



ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
“ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΕΛΕΓΧΟΥ”

Τίτλος

ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΩΝ Ω-ΕΥΣΤΑΘΩΝ ΔΑΚΤΥΛΙΩΝ
ΡΗΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΗΣ ΣΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ
ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΕΛΕΓΧΟΥ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Ελένη Σ. Αλαμπορινού

Επιβλέπων: Ευστάθιος Αντωνίου
Επ. Καθηγητής Α.Τ.Ε.Ι.Θ.

Θεσσαλονίκη, Ιούλιος 2013



ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
“ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΕΛΕΓΧΟΥ ”

Τίτλος

ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΩΝ Ω-ΕΥΣΤΑΘΩΝ ΔΑΚΤΥΛΙΩΝ
ΡΗΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΗΣ ΣΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ
ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΕΛΕΓΧΟΥ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Ελένη Σ. Αλαμπορινού

Επιβλέπων: Ευστάθιος Αντωνίου
Επ. Καθηγητής Α.Π.Θ.

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την

.....
Ε. Αντωνίου
Επ. Καθηγητής Α.Τ.Ε.Ι.Θ.

.....
Ν. Καραμπετάκης
Αν. Καθηγητής Α.Π.Θ.

.....
Α. Βαρδουλάκης
Καθηγητής Α.Π.Θ.

Θεσσαλονίκη, Ιούλιος 2013

.....
Ελένη Σ. Αλαμπορινού
Πτυχιούχος Μαθηματικός Α.Π.Θ.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στα πέντε επόμενα κεφάλαια απώτερος σκοπός μας είναι να μελετήσουμε τη σταθεροποίηση πολυμεταβλητών συστημάτων δηλαδή συστημάτων ελέγχου που έχουν πολλές εισόδους και πολλές εξόδους. Για να ξεκινήσουμε αυτή τη μελέτη θα ασχοληθούμε στο 1^ο κεφάλαιο με εισαγωγικές έννοιες ,δίνοντας μια γενική περιγραφή του προβλήματος και θα συνεχίσουμε στο 2^ο κεφάλαιο με τη μελέτη του δακτυλίου των Ω -ευσταθών συναρτήσεων δηλαδή με τη βαθμωτή περίπτωση συνάρτησης την οποία προσπαθούμε να μετατρέψουμε σε κανονική και ευσταθή συνάρτηση και στη συνέχεια να σταθεροποιήσουμε και τα αντίστοιχα συστήματα ελέγχου μιας εισόδου – εξόδου. Στο 3^ο κεφάλαιο γίνεται αναφορά στην επέκταση της βαθμωτής περίπτωσης που είναι οι πίνακες των οποίων τα στοιχεία είναι κανονικές και ευσταθείς συναρτήσεις. Μελετάμε τις ιδιότητες τους και ακόμα μέσα από θεωρήματα υπολογίζουμε απαραίτητους πίνακες για τον υπολογισμό αργότερα του αντισταθμιστή. Τέλος φτάνοντας στο 4^ο κεφάλαιο έχοντας μελετήσει την περίπτωση πινάκων με στοιχεία στο S (κανονικοί και ευσταθείς πίνακες), μπορούμε να σταθεροποιήσουμε πολυμεταβλητά συστήματα ελέγχου, δηλαδή να τοποθετήσουμε τους πόλους του συστήματος σε συγκεκριμένη επιθυμητή περιοχή βρίσκοντας τον κατάλληλο σταθεροποιητή με τη χρήση και του προγράμματος Mathematica. Στο 5^ο κεφάλαιο αναλύονται τα συμπεράσματα που προκύπτουν από την σταθεροποίηση των συστημάτων ελέγχου. Κύρια πηγή του μεγαλύτερου μέρους της εργασίας αποτελεί το βιβλίο του κ. Α. Βαρδουλάκη , « Linear Multivariable Control – Algebraic Analysis and Synthesis Methods. John Willey & Sons Ltd., New York (1991) »

ABSTRACT

In the five following chapters we aim at studying the stabilization of multivariable systems, ie control systems that have various inputs and outputs. To begin with this study, in the first chapter we will deal with introductory notions, giving a brief outline of the problem. Then, in the second chapter we will focus on the study of the ring of the Ω - stable functions, ie the case of the gradual function which we try to convert into a proper and stable one and then stabilize the respective control systems of an input - output. In the third chapter we extend the study of the gradual function mentioning the matrices with all the details of the proper and stable functions. We observe their qualities and even through theorems we form the appropriate matrices so as to calculate the compensator. Finally, in chapter four, after having focused on the matrices with data in the S (proper and stable matrices) we can stabilize control systems, ie place the poles of the system in the specific area after calculating the appropriate compensator via the use of Mathematica. In conclusion, chapter five offers an analysis of all the conclusions drawn from the stabilization of the control systems. Main source of most of the work is A.Vardoulakis's book « Linear Multivariable Control – Algebraic Analysis and Synthesis Methods. John Willey & Sons Ltd., New York (1991) »

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

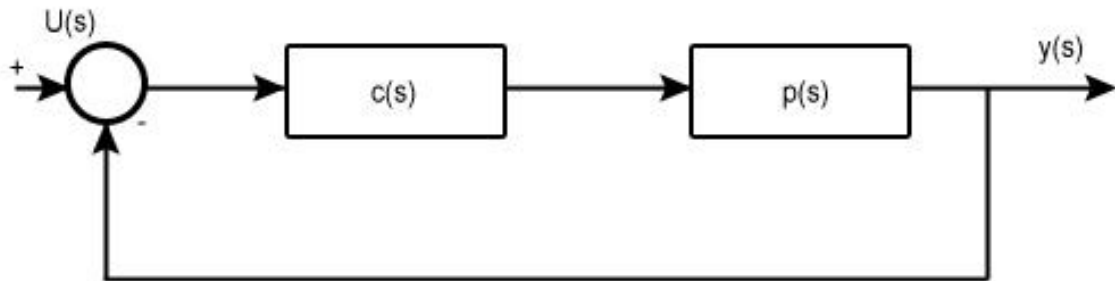
1. ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ	9
<u>1.1 ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ</u>	9
2. Ο ΔΑΚΤΥΛΙΟΣ ΤΩΝ Ω-ΕΥΣΤΑΘΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ	11
<u>2.1 ΒΑΣΙΚΟΙ ΟΡΙΣΜΟΙ</u>	11
2.2 Ο ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΟΣ ΔΑΚΤΥΛΙΟΣ ΤΩΝ Ω-ΕΥΣΤΑΘΩΝ ΡΗΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ	12
<u>2.3 ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ ΤΟΥ $R(s)$ ΚΑΙ S</u>	16
<u>2.4 $R(s)$ ΩΣ ΣΥΝΟΛΟ ΠΗΛΙΚΟ ΤΟΥ S</u>	24
<u>2.5 ΣΤΑΘΕΡΟΠΟΙΗΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΜΙΑΣ ΕΙΣΟΔΟΥ-ΕΞΟΔΟΥ</u>	27
<u>2.6 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ</u>	32
3. ΤΟ ΣΥΝΟΛΟ ΤΩΝ Ω-ΕΥΣΤΑΘΩΝ ΠΙΝΑΚΩΝ	33
<u>3.1 ΒΑΣΙΚΟΙ ΟΡΙΣΜΟΙ & ΑΛΓΕΒΡΑ ΤΩΝ Ω-ΕΥΣΤΑΘΩΝ ΠΙΝΑΚΩΝ</u>	33
<u>3.2 Κλασματική μορφή ρητών πινάκων</u>	40
4. ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΚΑΙ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΠΟΙΗΣΗ ΤΟΥ ΣΤΑΘΕΡΟΠΟΙΗΤΙΚΟΥ ΑΝΤΙΣΤΑΘΜΗΣΤΗ	48
<u>4.1 Παρατηρησιμότητα και ελεγχιμότητα ενός PMD - Σχέσεις μεταξύ εσωτερικής ευστάθειας και εσωτερικής κανονικότητας ενός PMD – Ευστάθεια και κανονικότητα της συνάρτησης μεταφοράς του</u>	48

___ 4.2 Χαρακτηριστικά του σταθεροποιητή	59
___ 4.3 Παραμετροποίηση των σταθεροποιητών	69
___ 4.4 Αλγόριθμος για τον υπολογισμό των σταθεροποιητών στο $\bar{\Omega}$	75
___ 4.5 Παραμετροποίηση όλων των πινάκων συναρτήσεων μεταφοράς των κλειστών συστημάτων	77
___ 4.6 Παραμετροποίηση όλων των αντισταθμιστών στο $\bar{\Omega}$ όπου $P(s)$ είναι εκθετικά ευσταθές	77
___ 4.7 Παραδείγματα εύρεσης αντισταθμιστή στην βαθμωτή και στην πολυμεταβλητή περίπτωση	78
5. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ	87
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	88

1. ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

1.1 ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Κύρια πηγή της μελέτης που θα ακολουθήσει βασίζεται στο βιβλίο του Α. Βαρδουλάκη « Linear Multivariable Control – Algebraic Analysis and Synthesis Methods ». Θα ασχοληθούμε με προβλήματα της θεωρίας ελέγχου. Η Θεωρία ελέγχου είναι διεπιστημονικός κλάδος της μηχανικής και των μαθηματικών, οποίος ασχολείται με τη συμπεριφορά δυναμικών συστημάτων. Ένα από τα κύρια προβλήματα της θεωρίας ελέγχου είναι να σταθεροποιήσουμε συστήματα φυσικά, χημικά, μηχανικά, κ.τ.λ. Αυτό γίνεται συνήθως μέσω ανάδρασης (feedback) δηλαδή μέσω διασύνδεσης του φυσικού συστήματος $P(s)$ με τεχνητό σύστημα $C(s)$ (controller) έτσι ώστε το ολικό σύστημα να είναι ευσταθές. Όταν δηλαδή μια ή περισσότερες μεταβλητές εξόδου ενός συστήματος πρέπει να ακολουθούν ένα συγκεκριμένο σήμα αναφοράς (reference signal) στο χρόνο, δηλαδή μια συγκεκριμένη επιθυμητή έξοδο, τότε ένας ελεγκτής (controller) χειρίζεται τις εισόδους του φυσικού συστήματος ώστε να επιτευχθεί το επιθυμητό αποτέλεσμα στην έξοδο. Όπως φαίνεται και από το παρακάτω σχήμα, ένα από τα βασικά στοιχεία του κλειστού γραμμικού και χρονικά αμετάβλητου συστήματος είναι η συνάρτηση μεταφοράς του, $H(s)$, η οποία ορίζεται να είναι μια μαθηματική αναπαράσταση της σχέσης μεταξύ της εισόδου και της εξόδου του συστήματος. Το αρχικό ασταθές φυσικό σύστημα $P(s)$ συνδέεται με τον ελεγκτή $C(s)$ ώστε το ολικό κλειστό σύστημα να σταθεροποιηθεί και η μαθηματική έκφραση της συμπεριφοράς του δίνεται από τη συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ μέσω των χαρακτηριστικών της οποίας ελέγχεται η ευστάθεια ή μη του συστήματος $\Sigma(P,C)$.



Ειδικότερα για τα γραμμικά χρονικά αμετάβλητα συστήματα η συμπεριφορά τους καθορίζεται από τη θέση των πόλων του συστήματος στο μιγαδικό επίπεδο \mathbb{C} . Ανάλογα με την περίπτωση του συστήματος δηλαδή αν είναι διακριτού ή συνεχούς χρόνου η επιθυμητή περιοχή πόλων είναι διαφορετική. Στην περίπτωση που έχω διακριτό σύστημα η επιθυμητή περιοχή πόλων είναι ο μοναδιαίος δίσκος και η ευστάθεια που επιτυγχάνεται εκεί είναι η λεγόμενη Schur ευστάθεια ενώ στην περίπτωση του συνεχούς συστήματος η επιθυμητή περιοχή πόλων είναι το αριστερό μιγαδικό επίπεδο και σ' αυτή την περίπτωση επιτυγχάνεται Hurwitz ευστάθεια. Σε καθεμιά από αυτές τις περιπτώσεις μπορεί να είναι επιθυμητό να διαλέξουμε υποπεριοχές των προηγούμενων επιθυμητών περιοχών ώστε να βελτιστοποιήσουμε την απόκριση του συστήματος ακόμα και αν αυτό θεωρητικά είναι ευσταθές. Όπως θα φανεί στα κεφάλαια που ακολουθούν το πρόβλημα της επανατοποθέτησης πόλων ενός συστήματος γραμμικού και χρονικά αμετάβλητου μπορεί να αντιμετωπιστεί στα πλαίσια της θεωρίας των Ω -ευσταθών ρητών συναρτήσεων.

2. Ο ΔΑΚΤΥΛΙΟΣ ΤΩΝ Ω-ΕΥΣΤΑΘΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Όσα θα αναπτύξουμε στο παρακάτω κεφάλαιο είναι βασισμένα στο βιβλίο του Α. Βαρδουλάκη « Linear Multivariable Control – Algebraic Analysis and Synthesis Methods ».

2.1 ΒΑΣΙΚΟΙ ΟΡΙΣΜΟΙ

Έστω \mathbb{R} το σύνολο των πραγματικών αριθμών και $\mathbb{R}[s]$ ο δακτύλιος των πολυωνύμων με συντελεστές στο \mathbb{R} .

Ορισμός 1.1. Έστω μια συνάρτηση $t(s) \in \mathbb{R}[s]$, δηλαδή μια συνάρτηση η οποία είναι πολυώνυμο του s . Τότε ορίζεται βαθμός της συνάρτησης $t(s)$ ο μέγιστος εκθέτης στον οποίο υψώνεται η μεταβλητή s . Ο βαθμός της συνάρτησης $t(s)$ συμβολίζεται με $\deg t(s)$.

□

Ορισμός 1.2 Το σύνολο των ρητών συναρτήσεων είναι το σύνολο πηλίκου πάνω από το $\mathbb{R}[s]$, δηλαδή:

$$\mathbb{R}(s) = \left\{ t(s)/t(s) = \frac{n(s)}{d(s)}, n(s), d(s) \in \mathbb{R}[s], d(s) \neq 0 \right\}$$

το οποίο συμβολίζεται με $\mathbb{R}(s)$.

□

Ορισμός 1.3 Έστω μια συνάρτηση $t(s) \in \mathbb{R}(s)$ για την οποία ισχύει $\lim_{s \rightarrow \infty} t(s) = a \in \mathbb{R}$.

Τότε η συνάρτηση $t(s)$ ονομάζεται κανονική ρητή συνάρτηση (proper rational function). Αν επιπλέον $a=0$ τότε η συνάρτηση $t(s)$ ονομάζεται αυστηρά κανονική ρητή συνάρτηση (strictly proper rational function)

□

Ορισμός 1.4 Έστω Ω είναι ένα υποσύνολο του $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ το οποίο είναι συμμετρικό ως προς τον πραγματικό άξονα και δεν περιέχει τουλάχιστον ένα σημείο $a \in \mathbb{R}$ ή το $\{\infty\}$. Μία συνάρτηση $t(s) \in \mathbb{R}(s)$ ονομάζεται Ω -ευσταθής αν έχει τους πόλους της στο Ω^c .

□

Ορισμός 1.5 Έστω μια συνάρτηση $t(s) \in \mathbb{R}(s)$, δηλαδή $t(s) = \frac{n(s)}{d(s)}$ όπου $n(s), d(s) \in \mathbb{R}[s]$

τότε ορίζεται σχετικός βαθμός της ρητής συνάρτησης $t(s)$ και συμβολίζεται με $\delta_\infty(s)$ να είναι :

$$\delta_\infty(s) = \deg d(s) - \deg n(s)$$

□

Ορισμός 1.6 Έστω δυο πολυώνυμα $n(s), d(s) \in \mathbb{R}[s]$, τότε τα πολυώνυμα ονομάζονται σχετικά πρώτα (coprime) όταν έχουν μέγιστο κοινό διαιρέτη $c \in \mathbb{R}$

□

2.2 Ο ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΟΣ ΔΑΚΤΥΛΙΟΣ ΤΩΝ Ω -ΕΥΣΤΑΘΩΝ ΡΗΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Θα ξεκινήσουμε περιγράφοντας τις ρητές συναρτήσεις της μορφής :

$$t(s) = \frac{n(s)}{d(s)} \in R_{pr}(s)$$

που έχουν την ιδιότητα να είναι κανονικές και Ω -ευσταθείς. Θα δείξουμε ότι κάθε ρητή συνάρτηση μπορεί να γραφτεί ως πηλίκο δυο κανονικών και Ω -ευσταθών συναρτήσεων ως πρώτο βήμα για την τοποθέτηση των πόλων της συνάρτησης σε οποιαδήποτε περιοχή του μιγαδικού επιπέδου και όχι σε συγκεκριμένα σημεία, το οποίο σε κάποιες περιπτώσεις μπορεί και να μην είναι τόσο εύχρηστο.

