0 - \frac{56}{\sqrt{14}} = 0 &\Leftrightarrow \tau_0 = \frac{7 \cdot 56}{36 \cdot \sqrt{14}} = \frac{7 \cdot 14}{9 \cdot \sqrt{14}} = \frac{7 \cdot \sqrt{14}}{9} \\ &\Leftrightarrow \tau_0 \approx 2.9102 \end{aligned}$$

Για να βρούμε την επόμενη προσέγγιση, αντικαθιστούμε το βήμα τ_0 στη σχέση (2.15) και έχουμε

$$\begin{aligned} x_1 &= \left(2 - \frac{2.9102}{\sqrt{14}}, 2 - \frac{2 \cdot 2.9102}{\sqrt{14}}, 2 - \frac{3 \cdot 2.9102}{\sqrt{14}} \right)^T \\ &= (1.2222, 0.4444, -0.3333)^T. \end{aligned}$$

Κάνουμε πάλι την ίδια διαδικασία:

$$\begin{aligned}\|\nabla f(x_1)\| &= 2\sqrt{(1.2222)^2 + 4(0.4444)^2 + 9(-0.3333)^2} \\ &\approx 2\sqrt{1.4938 + 0.79 + 0.9998} \approx 3.6241.\end{aligned}$$

Το κριτήριο (2.14) πάλι δεν ικανοποιείται οπότε συνεχίζουμε την διαδικασία. Υπολογίζουμε την διεύθυνση μετάβασης στο επόμενο σημείο

$$\begin{aligned}d_1 &= -\frac{\nabla f(x_1)}{\|\nabla f(x_1)\|} \approx -\frac{1}{3.6241}(2.4444, 1.7776, -1.9998)^T \\ &\approx (-0.6745, -0.4905, 0.5518)^T.\end{aligned}$$

Θέτουμε $x_2 = x_1 + \tau_1 d_1$, άρα

$$x_2 = (1.2222 - 0.6745\tau_1, 0.4444 - 0.4905\tau_1, -0.3333 + 0.5518\tau_1)^T \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned}f(x_1 + \tau_1 d_1) &= (1.2222 - 0.6745\tau_1)^2 + 2(0.4444 - 0.4905\tau_1)^2 \\ &\quad + 3(-0.3333 + 0.5518\tau_1)^2 - 5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{df(x_1 + \tau_1 d_1)}{d\tau_1} &= 0 \Leftrightarrow -1.349(1.2222 - 0.6745\tau_1) - \\ &\quad -1.962(0.4444 - 0.4905\tau_1) + 3.3108(-0.3333 + 0.5518\tau_1) = 0 \\ &\Leftrightarrow 3.6992\tau_1 - 3.62415 = 0 \Leftrightarrow \tau_1 \approx 0.9797\end{aligned}$$

Αντικαθιστώ το τ_1 στην (2.17) και έχουμε

$$x_2 = (0.5614, -0.0361, 0.2073)^T.$$

$$\begin{aligned}\|\nabla f(x_2)\| &= 2\sqrt{(0.5614)^2 + 4(-0.0361)^2 + 9(0.2073)^2} \\ &\approx 2\sqrt{0.3152 + 0.0052 + 0.3868} \approx 1.6819.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d_2 &= -\frac{\nabla f(x_2)}{\|\nabla f(x_2)\|} \approx -\frac{1}{1.6819}(1.1228, -0.1444, 1.2438)^T \\ &\approx (-0.6676, 0.0859, -0.7395)^T.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_3 &= x_2 + \tau_2 d_2 = \\ &= (0.5614 - 0.6676\tau_2, -0.0361 + 0.0859\tau_2, 0.2073 - 0.7395\tau_2)^T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x_2 + \tau_2 d_2) &= (0.5614 - 0.6676\tau_2)^2 + 2(-0.0361 + 0.0859\tau_2)^2 \\ &\quad + 3(0.2073 - 0.7395\tau_2)^2 - 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{df(x_2 + \tau_2 d_2)}{d\tau_2} &= 0 \Leftrightarrow -1.3352(0.5614 - 0.6676\tau_2) + \\ &0.3436(-0.0361 + 0.0859\tau_2) - 4.437(0.2073 - 0.7395\tau_2) = 0 \\ &\Leftrightarrow 4.2021\tau_2 - 1.6818 = 0 \Leftrightarrow \tau_2 \approx 0.4002 \end{aligned}$$

$$x_3 = (0.2942, 0.0017, -0.0886)^T$$

$$\begin{aligned} \|\nabla f(x_3)\| &= 2\sqrt{(0.2942)^2 + 4(0.0017)^2 + 9(-0.0886)^2} \\ &\approx 2\sqrt{0.0865 + 1.156 \times 10^{-5} + 0.0706} \approx 0.7927. \end{aligned}$$

$$\|\nabla f(x_3)\|^2 = 0.6284 > 0.1$$

άρα συνεχίζουμε την επαναληπτική διαδικασία.

$$\begin{aligned} d_3 &= -\frac{\nabla f(x_3)}{\|\nabla f(x_3)\|} \approx -\frac{1}{0.7926}(0.5884, 0.0068, -0.5316)^T \\ &\approx (-0.7424, -0.0086, 0.6707)^T. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_4 &= x_3 + \tau_3 d_3 = \\ &= (0.2942 - 0.7424\tau_3, 0.0017 - 0.0086\tau_3, -0.0886 + 0.6707\tau_3)^T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x_3 + \tau_3 d_3) &= (0.2942 - 0.7424\tau_3)^2 + 2(0.0017 - 0.0086\tau_3)^2 \\ &\quad + 3(-0.0886 + 0.6707\tau_3)^2 - 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{df(x_3 + \tau_3 d_3)}{d\tau_3} = 0 &\Leftrightarrow -1.4848(0.2942 - 0.7424\tau_3) - \\ &-0.0344(0.0017 - 0.0086\tau_3) + 4.0242(-0.0886 + 0.6707\tau_3) = 0 \\ &\Leftrightarrow 3.8016\tau_3 - 0.7934 = 0 \Leftrightarrow \tau_3 \approx 0.2087 \end{aligned}$$

$$x_4 = (0.1393, -0.000095, 0.0514)^T$$

$$\begin{aligned} \|\nabla f(x_4)\| &= 2\sqrt{(0.1393)^2 + 4(-0.000095)^2 + 9(0.0514)^2} \\ &\approx 2\sqrt{0.0194 + 3.6 \times 10^{-8} + 0.2338} \approx 0.4157. \end{aligned}$$

$$\|\nabla f(x_4)\|^2 = 0.1728 > 0.1$$

Το κριτήριο δεν ικανοποιείται οπότε συνεχίζουμε την επαναληπτική διαδικασία.

$$\begin{aligned} d_4 &= -\frac{\nabla f(x_4)}{\|\nabla f(x_4)\|} \approx -\frac{1}{0.1728}(0.2786, -0.00038, 0.3084)^T \\ &\approx (-1.6122, 0.0022, -1.7847)^T. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_5 &= x_4 + \tau_4 d_4 = \\ &= (0.1393 - 1.6122\tau_4, -0.000095 + 0.0022\tau_4, 0.0514 - 1.7847\tau_4)^T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x_4 + \tau_4 d_4) &= (0.1393 - 1.6122\tau_4)^2 + 2(-0.000095 + 0.0022\tau_4)^2 \\ &\quad + 3(0.0514 - 1.7847\tau_4)^2 - 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{df(x_4 + \tau_4 d_4)}{d\tau_4} = 0 &\Leftrightarrow -3.2244(0.1393 - 1.6122\tau_4) + \\ &+ 0.0088(-0.000095 + 0.0022\tau_4) - 10.7082(0.0514 - 1.7847\tau_4) = 0 \\ &\Leftrightarrow 24.3093\tau_4 - 0.9996 = 0 \Leftrightarrow \tau_4 \approx 0.0411 \end{aligned}$$

$$x_5 = (0.073, -0.0000046, -0.02195)^T$$

$$\begin{aligned} \|\nabla f(x_5)\| &= 2\sqrt{(0.073)^2 + 4(-0.0000046)^2 + 9(-0.02195)^2} \\ &\approx 2\sqrt{0.0053 + 0.0000 + 0.0043} \approx 0.19595. \end{aligned}$$

$$\|\nabla f(x_5)\|^2 \approx 0.0384 < 0.1$$

Το κριτήριο ικανοποιείται συνεπώς σταματάμε την επαναληπτική διαδικασία.

Άρα, το βέλτιστο σημείο της συνάρτησης είναι το

$$x_5 = (0.073, -0.0000046, -0.02195)^T$$

το οποίο δίνει βέλτιστη τιμή

$$\begin{aligned} f(x_5) &= (0.073)^2 + 2(-0.0000046)^2 + 3(-0.02195)^2 - 5 \\ &\approx -4.9932. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 2.2

Να βρεθεί ο βέλτιστος ελεγκτής του συστήματος

$$\dot{x}(t) = -x(t) + u(t) \tag{2.18}$$

με αρχική συνθήκη $x(0) = 4.0$ και κριτήριο απόδοσης

$$J = x^2(1) + \int_0^1 \frac{1}{2} [x^2(t) + u^2(t)] dt.$$

Λύση

Αρχικά υπολογίζουμε την Χαμιλτονιανή συνάρτηση, η οποία θα ισούται με

$$H(x(t), u(t), p(t), t) = \frac{1}{2} [x^2(t) + u^2(t)] + p^T(t) [-x(t) + u(t)]$$

Στη συνέχεια, για να βρούμε την εξίσωση σύζευξης, υπολογίζουμε την μερική παράγωγο της Χαμιλτονιανής ως προς x .

$$\dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x} = -x(t) + p(t)$$

Επίσης θα πρέπει να ισχύουν και οι σχέσεις

$$p(t_f) = \frac{\partial h}{\partial x}(t_f) \quad \text{και} \quad \frac{\partial H}{\partial u} = u(t) + p(t) = 0.$$