Έστω Ω το υποσύνολο του πεπερασμένου μιγαδικού επιπέδου \mathbb{C} , το οποίο περιέχει $\{s \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(s) \geq 0\}$ και δεν περιέχει τουλάχιστον ένα σημείο $-\alpha \in \mathbb{R}$ ($\alpha \geq 0$).

Ακόμα ονομάζουμε Ω^c το συμπλήρωμα του Ω έτσι ώστε $C = \Omega \cup \Omega^c$.

Έστω $t(s) \in R(s)$ και $t(s) = t_\Omega(s) \hat{t}(s)$ όπου

$$t_\Omega(s) = \frac{n_\Omega(s)}{d_\Omega(s)} \text{ με } n_\Omega(s), d_\Omega(s) \in R[s] \text{ και τα } n_\Omega(s), d_\Omega(s) \text{ είναι πρώτα μεταξύ τους με}$$

όλα τα μηδενικά τους μέσα στο Ω .

Ακόμα $\hat{t}(s) = \frac{\hat{n}(s)}{\hat{d}(s)}$ με $\hat{n}(s), \hat{d}(s) \in R[s]$ με όλα τα μηδενικά τους έξω από το Ω .

Ορίζουμε ακόμα τη συνάρτηση:

$$\delta_\Omega : R(s) \rightarrow Z \cup \{\infty\} \text{ όπου}$$

$$\delta_\Omega(t(s)) := \deg \hat{d}(s) - \deg \hat{n}(s) \text{ αν } t(s) \neq 0$$

$$\delta_\Omega(t(s)) := \infty \text{ αν } t(s) = 0$$

η οποία πληροί τις ιδιότητες:

- i. $\delta_\Omega(t_1(s)t_2(s)) \geq \delta_\Omega(t_1(s)) + \delta_\Omega(t_2(s))$
- ii. $\delta_\Omega(t_1(s) + t_2(s)) \geq \min \{ \delta_\Omega(t_1(s)) + \delta_\Omega(t_2(s)) \}$
- iii. $\delta_\Omega\left(\frac{t_1(s)}{t_2(s)}\right) = \delta_\Omega(t_1(s)) - \delta_\Omega(t_2(s)) \quad 0 \neq t_1(s), t_2(s) \in R(s)$

οπότε ουσιαστικά συμπεραίνουμε πως η δ_Ω όπως ορίστηκε δηλώνει τον σχετικό αριθμό των πόλων στην επιθυμητή περιοχή αφού τα $\hat{n}(s), \hat{d}(s)$ αναφέρονται στην επιθυμητή περιοχή.

Από τον ορισμό της δ_Ω όταν $\Omega = \{\infty\}$ ο βαθμός της ρητής συνάρτησης $t(s)$ θα είναι $\delta_\infty(t(s))$

Η παρακάτω πρόταση συνδέει τον παραπάνω ορισμό που δώσαμε της δ_Ω με το βαθμό της $t(s)$ όταν το $s \rightarrow \infty$

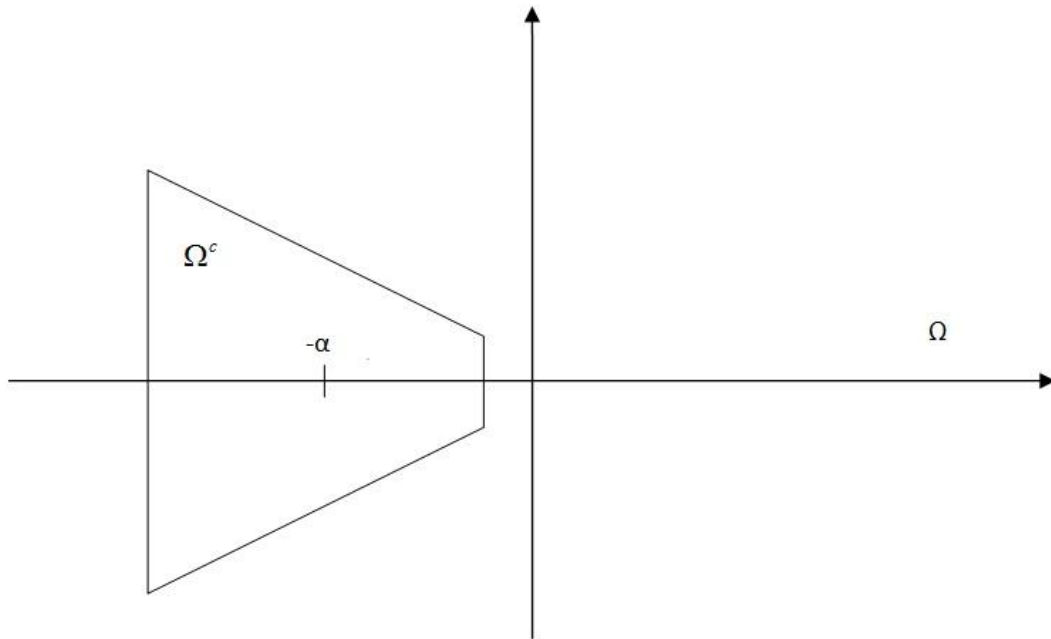
Πρόταση 1.7 [4,σελ.260] Έστω $t(s) = \frac{n(s)}{d(s)} \in R(s)$. Τότε:

$$\delta_{\Omega}(t(s)) = q_{\infty} + \deg n_{\Omega}(s) - \deg d_{\Omega}(s)$$

όπου $q_{\infty} = \delta_{\infty}(t(s)) = \deg d(s) - \deg n(s)$. □

Ισοδύναμα μπορούμε να πούμε ότι ο βαθμός της συνάρτησης $t(s)$ δηλώνει τον συνολικό αριθμό των μηδενικών στην ανεπιθύμητη περιοχή.

Πάνω στο επίπεδο η περιοχή Ω θα είναι:



Θεωρούμε το υποσύνολο $R(s)$ που αποτελείται από όλες τις ρητές συναρτήσεις οι οποίες πληρούν τα παρακάτω:

- i. είναι κανονικές (proper) δηλαδή δεν έχουν πόλους στο άπειρο. Ουσιαστικά πρόκειται για τις συναρτήσεις στις οποίες ο βαθμός τους αριθμητή είναι μικρότερος ή ίσος με τον βαθμό του παρονομαστή.
- ii. δεν έχουν πόλους στο Ω

Οι ρητές συναρτήσεις που ικανοποιούν τα i και ii ονομάζονται κανονικές (proper) και Ω -ευσταθείς (Ω -stable) και αποτελούν το σύνολο S για το οποίο ισχύει:

$$S = \{t(s) \in R(s) / t(s) \text{ δεν έχει πόλους στο } \bar{\Omega} = \Omega \cup \{\infty\}\}$$

Αν το S εφοδιαστεί με τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού αποτελεί αντιμεταθετικό δακτύλιο με μοναδιαίο στοιχείο τον πραγματικό αριθμό 1 και καθόλου διαιρέτες του μηδέν.

Έτσι αν $0 \neq t(s) \in S$ τότε θα έχει τη μορφή:

$$t(s) = n_{\Omega}(s) \frac{\hat{n}(s)}{\hat{d}(s)}$$

Επειδή $t(s)$ δεν έχει πόλους στο άπειρο άρα $t(s) \in R_{pr}(s)$ και έχουμε :

$$\begin{aligned} \deg(n_{\Omega}(s)\hat{n}(s)) &\leq \deg \hat{d}(s) \Rightarrow \\ \deg n_{\Omega}(s) + \deg \hat{n}(s) &\leq \deg \hat{d}(s) \Rightarrow \\ \deg \hat{n}(s) &\leq \deg \hat{d}(s) \Rightarrow \\ \deg \hat{d}(s) - \deg \hat{n}(s) &\geq 0 \end{aligned}$$

Για κάθε $t(s) \in S$:

$$\delta_{\Omega}(t(s)) = \deg \hat{d}(s) - \deg \hat{n}(s) \geq 0$$

Η συνάρτηση $\delta_{\Omega}(): R(s) \rightarrow Z \cup \{\infty\}$ όταν περιοριστεί στο $S \subset R(s)$ ορίζεται να είναι $\delta_S: S \rightarrow N \cup \{\infty\}$. Τα αντιστρέψιμα στοιχεία στο S είναι εκείνα τα $t(s) \in S$ για τα οποία υπάρχει $\tilde{t}(s) \in S: t(s)\tilde{t}(s) = 1$. Έτσι $t(s)$ είναι αντιστρέψιμο στοιχείο αν και μόνο αν δεν έχει πόλους και μηδενικά στο $\bar{\Omega} = \Omega \cup \{\infty\}$. Δηλαδή τα αντιστρέψιμα στοιχεία στο S

είναι δικανονικές (biproper) συναρτήσεις $t(s) = \frac{\hat{n}(s)}{\hat{d}(s)}$ όπου $\hat{n}(s), \hat{d}(s) \in R[s]$ είναι πρώτα

μεταξύ τους χωρίς μηδενικά στο Ω . Οπότε καταλήγουμε ότι $t(s) \in S$ αν και μόνο αν $\delta_{\Omega}(t(s)) = 0$.

Ονομάζω S είναι το σύνολο των «κανονικών και ευσταθών» ρητών συναρτήσεων, ενώ τα αντιστρέψιμα στοιχεία του S είναι το σύνολο των δικανονικών και ευσταθών (biproper and stable) ρητών συναρτήσεων.

Αν $t(s) \in S$ τότε $\delta_S(t(s)) = q = q_{\infty} + \deg n_{\Omega}(s)$ όπου $q_{\infty} \geq 0$ δίνει την πολλαπλότητα του μηδενικού όταν $s \rightarrow \infty$ και $\deg n_{\Omega}(s)$ δίνει τον αριθμό των μηδενικών του $t(s)$ στο Ω .

Ουσιαστικά και πάλι ο βαθμός της ρητής συνάρτησης $t(s)$ στο σύνολο S δίνεται από το συνολικό αριθμό των μηδενικών στην ανεπιθύμητη περιοχή.

Έτσι αν θεωρήσουμε Ω την απαγορευμένη περιοχή πόλων τότε προκύπτει ο παρακάτω πίνακας (βλέπε [2]) αποδεικνύοντας μας ότι ο ορισμός που δώσαμε μπορεί να προσαρμοστεί σε οποιαδήποτε από τις παρακάτω περιπτώσεις δακτυλίου:

Δακτύλιος S	$n_{\Omega}(s)$	$d_{\Omega}(s)$	$\hat{n}(s)$	$\hat{d}(s)$	Ω
Πολυώνυμα $\mathbb{R}[s]$	$n_{\Omega}(s)$	1	1	1	\mathbb{C}
$R_{pr}(s)$ proper ρητές συναρτήσεις	1	1	$\hat{n}(s)$	$\hat{d}(s)$	$\{\infty\}$
Proper και Hurwitz stable ρητές συναρτήσεις	$n_{\Omega}(s)$	1	$\hat{n}(s)$	$\hat{d}(s)$	$\{s \in \mathbb{C} / \text{Re}(s) \geq 0\} \cup \{\infty\}$

όπου στις κανονικές συναρτήσεις θα πρέπει $\deg \hat{d}(s) \geq \deg \hat{n}(s)$

Στις κανονικές και ευσταθείς ρητές συναρτήσεις θα πρέπει:

$$\deg \hat{d}(s) \geq \deg \hat{n}(s) + \deg n_{\Omega}(s)$$

2.3 ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ ΤΟΥ $R(s)$ ΚΑΙ S

Προχωρώντας στην παραγοντοποίηση του $t(s)$ έχουμε:

Πρόταση 1.8 [4,σελ.262] Κάθε $t(s) \in S$ μπορεί να γραφτεί ως:

$$t(s) = \frac{n_{\Omega}(s)}{d_{\Omega}(s)} \frac{1}{(s+a)^q} \frac{\hat{n}(s)(s+a)^q}{\hat{d}(s)}$$

όπου $-a$ είναι έξω από το Ω και $q = \delta_{\Omega}(t(s)) = \deg \hat{d}(s) - \deg \hat{n}(s)$ και $\frac{\hat{n}(s)(s+a)^q}{\hat{d}(s)}$ είναι

μονάδα στο S . Ο όρος $\frac{n_{\Omega}(s)}{d_{\Omega}(s)(s+a)^q}$ δίνει τη δομή των πόλων και των μηδενικών του

$t(s)$ στο $\bar{\Omega} = \Omega \cup \{\infty\}$

□

Τα μηδενικά του $n_{\Omega}(s)$ δίνουν τα μηδενικά του $t(s)$ στο Ω και τα μηδενικά του $d_{\Omega}(s)$ δίνουν τους πόλους του $t(s)$ στο Ω . Ακόμα αν

$$q_{\infty} := q + \deg d_{\Omega}(s) - \deg n_{\Omega}(s)$$

τότε: αν $q_{\infty} > 0$ τότε το $t(s)$ έχει μηδενικό όταν $s \rightarrow \infty$, ενώ αν $q_{\infty} < 0$ τότε το $t(s)$ έχει πόλο όταν $s \rightarrow \infty$

Πόρισμα 1.9 [4,σελ.263] Κάθε $t(s) \in S$ μπορεί να παραγοντοποιηθεί ως εξής:

$$t(s) = \frac{n_{\Omega}(s)}{(s+a)^q} u(s) = \frac{n_{\Omega}(s)}{(s+a)^v} \frac{1}{(s+a)^{q_{\infty}}} u(s)$$

όπου $n_{\Omega}(s)$ δεν έχει μηδενικά έξω από το Ω . $v := \deg n_{\Omega}(s)$, $-a \in R$ είναι έξω από την

ανεπιθύμητη περιοχή Ω και $q := \delta_s(t(s)) > 0$. Ακόμα $u(s) := \frac{\hat{n}(s)(s+a)^q}{\hat{d}(s)} \in S$ είναι

αντιστρέψιμο στοιχείο.

□

Παραγοντοποιώντας το $n_{\Omega}(s)$ ως:

$$n_{\Omega}(s) = k(s + \lambda_1)^{\nu_1} \cdots (s + \lambda_{\mu})^{\nu_{\mu}} (s^2 + a_1 s + b_1)^{\nu_1} \cdots (s^2 + a_k s + b_k)^{\nu_k}$$

όπου $\kappa, \alpha_i, b_i \in R, i \in k, -\lambda_i \in \Omega, i \in \mu, \nu_i, \nu_j \in \mathbb{Z}^+$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} t(s) &= \left(\frac{s + \lambda_1}{s + \alpha} \right)^{\nu_1} \cdots \left(\frac{s + \lambda_{\mu}}{s + \alpha} \right)^{\nu_{\mu}} \left(\frac{s^2 + a_1 s + b_1}{(s + \alpha)^2} \right)^{\nu_1} \cdots \left(\frac{s^2 + a_k s + b_k}{(s + \alpha)^2} \right)^{\nu_k} \frac{1}{(s + \alpha)^{q_{\infty}}} u(s) = \\ &= p_1(s)^{\nu_1} \cdots p_{\mu}(s)^{\nu_{\mu}} p_1(s)^{\nu_1} p^*(s)^{q_{\infty}} u(s) \end{aligned}$$

Οι όροι $p_i(s), p_j(s)', p^*(s)$ ονομάζονται πρώτοι modulo του $t(s) \in S$

Είναι σημαντικό για τα παρακάτω που ακολουθούν να ορίζω πότε δυο ρητές συναρτήσεις $t_1(s), t_2(s) \in S$ είναι πρώτες μεταξύ τους στο σύνολο S .

Ορισμός 1.10 Έστω $t(s) \in S$ και έστω :

$$t(s) = p_1(s)^{v_1} p_2(s)^{v_2} \cdots p_\tau(s)^{v_\tau} u(s)$$

είναι η (moda) παραγοντοποίηση του $t(s)$, όπου $p_i(s) \in S, i \in \tau$ είναι οι διακεκριμένες πρώτες ρητές συναρτήσεις της μορφής $p(s), p'(s)$ και $p^*(s)$ και $u(s)$ είναι μονάδα στο S . Τότε ορίζουμε :

$\Pi(t(s))$: το σύνολο όλων των πρώτων $p_i(s)$ του $t(s)$

$Z(t(s))$: το σύνολο όλων των μηδενικών $z_i \in \bar{\Omega} = \Omega \cup \{\infty\}$ των στοιχείων

$p_i(s)$ του $\Pi(t(s))$

□

Με αυτούς τους ορισμούς μπορούμε να ορίσουμε πότε δυο συναρτήσεις $t_1(s), t_2(s) \in S$ είναι σχετικά πρώτες (coprime) στο σύνολο S .