Άρα

$$p(1) = 2x(1) \quad \text{και} \quad u(t) = -p(t).$$

Έστω ότι η αρχική είσοδος ισούται με $u^0(t) = 1.0$. Την αντικαθιστούμε στην εξίσωση κατάστασης (2.18) και λύνουμε τις διαφορικές εξισώσεις

$$\dot{x}(t) = -x(t) + 1 \quad \text{και} \quad \dot{p}(t) = -x(t) + p(t)$$

οι οποίες μας δίνουν

$$x(t) = e^{-t}(3 + e^t) \quad \text{και} \quad p(t) = 3e^{-t}(3 + e - t) - 1.$$

Η μερική παράγωγος της Χαμιλτονιανής ως προς u ισούται με

$$\frac{\partial H}{\partial u} = u(t) + p(t) = 3e^{-t}(3 + e - t)$$

Η νόρμα $\left\| \frac{\partial H^{(0)}}{\partial u} \right\|$ ισούται με 3.1704. Ελέγχουμε αν είναι μεγαλύτερη ή μικρότερη από την σταθερά γ που θα επιλέξουμε. Αν είναι μικρότερη, ο αλγόριθμος τερματίζεται και έχουμε βρει τον βέλτιστο ελεγκτή που ισούται με 1.0. Συνήθως όμως το $\gamma < 1$ οπότε συνεχίζουμε την ανακύκλωση του αλγόριθμου, υπολογίζοντας τον ελεγκτή $u^1(t)$ από τη σχέση

$$\begin{aligned} u^{(1)}(t) &= u^{(0)}(1) - \tau \frac{\partial H^{(0)}}{\partial u}(1) \\ &= 1 - \tau \cdot 5.2073. \end{aligned}$$

3. Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ ΤΩΝ ΑΚΡΟΤΑΤΩΝ

Η επαναληπτική μέθοδος που θα αναφερθούμε στο κεφάλαιο αυτό λέγεται μεταβολή των ακρότατων, επειδή οι τροχιές που δημιουργούνται μέσω του αλγορίθμου της, ικανοποιούν τις σχέσεις (1.3) - (1.5) και γι' αυτό το λόγο είναι ακρότατα.

Θεωρούμε το σύστημα

$$\dot{x}(t) = a(x(t), u(t), t)$$

και τον δείκτη απόδοσης

$$J = h(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), u(t), t) dt$$

όπου το $x(t_0) = x_0$ δίνεται, το t_0 και το t_f είναι καθορισμένα και οι αποδεκτές τιμές των καταστάσεων και των ελεγκτών δεν έχουν περιορισμούς.

Αρχικά, λύνουμε την εξίσωση $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$, από τη σχέση (1.5), συναρτήσεως των $x(t)$ και $p(t)$, και την αντικαθιστούμε στις εξισώσεις κατάστασης και στις συζευγμένες εξισώσεις, οι οποίες περιέχουν $x(t)$, $p(t)$ και t . Έτσι αποκτούμε τις ανηγμένες διαφορικές εξισώσεις

$$\dot{x}(t) = a(x(t), p(t), t) \quad (3.1)$$

και

$$\dot{p}(t) = d(x(t), p(t), t). \quad (3.2)$$

(συνήθως η d είναι μια μη γραμμική συνάρτηση των $x(t)$, $p(t)$ και t)

Θέτω μια αρχική τιμή για το $p_0(t_0)$ και θέτω τον δείκτη επανάληψης i σε μηδέν.

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις $p(t_0) = p^{(i)}(t_0)$ και $x(t_0) = x_0$ σαν αρχικές συνθήκες, ολοκληρώνω τις ανηγμένες εξισώσεις (3.1) - (3.2) και στη συνέχεια ολοκληρώνω και τις εξισώσεις

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[P_x \left(p^{(i)}(t_0), t \right) \right] &= \left[\frac{\partial^2 H}{\partial p \partial x}(t) \right]_i P_x \left(p^{(i)}(t_0), t \right) + \\ &+ \left[\frac{\partial^2 H}{\partial p^2}(t) \right]_i P_p \left(p^{(i)}(t_0), t \right) \end{aligned} \quad (3.3)$$

και

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[P_p \left(p^{(i)}(t_0), t \right) \right] &= \left[-\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(t) \right]_i P_x \left(p^{(i)}(t_0), t \right) + \\ &+ \left[-\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial p}(t) \right]_i P_p \left(p^{(i)}(t_0), t \right) \end{aligned} \quad (3.4)$$

με αρχικές συνθήκες τις

$$P_x \left(p^{(i)}(t_0), t_0 \right) = \left. \frac{\partial x(t_f)}{\partial p_1(t_0)} \right|_{p^{(i)}(t_0)} = 0 \quad (\text{ο } n \times n \text{ μηδενικός πίνακας)} \text{ και}$$

$$P_p \left(p^{(i)}(t_0), t_0 \right) = \left. \frac{\partial p(t_0)}{\partial p_1(t_0)} \right|_{p^{(i)}(t_0)} = I \quad (\text{ο } n \times n \text{ μοναδιαίος πίνακας)},$$

από t_0 ως t_f .

Να σημειωθεί ότι το σύμβολο $[]_i$ στις σχέσεις (3.3) και (3.4) σημαίνει πως οι πίνακες που βρίσκονται μέσα στις αγκύλες θα υπολογιστούν στην τροχιά $x^{(i)}, p^{(i)}$.

Ο πίνακας $P_p \left(p^{(i)}(t_0), t \right)$ ορίζεται από τη σχέση

$$P_p(p^{(i)}(t_0), t) \triangleq \begin{bmatrix} \frac{\partial p_1(t)}{\partial p_1(t_0)} & \frac{\partial p_1(t)}{\partial p_2(t_0)} & \cdots & \frac{\partial p_1(t)}{\partial p_n(t_0)} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{\partial p_n(t)}{\partial p_1(t_0)} & \frac{\partial p_n(t)}{\partial p_2(t_0)} & \cdots & \frac{\partial p_n(t)}{\partial p_n(t_0)} \end{bmatrix}_{p^{(i)}(t_0)}$$

και μας δείχνει την επιρροή που είχαν οι αλλαγές του αρχικού $p^{(0)}$, στην τροχιά σύζευξης σε χρόνο t .

Όμοια ορίζεται και ο πίνακας $P_x(p^{(i)}(t_0), t)$

$$P_x(p^{(i)}(t_0), t) \triangleq \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1(t)}{\partial p_1(t_0)} & \frac{\partial x_1(t)}{\partial p_2(t_0)} & \cdots & \frac{\partial x_1(t)}{\partial p_n(t_0)} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{\partial x_n(t)}{\partial p_1(t_0)} & \frac{\partial x_n(t)}{\partial p_2(t_0)} & \cdots & \frac{\partial x_n(t)}{\partial p_n(t_0)} \end{bmatrix}_{p^{(i)}(t_0)}$$

Αφού ολοκληρώσουμε τις εξισώσεις, αποθηκεύω μόνο τις τιμές $p^{(i)}(t_f)$ και $x^{(i)}(t_f)$ όπως και τους $n \times n$ πίνακες $P_p(p^{(i)}(t_0), t_f)$ και $P_x(p^{(i)}(t_0), t_f)$.

Ελέγχουμε αν ικανοποιείται το κριτήριο τερματισμού

$$\left\| p^{(i)}(t_f) - \frac{\partial h(x^{(i)}(t_f))}{\partial x} \right\| < \gamma.$$

Αν ικανοποιείται, χρησιμοποιούμε την τελευταία επανάληψη του p για να ολοκληρώσουμε ξανά τις εξισώσεις κατάστασης και τις συζευγμένες εξισώσεις και τυπώνουμε ή παριστάνουμε γραφικά την βέλτιστη τροχιά και τον βέλτιστο έλεγχο. Αν το κριτήριο τερματισμού δεν ικανοποιείται, χρησιμοποιούμε την εξίσωση επανάληψης

$$p^{(i+1)}(t_0) = p^{(i)}(t_0) + \left\{ \left[\left[\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x(t_f)) \right] P_x(p(t_0), t_f) - P_p(p(t_0), t_f) \right] \right\}^{-1} \cdot \left[p(t_f) - \frac{\partial h}{\partial x}(x(t_f)) \right]_i$$

για τον καθορισμό της τιμής $p^{(i+1)}(t_0)$, αυξάνω το i κατά και επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία.

Ας δούμε το παράδειγμα που λύσαμε με την μέθοδο της μέγιστης κλίσης πώς επιλύεται με τη μέθοδο της μεταβολής των ακρότατων.

Παράδειγμα 3.1

Να βρεθεί ο βέλτιστος ελεγκτής του συστήματος

$$\dot{x}(t) = -x(t) + u(t) \quad (3.5)$$

με αρχική συνθήκη $x(0) = 4.0$ και κριτήριο απόδοσης

$$J = x^2(1) + \int_0^1 \frac{1}{2} [x^2(t) + u^2(t)] dt.$$

Λύση

Η Χαμιλτονιανή συνάρτηση ισούται, όπως προηγουμένως, με

$$H(x(t), u(t), p(t), t) = \frac{1}{2} [x^2(t) + u^2(t)] + p^T(t) [-x(t) + u(t)].$$

$$\text{Ισχύει } \frac{\partial H}{\partial u} = 0 \Rightarrow u(t) = -p(t).$$

Άρα η εξίσωση κατάστασης (3.5) γίνεται

$$\dot{x}(t) = -x(t) - p(t) \quad (3.6)$$

Η εξίσωση σύζευξης ισούται πάλι με

$$\dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x} = -x(t) + p(t) \quad (3.7)$$

Επίσης ισχύει

$$p(t_f) = \frac{\partial h}{\partial x}(t_f) \Rightarrow p(1) = 2x(1).$$

Έστω ότι $p(0) = 0$. Λύνοντας τις διαφορικές εξισώσεις (3.6)-(3.7) παίρνουμε τις σχέσεις

$$x(t) = 4 \cosh(\sqrt{2}t) - 2\sqrt{2} \sinh(\sqrt{2}t)$$

$$\text{και } p(t) = -2\sqrt{2} \sinh(\sqrt{2}t)$$

Μια που το παράδειγμα είναι απλό, ο πίνακας $P_p(p^{(i)}(t_0), t_f)$ θα αποτελείται μόνο από ένα στοιχείο, το οποίο δίνεται από τον τύπο

$$\left. \frac{dp(t_f)}{dp(t_0)} \right|_{p(t_0)=0} \doteq \frac{\delta p^{(0)}(t_f)}{\delta p^{(0)}(t_0)}.$$

$$\text{Έστω } \delta p^{(0)}(0) = 0.001. \quad (3.8)$$

Ολοκληρώνουμε ξανά την (3.7), αυτή τη φορά με αρχική συνθήκη την (3.8) αντί για την $p(0) = 0$, και η σχέση που παίρνουμε είναι η

$$p^{(0)}(t) + \delta p^{(0)}(t) = 0.001 \cosh(\sqrt{2}t) - 2.828 \sinh(\sqrt{2}t)$$

Άρα

$$\left. \frac{dp(t_f)}{dp(t_0)} \right|_{p(t_0)=0} = \frac{0.001 \cosh(\sqrt{2}) + 0.0004 \sinh(\sqrt{2})}{0.001}$$

$$= 2.952$$

Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού ισούται με 11.9487. Ανάλογα με την τιμή του γ που θα επιλεχθεί, είτε τερματίζουμε την επαναληπτική διαδικασία είτε συνεχίζουμε την ανακύκλωση του αλγόριθμου, χρησιμοποιώντας την επαναληπτική εξίσωση

$$p^{(1)}(t_0) = p^{(0)}(t_0) - \left[\left. \frac{dp(t_f)}{dp(t_0)} \right|_{p(t_0)=0} \right]^{-1} \cdot p^{(0)}(t_f) =$$

$$= 0 - [2.952]^{-1} [-2\sqrt{2} \cosh(\sqrt{2})] = 2.087.$$

4. Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ ΗΜΙΓΡΑΜΜΙΚΟΠΟΙΗΣΗΣ

Η μέθοδος της ημιγραμμικοποίησης, για την επίλυση μη γραμμικών προβλημάτων συνοριακών τιμών δύο σημείων, ακολουθεί την παρακάτω διαδικασία:

1. Δημιουργούμε τις ανηγμένες διαφορικές εξισώσεις

$$\dot{x}(t) = a(x(t), p(t), t)$$

και

$$\dot{p}(t) = d(x(t), p(t), t).$$

λύνοντας τη σχέση $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$ συναρτήσει των $x(t), p(t)$ και t και αντικαθιστώντας στις εξισώσεις κατάστασης και στις συζευγμένες εξισώσεις, οι οποίες εκείνη τη στιγμή περιέχουν μόνο $x(t), p(t)$ και t .

2. Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις

$$\begin{aligned} \dot{x}^{(i+1)}(t) = & a(x^{(i)}(t), p^{(i)}(t), t) \\ & + \left[\frac{\partial a}{\partial x}(x^{(i)}(t), p^{(i)}(t), t) \right] [x^{(i+1)}(t) - x^{(i)}(t)] \\ & + \left[\frac{\partial a}{\partial p}(x^{(i)}(t), p^{(i)}(t), t) \right] [p^{(i+1)}(t) - p^{(i)}(t)] \end{aligned} \quad (4.1)$$

και

$$\begin{aligned} \dot{p}^{(i+1)}(t) = & -\frac{\partial H}{\partial x}(x^{(i)}(t), p^{(i)}(t), t) \\ & - \left[\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(x^{(i)}(t), p^{(i)}(t), t) \right] [x^{(i+1)}(t) - x^{(i)}(t)] \\ & - \left[\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial p}(x^{(i)}(t), p^{(i)}(t), t) \right] [p^{(i+1)}(t) - p^{(i)}(t)], \end{aligned} \quad (4.2)$$

προσδιορίζουμε τις γραμμικοποιημένες, ανηγμένες διαφορικές εξισώσεις συναρτήσεων των $x^{(i)}(t), p^{(i)}(t)$ και t .

3. Εκτιμώ μια τιμή της αρχικής τροχιάς $x^{(0)}(t), p^{(0)}(t)$, όπου $t \in [t_0, t_f]$ και θέτω τον δείκτη επανάληψης i ίσο με μηδέν.

4. Υπολογίζω τους πίνακες

$$\begin{aligned} A_{11}(t) \triangleq \frac{\partial a}{\partial x}, \quad A_{12}(t) \triangleq \frac{\partial a}{\partial p}, \quad A_{21}(t) \triangleq -\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}, \quad A_{22}(t) \triangleq -\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial p}, \\ e_1(t) \triangleq -A_{11}(t)x(t) - A_{12}(t)p(t) + a \end{aligned}$$

και

$$e_2(t) \triangleq -A_{21}(t)x(t) - A_{22}(t)p(t) - \frac{\partial H}{\partial x}$$

στην τροχιά $x^{(i)}, p^{(i)}$.

5. Ολοκληρώνω αριθμητικά τις γραμμικές, ομογενείς, διαφορικές εξισώσεις

$$\begin{aligned} \dot{x}^{(i+1)}(t) &= A_{11}(t)x^{(i+1)}(t) + A_{12}(t)p^{(i+1)}(t) \\ \dot{p}^{(i+1)}(t) &= A_{21}(t)x^{(i+1)}(t) + A_{22}(t)p^{(i+1)}(t) \end{aligned} \quad (4.3)$$

από t_0 ως t_f χρησιμοποιώντας τα εξής n σύνολα αρχικών συνθηκών:

$$\begin{aligned}
 x^{H1}(t_0) &= 0, & p^{H1}(t_0) &= [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0]^T \\
 x^{H2}(t_0) &= 0, & p^{H2}(t_0) &= [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0]^T \\
 & \cdot & & \\
 & \cdot & & \\
 & \cdot & & \\
 x^{Hn}(t_0) &= 0, & p^{Hn}(t_0) &= [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0]^T
 \end{aligned}$$

για την απόκτηση n ομογενών λύσεων.

Τα $x^{H1}, p^{H1}; x^{H2}, p^{H2}; \dots; x^{Hn}, p^{Hn}$ είναι οι λύσεις των διαφορικών εξισώσεων (4.3).

Στη συνέχεια, υπολογίζω μια συγκεκριμένη λύση της σχέσης

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \dot{x}^{(i+1)}(t) \\ \text{-----} \\ \dot{p}^{(i+1)}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{11}(t) & | & A_{12}(t) \\ \text{-----} & | & \text{-----} \\ A_{21}(t) & | & A_{22}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^{(i+1)}(t) \\ \text{-----} \\ p^{(i+1)}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1(t) \\ \text{-----} \\ e_2(t) \end{bmatrix} \\
 &\triangleq A(t) \begin{bmatrix} x^{(i+1)}(t) \\ \text{-----} \\ p^{(i+1)}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1(t) \\ \text{-----} \\ e_2(t) \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

με αριθμητική ολοκλήρωση από t_0 ως t_f , χρησιμοποιώντας τις αρχικές συνθήκες

$$x^p(t_0) = x_0 \text{ και } p^p(t_0) = 0.$$

(x^p και p^p είναι η λύση που υπολογίσαμε από την (4.4))

Συνήθως, οι n ομογενείς λύσεις $x^{H1}, p^{H1}; x^{H2}, p^{H2}; \dots; x^{Hn}, p^{Hn}$ και η μία συγκεκριμένη λύση x^p και p^p υπολογίζονται ολοκληρώνοντας μια φορά $n(2n) + 2n = 2n(n + 1)$ διαφορικές εξισώσεις. Αποθηκεύουμε τις τιμές των κατάλληλων μεταβλητών στο $t = t_f$.

6. Χρησιμοποιούμε τις τιμές που βρήκαμε στο βήμα 5 για τον καθορισμό του c , το οποίο υπολογίζεται από τη σχέση:

$$c = \left[p^{H1}(t_f) - Mx^{H1}(t_f) : p^{H2}(t_f) - Mx^{H2}(t_f) : \dots : p^{Hn}(t_f) - Mx^{Hn}(t_f) \right]^{-1} \left[\frac{\partial h}{\partial x}(x^{(i)}(t_f)) - Mx^{(i)}(t_f) + Mx^{(p)}(t_f) - p^{(p)}(t_f) \right],$$

$$\text{όπου } M \triangleq \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x^{(i)}(t_f)).$$

7. Χρησιμοποιούμε το c που βρήκαμε στο βήμα 6 και τις σχέσεις

$$x^{(i+1)}(t) = c_1 x^{H1}(t) + c_2 x^{H2}(t) + \dots + c_n x^{Hn}(t) + x^p(t)$$

$$p^{(i+1)}(t) = c_1 p^{H1}(t) + c_2 p^{H2}(t) + \dots + c_n p^{Hn}(t) + p^p(t)$$

για τον καθορισμό της $(i+1)$ -στής τροχιάς.

8. Συγκρίνουμε την i -στή και την $(i+1)$ -στή τροχιά υπολογίζοντας τη νόρμα

$$\left\| \begin{bmatrix} x^{(i+1)} \\ \dots \\ p^{(i+1)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x^{(i)} \\ \dots \\ p^{(i)} \end{bmatrix} \right\| \triangleq \sum_{j=1}^n \left\{ \max_t |x_j^{(i+1)}(t) - x_j^{(i)}(t)| + \max_t |p_j^{(i+1)}(t) - p_j^{(i)}(t)| \right\}.$$

Αν

$$\left\| \begin{bmatrix} x^{(i+1)} \\ \dots \\ p^{(i+1)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x^{(i)} \\ \dots \\ p^{(i)} \end{bmatrix} \right\| \leq \gamma,$$

όπου γ είναι μία προκαθορισμένη σταθερά τερματισμού, η επαναληπτική διαδικασία έχει συγκλίνει και πηγαίνουμε στο βήμα 9. Αν το κριτήριο τερματισμού δεν ικανοποιείται, επιστρέφουμε στο βήμα 4, χρησιμοποιώντας την τροχιά $x^{(i+1)}, p^{(i+1)}$ στη θέση της $x^{(i)}, p^{(i)}$.