Πρόταση 1.11 [4,σελ.264] Έστω $t_i(s) \in S, i \in k$ και έστω $\Pi(t(s)), Z(t(s))$ είναι τα σύνολα που σχετίζονται με καθένα από τα $t_i(s)$. Τότε οι επόμενες προτάσεις είναι ισodύναμες:

I. $t_i(s), i \in k$ είναι πρώτα μεταξύ τους στο $\bar{\Omega}$

II. $\bigcap_{i=1}^k \Pi(t_i(s)) = \emptyset$

III. $\bigcap_{i=1}^k Z(t_i(s)) = \emptyset$

IV. A) τουλάχιστον ένα από τα $t_i(s)$ είναι δικανονική συνάρτηση και

B) τα πολυώνυμα $n_{i\Omega}(s), i \in k$ είναι πρώτα μεταξύ τους.

V. Υπάρχει $t_i'(s) \in S, i \in k$, τέτοιο ώστε :

$$\sum_{i=1}^k t_i(s)t_i'(s) = 1$$

□

Έχοντας ορίσει πότε δυο συναρτήσεις $t_1(s), t_2(s) \in S$ είναι πρώτες (coprime) στο σύνολο S , το οποίο θα χρειαστεί σε επόμενα θεωρήματα, συνεχίζουμε να αποδείξουμε ότι ορίζεται ευκλείδεια διαίρεση ανάμεσα στα στοιχεία του S , το οποίο μας είναι απαραίτητο στο τέλος του κεφαλαίου για να σταθεροποιήσουμε το γραμμικό σύστημα.

Θα αποδείξω ότι ο δακτύλιος S είναι ευκλείδειος δηλαδή ότι ορίζεται η ευκλείδεια διαίρεση ανάμεσα στα στοιχεία του S . Όμως η απόδειξη για την ύπαρξη της ευκλείδειας διαίρεσης ανάμεσα σε στοιχεία του συνόλου S ανάγεται σε διαίρεση πολυωνύμων. Άρα αρκεί να δείξουμε ότι ορίζεται η ευκλείδεια διαίρεση στα πολυώνυμα.

Για να το δείξουμε αυτό θα χρησιμοποιήσουμε μια σειρά από παρακάτω προτάσεις

Πρόταση 1.12 [4,σελ.265] Έστω $t(s) \in S, -a \in R$, και $-a \notin \Omega$. Έστω $w = \frac{1}{s+a}$. Τότε

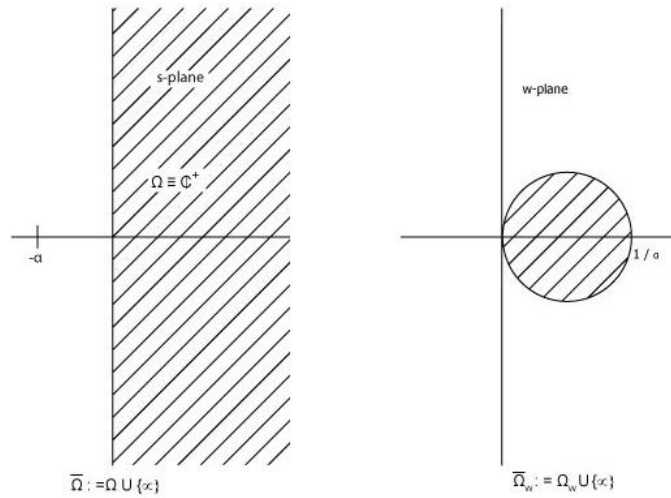
$t(s)$ μπορεί να εκφραστεί ως:

$$t(s) = u_a(s) \bar{t}_a(w)$$

όπου $u_a(s)$ είναι αντιστρέψιμο στοιχείο του S και $\bar{t}_a(w)$ είναι πολυώνυμο στο σύνολο πολυωνύμων $R[w]$ τέτοιο ώστε $\deg \bar{t}_a(w) = \delta_s(t(s))$ □

Ο μετασχηματισμός $w = \frac{1}{s+a}$, $a > 0, -a \notin \Omega$ είναι διγραμμικός μετασχηματισμός και απεικονίζει την περιοχή του Ω του επιπέδου της μεταβλητής s στην περιοχή Ω_w του επιπέδου της μεταβλητής w . Το σύνολο $\bar{\Omega} = \Omega \cup \{\infty\}$ αντιστοιχίζεται στο σύνολο $\bar{\Omega}_w = \Omega_w \cup \{0\}$ και αν $\Omega \equiv \mathbb{C}^+$ τότε Ω_w είναι ο κύκλος κέντρου $(\frac{1}{2a}, 0)$ και ακτίνας $\rho =$

$$\frac{1}{2a}$$



Μέσω του μετασχηματισμού $s = (1-aw)/w$ οι μοδα πρώτοι του $t(s) \in S$ θα μετασχηματίζονται σε πολυώνυμα που θα ανήκουν στο $R[w]$ και θα έχουν τα μηδενικά τους στην περιοχή $\bar{\Omega}_w$. Δηλαδή:

$$p^*(s) = \frac{1}{s+a} = w$$

$$p(s) = \frac{s+\lambda}{s+a} = \left[\frac{(1-aw)}{w} + \lambda \right] w = (1-aw) + \lambda w = (\lambda - a)w + 1$$

$$p'(s) = \frac{s^2 + a's + b}{(s+a)^2} = \left[\left(\frac{1-aw}{w} \right)^2 + a' \left(\frac{1-aw}{w} \right) + b \right] w^2 = (a^2 + a'a + b)w^2 + (a'^2 - 2a)w + 1$$

Πρόταση 1.13 [4,σελ.267] Έστω $\bar{t}(w) \in R[w]$, $a > 0$, $-a \notin \Omega$ και $\bar{\Omega}_w$ είναι η περιοχή του επιπέδου μεταβλητής w που ορίζεται από την εικόνα του $\bar{\Omega} = \Omega \cup \{\infty\}$ μέσω του

μετασχηματισμού $w = \frac{1}{s+a}$. Η ρητή συνάρτηση που ορίζεται ως

$$t(s) := \bar{t} \left(\frac{1}{s+a} \right)$$

ανήκει στο S και $\delta_s(t(s)) \leq \deg \bar{t}(w)$. Ακόμα $\delta_s(t(s))$ είναι ίσο με το συνολικό αριθμό των μηδενικών του $\bar{t}(w)$ στο $\bar{\Omega}_w$. \square

Για παράδειγμα:

$$\text{Αν } \bar{t}(w) = \left(w - \frac{1}{3}\right) \left(w - \frac{1}{5}\right). \text{ Έστω } a=1 \text{ και } w = \frac{1}{s+1}.$$

Τότε

$$t(s) := \bar{t}\left(\frac{1}{s+1}\right) = \left(\frac{1}{s+1} - \frac{1}{3}\right) \left(\frac{1}{s+1} - \frac{1}{5}\right) = \frac{(s-2)(s-4)}{15(s+1)^2} \in S$$

Έχει 2 μηδενικά στην ανεπιθύμητη περιοχή άρα $\delta_s(t(s)) = 2 = \deg \bar{t}(w)$. Μπορώ με αλλαγή του a να δείξω διαδοχικά ότι $\delta_s(t(s)) \leq \deg \bar{t}(w)$. Έτσι καταλήγουμε στο επόμενο θεώρημα:

Θεώρημα 1.14 [4,σελ.268] Έστω $t_1(s), t_2(s) \in S, w = \frac{1}{s+a}, -a \in R, -a \notin \Omega$. Έστω $t_i(s) = \bar{t}_{ia}(w)u_{ia}(s), i=1,2$ όπως ορίστηκε σε προηγούμενη πρόταση, όπου $\bar{t}_{ia}(w) \in R[w], u_{ia}(s) \in S$ είναι αντιστρέψιμα στοιχεία και $\delta_s(t(s)) = \deg \bar{t}_{ia}(w), i=1,2$.

Τότε

- i. Υπάρχει $\bar{q}_a(w) \in R[w]$ τέτοια ώστε $\bar{t}_{1a}(w) = \bar{t}_{2a}(w)\bar{q}_a(w) + \bar{r}_a(w)$ όπου $\bar{r}_a(w) = 0$ ή $\deg \bar{r}_a(w) \leq \deg \bar{t}_{2a}(w)$
- ii. Οι ρητές συναρτήσεις $q_a(s) \in S$ ορίζονται ως εξής:

$$q_a(s) = u_{1a}(s)u_{2a}(s)^{-1}\bar{q}_a\left(\frac{1}{s+a}\right)$$

$$r_a(s) = u_{1a}(s)\bar{r}_a\left(\frac{1}{s+a}\right)$$

ορίζοντας μια ευκλείδεια διαίρεση των $t_1(s), t_2(s)$ δηλαδή

$$t_1(s) = t_2(s)q_a(s) + r_a(s)$$

$$\text{όπου } r_a(s) = 0 \text{ ή } \delta_s(r_a(s)) < \delta_s(t_2(s)) \quad \square$$

Με αυτόν τον τρόπο αποδείξαμε ότι ορίζεται η ευκλείδεια διαίρεση δυο στοιχείων του δακτύλιου S , το οποίο ουσιαστικά σημαίνει ότι ο δακτύλιος είναι ευκλείδειος.

Παρατηρώ πως για ένα ζευγάρι $\bar{t}_{1a}(w), \bar{t}_{2a}(w) \in R[w]$ το ζευγάρι $\bar{r}(w), \bar{q}_a(w) \in R[w]$ είναι μοναδικά ορισμένο άρα και το ζευγάρι $q_a(s)$ και $r_a(w)$ είναι μοναδικά ορισμένο για την ευκλείδεια διαίρεση. Ωστόσο διαφορετικές τιμές του a δίνουν διαφορετικά ζευγάρια $q_a(s)$ και $r_a(w)$ και γι αυτό η ευκλείδεια διαίρεση στο δακτύλιο S δεν έχει την ιδιότητα της μοναδικότητας για το πηλίκο και το υπόλοιπο.

Το παρακάτω παράδειγμα εξηγεί τη διαδικασία της ευκλείδειας διαίρεσης στο δακτύλιο S :

Έστω

$$t_1(s) = \frac{s-1}{(s+2)^3} \in S \text{ και } t_2(s) = \frac{s-2}{(s+2)^2} \in S$$

$$\text{Διαλέγω } a=1 \text{ ή } w = \frac{1}{s+1}$$

Άρα:

$$t_1(s) = \frac{s-1}{(s+1)^3} \frac{(s+1)^3}{(s+2)^3} = \bar{t}_{1a}(s)u_{1a}(s)$$

$$t_2(s) = \frac{s-2}{(s+1)^2} \frac{(s+1)^2}{(s+2)^2} = \bar{t}_{2a}(s)u_{2a}(s)$$

Η μετατροπή αυτή στα $t_i(s)$ γίνεται λόγω προηγούμενης πρότασης όπου κάθε $t(s) \in S$ γράφεται $t(s) = \frac{n_\Omega(s)}{(s+a)^q} u(s) = \frac{n_\Omega(s)}{(s+a)^q} \frac{\hat{n}(s)(s+a)^q}{\hat{d}(s)}$ όπου $q = \delta_s(t(s))$ δηλώνει το πλήθος των μηδενικών στην ανεπιθύμητη περιοχή Ω . Όταν το s τείνει στο άπειρο το $t_1(s)$ μηδενίζεται και το μηδενικό έχει πολλαπλότητα 2. Ακόμα το $t_1(s)$ έχει ένα μηδενικό για $s=1$ στην περιοχή $\Omega = \{s \in C, \text{Re}(s) \geq 0\}$. Άρα συνολικά το $t_1(s)$ έχει 3 μηδενικά στην ανεπιθύμητη περιοχή. Άρα

$$t_1(s) = \frac{s-1}{(s+1)^3} \frac{(s+1)^3}{(s+2)^3} = \bar{t}_{1a}(s) u_{1a}(s).$$

Όμοια και για το $t_2(s)$.

Έτσι σύμφωνα με το μετασχηματισμό $s = \frac{1-w}{w}$ θα έχω:

$$\bar{t}_{1a}(w) = w \left(\frac{1-w}{w} - 1 \right) w^2 = -2w^3 + w^2$$

$$\bar{t}_{2a}(w) = w \left(\frac{1-w}{w} - 2 \right) w = -3w^2 + w$$

Κάνοντας τη διαίρεση βρίσκουμε

$$\bar{q}_a(w) = \frac{-2}{3}w - \frac{1}{9} \quad \bar{r}_a(w) = \frac{1}{9}w$$

Άρα $\bar{t}_{1a}(w) = \bar{t}_{2a}(w)\bar{q}_a(w) + \bar{r}_a(w)$ και $\deg \bar{r}_a(w) = 1 < \deg \bar{t}_{2a}(w) = 3$

Από το προηγούμενο θεώρημα:

$$q_a(s) = \left(\frac{2}{3} \frac{1}{s+1} - \frac{1}{9} \right) \frac{(s+1)^3}{(s+2)^3} \frac{(s+2)^2}{(s+1)^2} = \frac{5-s}{9(s+2)} \in S$$

$$r_a(s) = \frac{(s+1)^3}{(s+2)^3} \frac{1}{9(s+1)} = \frac{(s+1)^2}{9(s+2)^3} \in S$$

Καταλήγουμε ότι η ευκλείδεια διαίρεση των $t_1(s), t_2(s)$ δίνει πηλίκο $\bar{q}_a(s)$ και υπόλοιπο $\bar{r}_a(s)$ τα οποία ανήκουν στο σύνολο S

2.4 $\mathbb{R}(s)$ ΩΣ ΣΥΝΟΛΟ ΠΗΛΙΚΟ ΤΟΥ S

Έτσι μετά την απόδειξη της ευκλείδειας διαίρεσης για τα στοιχεία του συνόλου S μπορούμε να μελετήσουμε το $\mathbb{R}(s)$ ως σύνολο πηλίκου του S . Είναι γνωστό από την άλγεβρα ότι υπάρχει μοναδικό σύνολο K που ονομάζεται σύνολο πηλίκου του D τέτοιο ώστε:

- i. $D \subset K$
- ii. Κάθε στοιχείο του K μπορεί να γραφτεί ως πηλίκος δύο στοιχείων του D . Έτσι όταν πρόκειται για τα σύνολα S και $\mathbb{R}(s)$ όπου $S \subset \mathbb{R}(s)$, η επόμενη πρόταση αποδεικνύει πως κάθε ρητή συνάρτηση μπορεί να γραφτεί σαν πηλίκος κανονικών και Ω -ευσταθών συναρτήσεων.

Θεώρημα 1.15 [4,σελ.272] Έστω $t(s) \in \mathbb{R}(s) \neq 0$. Τότε $t(s)$ μπορεί να γραφτεί (όχι μοναδικά) ως:

$$t(s) = t_1(s)t_2(s)^{-1}$$

όπου $t_1(s), t_2(s)$ είναι πρώτοι μεταξύ τους στο Ω . □

Στα επόμενα παραδείγματα φαίνεται η μετατροπή δύο ρητών συναρτήσεων σε πηλίκος 2 κανονικών και Ω -ευσταθών συναρτήσεων.