9. Ολοκληρώνουμε τις αρχικές, μη γραμμικές, ανηγμένες εξισώσεις κατάστασης και σύζευξης με αρχικές συνθήκες τις

$$x(t_0) = x_0 \text{ και } p(t_0) = c.$$

Συγκρίνουμε τα αποτελέσματα αυτής της ολοκλήρωσης με την τελική τροχιά $x^{(i+1)}, p^{(i+1)}$, χρησιμοποιώντας κατάλληλη νόρμα και επίσης με τις καθορισμένες περιοριστικές τιμές στο $t = t_f$ για να επιβεβαιώσουμε ότι η αλληλουχία των λύσεων στις γραμμικοποιημένες διαφορικές εξισώσεις έχει συγκλίνει στην λύση των μη γραμμικών διαφορικών εξισώσεων

$$\dot{x}(t) = a(x(t), p(t), t)$$

και

$$\dot{p}(t) = -\frac{\partial H(x(t), p(t), t)}{\partial x}.$$

Υπολογίζουμε το ιστορικό του βέλτιστου ελέγχου από τις τιμές κατάστασης-σύζευξης στην $(i + 1)$ -στη τροχιά και τυπώνουμε ή παριστάνουμε γραφικά την βέλτιστη τροχιά και τον βέλτιστο ελεγκτή.

Τα βήματα 1 ως 3 εκτελούνται εκτός αλγορίθμου από τον χρήστη ή τον προγραμματιστή, ενώ τα βήματα 4 ως 9 εκτελούνται από έναν ψηφιακό υπολογιστή.

Το παρακάτω παράδειγμα είναι το ίδιο με το παράδειγμα που δώσαμε στις άλλες δύο μεθόδους αλλά επειδή η εξίσωση κατάστασης είναι γραμμική, τα περισσότερα βήματα του αλγόριθμου παραλείπονται. Γι' αυτό το λόγο θα δώσουμε στη συνέχεια και ένα παράδειγμα με μη γραμμική εξίσωση κατάστασης.

Παράδειγμα 4.1

Να βρεθεί ο βέλτιστος ελεγκτής του συστήματος

$$\dot{x}(t) = -x(t) + u(t) \tag{4.4}$$

με αρχική συνθήκη $x(0) = 4.0$ και κριτήριο απόδοσης

$$J = x^2(1) + \int_0^1 \frac{1}{2} [x^2(t) + u^2(t)] dt.$$

Λύση

Η Χαμιλτονιανή συνάρτηση ισούται, όπως προηγουμένως, με

$$H(x(t), u(t), p(t), t) = \frac{1}{2} [x^2(t) + u^2(t)] + p^T(t) [-x(t) + u(t)].$$

Ισχύει $\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \Rightarrow u(t) = -p(t).$

Άρα η εξίσωση κατάστασης (4.4) γίνεται

$$\dot{x}(t) = -x(t) - p(t)$$

Η εξίσωση σύζευξης ισούται πάλι με

$$\dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x} = -x(t) + p(t)$$

Επίσης ισχύει

$$p(t_f) = \frac{\partial h}{\partial x}(t_f) \Rightarrow p(1) = 2x(1). \quad (4.5)$$

Έστω $x^H(0) = 0, p^H(0) = 1$. Τότε η λύση των ομογενών διαφορικών εξισώσεων θα είναι η εξής:

$$x(t) = -\frac{\sinh(\sqrt{2}t)}{\sqrt{2}} \quad \text{και} \quad p(t) = \cosh(\sqrt{2}t) + \frac{\sinh(\sqrt{2}t)}{\sqrt{2}}.$$

Για να βρω μια λύση των διαφορικών εξισώσεων, θέτουμε $x^p(0) = 4.0 = x(0)$ και $p^p(0) = 0$ και έχουμε

$$x^p(t) = 4 \cosh(\sqrt{2}t) - 2\sqrt{2} \sinh(\sqrt{2}t)$$

$$p^p(t) = -2\sqrt{2} \sinh(\sqrt{2}t)$$

Η ολοκληρωμένη λύση θα είναι η

$$x(t) = c_1 x^H(t) + x^p(t), \quad p(t) = c_1 p^H(t) + p^p(t)$$

Με τη βοήθεια της σχέσης (4.5) βρίσκουμε ότι $c_1 = 1.9023$. Συνεπώς

$$x(t) = 4 \cosh(\sqrt{2}t) - 4.1736 \sinh(\sqrt{2}t) \text{ και}$$

$$p(t) = 1.9023 \cdot \cosh(\sqrt{2}t) - 1.4833 \cdot \sinh(\sqrt{2}t).$$

Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι 1.9098. Οπότε αναλόγως με την τιμή που θα δώσουμε στο γ , είτε τερματίζουμε τη διαδικασία είτε συνεχίζουμε την ανακύκλωση του αλγορίθμου.

Παράδειγμα 4.2

Έχουμε το σύστημα $\dot{x}(t) = 2x^2(t) - 3u(t)$ και το κριτήριο απόδοσης είναι

$$J = \int_0^1 \frac{1}{2} [x^2(t) + u^2(t)] dt. \text{ Σαν αρχική συνθήκη παίρνουμε το } x(0) = 3.0.$$

Λύση

Αρχικά υπολογίζουμε τη Χαμιλτονιανή συνάρτηση:

$$H(x(t), u(t), p(t), t) = \frac{1}{2} [x^2(t) + u^2(t)] + p^T(t) [2x^2(t) - 3u(t)]$$

Ισχύει η σχέση $\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \Rightarrow u(t) = 3p(t)$

Άρα $\dot{x}(t) = 2x^2(t) - 9p(t)$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε την εξίσωση σύζευξης:

$$\dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x} = -x(t) - 4p(t)x(t)$$

και από τη σχέση $p(t_f) = \frac{\partial h}{\partial x}(t_f) = 0 \Rightarrow p(1) = 0.$

Υπολογίζουμε τους τύπους (4.1)-(4.2) του αλγορίθμου και, μετά από πράξεις, παίρνουμε τις σχέσεις:

$$\dot{x}^{(1)}(t) = [4x^{(0)}(t)]x^{(1)}(t) - 9p^{(1)}(t) - 2[x^{(0)}(t)]^2$$

$$\dot{p}^{(1)}(t) = [-2 - 4p^{(0)}(t)]x^{(1)}(t) - [4x^{(0)}(t)]p^{(1)}(t) + 4p^{(0)}(t)x^{(0)}(t).$$

Έστω $x^0(t) = 1$, $p^0(t) = 1/2$. Τότε

$$\begin{aligned}\dot{x}^{(1)}(t) &= 4x^{(1)}(t) - 9p^{(1)}(t) - 2 \\ \dot{p}^{(1)}(t) &= -4x^{(1)}(t) - 4p^{(1)}(t) + 2\end{aligned}$$

Έστω $x^H(0) = 0$, $p^H(0) = 1$. Η λύση των ομογενών διαφορικών εξισώσεων δίνου

$$\begin{aligned}x^H(t) &= -\frac{9\sinh(2\sqrt{13}t)}{2\sqrt{13}} \\ p^H(t) &= \cosh(2\sqrt{13}t) - \frac{2\sinh(2\sqrt{13}t)}{\sqrt{13}}\end{aligned}$$

Για να βρω μια λύση των διαφορικών εξισώσεων, θέτουμε $x^p(0) = 3.0 = x(0)$ και $p^p(0) = 0$ και έχουμε

$$\begin{aligned}x^p(t) &= \frac{1}{2} + \frac{5}{2}\cosh(2\sqrt{13}t) - \frac{5\sinh(2\sqrt{13}t)}{\sqrt{13}} \\ p^p(t) &= -\frac{5\sinh(2\sqrt{13}t)}{\sqrt{13}}\end{aligned}$$

Η ολοκληρωμένη λύση θα είναι η

$$x(t) = c_1 x^H(t) + x^p(t), \quad p(t) = c_1 p^H(t) + p^p(t) \quad (4.6)$$

Ξέρουμε ότι $p(1) = 0$ άρα $c_1 = 3.1142$ και συνεπώς οι σχέσεις (4.6) γίνονται

$$\begin{aligned}x(t) &= \frac{1}{2} + \frac{5}{2}\cosh(2\sqrt{13}t) - 5.2735\sinh(2\sqrt{13}t) \\ p(t) &= 3.1142\cosh(2\sqrt{13}t) - 3.1142\sinh(2\sqrt{13}t).\end{aligned}$$

Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι 1879 και προφανώς δεν θα ικανοποιεί το κριτήριο τερματισμού μια που η τιμή της είναι πολύ μεγάλη. Συνεπώς ο αλγόριθμος θα συνεχίσει την ανακύκλωσή του.

5. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Έχουμε αναφέρει τρεις επαναληπτικές, αριθμητικές μεθόδους για την επίλυση μη γραμμικών προβλημάτων συνοριακών τιμών δύο σημείων. Έχουμε θεωρήσει ως δεδομένο πως οι καταστάσεις και οι ελεγκτές δεν έχουν περιορισμούς. Αν δεν ισχύει αυτό, οι τεχνικές υπολογισμού που έχουμε αναφέρει θα πρέπει να διαφοροποιηθούν.

Σε καθεμιά από τις μεθόδους που αναφέρθηκαν, η φιλοσοφία τους είναι να επιλυθεί μια σειρά προβλημάτων στα οποία μία ή παραπάνω από τις πέντε αναγκαίες συνθήκες (1-3) - (1.7) δεν ικανοποιούνται αρχικά, αλλά στην πορεία θα ικανοποιηθούν αν η επαναληπτική διαδικασία συγκλίνει. Στη μέθοδο της μέγιστης κλίσης ο αλγόριθμος τερματίζεται όταν

$\left\| \frac{\partial H}{\partial u} \right\| \approx 0$ για όλα τα $t \in [t_0, t_f]$, ενώ οι άλλες τέσσερις

συνθήκες ικανοποιούνται σε όλη τη διάρκεια της επαναληπτικής διαδικασίας. Η σύγκλιση της μεθόδου της μεταβολής των ακρότατων επιτυγχάνεται όταν η περιοριστική

συνθήκη $p(t_f) = \frac{\partial h}{\partial x}(x(t_f))$ ικανοποιείται. Στην ημιγραμμικοποίηση, οι τροχιές

που δημιουργούνται ικανοποιούν τις περιοριστικές συνθήκες. Όταν μία τροχιά από αυτές που βρούμε είναι και λύση των ανηγμένων εξισώσεων κατάστασης-σύζευξης, η διαδικασία έχει συγκλίνει.

Εδώ πρέπει να τονιστεί ότι οι αριθμητικές τεχνικές που έχουμε αναφέρει, μπορεί να μην συγκλίνουν πάντα, και ακόμα και να συγκλίνουν μπορεί να συμβαίνει μόνο σε κάποιο τοπικό ελάχιστο. Δοκιμάζοντας διαφορετικές αρχικές εκτιμήσεις, μπορούμε να είμαστε σχετικά σίγουροι στον εντοπισμό οποιωνδήποτε άλλων τοπικών ακρότατων που μπορεί να υπάρχουν ή, αν η αριθμητική διαδικασία συγκλίνει στον ίδιο ελε-

γκτή και τροχιά για διάφορες αρχικές εκτιμήσεις, έχουμε κάποια ασφάλεια στο γεγονός ότι ένα ολικό ελάχιστο έχει καθοριστεί.

Στον παρακάτω πίνακα, γίνεται σύγκριση των ιδιοτήτων της κάθε μεθόδου.

	Μέγιστη Κλίση	Μεταβολή των Ακρότατων	Ημιγραμμικοποίηση
Αρχική εκτίμηση	$u(t)$	$p(t_0)$ ή $x(t_f)$	$x(t), p(t)$
Συνθήκη που πρέπει να ικανοποιεί	$\frac{\partial H}{\partial u} \equiv 0$	$p(t_f) = \frac{\partial h(x(t_f))}{\partial x}$	Εξισώσεις κατάστασης και σύζευξης
Σημασία της αρχικής εκτίμησης	Συνήθως δεν είναι καίρια για την σύγκλιση	Αν η εκτίμηση δεν είναι καλή μπορεί να συμβάλλει σε απόκλιση	Αν η εκτίμηση δεν είναι καλή μπορεί να συμβάλλει σε απόκλιση
Απαιτήσεις αποθηκευτικού χώρου	$u^{(i)}(t), x^{(i)}(t)$ και $\frac{\partial H^{(i)}(t)}{\partial u}$	$2[n \times n]$ πίνακες, περιοριστικές συνθήκες	Σχέσεις, $n \times n$ πίνακας, περιοριστικές συνθήκες, c
Σύγκλιση	Πλησιάζει πολύ γρήγορα σε ένα ελάχιστο, αλλά ύστερα η ταχύτητα επιβραδύνεται δραστικά	Όταν ξεκινήσει η σύγκλιση (αν ξεκινήσει), γίνεται ταχύτατα	Συγκλίνει τετραγωνικά στην περιοχή του βέλτιστου
Υπολογισμοί που απαιτούνται	Ολοκλήρωση $2n$ διαφορικών εξισώσεων, υπολογισμός του $\frac{\partial H^{(i)}(t)}{\partial u}$, τιμή βήματος	Ολοκλήρωση $2n(n+1)$ διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης, αντιστροφή ενός $n \times n$ πίνακα	Ολοκλήρωση $2n(n+1)$ διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης, αντιστροφή ενός $n \times n$ πίνακα

Η δυσκολία στην επίλυση μη γραμμικών προβλημάτων συνοριακών τιμών δύο σημείων, έχει κάνει τις επαναληπτικές, αριθμητικές μεθόδους αντικείμενο συνεχούς έρευνας. Όταν κάποιος αντιμετωπίζει ένα πρόβλημα τέτοιου τύπου, είναι χρήσιμο να γνωρίζει πολλές διαφορετικές τεχνικές, ίσως να δοκιμάσει διάφορες μεθόδους στο δοθέν πρόβλημα. Για παράδειγμα, η μέθοδος της μέγιστης κλίσης μπορεί να χρησιμοποιηθεί σαν αρχική διαδικασία και η ημιγραμμικοποίηση σαν τελική πάνω στη λύση.

6. ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Εδώ θα γίνουν εφαρμογές του αλγόριθμου της μεθόδου της μέγιστης κλίσης μέσω προγράμματος στη Mathematica που έκανε η συγγραφέας αυτής της διπλωματικής.

Τα προβλήματα που επιλύει το παρακάτω πρόγραμμα περιγράφονται ως εξής: Έχουμε ένα σύστημα εξισώσεων κατάστασης

$$\dot{x}(t) = \underbrace{A \cdot x(t) + B \cdot u(t)}_{a(x(t), u(t), t)}$$

όπου ο πίνακας A είναι $n \times n$ και ο πίνακας B είναι $n \times m$ και θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε έναν δείκτη απόδοσης που δίνεται από τον τύπο

$$J = \underbrace{\frac{1}{2} x^T(t_f) H x(t_f)}_{h(x(t_f), t_f)} + \int_{t_0}^{t_f} \underbrace{\frac{1}{2} [x^T(t) Q(t) x(t) + u^T(t) R(t) u(t)]}_{g(x(t), u(t), t)} dt$$

όπου οι πίνακες H και Q είναι συμμετρικοί και θετικά ημι-ορισμένοι ενώ ο R είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος.

Ο χρήστης θα πρέπει να δώσει τα εξής δεδομένα:

1. Τις διαστάσεις n και m των πινάκων.
2. Τους πίνακες A, B, Q, R, H καθώς επίσης και έναν πίνακα που θα περιλαμβάνει τις αρχικές συνθήκες.
3. Τις χρονικές τιμές t_0 και t_f καθώς επίσης και τον αριθμό των υποδιαστημάτων του διαστήματος $[t_0, t_f]$
4. Την είσοδο u του κάθε υποδιαστήματος και
5. Την σταθερά τερματισμού γ (στο πρόγραμμα αναφέρεται με το γράμμα g).

Πρόγραμμα για την επίλυση γραμμικών προβλημάτων συνοριακών τιμών δύο σημείων με την μέθοδο της μέγιστης κλίσης

```

Remove [n, A, B, m, ic, Q, H, R, g, P, system, U, T, arxikes,
Ham, h, X, eqx, eqp, dx, dp, xi, pi, costate, Hxp, H11, H1,
DD, Olokliroma, norm, k];
(* Εισαγωγή των δεδομένων *)
(* Σημείωση: Αν κάποιος πίνακας έχει μόνο ένα στοιχείο,
αυτό να γραφεί ανάμεσα σε ΔΥΟ άγκιστρα, όχι ένα, πχ. {{1}} *)
n = Input["Dwse ti diastasi tw n pinakwn = "];
A = Input["Dwse ton pinaka katastasis A = "];
B = Input["Dwse ton pinaka eisodoy B = "];
t0 = Input["Dwse to t0 = "];
tf = Input["Dwse to tf = "];
(* m είναι ο αριθμός των υποδιαστημάτων του διαστήματος [t0,tf] *)
m = Input["Dwse ton arithmo tw n upodiasmatwn tou [t0,tf]: "];
(* Δίνουμε την αρχική εκτίμηση του ελεγκτή u του κάθε διαστήματος,
ΟΧΙ σε μορφή πινάκων,
αλλά γράφουμε τους αριθμούς πατώντας το ENTER ανάμεσά τους *)
Do[Print[ui-1 = Input["Dwse tous elegtes u :"], {i, m}];
(* ic θα είναι ο πίνακας με τις αρχικές συνθήκες *)
ic = Input["Dwse ton nx1 pinaka me tis arxikes synthikes:"];
Q = Input["Dwse ton nxn pinaka Q:"];
H = Input["Dwse ton nxn pinaka H:"];
R = Input["Dwse ton nxn pinaka R:"];
g = Input["Dwse ti stathera termatismoy g:"];
(* Τα διανύσματα x[t], x'[t] και p[t] *)
x[t] = Table[{xi[t]}, {i, n}];
x'[t] = Table[{xi'[t]}, {i, n}];
P = Table[pi[t], {i, n}];
(* Το σύστημα των εξισώσεων *)
system = x'[t] == A.x[t] + B.{{u[t]}};
(* Βάζουμε τις εισόδους σε έναν πίνακα *)
U = Table[ui-1, {i, m}];
(* Δημιουργία ενός πίνακα με τα υποδιαστήματα του [t0,tf] *)
T = Table[{tk = t0 + k * (tf - t0) / m, tk+1 = t0 + (k + 1) * (tf - t0) / m}, {k, 0, m - 1}];
(* Δημιουργία ενός πίνακα με τις εξισώσεις των αρχικών συνθηκών *)
arxikes = Table[xi[t0] == ic[[i]][[1]], {i, n}];