Παράδειγμα 1.16

Ορίζω :

$$\bar{p} = \deg \hat{d}(s) - \deg n_{\Omega}(s)$$

$$\bar{q} = \deg \hat{n}(s) - \deg d_{\Omega}(s)$$

$$l = \min\{\bar{p}, \bar{q}\}$$

i) Έστω $t(s) = \frac{1}{s-1}$ και $\Omega = C^+$

Τότε :

$$\bar{p} = \deg 1 - \deg 1 = 0$$

$$\bar{q} = \deg 1 - \deg(s-1) = 0 - 1 = -1$$

$$l = \min\{\bar{p}, \bar{q}\} = -1$$

Άρα:

$$t(s) = \frac{n_{\Omega}(s)}{\hat{d}(s)} (s+a)' \left[\frac{d_{\Omega}(s)}{\hat{n}(s)} (s+a)' \right]^{-1} = \frac{1}{1} (s+a)^{-1} \left[\frac{s-1}{1} (s+a)^{-1} \right]^{-1} = \frac{1}{s+a} \frac{s+a}{s-1}$$

ii) Έστω ότι έχω τη συνάρτηση:

$$t(s) = \frac{s-3}{s^2+2s-8} = \frac{s-3}{(s+4)(s-2)} \quad \Omega = C^+$$

Τότε :

$$\bar{p} = \deg(s+4) - \deg(s-3) = 0$$

$$\bar{q} = \deg 1 - \deg(s-2) = 0 - 1 = -1$$

$$l = \min\{\bar{p}, \bar{q}\} = -1$$

Έστω $a=3$ άρα :

$$t(s) = \frac{s-3}{s+4} (s-3)^{-1} \left[\frac{s-2}{1} (s+3)^{-1} \right]^{-1} = \frac{s-3}{(s+4)(s+3)} \left[\frac{s-2}{s+3} \right]^{-1}$$

Αν διαλέξουμε τοποθέτηση των πόλων σε συγκεκριμένα σημεία του μιγαδικού επιπέδου τότε μπορούμε να λύσουμε το πρόβλημα πολύ πιο σύντομα αφού

παραθέσουμε πρώτα πόρισμα το οποίο μας βοηθάει να λύσουμε το παρακάτω παράδειγμα:

Πρόταση 1.20 [4,σελ.274] Κάθε $t(s) = \frac{n(s)}{d(s)} \in R_{pr}(s)$ όπου $n(s), d(s) \in R[s]$ και είναι

πρώτα μεταξύ τους, μπορεί να γραφτεί ως:

$$t(s) = \frac{n_{\Omega}(s)}{(s+a)^p} \left[\frac{d_{\Omega}(s)}{(s+a)^l} \right]^{-1} u(s) = \varepsilon(s)\psi(s)^{-1}u(s)$$

όπου $\varepsilon(s) = \frac{n_{\Omega}(s)}{(s+a)^p} \in S$, $\psi(s) = \frac{d_{\Omega}(s)}{(s+a)^l} \in S$ (είναι δίκανονικές) και $\varepsilon(s), \psi(s)$ είναι

πρώτα μεταξύ τους στο $\bar{\Omega}$ και $p=q+l$, $q = \deg \hat{d}(s) - \deg \hat{n}(s)$, $l = \deg d_{\Omega}(s)$ □

Παράδειγμα 1.17 [4,σελ.281]

Έστω

$$P(s) = \frac{s}{(s+1)(s-1)} \quad \text{και } \Omega = C^+$$

$$\text{Γνωρίζω ότι } P(s) = \frac{\hat{n}(s)n_{\Omega}(s)}{\hat{d}(s)d_{\Omega}(s)}$$

Τότε

$$\begin{aligned} n_{\Omega}(s) &= s, \hat{d}(s) = s+1, \\ d_{\Omega}(s) &= s-1, \hat{n}(s) = 1, \\ l &= \deg(s-1) = 1, q = \deg(s+1) - \deg 1 = 1 - 0 = 1, \\ p &= l + q = 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

$\deg d(s) \geq l + p = 1 + 2 = 3$, Άρα έστω $d(s) = (s+1)^3$ δηλαδή διαλέγουμε τοποθέτηση 3 πόλων στο -1. Τότε λύνοντας τη διοφαντική εξίσωση βρίσκουμε $n(s), m(s) \in R[s]$ τέτοια ώστε:

$$(1) m(s)(s-1) + n(s)s = (s+1)^3, \deg n(s) < l = 1$$

Όμως $\deg m(s) = \deg d(s) - 1 = 3 - 1 = 2$ άρα $m(s)$ θα είναι της μορφής

$$m(s) = \beta s^2 + \gamma s + \delta, \beta, \gamma, \delta \in R \text{ και } \deg n(s) < 1$$

άρα $n(s) = \zeta \in R$

Οπότε $m(s) = s^2 + 4s - 1, n(s) = 8$ απ' όπου συμπεραίνουμε ότι ο αντισταθμιστής

$$C(s) = \frac{\hat{d}(s)n(s)}{\hat{n}(s)m(s)} = \frac{(s+1)8}{s^2 + 4s - 1} \in R_{pr}(s)$$

Πόρισμα 1.18 [4,σελ.274] Έστω $t(s) \in R(s)$ και $t(s) = t_1(s)t_2(s)^{-1}$ όπου $t_1(s), t_2(s) \in S$ είναι πρώτοι μεταξύ τους στο $\bar{\Omega}$. Τότε:

$$t(s) \in R_{pr}(s) \text{ αν-ν } t_2(s) \text{ είναι δίκανονική (biproper)}$$

(δηλαδή αντιστρέψιμο στοιχείο στο $R_{pr}(s)$)

□

Ακόμα:

Πόρισμα 1.19 [4,σελ.274] Έστω $t(s) \in R_{pr}(s)$ και έστω $t(s) = t_1(s)t_2(s)^{-1}$ όπου $t_1(s), t_2(s) \in S$ είναι πρώτοι μεταξύ τους στο $\bar{\Omega}$. Τότε :

$$t(s) \in S \text{ αν-ν } t_2(s) \text{ είναι αντιστρέψιμο στοιχείο στο } S.$$

□

2.5 ΣΤΑΘΕΡΟΠΟΙΗΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΜΙΑΣ ΕΙΣΟΔΟΥ-ΕΞΟΔΟΥ

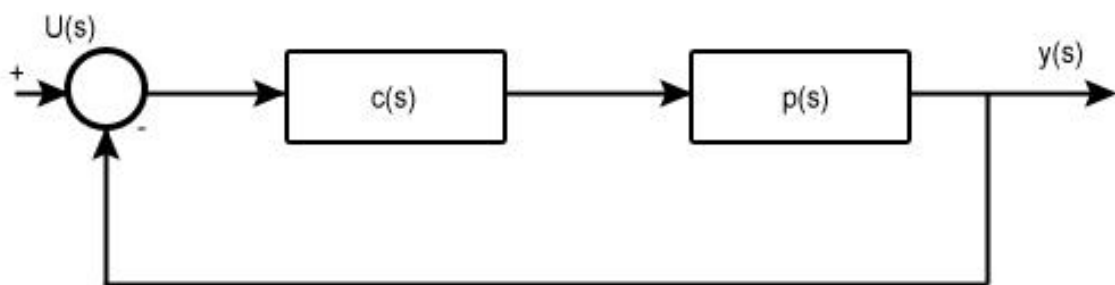
Στις παραπάνω παραγράφους έγινε η μετατροπή μιας οποιαδήποτε συνάρτησης σε πηλίκο δυο κανονικών και Ω -ευσταθών συναρτήσεων. Τα παραπάνω συμπεράσματα θα

μας βοηθήσουν να μετατρέψουμε τη συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος σε πηλίκιο δυο κανονικών και Ω-ευσταθών συναρτήσεων μεταφέροντας έτσι τους πόλους τις συνάρτησης σε συγκεκριμένη επιθυμητή περιοχή και σταθεροποιώντας το αντίστοιχο σύστημα μιας εισόδου – εξόδου.

Έστω ένα γραμμικό σύστημα μιας εισόδου-εξόδου όπως το παρακάτω, όπου

$$P(s) = \frac{n(s)}{d(s)} \text{ και } C(s) = \frac{y(s)}{x(s)}$$

αντίστοιχος αντισταθμιστής



Για να υπολογίσουμε τη συνάρτηση μεταφοράς του εργαζόμαστε ως εξής:

$$y(s) = P(s) \cdot C(s)(u(s) - y(s)) \Leftrightarrow$$

$$y(s) = P(s) \cdot C(s) \cdot u(s) - P(s) \cdot C(s) \cdot y(s) \Leftrightarrow$$

$$P(s) \cdot C(s) \cdot y(s) + y(s) = P(s) \cdot C(s) \cdot u(s) \Leftrightarrow$$

$$(1 + P(s) \cdot C(s))y(s) = P(s) \cdot C(s) \cdot u(s) \Leftrightarrow$$

$$y(s) = \frac{P(s) \cdot C(s)}{1 + P(s) \cdot C(s)} \cdot u(s)$$

Έτσι αν θέσουμε όπου $P(s) = \frac{n(s)}{d(s)}$ και $C(s) = \frac{y(s)}{x(s)}$ τότε θα προκύπτει ότι :

$$y(s) = \frac{\frac{n(s)}{d(s)} \cdot \frac{y(s)}{x(s)}}{1 + \frac{n(s)}{d(s)} \cdot \frac{y(s)}{x(s)}} \cdot u(s)$$

Άρα τελικά

$$y(s) = \frac{n(s) \cdot y(s)}{d(s) \cdot x(s) + n(s) \cdot y(s)} \cdot u(s)$$

Σκοπός μας είναι η σταθεροποίηση του συστήματος $G(s)$ όπου:

$$G(s) = \frac{n(s) y(s)}{d(s) x(s) + n(s) y(s)}$$

το οποίο επιτυγχάνεται αν καταφέρουμε να περιορίσουμε τους πόλους της ρητής συνάρτησης σε συγκεκριμένη επιθυμητή περιοχή δηλαδή το $G(s)$ να γίνει πηλίκο δυο κανονικών και Ω -ευσταθών συναρτήσεων. Για να γίνει αυτό θα πρέπει να δείξουμε ότι η διοφαντική εξίσωση $ax+by=1$ έχει λύση. Αυτό ανάγεται στην απόδειξη της ευκλείδειας διαίρεσης στο σύνολο S «των κανονικών και Ω -ευσταθών συναρτήσεων», το οποίο αποδεικνύεται ότι μας οδηγεί στην απόδειξη της ευκλείδειας διαίρεσης πολυωνύμων.

Πιο αναλυτικά αν μας δοθεί ένα γραμμικό σύστημα το οποίο περιγράφεται από μια συνάρτηση μεταφοράς $P(s)$ τότε ο σκοπός της σταθεροποίησης μέσω ανάδρασης είναι η εύρεση ενός δυναμικού αντισταθμιστή $C(s)$ τέτοιος ώστε ολόκληρο το κλειστό σύστημα να έχει τους πόλους του σε επιθυμητή περιοχή που διαλέγουμε εμείς .

Η περιοχή σταθεροποίησης μπορεί να διαφέρει ανάλογα με το είδος του προβλήματος . Για παράδειγμα σε προβλήματα συνεχούς χρόνου μεταφέρουμε τους πόλους του συστήματος στο ανοιχτό αριστερό ημιεπίπεδο ($\text{Re}(s)<0$). Στα συστήματα διακριτού χρόνου η σταθερότητα επιτυγχάνεται αν μεταφέρουμε τους πόλους του κλειστού

συστήματος στο μοναδιαίο δίσκο. Ας είναι $P(s)$ μια κανονική ρητή συνάρτηση μεταφοράς που περιγράφει τη συμπεριφορά εισόδου –εξόδου του συστήματος. Θα περιοριστούμε σε συστήματα συνεχούς χρόνου. Έτσι θέτουμε $\Omega = \{s: \text{Re}(s) \geq 0\} \cup \{\infty\}$ οπότε μπορούμε να γράψουμε το $P(s)$ σαν πηλίκο δυο Ω -ευσταθών συναρτήσεων δηλαδή:

$$P(s) = \frac{n(s)}{d(s)}$$

όπου $n(s), d(s) \in S$.

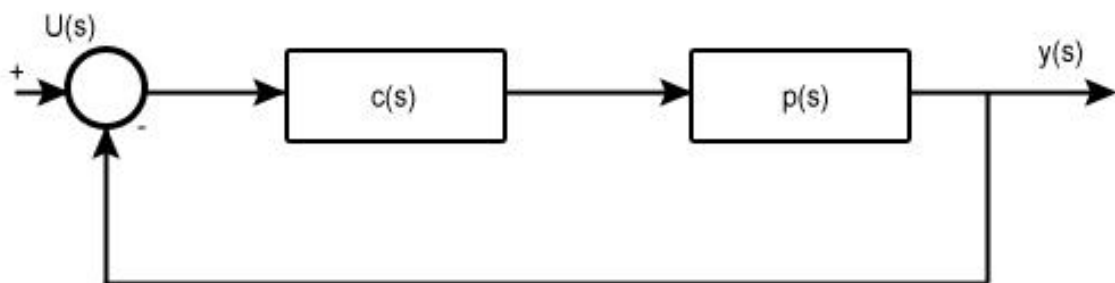
Εμείς θέλουμε να βρούμε ένα κανονικό ρητό αντισταθμιστή $C(s)$ της μορφής:

$$C(s) = \frac{y(s)}{x(s)}$$

όπου $y(s), x(s) \in S$.

Γνωρίζουμε γενικά ότι $C(s) \in R_{pr}(s)$. Η συνάρτηση μεταφοράς του κλειστού

συστήματος δίνεται από $G(s) = \frac{n(s)y(s)}{d(s)x(s) + n(s)y(s)}$



Για την σταθεροποίηση του κλειστού συστήματος $G(s)$ απαιτείται να υπολογίσουμε τα $x(s), y(s) \in S$ τέτοια ώστε να είναι μια κανονική και Ω -ευσταθής συνάρτηση (proper

και Ω -stable). Για να γίνει αυτό θα χρησιμοποιήσουμε προηγούμενη πρόταση. Ξέρουμε ότι κάθε συνάρτηση $t(s) \in R(s)$ μπορεί να γραφτεί στη μορφή $t(s) = t_1(s)t_2(s)^{-1}$ όπου $t_1(s), t_2(s)$ είναι πρώτα μεταξύ τους. Ακόμα για κάθε $t(s) \in R_{pr}(s)$ όπου $t(s) = t_1(s)t_2(s)^{-1}$ με $t_1(s), t_2(s)$ είναι πρώτα μεταξύ τους στο $\bar{\Omega}$ ισχύει $t(s) \in S$ αν και μόνο αν $t_2(s)$ είναι αντιστρέψιμο στοιχείο στο S .

Έτσι και για τη συνάρτηση $G(s)$ του κλειστού συστήματος όπου

$$G(s) = \frac{n(s)y(s)}{d(s)x(s) + n(s)y(s)} \in R_{pr}(s)$$

αφού $n(s), y(s), d(s), x(s) \in R_{pr}(s)$ θα ισχύει:

$$G(s) = n(s)y(s)(d(s)x(s) + n(s)y(s))^{-1}$$

από όπου από την προηγούμενη πρόταση συμπεραίνουμε ότι :

$G(s) \in S$ αν και μόνο αν $d(s)x(s) + n(s)y(s)$ είναι αντιστρέψιμο στοιχείο του S και διαλέγω το απλούστερο να είναι η μονάδα. Άρα θέλω να βρω $x(s), y(s)$ τέτοια ώστε :

$$d(s)x(s) + n(s)y(s) = 1$$

Η παραπάνω εξίσωση ονομάζεται διοφαντική εξίσωση πάνω στο δακτύλιο των Ω -ευσταθών ρητών συναρτήσεων και μπορεί να λυθεί αν χρησιμοποιήσουμε τον ευκλείδειο αλγόριθμο. Εμείς αποδείξαμε ότι ισχύει η ευκλείδεια διαίρεση πάνω στο δακτύλιο S και άρα για τη συγκεκριμένη λύση που θα βρούμε $x_0(s), y_0(s) \in S$ θα μπορούμε να βρούμε και τις υπόλοιπες χρησιμοποιώντας παραμετροποίηση:

$$x(s) = x_0(s) + n(s)t(s)$$

$$y(s) = y_0(s) + d(s)t(s)$$

όπου $t(s) \in S$ είναι μια Ω -ευσταθής ρητή συνάρτηση. Η παραπάνω μέθοδος για την επίλυση του προβλήματος της παραμετροποίησης των σταθεροποιητικών αντισταθμιστών, είναι γνωστή στη βιβλιογραφία ως παραμετροποίηση Youla – Kucera (βλέπε ενδεικτικά [1] και [3])

2.6 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Παρατηρούμε πως για να φτάσουμε στον τελικό μας στόχο που είναι η σταθεροποίηση του κλειστού συστήματος $G(s)$ χρειάστηκε η θεμελίωση της ευκλείδειας διαίρεσης πάνω στο δακτύλιο S για να μπορεί να υπάρξει λύση της διοφαντικής εξίσωσης $d(s)x(s)+n(s)y(s)=1$. Αν και ήταν σχετικά μεγάλη διαδικασία καταφέραμε να μπορούμε να περιορίζουμε τους πόλους ενός κλειστού συστήματος σε οποιαδήποτε περιοχή θέλουμε ανάλογα με την κάθε περίπτωση. Σίγουρα θα ήταν πιο απλό να διαλέξουμε την τοποθέτηση των πόλων σε συγκεκριμένα σημεία λύνοντας την εξίσωση πολυωνυμικά αν και αυτό μπορεί να μην είναι τόσο εύχρηστο αφού είναι περιοριστικό σε σχέση με αυτό που κάναμε.

3. ΤΟ ΣΥΝΟΛΟ ΤΩΝ Ω-ΕΥΣΤΑΘΩΝ ΠΙΝΑΚΩΝ

Όσα θα αναπτύξουμε στο παρακάτω κεφάλαιο είναι βασισμένα στο βιβλίο του Α. Βαρδουλάκη « Linear Multivariable Control – Algebraic Analysis and Synthesis Methods ».