```

```

(* Δημιουργία της Χαμιλτονιανής *)
Ham =
  (  $\frac{1}{2}$  Transpose[x[t]] . Q . x[t] +  $\frac{1}{2}$  {{u[t]}} . R . {{u[t]}} +
    P . A . x[t] + P . B . {{u[t]}} ) [[1]] [[1]];

(* Βρίσκουμε το h[tf] *)
h = (  $\frac{1}{2}$  Transpose[x[t]] . H . x[t] // . t -> T[[1, 2]] ) [[1]] [[1]];

(* Ένας βοηθητικός πίνακας για την επίλυση των διαφορικών εξισώσεων *)
X = Table[x[t] [[i, 1]], {i, n}];

Do[ (* Οι εξισώσεις κατάστασης (state equations) *)
  eqx = Table[{system[[1, i]][[1]] == system[[2, i]][[1]] /. u[t] -> U[[j]],
    arkikes[[i]]}, {i, n}];

  (* Λύση των διαφορικών εξισώσεων με x*)
  dx = DSolve[eqx, X, t] // FullSimplify;

  (* Πίνακας με τις λύσεις των παραπάνω διαφορικών εξισώσεων *)
  xi = Table[xi[t_] -> dx[[1, i]][[2]], {i, n}];

  (* Οι συζευγμένες εξισώσεις (costate equations) *)
  Do[costate[i] = pi'[t] == -D[Ham, xi[t]], {i, n}];

  eqp = Table[{costate[i], pi[T[[j, 2]]] == D[h, xi[T[[j, 2]]]}], {i, n}];

  (* Λύση των διαφορικών εξισώσεων με p *)
  dp = DSolve[eqp // . xi, P, t] // FullSimplify;

  (* Πίνακας με τις λύσεις των παραπάνω διαφορικών εξισώσεων *)
  pi = Table[pi[t_] -> dp[[1, i]][[2]], {i, n}];

  (* Ενώνω τους πίνακες με τα x και p για βοήθεια στην
    αντικατάσταση παρακάτω *)
  Hxp = Join[xi, pi];

  (* Αντικατάσταση των λύσεων των x και p στην Χαμιλτονιανή *)
  H11 = Ham // . Hxp // FullSimplify;

  (* Απλοποιώ τα νούμερα απαλοίφοντας ότι είναι σχεδόν ίσο ή
    ίσο με 0 *)
  H1 = N[Chop[H11]];

  (* Μερική παράγωγος της Χαμιλτονιανής ως προς u και αντικατάσταση
    των ελεγκτών *)
  Dj = D[H1, u[t]] /. u[t] -> U[[j]] // FullSimplify, {j, m}];

  (* Πίνακας με τις μερικές παραγώγους της Χαμιλτονιανής με
    αντικατάσταση των u *)
  DD = Table[Dj, {i, m}];

  Oloklirama =  $\int_{t_0}^{t_f}$  (DD.DD) dt;

  (* Νόρμα της μερικής παραγώγου της Χαμιλτονιανής *)
  norm =  $\sqrt{N[Oloklirama]}$ ;

  Print["Στην Επανάληψη νούμερο ", k = 1]
  Print["Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: ",
    norm =  $\sqrt{N[Oloklirama]}$  ]

```

```

(* Μέσω της εντολής while,
ελέγχεται αν η νόρμα που βρέθηκε ικανοποιεί το κριτήριο
τερματισμού g. Αν το ικανοποιεί η ανακύκλωση σταματάει,
αλλιώς βρίσκουμε τους νέους ελεγκτές και ξεκινάμε νέα ανακύκλωση *)
While[norm > g, Print["Το βήμα για την επανάληψη ", k+1,
" είναι ",  $\frac{1}{2k}$ ]];
Do[(* Υπολογισμός των νέων ελεγκτών *)
Print[U[[i]] = U[[i]] -  $\frac{1}{2k} D_i / . t \rightarrow T[[i, 1]]$ ], {i, m}] //
FullSimplify;
Do[
eqx = Table[{system[[1, i]][[1]] == system[[2, i]][[1]] /. u[t] -> U[[j]],
arkikes[[i]]}], {i, n}];
dx = DSolve[eqx, X, t] // FullSimplify;
xi = Table[xi[t_] -> dx[[1, i]][[2]], {i, n}];
Do[costate[i] = pi'[t] == -D[Ham, xi[t]], {i, n}];
eqp = Table[{costate[i], pi[T[[j, 2]]] == D[h, xi[T[[j, 2]]]}], {i, n}];
dp = DSolve[eqp /. xi, P, t] // FullSimplify;
pi = Table[pi[t_] -> dp[[1, i]][[2]], {i, n}];
Hxp = Join[xi, pi];
H11 = Ham /. Hxp // FullSimplify;
H1 = N[Chop[H11]];
Dj = D[H1, u[t]] /. u[t] -> U[[j]] // FullSimplify, {j, m}];
DD = Table[Dj, {i, m}];
Olokliroma =  $\int_{t_0}^{t_f} (DD.DD) dt$ ;
Print["Στην Επανάληψη νούμερο ", k = k+1]
Print["Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: ",
norm = Chop[ $\sqrt{N[Olokliroma]}$ ] ] ]
(* Η νόρμα ικανοποιεί το κριτήριο τερματισμού g άρα ο αλγόριθμος
έχει συγκλίνει και έχουμε βρει τον βέλτιστο ελεγκτή
(ή ελεγκτές αν το διάστημα [t0, tf] έχει χωριστεί σε υποδιαστήματα) *)
Print["Συνεπώς ο/οι βέλτιστος/οι ελεγκτής/ές θα έχει/ουν τιμή: ",
Table[U[[i]], {i, m}]]

```


Παράδειγμα 6.1

Να βρεθεί ο βέλτιστος ελεγκτής του συστήματος

$$\dot{x}(t) = -x(t) + u(t)$$

με αρχική συνθήκη $x(0) = 4.0$ και κριτήριο απόδοσης

$$J = \int_0^1 \frac{1}{2} u^2(t) dt.$$

Το διάστημα $[t_0, t_f]$ είναι το $[0, 1]$ και έστω το βήμα τ να μεταβάλλεται σε κάθε επανάληψη και να είναι της μορφής $\frac{1}{2k}$. Σαν αρχική είσοδο παίρνουμε την $u(t) = 1.0$ και σαν σταθερά τερματισμού το 0.1 .

Λύση:

Τα αποτελέσματα που θα πάρουμε θα είναι τα εξής:

Στην Επανάληψη νούμερο 1

Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 1.

Το βήμα για την επανάληψη 2 είναι $\frac{1}{2}$

Στην Επανάληψη νούμερο 2

Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.5

Το βήμα για την επανάληψη 3 είναι $\frac{1}{4}$

Στην Επανάληψη νούμερο 3

Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.375

Το βήμα για την επανάληψη 4 είναι $\frac{1}{6}$

Στην Επανάληψη νούμερο 4

Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.3125

Το βήμα για την επανάληψη 5 είναι $\frac{1}{8}$

Στην Επανάληψη νούμερο 5

Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.273438

Το βήμα για την επανάληψη 6 είναι $\frac{1}{10}$

Στην Επανάληψη νούμερο 6

Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.246094

Το βήμα για την επανάληψη 7 είναι $\frac{1}{12}$
Στην Επανάληψη νούμερο 7
Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.225586
Το βήμα για την επανάληψη 8 είναι $\frac{1}{14}$
Στην Επανάληψη νούμερο 8
Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.209473
Το βήμα για την επανάληψη 9 είναι $\frac{1}{16}$
Στην Επανάληψη νούμερο 9
Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.196381
Το βήμα για την επανάληψη 10 είναι $\frac{1}{18}$
Στην Επανάληψη νούμερο 10
Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.185471
Το βήμα για την επανάληψη 11 είναι $\frac{1}{20}$
Στην Επανάληψη νούμερο 11
Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.176197
Το βήμα για την επανάληψη 12 είναι $\frac{1}{22}$
Στην Επανάληψη νούμερο 12
Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.168188
Το βήμα για την επανάληψη 13 είναι $\frac{1}{24}$
Στην Επανάληψη νούμερο 13
Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.16118
Το βήμα για την επανάληψη 14 είναι $\frac{1}{26}$
Στην Επανάληψη νούμερο 14
Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.154981
Το βήμα για την επανάληψη 15 είναι $\frac{1}{28}$
Στην Επανάληψη νούμερο 15
Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.149446
Το βήμα για την επανάληψη 16 είναι $\frac{1}{30}$
Στην Επανάληψη νούμερο 16
Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.144464
Το βήμα για την επανάληψη 17 είναι $\frac{1}{32}$
Στην Επανάληψη νούμερο 17
Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.13995
Το βήμα για την επανάληψη 18 είναι $\frac{1}{34}$
Στην Επανάληψη νούμερο 18
Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.135834
Το βήμα για την επανάληψη 19 είναι $\frac{1}{36}$
Στην Επανάληψη νούμερο 19
Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.132061
Το βήμα για την επανάληψη 20 είναι $\frac{1}{38}$

Στην Επανάληψη νούμερο 20

Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.128585

Το βήμα για την επανάληψη 21 είναι $\frac{1}{40}$

Στην Επανάληψη νούμερο 21

Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.125371

Το βήμα για την επανάληψη 22 είναι $\frac{1}{42}$

Στην Επανάληψη νούμερο 22

Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.122386

Το βήμα για την επανάληψη 23 είναι $\frac{1}{44}$

Στην Επανάληψη νούμερο 23

Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.119604

Το βήμα για την επανάληψη 24 είναι $\frac{1}{46}$

Στην Επανάληψη νούμερο 24

Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.117004

Το βήμα για την επανάληψη 25 είναι $\frac{1}{48}$

Στην Επανάληψη νούμερο 25

Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.114567

Το βήμα για την επανάληψη 26 είναι $\frac{1}{50}$

Στην Επανάληψη νούμερο 26

Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.112275

Το βήμα για την επανάληψη 27 είναι $\frac{1}{52}$

Στην Επανάληψη νούμερο 27

Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.110116

Το βήμα για την επανάληψη 28 είναι $\frac{1}{54}$

Στην Επανάληψη νούμερο 28

Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.108077

Το βήμα για την επανάληψη 29 είναι $\frac{1}{56}$

Στην Επανάληψη νούμερο 29

Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.106147

Το βήμα για την επανάληψη 30 είναι $\frac{1}{58}$

Στην Επανάληψη νούμερο 30

Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.104317

Το βήμα για την επανάληψη 31 είναι $\frac{1}{60}$

Στην Επανάληψη νούμερο 31

Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.102578

Το βήμα για την επανάληψη 32 είναι $\frac{1}{62}$

Στην Επανάληψη νούμερο 32

Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.100924

Το βήμα για την επανάληψη 33 είναι $\frac{1}{64}$

Στην Επανάληψη νούμερο 33

Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.0993468

Συνεπώς ο/οι βέλτιστος/οι ελεγκτής/ές θα έχει τιμή: 0.0993468

Άρα ο βέλτιστος ελεγκτής του συστήματος θα είναι ο 0.0993468.