3.1 ΒΑΣΙΚΟΙ ΟΡΙΣΜΟΙ & ΑΛΓΕΒΡΑ ΤΩΝ Ω-ΕΥΣΤΑΘΩΝ ΠΙΝΑΚΩΝ

Ορισμός 1.21 Το σύνολο των διατεταγμένων πλειάδων των ρητών συναρτήσεων $t_1(s), t_2(s), \dots, t_p(s)$, $p \in \mathbb{Z}^+ := \{1, 2, \dots\}$ ονομάζεται σύνολο των διανυσμάτων στηλών, δηλαδή :

$$\mathbb{R}(s)^p := \{t(s) / t(s) = [t_1(s), t_2(s), \dots, t_p(s)]^T\}$$

το οποίο συμβολίζεται με $\mathbb{R}(s)^p$. Τα στοιχεία του $\mathbb{R}(s)^p$ (πραγματικά) ρητά διανύσματα.

□

Ορισμός 1.22 Έστω ένα πεπερασμένο σύνολο $\{t_1(s), t_2(s), \dots, t_p(s)\}$ που αποτελείται από ρητά διανύσματα. Το σύνολο αυτό ονομάζεται $\mathbb{R}(s)$ - γραμμικά εξαρτημένο αν υπάρχει ένα σύνολο $\{a_1(s), a_2(s), \dots, a_k(s)\}$ από ρητές συναρτήσεις με $a_i(s) \neq 0$ για τουλάχιστον ένα $i \in k$, έτσι ώστε :

$$a_1(s)t_1(s) + \dots + a_k(s)t_k(s) = 0 \in \mathbb{R}(s)^p$$

Επίσης αν $a_i(s) = 0$ για κάθε $i \in k$, τότε το σύνολο $\{t_1(s), t_2(s), \dots, t_p(s)\}$ ονομάζεται γραμμικά ανεξάρτητο πάνω στο $\mathbb{R}(s)$.

□

Ορισμός 1.23 Έστω το σύνολο $p \times m$ πινάκων με στοιχεία στο $\mathbb{R}(s)$, το οποίο συμβολίζεται με $\mathbb{R}(s)^{p \times m}$. Τότε ένας πίνακας $T(s) \in \mathbb{R}(s)^{p \times m}$ ονομάζεται (πραγματικός) ρητός πίνακας. □

Ορισμός 1.24 Έστω ένας πίνακας $T(s) \in \mathbb{R}(s)^{p \times m}$. Τότε η ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή (rank) του πίνακα $T(s) \in \mathbb{R}(s)^{p \times m}$ ονομάζεται ο μέγιστος αριθμός των γραμμικά ανεξάρτητων m -διανυσμάτων γραμμών ή των p -διανυσμάτων στηλών και συμβολίζεται με $\text{rank}_{\mathbb{R}(s)} T(s)$. □

Έχοντας δώσει βασικούς ορισμούς για τους πίνακες θα ασχοληθούμε με την άλγεβρα των Ω -ευσταθών πινάκων, δηλαδή με τους πίνακες με στοιχεία στο S . Ορίζουμε με $S^{p \times m}$ το σύνολο των $p \times m$ πινάκων με στοιχεία στο S . Τους ονομάζουμε “κανονικούς και ευσταθείς” (proper and stable) αυτούς τους ρητούς πίνακες και οι ιδιότητες τους είναι οι εξής:

Είναι proper: σημαίνει ότι δεν έχουν πόλους στο $s = \infty$

Είναι stable: σημαίνει ότι δεν έχουν πόλους στο εσωτερικό του Ω .

Αν το $\Omega \equiv C^+$, τότε το σύνολο $S^{p \times m}$ αναπαριστά το σύνολο των “κανονικών και Hurwitz ευσταθών” ρητών συναρτήσεων. Για την εκθετική (exponentially) ευστάθεια θα μιλήσουμε παρακάτω.

Ορισμός 1.25 Ένας πίνακας $T(s) \in S^{p \times m}$ λέγεται S -μονομετρικός (S -unimodular) αν υπάρχει πίνακας $\hat{T}(s) \in S^{p \times m}$ τέτοιος ώστε:

$$T(s)\hat{T}(s) = I_p \quad \square$$

Ουσιαστικά ένας πίνακας $T(s) \in S^{p \times m}$ είναι S -μονομετρικός αν δεν έχει μηδενικά στο $s = \infty$ και πεπερασμένα μηδενικά μέσα στο Ω . Δηλαδή ένας πίνακας S -μονομετρικός είναι τετραγωνικός και δεν έχει πόλους ή μηδενικά στο $\bar{\Omega} = \Omega \cup \{\infty\}$.

Σε κάθε τέτοιο ρητό πίνακα είναι επιτρεπτές οι ως τώρα γνωστές στοιχειώδεις πράξεις γραμμών ή στηλών (ανταλλαγή γραμμών(στηλών), πολλαπλασιασμός γραμμής

(στήλης) με μοναδιαίο στοιχείο του δακτυλίου S , πρόσθεση σε μια νέα γραμμή (στήλη) το πολλαπλάσιο μιας άλλης γραμμής (στήλης)

Ο παρακάτω ορισμός χρησιμοποιείται αργότερα και για την απόδειξη επόμενων θεωρημάτων και μας ορίζει τους ισοδύναμους πίνακες.

Ορισμός 1.26 [4,σελ.282] Έστω $T_i(s) \in R(s)^{p \times m}$, $i=1,2$ Τότε οι $T_1(s)$ και $T_2(s)$ λέγονται ισοδύναμοι στο $\bar{\Omega}$ αν υπάρχουν S -μονομετρικοί πίνακες $T_L(s) \in S^{p \times p}$ και $T_R(s) \in S^{m \times m}$ τέτοιοι ώστε:

$$T_L(s)T_1(s)T_R(s) = T_2(s) \quad \square$$

Θεώρημα 1.27 [4,σελ.282] (Smith – McMillan μορφή ρητού πίνακα στο $\bar{\Omega} = \Omega \cup \{\infty\}$)

Έστω $T(s) \in R(s)^{p \times m}$, $\text{rank}T(s)=r$. Τότε ο $T(s)$ είναι ισοδύναμος στο $\bar{\Omega} = \Omega \cup \{\infty\}$ με το διαγώνιο πίνακα $S_{T(s)}^{\bar{\Omega}}$ που έχει τη μορφή:

$$S_{T(s)}^{\bar{\Omega}} = \text{blockdiag}\left[\frac{\varepsilon_1(s)}{\psi_1(s)}, \dots, \frac{\varepsilon_r(s)}{\psi_r(s)}, O_{p-r, m-r}\right] \in R(s)^{p \times m}$$

όπου $\varepsilon_i(s) = \frac{\varepsilon_{\Omega}(s)}{(s+a)^{p_i}} \in S$ και $\psi_i(s) = \frac{\psi_{\Omega}(s)}{(s+a)^{l_i}} \in S$ είναι πρώτα μεταξύ τους στο

$\bar{\Omega} = \Omega \cup \{\infty\}$, και τα $\psi_{\Omega}(s)$, $\varepsilon_{\Omega}(s) \in R[s]$ είναι πρώτα μεταξύ τους με τα μηδενικά τους μέσα στο Ω , και το $-a$ είναι έξω από το Ω . □

Ο πίνακας $S_{T(s)}^{\bar{\Omega}}$ μπορεί ακόμα να γραφεί:

$$S_{T(s)}^{\bar{\Omega}} = E^{\bar{\Omega}}(s)\Psi_R^{\bar{\Omega}}(s)^{-1} = \Psi_L^{\bar{\Omega}}(s)^{-1}E^{\bar{\Omega}}(s)$$

όπου

$$E^{\bar{\Omega}}(s) = \text{blockdiag}[\varepsilon_1(s), \dots, \varepsilon_r(s), O_{p-r, m-r}] \in S^{p \times m}$$

$$\Psi_R^{\bar{\Omega}}(s) = \text{diag}[\psi_1(s), \dots, \psi_r(s), I_{m-r}] \in \mathcal{S}^{m \times m}$$

$$\Psi_L^{\bar{\Omega}}(s) = \text{diag}[\psi_1(s), \dots, \psi_r(s), I_{p-r}] \in \mathcal{S}^{p \times p}$$

Η τελευταία μορφή γραφής του $S_{T(s)}^{\Omega}$ θα μας είναι χρήσιμη και στα επόμενα που θα πούμε.

Ο πίνακας $S_{T(s)}^{\Omega}$ γράφεται και στη μορφή:

$$S_{T(s)}^{\bar{\Omega}} = \text{blockdiag}\left[\frac{\varepsilon_{1\Omega}(s)}{\psi_{1\Omega}(s)}(s+a)^{q_1}, \dots, \frac{\varepsilon_{r\Omega}(s)}{\psi_{r\Omega}(s)}(s+a)^{q_r}, O_{p-r, m-r}\right]$$

Τα πεπερασμένα μηδενικά του $\varepsilon_i(s) = \frac{\varepsilon_{i\Omega}(s)}{(s+a)^{p_i}} \in \mathcal{S}$ δηλαδή τα μηδενικά του $\varepsilon_{i\Omega}(s)$

δίνουν τα μηδενικά του $T(s)$ και το $q_i^{z_{\infty}} = p_i - \deg \varepsilon_{i\Omega}(s) \geq 0$ δίνει την πολλαπλότητα των μηδενικών στο $s = \infty$

Ακόμα τα πεπερασμένα μηδενικά του $\psi_i(s) = \frac{\psi_{i\Omega}(s)}{(s+a)^{l_i}} \in \mathcal{S}$ δηλαδή τα πεπερασμένα

μηδενικά του $\psi_{i\Omega}(s)$ δίνουν τους πόλους του $T(s)$ ενώ το $q_i^{p_{\infty}} = l_i - \deg \psi_{i\Omega}(s) \geq 0$ δίνει την πολλαπλότητα των πόλων του $T(s)$ στο άπειρο.

Δηλαδή αν:

$$S_{T(s)}^{\bar{\Omega}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{s+a} & 0 \\ 0 & \frac{1-s}{(s+a)^2} \end{pmatrix}$$

τότε το $T(s)$ δεν έχει πεπερασμένους πόλους στο C^+ και έχει ένα πεπερασμένο μηδενικό για $s=1$. Ακόμη $p_1=1$ και $p_2=2$ άρα $q_1^{z_{\infty}} = p_1 - \deg \varepsilon_{1\Omega}(s) = 1 - 0 = 1$ και $q_2^{z_{\infty}} = p_2 - \deg \varepsilon_{2\Omega}(s) = 2 - 1 = 1$ δηλαδή έχει δυο μηδενικά στο $s = \infty$, το καθένα πολλαπλότητας 1

Τα επόμενα δυο πορίσματα βοηθούν στον υπολογισμό του σταθεροποιητή σε πολυμεταβλητά συστήματα .

Πόρισμα 1.28 [4,σελ.284] Έστω $T(s) \in R(s)^{p \times m}$. Τότε $T(s) \in R_{pr}(s)$ αν και μόνο αν οι

$\Psi_R^{\bar{\Omega}}(s), \Psi_L^{\bar{\Omega}}(s)$ είναι δικανονικοί (biproper) ρητοί πίνακες □

Απόδειξη

Ο $T(s) \in R(s)^{p \times m}$ αν και μόνο ο $T(s)$ δεν έχει πόλους στο $s = \infty$ το οποίο ισχύει αν και μόνο αν $q^{p_\infty} = 0$ ή ισοδύναμα αν και μόνο αν $l_i = \deg \psi_{i\Omega}(s), \forall i \in r$,

δηλαδή αν και μόνο αν $\psi_i(s) \in S, i \in r$ είναι δικανονικές ρητές συναρτήσεις και επομένως αν και μόνο αν $\Psi_R^{\bar{\Omega}}(s) \in S^{m \times m}, \Psi_L^{\bar{\Omega}}(s) \in S^{p \times p}$ είναι δικανονικοί ρητοί πίνακες ▲

Στο επόμενο πόρισμα βασίζονται και ιδιότητες του ζητούμενου σταθεροποιητή που θα παρουσιαστούν στο επόμενο κεφάλαιο

Πόρισμα 1.29[4,σελ.284] Έστω $T(s) \in R(s)^{p \times m}$. Τότε $T(s) \in S^{p \times m}$ αν και μόνο αν

$\Psi_R^{\bar{\Omega}}(s) = I_m$ και $\Psi_L^{\bar{\Omega}}(s) = I_p$ δηλαδή αν και μόνο αν $\Psi_R^{\bar{\Omega}}(s) \in S^{m \times m}$ και $\Psi_L^{\bar{\Omega}}(s) \in S^{p \times p}$

είναι S -μονομετρικοί πίνακες.

$(T(s) \in S^{p \times m} \Leftrightarrow T(s)$ δεν έχει πόλους στο $\bar{\Omega} = \Omega \cup \{\infty\} \Leftrightarrow \psi_i(s) = 1, i \in r$ □

Απόδειξη

Ο $T(s) \in R(s)^{p \times m}$ είναι αριστερός (δεξιός) δικανονικός αν και μόνο αν $\lim_{s \rightarrow \infty} T(s) = E \in R^{p \times m}$ και $\text{rank}_R E = m (= p)$ δηλαδή αν και μόνο αν ο $T(s)$ δεν έχει επίσης καθόλου μηδενικά στο $s = \infty$, το οποίο ισχύει αν και μόνο αν $q_i^{z_\infty} = 0$ ή ισοδύναμα αν και μόνο αν ο $E^{\bar{\Omega}}(s) \in S^{p \times m}$ είναι αριστερός (δεξιός) δικανονικός ρητός πίνακας ▲

Ακόμα προκύπτει το επόμενο πόρισμα:

Πόρισμα 1.30 [4,σελ.284] Έστω ο πίνακας $T(s) \in R(s)^{p \times m}$. Τότε ο πίνακας $T(s) \in S^{p \times m}$ αν και μόνο αν $\psi_R^{\bar{\Omega}}(s) = I_m$, $\psi_L^{\bar{\Omega}}(s) = I_p$ δηλαδή οι $\psi_R^{\bar{\Omega}}(s) \in S^{m \times m}$, $\psi_L^{\bar{\Omega}}(s) \in S^{m \times m}$ είναι S -μονομετρικοί πίνακες

$$(T(s) \in S^{p \times m} \Leftrightarrow \text{ο } T(s) \text{ δεν έχει πόλους στο } \bar{\Omega} \Leftrightarrow \psi_i(s) = 1, i \in r) \quad \square$$

Ουσιαστικά η Smith μορφή ενός πίνακα είναι ένας ισοδύναμος πίνακας που μας βοηθάει να βρίσκουμε ευκολότερα τους πόλους και τα μηδενικά ενός πίνακα ρητών συναρτήσεων.

Στην παρακάτω πρόταση φαίνεται η Smith μορφή ενός πίνακα $T(s)$ που δεν έχει μηδενικά στο $\bar{\Omega} = \Omega \cup \{\infty\}$

Πρόταση 1.31 [4,σελ.286] Έστω $T(s) \in R(s)^{p \times m}$ με $\text{rank}T(s)=r$. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

$$i. T(s) \text{ δεν έχει μηδενικά στο } \bar{\Omega} = \Omega \cup \{\infty\}$$

$$ii. \varepsilon_i(s) = 1, i \in r \Leftrightarrow \varepsilon_{i\Omega}(s) = 1 \text{ και } p_i = 0, i \in r$$

$$iii. S_{T(s)}^{\bar{\Omega}} = \text{blockdiag}\left[\frac{1}{\psi_1(s)}, \dots, \frac{1}{\psi_r(s)}, O_{p-r, m-r}\right]$$

□

Αν ένας πίνακας $T(s)$ δεν έχει μηδενικά στο $\bar{\Omega} = \Omega \cup \{\infty\}$ και δεν έχει πόλους στο $s = \infty$ και στο Ω . τότε:

$$S_{T(s)}^{\bar{\Omega}} = \begin{pmatrix} I_r & O_{m-r} \\ O_{p-r} & O_{p-r, m-r} \end{pmatrix}$$

και αν $r=p$:

$$S_{T(s)}^{\bar{\Omega}} = [I_p \ O_{p, m-p}] \quad (1)$$

Ορισμός 1.32 [4,σελ.287] Ένας ρητός πίνακας $T(s) \in S^{p \times m}$, ο οποίος έχει Smith μορφή :

$$S_{T(s)}^{\bar{\Omega}} = [I_p \ O_{p,m-p}]$$

ονομάζεται S -δεξιά μονομετρικός (S -right unimodular). Ο S -αριστερά μονομετρικός (S -left unimodular) ορίζεται με ανάλογο τρόπο. \square

Πρόταση 1.33 [4,σελ.287] Ένας ρητός πίνακας $T(s) \in R(s)^{p \times m}$ με $\text{rank}T(s)=r$ μπορεί να παραγοντοποιηθεί με όχι μοναδικό τρόπο ως:

$$T(s) = T_{\bar{\Omega}}(s)T_1(s)$$

όπου $T_1(s) \in S^{r \times m}$ είναι S -μονομετρικός και $T_{\bar{\Omega}}(s) \in R(s)^{p \times r}$ με $\text{rank}_{R(s)}T(s) = r$ έχει τη δομή πόλων και μηδενικών ίδια με αυτή του $T(s)$. Τότε ο $T_{\bar{\Omega}}(s)$ ονομάζεται αριστερή δομή του $T(s)$ στο Ω . \square

Απόδειξη

Έστω $T_L(s) \in S^{p \times p}$, $T_R(s) \in S^{m \times m}$ είναι S -μονομετρικοί πίνακες τέτοιοι ώστε:

$$T(s) = T_L(s)S_{T(s)}^{\bar{\Omega}}T_R(s)$$

όπου

$$S_{T(s)}^{\bar{\Omega}} = \begin{pmatrix} N(s) & \mathbf{0}_{r,m-r} \\ \mathbf{0}_{p-r,r} & \mathbf{0}_{p-r,m-r} \end{pmatrix}$$

και

$$N(s) = \text{diag}[\varepsilon_1(s)\psi_1(s)^{-1}, \dots, \varepsilon_r(s)\psi_r(s)^{-1}] \in R(s)^{r \times r}$$

Τώρα αν παραστήσουμε τον $T_R(s)$ ως:

$$T_R(s) = \begin{pmatrix} T_1(s) \\ T_2(s) \end{pmatrix}$$

όπου $T_1(s) \in S^{r \times m}$ και $T_2(s) \in S^{(m-r) \times m}$ και είναι και οι δυο S -δεξιά μονομετρικοί.