Παράδειγμα 6.2

Να βρεθεί ο βέλτιστος ελεγκτής του συστήματος

$$\dot{x}(t) = -x(t) + u(t)$$

με αρχική συνθήκη $x(0) = 4.0$ και κριτήριο απόδοσης

$$J = \int_0^1 \frac{1}{2} u^2(t) dt.$$

Έστω ότι το διάστημα $[t_0, t_f] = [0, 1]$ χωρίζεται σε 2 υποδιαστήματα και έστω

η αρχική είσοδος σε κάθε υποδιάστημα να είναι $u(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 0.8 & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$

Το βήμα το παίρνουμε, όπως πριν, ίσο με $\frac{1}{2k}$ και για σταθερά τερματισμού παίρνουμε το 0.1.

Λύση:

Τα αποτελέσματα που παίρνουμε είναι τα εξής:

Στην Επανάληψη νούμερο 1

Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 1.28062

Το βήμα για την επανάληψη 2 είναι 0.1

Στην Επανάληψη νούμερο 2

Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 1.15256

Το βήμα για την επανάληψη 3 είναι 0.1

Στην Επανάληψη νούμερο 3

Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 1.03731

Το βήμα για την επανάληψη 4 είναι 0.1

Στην Επανάληψη νούμερο 4

Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.933576

Το βήμα για την επανάληψη 5 είναι 0.1
Στην Επανάληψη νούμερο 5
Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.840218
Το βήμα για την επανάληψη 6 είναι 0.1
Στην Επανάληψη νούμερο 6
Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.756196
Το βήμα για την επανάληψη 7 είναι 0.1
Στην Επανάληψη νούμερο 7
Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.680577
Το βήμα για την επανάληψη 8 είναι 0.1
Στην Επανάληψη νούμερο 8
Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.612519
Το βήμα για την επανάληψη 9 είναι 0.1
Στην Επανάληψη νούμερο 9
Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.551267
Το βήμα για την επανάληψη 10 είναι 0.1
Στην Επανάληψη νούμερο 10
Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.49614
Το βήμα για την επανάληψη 11 είναι 0.1
Στην Επανάληψη νούμερο 11
Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.446526
Το βήμα για την επανάληψη 12 είναι 0.1
Στην Επανάληψη νούμερο 12
Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.401874
Το βήμα για την επανάληψη 13 είναι 0.1
Στην Επανάληψη νούμερο 13
Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.361686
Το βήμα για την επανάληψη 14 είναι 0.1
Στην Επανάληψη νούμερο 14
Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.325518
Το βήμα για την επανάληψη 15 είναι 0.1
Στην Επανάληψη νούμερο 15
Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.292966
Το βήμα για την επανάληψη 16 είναι 0.1
Στην Επανάληψη νούμερο 16
Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.263669
Το βήμα για την επανάληψη 17 είναι 0.1
Στην Επανάληψη νούμερο 17
Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.237302
Το βήμα για την επανάληψη 18 είναι 0.1
Στην Επανάληψη νούμερο 18
Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.213572
Το βήμα για την επανάληψη 19 είναι 0.1
Στην Επανάληψη νούμερο 19
Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.192215
Το βήμα για την επανάληψη 20 είναι 0.1
Στην Επανάληψη νούμερο 20
Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.172993
Το βήμα για την επανάληψη 21 είναι 0.1

Στην Επανάληψη νούμερο 21

Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.155694

Το βήμα για την επανάληψη 22 είναι 0.1

Στην Επανάληψη νούμερο 22

Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.140125

Συνεπώς ο/οι βέλτιστος/οι ελεγκτής/ές θα έχει/ουν τιμή: {0.109419, 0.0875352}

Άρα ο βέλτιστος ελεγκτής του πρώτου υποδιαστήματος θα έχει τιμή 0.109419 και του ο βέλτιστος ελεγκτής του δεύτερου υποδιαστήματος θα έχει τιμή 0.0875352.

Παράδειγμα 6.3

Να βρεθεί ο βέλτιστος ελεγκτής του συστήματος

$$\dot{x}(t) = -x(t) + u(t)$$

με αρχική συνθήκη $x(0) = 4.0$ και κριτήριο απόδοσης

$$J = \int_0^1 \frac{1}{2} u^2(t) dt.$$

Έστω ότι το διάστημα είναι πάλι $[t_0, t_f] = [0, 1]$ αλλά αυτή τη φορά χωρίζεται σε 5 υποδιαστήματα και έστω η αρχική είσοδος σε κάθε υποδιάστημα να είναι

$$u(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq \frac{1}{5} \\ 0.8 & \frac{1}{5} \leq t \leq \frac{2}{5} \\ 0.6 & \frac{2}{5} \leq t \leq \frac{3}{5} \\ 0.5 & \frac{3}{5} \leq t \leq \frac{4}{5} \\ 0.9 & \frac{4}{5} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Το βήμα το παίρνουμε, όπως πριν, ίσο με $\frac{1}{2k}$ και για σταθερά τερματισμού παίρνουμε το 0.1.

Λύση:

Τα αποτελέσματα που παίρνουμε είναι τα εξής:

Στην Επανάληψη νούμερο 1

Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 1.74929

Το βήμα για την επανάληψη 2 είναι $\frac{1}{2}$

Στην Επανάληψη νούμερο 2

Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.874643

Το βήμα για την επανάληψη 3 είναι $\frac{1}{4}$

Στην Επανάληψη νούμερο 3

Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.655982

Το βήμα για την επανάληψη 4 είναι $\frac{1}{6}$

Στην Επανάληψη νούμερο 4

Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.546652

Το βήμα για την επανάληψη 5 είναι $\frac{1}{8}$

Στην Επανάληψη νούμερο 5

Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.47832

Το βήμα για την επανάληψη 6 είναι $\frac{1}{10}$

Στην Επανάληψη νούμερο 6

Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.430488

Το βήμα για την επανάληψη 7 είναι $\frac{1}{12}$

Στην Επανάληψη νούμερο 7

Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.394614

Το βήμα για την επανάληψη 8 είναι $\frac{1}{14}$

Στην Επανάληψη νούμερο 8

Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.366427

Το βήμα για την επανάληψη 9 είναι $\frac{1}{16}$

Στην Επανάληψη νούμερο 9

Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.343526

Το βήμα για την επανάληψη 10 είναι $\frac{1}{18}$

Στην Επανάληψη νούμερο 10

Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.324441

Το βήμα για την επανάληψη 11 είναι $\frac{1}{20}$

Στην Επανάληψη νούμερο 11

Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.308219

Το βήμα για την επανάληψη 12 είναι $\frac{1}{22}$

Στην Επανάληψη νούμερο 12

Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.294209

Το βήμα για την επανάληψη 13 είναι $\frac{1}{24}$

Στην Επανάληψη νούμερο 13

Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.28195

Το βήμα για την επανάληψη 14 είναι $\frac{1}{26}$

Στην Επανάληψη νούμερο 14

Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.271106

Το βήμα για την επανάληψη 15 είναι $\frac{1}{28}$

Στην Επανάληψη νούμερο 15

Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.261424

Το βήμα για την επανάληψη 16 είναι $\frac{1}{30}$

Στην Επανάληψη νούμερο 16

Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.25271

Το βήμα για την επανάληψη 17 είναι $\frac{1}{32}$

Στην Επανάληψη νούμερο 17

Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.244812

Το βήμα για την επανάληψη 18 είναι $\frac{1}{34}$

Στην Επανάληψη νούμερο 18

Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.237612

Το βήμα για την επανάληψη 19 είναι $\frac{1}{36}$

Στην Επανάληψη νούμερο 19

Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.231012

Το βήμα για την επανάληψη 20 είναι $\frac{1}{38}$

Στην Επανάληψη νούμερο 20

Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.224932

Το βήμα για την επανάληψη 21 είναι $\frac{1}{40}$

Στην Επανάληψη νούμερο 21

Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.219309

Το βήμα για την επανάληψη 22 είναι $\frac{1}{42}$

Στην Επανάληψη νούμερο 22

Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.214087

Το βήμα για την επανάληψη 23 είναι $\frac{1}{44}$

Στην Επανάληψη νούμερο 23

Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.209222

Το βήμα για την επανάληψη 24 είναι $\frac{1}{46}$

Στην Επανάληψη νούμερο 24

Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.204674

Το βήμα για την επανάληψη 25 είναι $\frac{1}{48}$

Στην Επανάληψη νούμερο 25

Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.20041

Το βήμα για την επανάληψη 26 είναι $\frac{1}{50}$

Στην Επανάληψη νούμερο 26

Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.196401

Το βήμα για την επανάληψη 27 είναι $\frac{1}{52}$

Στην Επανάληψη νούμερο 27

Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.192624

Το βήμα για την επανάληψη 28 είναι $\frac{1}{54}$
Στην Επανάληψη νούμερο 28
Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.189057
Το βήμα για την επανάληψη 29 είναι $\frac{1}{56}$
Στην Επανάληψη νούμερο 29
Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.185681
Το βήμα για την επανάληψη 30 είναι $\frac{1}{58}$
Στην Επανάληψη νούμερο 30
Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.18248
Το βήμα για την επανάληψη 31 είναι $\frac{1}{60}$
Στην Επανάληψη νούμερο 31
Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.179439
Το βήμα για την επανάληψη 32 είναι $\frac{1}{62}$
Στην Επανάληψη νούμερο 32
Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.176544
Το βήμα για την επανάληψη 33 είναι $\frac{1}{64}$
Στην Επανάληψη νούμερο 33
Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.173786
Το βήμα για την επανάληψη 34 είναι $\frac{1}{66}$
Στην Επανάληψη νούμερο 34
Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.171153
Το βήμα για την επανάληψη 35 είναι $\frac{1}{68}$
Στην Επανάληψη νούμερο 35
Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.168636
Το βήμα για την επανάληψη 36 είναι $\frac{1}{70}$
Στην Επανάληψη νούμερο 36
Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.166227
Το βήμα για την επανάληψη 37 είναι $\frac{1}{72}$
Στην Επανάληψη νούμερο 37
Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.163918
Το βήμα για την επανάληψη 38 είναι $\frac{1}{74}$
Στην Επανάληψη νούμερο 38
Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.161703
Το βήμα για την επανάληψη 39 είναι $\frac{1}{76}$
Στην Επανάληψη νούμερο 39
Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.159575
Το βήμα για την επανάληψη 40 είναι $\frac{1}{78}$
Στην Επανάληψη νούμερο 40
Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.157529
Το βήμα για την επανάληψη 41 είναι $\frac{1}{80}$