Τότε:

$$T(s) = T_L(s) \begin{pmatrix} D(s) \\ 0_{p-r,r} \end{pmatrix} (I_r \ 0_{r,m-r}) \begin{pmatrix} T_1(s) \\ T_2(s) \end{pmatrix} = T_L^\infty(s)$$

όπου $T_L^\infty(s) := T_L(s) \begin{pmatrix} D(s) \\ 0_{p-r,r} \end{pmatrix} \in R^{p \times r}(s)$ και από τη σχέση $T(s) = T_L^\infty(s) S_{T(s)}^\infty(s) T_R(s)$

έχουμε ότι οι πίνακες $T(s), T_L^\infty(s)$ έχουν την ίδια δομή πόλων και μηδενικών στο $s = \infty$



3.2 Κλασματική μορφή ρητών πινάκων

Για να συνεχίσουμε τη μελέτη μας είναι πολύ σημαντικό να ορίσουμε την έννοια των από αριστερά ή από δεξιά σχετικά πρώτων ρητών πινάκων με στοιχεία στο S

Ορισμός 1.34 [4,σελ.16] Έστω οι πολυωνυμικοί πίνακες $A(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$, $B(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times q}$ και $C(s) \in \mathbb{R}[s]^{q \times m}$ οι οποίοι ικανοποιούν τη σχέση :

$$A(s) = B(s)C(s)$$

τότε : ο $B(s)$ ονομάζεται από αριστερά διαιρέτης του $A(s)$, ο $C(s)$ ονομάζεται από δεξιά διαιρέτης του $A(s)$, ο $A(s)$ ονομάζεται από αριστερά πολλαπλάσιο του $C(s)$, και τέλος ο $A(s)$ ονομάζεται από δεξιά πολλαπλάσιο του $B(s)$ □

Ορισμός 1.35 [4,σελ.288] Έστω ρητοί πίνακες $T(s) \in S^{p \times m}$ και $\bar{T}(s) \in S^{p \times m}$, $T_L(s) \in S^{p \times p}$ τέτοιοι ώστε:

$$T(s) = T_L(s)\bar{T}(s)$$

τότε ο $T_L(s)$ ονομάζεται από αριστερά διαιρέτης του $T(s)$ στο $\bar{\Omega} = \Omega \cup \{\infty\}$

□

Ορισμός 1.36 [4,σελ.288] Έστω δυο ρητοί πίνακες $T_1(s) \in S^{p \times l}$, $T_2(s) \in S^{p \times t}$ και έστω $T_L(s) \in S^{p \times p}$ να είναι από αριστερά διαιρέτης στο $\bar{\Omega} = \Omega \cup \{\infty\}$ του $T_1(s)$ και του $T_2(s)$ δηλαδή έστω $T_1(s) = T_L(s)\bar{T}_1(s)$ και $T_2(s) = T_L(s)\bar{T}_2(s)$, όπου $\bar{T}_1(s) \in S^{p \times l}$ και $\bar{T}_2(s) \in S^{p \times t}$ Τότε ο $T_L(s)$ ονομάζεται κοινός αριστερός διαιρέτης στο $\bar{\Omega} = \Omega \cup \{\infty\}$ του $T_1(s)$ και του $T_2(s)$

□

Ορισμός 1.37 [4,σελ.288] Αν ο $T_L(s)$ είναι από δεξιά πολλαπλάσιο από κάθε κοινό αριστερό διαιρέτη του $T_1(s)$ και του $T_2(s)$ στο $\bar{\Omega} = \Omega \cup \{\infty\}$ δηλαδή αν :

$$T_L(s) = \bar{T}_L(s)T_3(s)$$

για κάθε $T_3(s) \in S^{p \times p}$ τότε ο $T_L(s)$ ονομάζεται μέγιστος κοινός αριστερός διαιρέτης στο $\bar{\Omega} = \Omega \cup \{\infty\}$ του $T_1(s)$ και του $T_2(s)$

□

Πρόταση 1.38 [4,σελ.288] Έστω $T_1(s) \in S^{p \times l}$, $T_2(s) \in S^{p \times t}$ με $m := l + t \geq p = \text{rank}_{\mathbb{R}(s)} T(s)$ και $[T_1(s) \ T_2(s)] =: T(s) \in S^{p \times m}$ και έστω $T_{\bar{\Omega}}(s) \in S^{p \times p}$ είναι μια αριστερή δομή του $T(s)$ στο $\bar{\Omega}$. Τότε ο πίνακας $T_{\bar{\Omega}}(s)$ είναι μέγιστος κοινός αριστερός διαιρέτης στο $\bar{\Omega}$ του $T_1(s)$ και του $T_2(s)$

□

Παρατήρηση 1.39 [4,σελ.289] Αν ο $T_L(s) \in S^{p \times p}$ είναι μέγιστος κοινός αριστερός διαιρέτης στο $\bar{\Omega} = \Omega \cup \{\infty\}$ του $T_1(s)$ και του $T_2(s)$ τότε ο $T_L(s)$ είναι αριστερή δομή του $T(s) = [T_1(s), T_2(s)]$ και γι' αυτό έχει δομή μηδενικών ίδια με αυτή του $T(s)$. Άρα αν ο $T_L(s)$ είναι S -μονομετρικός δηλαδή δεν έχει μηδενικά στο $\bar{\Omega} = \Omega \cup \{\infty\}$ τότε ούτε ο $T(s)$ έχει μηδενικά στο Ω και τότε λέμε ότι οι $T_1(s)$ και $T_2(s)$ ονομάζονται από αριστερά πρώτοι μεταξύ τους (left coprime)

□

Οι από δεξιά πρώτοι μεταξύ τους ορίζονται με ανάλογο τρόπο

Οι επόμενες προτάσεις και θεωρήματα που ακολουθούν θα μας βοηθήσουν να λύσουμε το πρόβλημα της εύρεσης αντισταθμιστή για τη σταθεροποίηση του συστήματος στο επόμενο κεφάλαιο

Πρόταση 1.40 [4,σελ.289] Έστω $T_1(s) \in S^{p \times l}$ και $T_2(s) \in S^{p \times t}$ με $m := l+t \geq p = \text{rank}$

$[T_1(s), T_2(s)]$

Οι επόμενες προτάσεις είναι ισοδύναμες :

- i. Οι $T_1(s)$ και $T_2(s)$ είναι από αριστερά πρώτοι μεταξύ τους στο Ω (left coprime)
- ii. $T(s) = [T_1(s), T_2(s)]$ δεν έχει μηδενικά στο $\bar{\Omega} = \Omega \cup \{\infty\}$
- iii. Υπάρχει S -μονομετρικός πίνακας $T_R(s) \in S^{m \times n}$ τέτοιος ώστε :

$$T(s)T_R(s) = [I_p \ O_{p, m-p}] = S_{T(s)}^\Omega$$

- iv. Υπάρχει $X(s) \in S^{l \times p}$, $Y(s) \in S^{t \times p}$ τέτοιοι ώστε:

$$T_1(s)X(s) + T_2(s)Y(s) = I_p$$

- v. Υπάρχουν $T_3(s) \in S^{(m-p) \times l}$, $T_4(s) \in S^{(m-p) \times t}$ τέτοιοι ώστε:

$$\begin{pmatrix} T_1(s) & T_2(s) \\ T_3(s) & T_4(s) \end{pmatrix} \in S^{m \times m} \text{ να είναι } S\text{-μονομετρικός}$$

- vi. το $\text{rank}_C [T_1(s_0) \ T_2(s_0)] = p$ για κάθε $s_0 \in \Omega$ και $\lim_{s \rightarrow \infty} [T_1(s) \ T_2(s)] = E \in R^{p \times m}$
όπου $\text{rank}_R E = p$ □

Για να γίνει η απόδειξη των οποίων χρησιμοποιούνται προηγούμενες προτάσεις όπως η πρόταση για την ύπαρξη δυο ισοδύναμων πινάκων $T_1(s)$ και $T_2(s)$

Όπου ισχύει η σχέση $T_L(s)T_1(s)T_R(s) = T_2(s)$ για να είναι οι $T_1(s)$ και $T_2(s)$ ισοδύναμοι και η οποία πρόταση χρησιμοποιείται για την απόδειξη της (β) \longrightarrow (γ)

Πρόταση 1.41 [4,σελ.290] Έστω $T(s) \in R(s)^{p \times m}$ με $\text{rank}_{R(s)} T(s) = r$. Τότε ο $T(s)$ μπορεί να γραφεί όχι με μοναδικό τρόπο ως:

$$T(s) = A_1(s)^{-1} B_1(s) = B_2(s) A_2(s)^{-1}$$

όπου $A_1(s) \in S^{p \times p}$, $B_1(s) \in S^{p \times m}$ είναι από αριστερά πρώτοι μεταξύ τους στο $\bar{\Omega}$ και $A_2(s) \in S^{m \times m}$, $B_2(s) \in S^{p \times m}$ είναι από δεξιά πρώτοι μεταξύ τους στο $\bar{\Omega}$ \square

Απόδειξη

Έστω $U_L(s) \in S^{p \times p}$, $U_R(s) \in S^{m \times m}$ είναι S-μονομετρικοί πίνακες τέτοιοι ώστε

$$U_L(s)T(s)U_R(s) = S_{T(s)}^{\bar{\Omega}} = \Psi_L^{\bar{\Omega}}(s)^{-1} E^{\bar{\Omega}}(s) = E^{\bar{\Omega}}(s) \Psi_R^{\bar{\Omega}}(s)^{-1}$$

τότε θα έχουμε:

$$A_1(s) := \Psi_L^{\bar{\Omega}}(s) U_L(s)$$

$$B_1(s) := E^{\bar{\Omega}}(s) U_R(s)^{-1}$$

$$A_2(s) := U_R(s) \Psi_R^{\bar{\Omega}}(s)$$

$$B_2(s) := U_L(s)^{-1} E^{\bar{\Omega}}(s)$$

από τα οποία έχουμε:

$$(B_1(s) \ A_1(s)) = (E^{\bar{\Omega}}(s) \ \Psi_L^{\bar{\Omega}}(s)) \begin{pmatrix} U_R(s)^{-1} & 0 \\ 0 & U_L(s) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} B_2(s) \\ A_2(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_L(s)^{-1} & 0 \\ 0 & U_R(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E^{\bar{\Omega}}(s) \\ \Psi_R^{\bar{\Omega}}(s) \end{pmatrix}$$

και έτσι οι $A_1(s)$ και $B_1(s)$ είναι από αριστερά πρώτοι μεταξύ τους στο $\bar{\Omega}$ και οι $A_2(s)$ και $B_2(s)$ είναι από δεξιά πρώτοι μεταξύ τους στο $\bar{\Omega}$ (αφού οι $\varepsilon_i(s), \psi_i(s)$ είναι πρώτοι μεταξύ τους όπως προκύπτει από προηγούμενο θεώρημα)▲

Ορισμός 1.42 [4,σελ.290] Το ζευγάρι $A_1(s), B_1(s)$ ($A_2(s), B_2(s)$) ονομάζεται από αριστερά (δεξιά) πρώτοι μεταξύ τους στο $\bar{\Omega}$, S- κλασματική περιγραφή πινάκων του $T(s)$ (S-MFD του $T(s)$)

□

Ουσιαστικά κάθε έκφραση

$$T(s) = A_1(s)^{-1} B_1(s) = B_2(s) A_2(s)^{-1}$$

ονομάζεται S-MFD του $T(s)$, όπου $A_1(s) \in S^{p \times p}$, $B_1(s) \in S^{p \times m}$, $A_2(s) \in S^{m \times m}$, $B_2(s) \in S^{p \times m}$

Πρόταση 1.43[4,σελ.291] Έστω $T(s) \in R(s)^{p \times m}$ και έστω $T(s) = A_1(s)^{-1} B_1(s) = B_2(s) A_2(s)^{-1}$ είναι από αριστερά και από δεξιά αντίστοιχα πρώτοι στο $\bar{\Omega}$, S-MFDs του $T(s)$. Τότε $T(s) \in R_{pr}^{p \times m}$ αν και μόνο αν $A_1(s) \in S^{p \times p}$, $A_2(s) \in S^{m \times m}$ είναι δικανονικοί ρητοί πίνακες.

□

Απόδειξη

Έστω $U_L(s) T(s) U_R(s) = S_{T(s)}^{\bar{\Omega}}$ και έστω $\bar{A}_1(s) := \Psi_L^{\bar{\Omega}}(s) U_L(s) \in S^{p \times p}$, $\bar{A}_2(s) := U_R(s) \Psi_R^{\bar{\Omega}}(s) \in S^{m \times m}$, $\bar{B}_1(s) := E^{\bar{\Omega}}(s) U_R(s)^{-1}$, $\bar{B}_2(s) := U_L(s)^{-1} E^{\bar{\Omega}}(s)$ είναι η S-MFD μορφή τους. Τότε από προηγούμενο θεώρημα στο οποίο για κάθε πίνακα

$$T(s) = A_1(s)^{-1} B_1(s) = B_2(s) A_2(s)^{-1}$$

Θα υπάρξει πίνακας $U(s) \in S^{m \times m}$ και S-μονομετρικός τέτοιος ώστε:

$$B_2(s) = \bar{B}_2(s) U(s)$$

$$A_2(s) = \bar{A}_2(s)U(s)$$

Θα έχω ότι αν $A_1(s), B_1(s)$ και $A_2(s), B_2(s)$ είναι από αριστερά και δεξιά πρώτοι μεταξύ τους S-MFDs στο $\bar{\Omega}$ του $T(s)$ τότε θα ισχύει:

$$A_1(s) = V(s)\bar{A}_1(s) = V(s)\Psi_L^{\bar{\Omega}}(s)U_L(s)$$

$$B_1(s) = V(s)\bar{B}_1(s) = V(s)E^{\bar{\Omega}}(s)U_R(s)^{-1}$$

$$A_2(s) = \bar{A}_2(s)U(s) = U_R(s)\Psi_R^{\bar{\Omega}}(s)U(s)$$

$$B_2(s) = \bar{B}_2(s)U(s) = U_L(s)^{-1}E^{\bar{\Omega}}(s)U(s)$$

για τους S-μονομετρικούς πίνακες $V(s) \in S^{p \times p}$ και $U(s) \in S^{m \times m}$. Έτσι από προηγούμενο πόρισμα έχουμε ότι $T(s) \in R_{pr}(s)^{p \times m}$ αν και μόνο αν οι πίνακες $\Psi_L^{\bar{\Omega}}(s), \Psi_R^{\bar{\Omega}}(s)$ είναι δικανονικοί, και από τις προηγούμενες σχέσεις αφού κάθε S-μονομετρικός πίνακας είναι δικανονικός τότε $T(s) \in R_{pr}(s)^{p \times m}$ αν και μόνο αν οι $A_1(s), A_2(s)$ είναι δικανονικοί ρητοί πίνακες. ▲

Πρόταση 1.44[4,σελ.291] Έστω $T(s) \in R(s)^{p \times m}$ και έστω $T(s) = A_1(s)^{-1}B_1(s) = B_2(s)A_2(s)^{-1}$ είναι από αριστερά και από δεξιά αντίστοιχα πρώτοι στο $\bar{\Omega}$ S-MFDs του $T(s)$. Τότε $T(s) \in S^{p \times m}$ αν και μόνο αν οι $A_1(s) \in S^{p \times p}$, $A_2(s) \in S^{m \times m}$ είναι S-μονομετρικοί

□

Απόδειξη

Έχουμε ότι $T(s) \in S^{p \times m}$ αν και μόνο αν $\Psi_L^{\bar{\Omega}}(s) = I_p$, $\Psi_R^{\bar{\Omega}}(s) = I_m$ και επομένως από τις σχέσεις $A_1(s) = V(s)\bar{A}_1(s) = V(s)\Psi_L^{\bar{\Omega}}(s)U_L(s)$ και $A_2(s) = \bar{A}_2(s)U(s) = U_R(s)\Psi_R^{\bar{\Omega}}(s)U(s)$

έχουμε ότι οι $A_1(s) = V(s)U_L(s)$ και $A_2(s) = U_R(s)U(s)$ είναι S-μονομετρικοί πίνακες. ▲

Ορισμός 1.45 [4,σελ.5] Ένας πίνακας $T(s) \in R(s)^{p \times m}$ ονομάζεται κανονικός κατά στήλες (*column proper*) αν:

$$\text{rank}_R[T(s)]_c^h = \min\{p, m\}$$

□

Οπότε σύμφωνα με αυτό τον ορισμό ακολουθεί η παρακάτω πρόταση :

Πρόταση 1.46 [4,σελ.292] Έστω $T(s) \in R_{pr}(s)^{p \times m}$ και έστω $T(s) = N(s)D(s)^{-1}$, $N(s) \in R[s]^{p \times m}$, $D(s) \in R[s]^{m \times m}$ είναι από δεξιά πρώτοι μεταξύ τους MFD του $T(s)$ με $D(s)$ κανονικός κατά στήλες (*column proper*) και έστω $\deg D_j(s) = n_j$ είναι ο βαθμός των στηλών του $D(s)$

Έστω:

$$d_i(s) = s^{n_i} + a_{i,n_i-1}s^{n_i-1} + \dots + a_{i,1}s + a_{i,0} \in R[s]$$

Είναι τυχαία πολυώνυμα που δεν έχουν μηδενικά στο Ω .

Τότε:

$$D_d(s) = \text{diag}[d_1(s), \dots, d_m(s)] \in R[s]^{m \times m}$$

$$A_2(s) = D(s)D_d(s)^{-1} \in S^{m \times m}$$

$$B_2(s) = N(s)D_d(s)^{-1} \in S^{p \times m}$$

Τότε $B_2(s)A_2(s)^{-1}$ είναι από δεξιά πρώτοι μεταξύ τους S-MFD του $T(s)$

□

Έτσι έχοντας μελετήσει όλες τις απαραίτητες προτάσεις για την εύρεση του αντισταθμιστή και τη σταθεροποίηση του συστήματος θα εξετάσουμε τη πολυμεταβλητή περίπτωση στο επόμενο κεφάλαιο αφού πρώτα δώσουμε κάποια χαρακτηριστικά του ζητούμενου σταθεροποιητή.

4. ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΚΑΙ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΠΟΙΗΣΗ ΤΟΥ ΣΤΑΘΕΡΟΠΟΙΗΤΙΚΟΥ ΑΝΤΙΣΤΑΘΜΙΣΤΗ

Όσα θα αναπτύξουμε στο παρακάτω κεφάλαιο είναι βασισμένα στο βιβλίο του Α. Βαρδουλάκη « Linear Multivariable Control – Algebraic Analysis and Synthesis Methods ».

4.1 Παρατηρησιμότητα και ελεγχιμότητα ενός PMD - Σχέσεις μεταξύ εσωτερικής ευστάθειας και εσωτερικής κανονικότητας ενός PMD – Ευστάθεια και κανονικότητα της συνάρτησης μεταφοράς του

Το κύριο θέμα όλης της ενότητας που παρουσιάζουμε είναι η σταθεροποίηση ενός γραμμικού πολυμεταβλητού συστήματος με τη βοήθεια κάποιου σταθεροποιητή. Ας υποθέσουμε ότι μας δίνεται ένα PMD που περιγράφει τη συμπεριφορά ενός γραμμικού, ανεξάρτητου και συνεχούς χρόνου πολυμεταβλητού σύστημα. Υποθέτουμε ακόμα ότι $\Sigma(P)$ είναι σύστημα που έχει συνάρτηση μεταφοράς $P(s)$ είναι ασταθές, θα περιγράψουμε τη σύνθεση και τα χαρακτηριστικά ενός άλλου συστήματος $\Sigma(C)$ τέτοιο ώστε όταν τα συστήματα $\Sigma(P)$ και $\Sigma(C)$ είναι συνδεδεμένα, τότε το ολικό κλειστό σύστημα $\Sigma(P,C)$ που δημιουργείται είναι ευσταθές. Σ' αυτήν την περίπτωση λέμε ότι το $\Sigma(C)$ σταθεροποιεί το $\Sigma(P)$.

Έστω ένα σύστημα γραμμικό, χρονικά αμετάβλητο συνεχούς χρόνου, του οποίου η συμπεριφορά περιγράφεται από ένα PMD

$$\begin{aligned} A(p)\beta(t) &= B(p)u(t) & (1) \\ y(t) &= C(p)\beta(t) + D(p)u(t) \end{aligned}$$

όπου $A(p) \in R[p]^{r \times r}$, $B(p) \in R[p]^{r \times m}$, $C(p) \in R[p]^{p \times r}$, $D(p) \in R[p]^{p \times m}$

Η τετράδα των πινάκων $A(p)$, $B(p)$, $C(p)$, $D(p)$, δηλαδή ο πίνακας πινάκων $[A(p), B(p), C(p), D(p)]$ ονομάζεται περιγραφή πολυωνυμικών πινάκων (PMD) και περιγράφει τη δυναμική συμπεριφορά του συστήματος.

Ακόμα ο ρητός πίνακας:

$$H(p) = C(p)A(p)^{-1}B(p) + D(p)$$

ονομάζεται συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος Σ .

Για την περιγραφή του συστήματος χρησιμοποιώ το PMD του συστήματος. Άρα:

Ορισμός 1.47 [4,σελ.298] Ένα PMD $[A,B,C,D]$ είναι εσωτερικά ευσταθές (*internally stable*) αν και μόνο αν δεν έχει πεπερασμένα μηδενικά στο C^+ ή ισοδύναμα αν και μόνο αν $\{\text{πεπερασμένα μηδενικά}\} \subseteq C^- := \{s \in C, \text{Re}(s) < 0\}$

□

Ακόμα:

Ορισμός 1.48 [4,σελ.298] Ένα PMD λέγεται ελέγξιμο αν και μόνο αν $\text{rank}[A(s_o) B(s_o)] = r$ για κάθε $s_o \in C^+$

□

Ορισμός 1.49[4,σελ.299] Ένα PMD $[A,B,C,D]$ λέγεται ανιχνεύσιμο αν και μόνο αν $\text{rank} \begin{pmatrix} A(s_o) \\ C(s_o) \end{pmatrix} = r$ για κάθε $s_o \in C^+$

□

Αφού το PMD περιγράφει πλήρως τη συμπεριφορά του συστήματος Σ άρα :

Ορισμός 1.50 [4,σελ.300] Ένα σύστημα Σ λέγεται εσωτερικά ευσταθές (*internally stable*) αν το PMD $[A(p),B(p),C(p),D(p)]$ του Σ είναι εσωτερικά ευσταθές

□

Ακόμα:

Ορισμός 1.51 [4,σελ.300] Ένα PMD $[A(p),B(p),C(p),D(p)]$ ονομάζεται εσωτερικά Ω -ευσταθές αν και μόνο αν ο $A(s)$ δεν έχει μηδενικά στο Ω

□

Ορισμός 1.52 [4,σελ.300] Ένα PMD $[A(p),B(p),C(p),D(p)]$ ονομάζεται Ω -ελέγξιμο (Ω -stabilizable) αν και μόνο αν $\text{rank}[A(s_o) \ B(s_o)] = r$ για κάθε $s_o \in \Omega$

□

Ορισμός 1.53 [4,σελ.300] Ένα PMD $[A(p),B(p),C(p),D(p)]$ ονομάζεται Ω -ανιχνεύσιμο (Ω -detectable) αν και μόνο αν $\text{rank} \begin{pmatrix} A(s_o) \\ C(s_o) \end{pmatrix} = r$ για κάθε $s_o \in \Omega$

□

Στους παρακάτω ορισμούς γίνεται αναφορά στα είδη ευστάθειας που υπάρχουν και στα πρακτικά προβλήματα που μπορεί να υπάρξουν αν ένα σύστημα δεν είναι συνολικά εσωτερικά ευσταθές. Μιλάμε για τη γενική περίπτωση όπου η ανεπιθύμητη περιοχή Ω μπορεί να είναι οποιαδήποτε περιοχή και όχι μόνο το C^+

Ορισμός 1.54 [4,σελ.303] Ένα PMD $[A(p),B(p),C(p),D(p)]$ ονομάζεται εκθετικά Ω -ευσταθές αν και μόνο αν είναι:

- i. εσωτερικά κανονικό
- ii. εσωτερικά Ω -ευσταθές

Ισοδύναμα αν και μόνο αν

- i. Οι ρητοί πίνακες $A(s)^{-1}$, $C(s)A(s)^{-1}$, $A(s)^{-1}B(s)$, $C(s)A(s)^{-1}B(s)+D(s)$ είναι όλοι proper δηλαδή δεν έχουν πόλους στο $s=\infty$
- ii. Ο πολυωνυμικός πίνακας $A(s)$ δεν έχει πεπερασμένα μηδενικά στο Ω (δηλαδή ισοδύναμα ο $A(s)^{-1}$ δεν έχει πεπερασμένους πόλους στο Ω).

□

Και αυτό γίνεται γιατί όταν αντιστρέφεται μια ρητή συνάρτηση ή κατ' επέκταση ένας ρητός πίνακας οι πόλοι του γίνονται μηδενικά και τα μηδενικά του γίνονται πόλοι.

Γενικά:

Ορισμός 1.55 [4,σελ.303] Ένας πίνακας $H(s) \in R^{p \times m}(s)$ ονομάζεται εκθετικά ευσταθής αν και μόνο αν

- i. $H(s) \in R_{pr}^{p \times m}(s)$ (ισοδύναμα δεν έχει πόλους στο $s = \infty$)
- ii. $H(s)$ δεν έχει πεπερασμένους πόλους στο Ω

□

Στο παρακάτω λήμμα μας δίνονται οι απαραίτητες προϋποθέσεις κάτω από τις οποίες η ευστάθεια της συνάρτησης μεταφοράς $H(s)$ μας εγγυάται και τη συνολική ευστάθεια του συστήματος

Λήμμα 1.56 [4,σελ.303] Υποθέτουμε ότι ένα PMD $[A(p), B(p), C(p), D(p)]$ ενός συστήματος Σ είναι:

- i. Εσωτερικά κανονικό
- ii. Ω -ελέγξιμο και Ω -ανιχνεύσιμο

Τότε το PMD $[A(p), B(p), C(p), D(p)]$ είναι εκθετικά ευσταθές αν και μόνο αν η συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ είναι εκθετικά ευσταθής. □

Γενικά η εκθετική ευστάθεια είναι πιο ισχυρή ευστάθεια. Αν ένα σύστημα είναι συνολικά εσωτερικά ευσταθές τότε είναι και εκθετικά ευσταθές. Αντίστοιχα αν ένα σύστημα είναι εκθετικά ευσταθές και οι πίνακες είναι κανονικοί, δηλαδή δεν έχουν πόλους στο $s = \infty$, τότε σίγουρα είναι και εσωτερικά ευσταθές. Ακόμα αν ένα σύστημα είναι εσωτερικά ευσταθές τότε σίγουρα θα είναι και εξωτερικά ευσταθές, το οποίο φαίνεται από τη συνάρτηση μεταφοράς. Ενώ αν ένα σύστημα φαίνεται εξωτερικά ευσταθές όσον αφορά τη συνάρτηση μεταφοράς του τότε δεν είναι σίγουρα και εσωτερικά ευσταθές παρά μόνο αν γνωρίζω ότι το σύστημα είναι και ελέγξιμο και ανιχνεύσιμο παράλληλα. Η παρατήρηση αυτή έχει πρακτικό υπόβαθρο αφού σε συστήματα που μπορεί να δημιουργηθούν και η συνάρτηση μεταφοράς τους εγγυάται

στην εξωτερική τους ευστάθεια, παρόλα αυτά τα συστήματα αυτά δεν αποδίδουν και δεν είναι τελικά ευσταθή αφού οι απλοποιήσεις που μπορεί να γίνουν σε πόλους και μηδενικά δίνουν μια φαινομενική ευστάθεια η οποία δεν ισχύει αφού το σύστημα δεν είναι τελικά ευσταθές .

Σε αυτό το κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με ασταθή συστήματα για τα οποία είναι απαραίτητος ένας αντισταθμιστής για να τα σταθεροποιήσει. Έτσι θα περιγράψουμε τις ιδιότητες του ολικού κλειστού συστήματος καθώς και στη συνέχεια τις ιδιότητες του ζητούμενου αντισταθμιστή.

Στη συνέχεια θα δώσουμε τις απαραίτητες προϋποθέσεις κάτω από τις οποίες PMD $[A(p),B(p),C(p),D(p)]$ του κλειστού συστήματος $\Sigma(P,C)$ είναι εσωτερικά κανονικό.

Θεώρημα 1.57 [4,σελ.307] Το PMD $[A(p),B(p),C(p),D(p)]$ του κλειστού συστήματος $\Sigma(P,C)$ είναι εσωτερικά κανονικό αν και μόνο αν οι δυο προϋποθέσεις αληθεύουν :

A. Τα PMDs $[A_p(p),B_p(p),C_p(p),D_p(p)]$ και $[A_c(p),B_c(p),C_c(p),D_c(p)]$ του $\Sigma(P)$ και του $\Sigma(C)$ είναι και τα δυο εσωτερικά κανονικά και

B. $|I_c + P(\infty)C(\infty)| = |I_m + P(\infty)C(\infty)| \neq 0$ για να είναι καλά ορισμένοι οι πίνακες \square

Απόδειξη

(A) & (B) $\Rightarrow [A(p),B(p),C(p),D(p)]$ εσωτερικά κανονικά)

Έστω τα PMDs του $\Sigma(P)$ και $\Sigma(C)$ είναι και τα δυο εσωτερικά ευσταθή δηλαδή έστω

$A_{sp} = A_{pl}(s)M_p(s)A_{pR}(s)$ με $A_{pL}(s) \in R^{n \times n}[s]$ να είναι κανονικός κατά στήλες,

$A_{pR}(s) \in R^{n \times n}[s]$ είναι κανονικός κατά γραμμές και ο $M_p(s) \in R_{pr}^{n \times n}(s)$ είναι

δικανονικός και τέτοιος ώστε:

$$A_{pL}(s)^{-1}B_p(s) \in R_{pr}^{n \times m}(s)$$

$$C_p(s)A_{pR}(s)^{-1} \in R_{pr}^{p \times n}(s)$$

$$A_c(s) = A_{cL}(s)M_c(s)A_{cR}(s)$$

με $A_{cL}(s) \in R^{\eta_1 \times \eta_2}(s)$ να είναι κανονικός κατά στήλες, $A_{cR}(s) \in R^{\eta_1 \times \eta_2}(s)$ είναι κανονικός κατά γραμμές, $M_c(s) \in R_{pr}^{\eta_1 \times \eta_2}(s)$ είναι δικανονικός και τέτοιος ώστε:

$$A_{cL}(s)^{-1} B_c(s) \in R_{pr}^{\eta_1 \times p}(s)$$

$$C_c(s) A_{cR}(s)^{-1} \in R_{pr}^{m \times \eta_2}(s)$$

Έτσι θα έχουμε:

$$A(s) = A_d(s) + B_d(s)D_s(s) = A_L(s)M_d(s)A_R(s) + B_d(s)D_dC_d(s)$$

όπου:

$$A_L(s) := \begin{pmatrix} A_{pL}(s) & 0 \\ 0 & A_{cL}(s) \end{pmatrix} \quad M_d(s) := \begin{pmatrix} M_p(s) & 0 \\ 0 & M_c(s) \end{pmatrix}$$

$$A_R(s) := \begin{pmatrix} A_{pR}(s) & 0 \\ 0 & A_{cR}(s) \end{pmatrix}$$

και $A_L(s)$ είναι κανονικός κατά στήλες, $M_d(s)$ είναι δικανονικός, και $A_R(s)$ είναι κανονικός κατά γραμμές.