Στην Επανάληψη νούμερο 41

Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.15556

Το βήμα για την επανάληψη 42 είναι $\frac{1}{82}$

Στην Επανάληψη νούμερο 42

Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.153663

Το βήμα για την επανάληψη 43 είναι $\frac{1}{84}$

Στην Επανάληψη νούμερο 43

Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.151834

Το βήμα για την επανάληψη 44 είναι $\frac{1}{86}$

Στην Επανάληψη νούμερο 44

Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.150068

Το βήμα για την επανάληψη 45 είναι $\frac{1}{88}$

Στην Επανάληψη νούμερο 45

Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.148363

Το βήμα για την επανάληψη 46 είναι $\frac{1}{90}$

Στην Επανάληψη νούμερο 46

Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.146715

Το βήμα για την επανάληψη 47 είναι $\frac{1}{92}$

Στην Επανάληψη νούμερο 47

Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.14512

Το βήμα για την επανάληψη 48 είναι $\frac{1}{94}$

Στην Επανάληψη νούμερο 48

Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.143576

Το βήμα για την επανάληψη 49 είναι $\frac{1}{96}$

Στην Επανάληψη νούμερο 49

Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.14208

Το βήμα για την επανάληψη 50 είναι $\frac{1}{98}$

Στην Επανάληψη νούμερο 50

Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.140631

Το βήμα για την επανάληψη 51 είναι $\frac{1}{100}$

Στην Επανάληψη νούμερο 51

Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.139224

Το βήμα για την επανάληψη 52 είναι $\frac{1}{102}$

Στην Επανάληψη νούμερο 52

Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.137859

Το βήμα για την επανάληψη 53 είναι $\frac{1}{104}$

Στην Επανάληψη νούμερο 53

Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.136534

Το βήμα για την επανάληψη 54 είναι $\frac{1}{106}$

Στην Επανάληψη νούμερο 54

Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.135246

Το βήμα για την επανάληψη 55 είναι $\frac{1}{108}$
Στην Επανάληψη νούμερο 55
Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.133993
Το βήμα για την επανάληψη 56 είναι $\frac{1}{110}$
Στην Επανάληψη νούμερο 56
Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.132775
Το βήμα για την επανάληψη 57 είναι $\frac{1}{112}$
Στην Επανάληψη νούμερο 57
Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.13159
Το βήμα για την επανάληψη 58 είναι $\frac{1}{114}$
Στην Επανάληψη νούμερο 58
Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.130436
Το βήμα για την επανάληψη 59 είναι $\frac{1}{116}$
Στην Επανάληψη νούμερο 59
Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.129311
Το βήμα για την επανάληψη 60 είναι $\frac{1}{118}$
Στην Επανάληψη νούμερο 60
Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.128215
Το βήμα για την επανάληψη 61 είναι $\frac{1}{120}$
Στην Επανάληψη νούμερο 61
Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.127147
Το βήμα για την επανάληψη 62 είναι $\frac{1}{122}$
Στην Επανάληψη νούμερο 62
Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.126105
Το βήμα για την επανάληψη 63 είναι $\frac{1}{124}$
Στην Επανάληψη νούμερο 63
Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.125088
Το βήμα για την επανάληψη 64 είναι $\frac{1}{126}$
Στην Επανάληψη νούμερο 64
Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.124095
Το βήμα για την επανάληψη 65 είναι $\frac{1}{128}$
Στην Επανάληψη νούμερο 65
Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.123125
Το βήμα για την επανάληψη 66 είναι $\frac{1}{130}$
Στην Επανάληψη νούμερο 66
Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.122178
Το βήμα για την επανάληψη 67 είναι $\frac{1}{132}$
Στην Επανάληψη νούμερο 67
Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.121253
Το βήμα για την επανάληψη 68 είναι $\frac{1}{134}$

Στην Επανάληψη νούμερο 68

Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.120348

Το βήμα για την επανάληψη 69 είναι $\frac{1}{136}$

Στην Επανάληψη νούμερο 69

Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.119463

Το βήμα για την επανάληψη 70 είναι $\frac{1}{138}$

Στην Επανάληψη νούμερο 70

Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.118597

Το βήμα για την επανάληψη 71 είναι $\frac{1}{140}$

Στην Επανάληψη νούμερο 71

Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.11775

Το βήμα για την επανάληψη 72 είναι $\frac{1}{142}$

Στην Επανάληψη νούμερο 72

Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.116921

Το βήμα για την επανάληψη 73 είναι $\frac{1}{144}$

Στην Επανάληψη νούμερο 73

Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.116109

Το βήμα για την επανάληψη 74 είναι $\frac{1}{146}$

Στην Επανάληψη νούμερο 74

Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.115314

Το βήμα για την επανάληψη 75 είναι $\frac{1}{148}$

Στην Επανάληψη νούμερο 75

Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.114534

Το βήμα για την επανάληψη 76 είναι $\frac{1}{150}$

Στην Επανάληψη νούμερο 76

Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.113771

Το βήμα για την επανάληψη 77 είναι $\frac{1}{152}$

Στην Επανάληψη νούμερο 77

Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.113022

Το βήμα για την επανάληψη 78 είναι $\frac{1}{154}$

Στην Επανάληψη νούμερο 78

Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.112289

Το βήμα για την επανάληψη 79 είναι $\frac{1}{156}$

Στην Επανάληψη νούμερο 79

Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.111569

Το βήμα για την επανάληψη 80 είναι $\frac{1}{158}$

Στην Επανάληψη νούμερο 80

Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.110863

Το βήμα για την επανάληψη 81 είναι $\frac{1}{160}$

Στην Επανάληψη νούμερο 81

Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.11017

Το βήμα για την επανάληψη 82 είναι $\frac{1}{162}$
Στην Επανάληψη νούμερο 82
Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.10949
Το βήμα για την επανάληψη 83 είναι $\frac{1}{164}$
Στην Επανάληψη νούμερο 83
Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.108822
Το βήμα για την επανάληψη 84 είναι $\frac{1}{166}$
Στην Επανάληψη νούμερο 84
Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.108166
Το βήμα για την επανάληψη 85 είναι $\frac{1}{168}$
Στην Επανάληψη νούμερο 85
Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.107523
Το βήμα για την επανάληψη 86 είναι $\frac{1}{170}$
Στην Επανάληψη νούμερο 86
Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.10689
Το βήμα για την επανάληψη 87 είναι $\frac{1}{172}$
Στην Επανάληψη νούμερο 87
Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.106269
Το βήμα για την επανάληψη 88 είναι $\frac{1}{174}$
Στην Επανάληψη νούμερο 88
Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.105658
Το βήμα για την επανάληψη 89 είναι $\frac{1}{176}$
Στην Επανάληψη νούμερο 89
Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.105058
Το βήμα για την επανάληψη 90 είναι $\frac{1}{178}$
Στην Επανάληψη νούμερο 90
Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.104467
Το βήμα για την επανάληψη 91 είναι $\frac{1}{180}$
Στην Επανάληψη νούμερο 91
Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.103887
Το βήμα για την επανάληψη 92 είναι $\frac{1}{182}$
Στην Επανάληψη νούμερο 92
Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.103316
Το βήμα για την επανάληψη 93 είναι $\frac{1}{184}$
Στην Επανάληψη νούμερο 93
Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.102755
Το βήμα για την επανάληψη 94 είναι $\frac{1}{186}$
Στην Επανάληψη νούμερο 94
Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.102202
Το βήμα για την επανάληψη 95 είναι $\frac{1}{188}$

Στην Επανάληψη νούμερο 95

Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.101659

Το βήμα για την επανάληψη 96 είναι $\frac{1}{190}$

Στην Επανάληψη νούμερο 96

Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.101124

Το βήμα για την επανάληψη 97 είναι $\frac{1}{192}$

Στην Επανάληψη νούμερο 97

Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.100597

Το βήμα για την επανάληψη 98 είναι $\frac{1}{194}$

Στην Επανάληψη νούμερο 98

Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.100078

Το βήμα για την επανάληψη 99 είναι $\frac{1}{196}$

Στην Επανάληψη νούμερο 99

Η νόρμα του κριτηρίου τερματισμού είναι: 0.0995678

Συνεπώς ο/οι βέλτιστος/οι ελεγκτής/ές θα έχει/ουν τιμή:

{0.0569191, 0.0455353, 0.0341515, 0.0284596, 0.0512272}

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] Bryson Arthur E. Jr. and Ho Yu-Chi, 1975, *Applied Optimal Control: Optimization, estimation and control*, Hemisphere Publishing Corporation, Washington D.C.

- [2] Γεωργίου Α.Κ. και Βασιλείου Π.-Γ.Χ., 1993, *Μη Γραμμικές Μέθοδοι Βελτιστοποίησης*, Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη.

- [3] Kirk Donald E., 1998, *Optimal Control Theory: An Introduction*, Dover Publications Inc., Mineola, New York.

- [4] Minoux M., 1986, *Mathematical Programming: Theory and Algorithms*, John Wiley & Sons, Chichester, England.

- [5] Stengel Robert F., 1994, *Optimal Control and Estimation*, Dover Publications, New York.