Έτσι:

$$A(s) = A_L(s)[M_d(s) + A_L(s)^{-1}B_d(s)D_dC_d(s)A_R(s)^{-1}]A_R(s)$$

και έτσι σύμφωνα με προηγούμενη πρόταση για τον $A(s)$ που δεν έχει μηδενικά στο $s = \infty$, θα πρέπει να έχουμε ότι:

$$M(s) = M_d(s) + A_L(s)^{-1}B_d(s)D_dC_d(s)A_R(s)^{-1} \in R_{pr}^{(\eta_1+\eta_2) \times (\eta_1+\eta_2)}(s)$$

Είναι δικανονικός ή ισοδύναμα ότι:

$$|M(\infty)| \neq 0$$

Τώρα:

$$\begin{aligned}
 |M(s)| &= |M_d(s) + A_L(s)^{-1} B_d(s) D_d C_d(s) A_R(s)^{-1}| \\
 &= |[I_{r_1+r_2} + A_L(s)^{-1} B_d(s) D_d C_d(s) A_R(s)^{-1} M_d(s)^{-1}] M_d(s)| \\
 &= |I_{p+m} + C_d(s) A_R(s)^{-1} M_d(s)^{-1} A_L(s)^{-1} B_d(s) D_d| |M_d(s)| \\
 &= |I_{p+m} + C_d(s) A_d(s)^{-1} B_d(s) D_d| |M_d(s)| \\
 &= |D_d^{-1} + C_d(s) A_d(s)^{-1} B_d(s)| |D_d| |M_d(s)|
 \end{aligned}$$

έτσι ώστε:

$$|M(\infty)| = |D_d^{-1} + C_d(s) A_d(s)^{-1} B_d(s)|_{s=\infty} |D_d| |M_d(\infty)|$$

και αφού $|M_d(\infty)| = |M_p(\infty)| |M_c(\infty)| \neq 0$, ο $M(s)$ θα είναι δίκανονικός αν και μόνο αν

$$|D_d^{-1} + C_d(s) A_d(s)^{-1} B_d(s)|_{s=\infty} \neq 0$$

Τώρα από:

$$D_d^{-1} = \begin{pmatrix} \Delta_2 D_c & -\Delta_2 \\ \Delta_1 & \Delta_1 D_p \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} D_p & I_p \\ -I_m & D_c \end{pmatrix}$$

θα έχουμε:

$$\left| \begin{pmatrix} D_p & I_p \\ -I_m & D_c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_p A_p(s)^{-1} B_p(s)|_{s=\infty} & 0 \\ 0 & C_c(s) A_c(s)^{-1} B_c(s)|_{s=\infty} \end{pmatrix} \right| =$$

$$= \left| \begin{pmatrix} P(\infty) & I_p \\ -I_m & C(\infty) \end{pmatrix} \right| = |I_p + P(\infty)C(\infty)| \neq 0$$

το οποίο ισχύει από υπόθεση. Επομένως ο $M(s)$ είναι δικανονικός και από προηγούμενη πρόταση ο $A(s)$ δεν έχει μηδενικά στο $s = \infty$ δηλαδή ο $A(s)^{-1}$ είναι proper. Τώρα αφού ο $A_R(s)^{-1} \in R_{pr}^{(\eta_1+r_2) \times (\eta_1+r_2)}(s)$ (αφού ο $A_R(s)$ είναι κανονικός κατά γραμμές) και ο $M(s)$ είναι δικανονικός θα έχουμε ότι:

$$A(s)^{-1}B(s) = (A_L(s)M(s)A_R(s))^{-1} \begin{pmatrix} B_p(s) & 0 \\ 0 & B_c(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta_2 D_c & \Delta_2 \\ \Delta_1 & -\Delta_1 D_p \end{pmatrix} \in R_{pr}^{(\eta_1+r_2) \times (p+m)}(s)$$

αν και μόνο αν:

$$A(s)^{-1} \begin{pmatrix} B_p(s) & 0 \\ 0 & B_c(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{pL}(s)^{-1}B_p(s) & 0 \\ 0 & A_{cL}(s)^{-1}B_c(s) \end{pmatrix} \in R_{pr}^{(\eta_1+r_2) \times (p+m)}(s)$$

το οποίο ισχύει.

Όμοια μπορεί δειχθεί ότι οι σχέσεις $A_c(s) = A_{cL}(s)M_c(s)A_{cR}(s)$

$C_p(s)A_{pR}(s)^{-1} \in R_{pr}^{p \times \eta_1}(s)$ σημαίνουν ότι:

$$C(s)A(s)^{-1} \in R_{pr}^{(p+m) \times (\eta_1+r_2)}(s) \Leftrightarrow C(s)A_R(s)^{-1} \in R_{pr}^{(p+m) \times (\eta_1+r_2)}(s)$$

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι το $\text{PMD}[A(\rho), B(\rho), C(\rho), D]$ του $\Sigma(p, c)$ είναι εσωτερικά κανονικό.

Τώρα θα δείξουμε ότι :

$(\text{An}[A(p), B(p), C(p), D])$ είναι εσωτερικά κανονικό \Rightarrow (i) και (ii)

Έστω ότι το $\text{PMD}[A(p), B(p), C(p), D]$ του $\Sigma(P, C)$ είναι εσωτερικά κανονικό, δηλαδή έστω ότι:

$$A(s)^{-1} \in R_{pr}^{(\eta_1+r_2) \times (\eta_1+r_2)}(s)$$

$$A(s)^{-1}B(s) \in R_{pr}^{(r_1+r_2) \times (p+m)}(s)$$

$$C(s)A(s)^{-1} \in R_{pr}^{(p+m) \times (r_1+r_2)}(s)$$

$$C(s)A(s)^{-1}B(s) + D =: H_{yu}(P, C) \in R_{pr}^{(p+m) \times (p+m)}(s)$$

Ακόμα θα έχουμε :

$$A(s)^{-1} = (I_{r_1+r_2} + A_d(s)^{-1}B_d(s)D_dC_d(s))^{-1}A_d(s)^{-1}$$

Έτσι:

$$A_d(s)^{-1} \in R_{pr}^{(r_1+r_2) \times (r_1+r_2)}(s)$$

και

$$(I_{r_1+r_2} + A_d(s)^{-1}B_d(s)D_dC_d(s))^{-1} \in R_{pr}^{(r_1+r_2) \times (r_1+r_2)}(s)$$

Έτσι συμπεραίνουμε ότι:

$$A_p(s)^{-1} \in R_{pr}^{r_1 \times r_1}(s) \text{ και } A_c(s)^{-1} \in R_{pr}^{r_2 \times r_2}(s)$$

ενώ η σχέση $(I_{r_1+r_2} + A_d(s)^{-1}B_d(s)D_dC_d(s))^{-1} \in R_{pr}^{(r_1+r_2) \times (r_1+r_2)}(s)$ σημαίνει ότι ο πίνακας

$(I_{r_1+r_2} + A_d(s)^{-1}B_d(s)D_dC_d(s))^{-1}$ δεν έχει πόλους στο $s = \infty$ ή ισοδύναμα ότι ο πίνακας

$I_{r_1+r_2} + A_d(s)^{-1}B_d(s)D_dC_d(s)$ δεν έχει μηδενικά στο $s = \infty$ ή ισοδύναμα ότι:

$$\left| \left(I_{r_1+r_2} + A_d(s)^{-1}B_d(s)D_dC_d(s) \right) \Big|_{s=\infty} \right| \neq 0$$

Αλλά:

$$\begin{aligned} \left| I_{r_1+r_2} + A_d(s)^{-1} B_d(s) D_d C_d(s) \right| &= \left| I_{p+m} + C_d(s) A_d(s)^{-1} B_d(s) D_d \right| = \\ &= \left| D_d^{-1} + C_d(s) A_d(s)^{-1} B_d(s) \right| \left| D_d \right| \end{aligned}$$

Και έτσι μια ισοδύναμη σχέση της

$$\left| \left(I_{r_1+r_2} + A_d(s)^{-1} B_d(s) D_d C_d(s) \right) \right|_{s=\infty} \neq 0$$

είναι:

$$\left| \left(D_d^{-1} + C_d(s) A_d(s)^{-1} B_d(s) \right) \right|_{s=\infty} \neq 0$$

το οποίο σημαίνει ότι: $\left| I_p + P(\infty)C(\infty) \right| \neq 0$ και η δεύτερη συνθήκη του θεωρήματος ισχύει.

Έτσι:

$$A(s)^{-1} B(s) = \left(I_{r_1+r_2} A_d(s)^{-1} B_d(s) D_d C_d(s) \right)^{-1} A_d(s)^{-1} B_d(s) D_d \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_m \end{pmatrix} \in R_{pr}^{(r_1+r_2) \times (p+m)}(s)$$

Το οποίο σημαίνει ότι:

$$A_d(s)^{-1} B_d(s) \in R_{pr}^{(r_1+r_2) \times (p+m)}(s)$$

Ακόμα: $A_p(s)^{-1} B_p(s) \in R_{pr}^{r_1 \times m}(s)$ και $A_c(s)^{-1} B_c(s) \in R_{pr}^{r_2 \times p}(s)$

Όμοια μπορεί να αποδειχθεί ότι η υπόθεση $C(s)A(s)^{-1} \in R_{pr}^{(p+m) \times (r_1+r_2)}(s)$ σημαίνει ότι:

$$C_p(s)A_p(s)^{-1} \in R_{pr}^{p \times r_1}(s) \text{ και } C_c(s)A_c(s)^{-1} \in R_{pr}^{m \times r_2}(s)$$

Τέλος από το γεγονός ότι:

$$H_{yu}(P, C) = \begin{pmatrix} C(s) & 0 \\ 0 & P(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_p & P(s) \\ -C(s) & I_m \end{pmatrix}^{-1}$$

και τη συνθήκη

$$C(s)A(s)^{-1}B(s) + D =: H_{yu}(P, C) \in R_{pr}^{(p+m) \times (p+m)}(s)$$

προκύπτει ότι:

$$P(s) \in R_{pr}^{p \times m}(s) \text{ και } C(s) \in R_{pr}^{m \times p}(s)$$

Έτσι συμπεραίνουμε ότι τα PMDs των $\Sigma(P)$ και $\Sigma(C)$ είναι εσωτερικά κανονικά, δηλαδή η συνθήκη (i) του θεωρήματος ισχύει. ▲

Για το κλειστό σύστημα $\Sigma(P, C)$ θα έχω:

Πόρισμα 1.58 [4,σελ.312] *Το PMD $[A(p), B(p), C(p), D(p)]$ του κλειστού συστήματος $\Sigma(P, C)$ είναι ελέγξιμο (ανιχνεύσιμο) αν και μόνο αν τα PMDs $[A_p(p), B_p(p), C_p(p), D_p(p)]$ και $[A_c(p), B_c(p), C_c(p), D_c(p)]$ του $\Sigma(P)$ και του $\Sigma(C)$ είναι ελέγξιμα (ανιχνεύσιμα) □*

Θεώρημα 1.59 [4,σελ.313] *Έστω $\Sigma(p)$ και $\Sigma(c)$ τα οποία περιγράφονται από τα PMDs $[A_p(p), B_p(p), C_p(p), D_p(p)]$ και $[A_c(p), B_c(p), C_c(p), D_c(p)]$ αντίστοιχα. Έστω ακόμα τα PMDs αυτών των συστημάτων να είναι:*

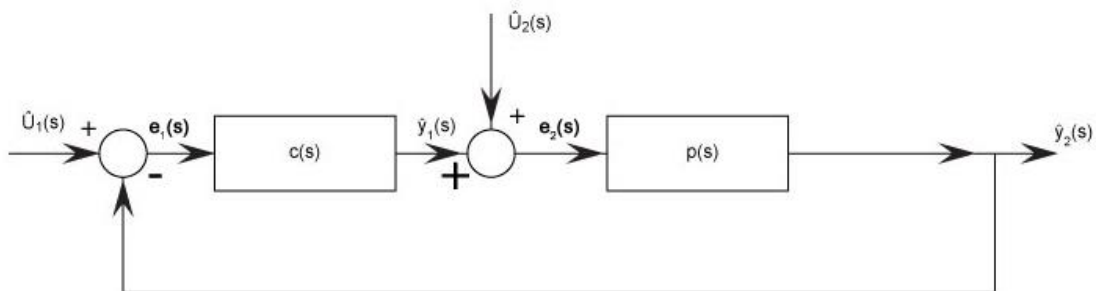
- i. εσωτερικά κανονικά
- ii. Ω -ελέγξιμα και Ω -ανιχνεύσιμα
- iii. $|I_p + P(\infty)C(\infty)| = |I_m + C(\infty)P(\infty)| \neq 0$

Τότε το PMD του κλειστού συστήματος $\Sigma(P, C)$ είναι εκθετικά Ω -ευσταθές αν και μόνο αν η συνάρτηση μεταφοράς $H_{yu}(P, C)$ είναι εκθετικά Ω -ευσταθής. □

Αφού περιγράψαμε τις συνθήκες ευστάθειας του ολικού κλειστού συστήματος με τον αντισταθμιστή θα περάσουμε να δώσουμε κάποιες από τις ιδιότητες αυτού πριν μπούμε στη διαδικασία να τον υπολογίζουμε όταν μας δίνεται οποιοδήποτε ασταθές γραμμικό πολυμεταβλητό σύστημα.

4.2 Χαρακτηριστικά του σταθεροποιητή

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε το κλειστό σύστημα του παρακάτω σχήματος στο οποίο θεωρούμε ότι τα συστήματα $\Sigma(P)$ και $\Sigma(C)$ πληρούν τις προϋποθέσεις του θεωρήματος 1.59 άρα θα ισχύει ότι το PMD θα είναι εκθετικά ευσταθές αν και μόνο αν η συνάρτηση μεταφοράς $H_{yu}(P, C)$ είναι εκθετικά ευσταθής. Δίνουμε παρακάτω τις προϋποθέσεις ώστε η συνάρτηση μεταφοράς να είναι εκθετικά ευσταθής ώστε να ορίσουμε την εκθετική ευστάθεια του PMD στη γενική περίπτωση :



Ας θεωρήσουμε τώρα τις εξισώσεις από το παραπάνω διάγραμμα, οι σχέσεις εισόδου-εξόδου από το παραπάνω διάγραμμα $e_1(s) \rightarrow y_1(s)$ και $e_2(s) \rightarrow y_2(s)$ του $P(s)$ και του $C(s)$ μπορούν να γραφτούν σε μορφή πίνακα ως:

$$\begin{pmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C(s) & 0 \\ 0 & P(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1(s) \\ e_2(s) \end{pmatrix}$$

Και ακόμα από το διάγραμμα προκύπτει:

$$\begin{pmatrix} e_1(s) \\ e_2(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -I_p \\ I_m & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \end{pmatrix}$$

Έτσι συνδυάζοντας τις δύο σχέσεις θα έχω:

$$\begin{pmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C(s) & 0 \\ 0 & P(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -I_p \\ I_m & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C(s) & 0 \\ 0 & P(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C(s) & 0 \\ 0 & P(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -I_p \\ I_m & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C(s) & 0 \\ 0 & P(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -C(s) \\ P(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & I_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -C(s) \\ P(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C(s) & 0 \\ 0 & P(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} I_m & C(s) \\ -P(s) & I_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C(s) & 0 \\ 0 & P(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \end{pmatrix}$$

Άρα για να είναι καλά ορισμένη η συνάρτηση μεταφοράς του ολικού συστήματος θα

πρέπει να υπάρχει ο αντίστροφος του πίνακα $\begin{pmatrix} I_m & C(s) \\ -P(s) & I_p \end{pmatrix}$ ή ισοδύναμα θα πρέπει:

$$\left| \begin{pmatrix} I_m & C(s) \\ -P(s) & I_p \end{pmatrix} \right| = |I_p + P(s)C(s)| = |I_m + C(s)P(s)| =: f(s) \neq 0$$

Δηλαδή να είναι μη μηδενική ρητή συνάρτηση

Έτσι σύμφωνα με τις παραπάνω προϋποθέσεις η ολική συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος θα είναι:

$$H_{yu}(P, C) = \begin{pmatrix} I_m & C(s) \\ -P(s) & I_p \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} C(s) & 0 \\ 0 & P(s) \end{pmatrix} \quad (1)$$

Για την οποία θα ισχύει:

$$H_{yu}(P, C) \in R_{pr}^{(p+m) \times (p+m)}(s) \text{ αν και μόνο αν}$$

$$P(s) \in R_{pr}^{p \times m}(s), C(s) \in R_{pr}^{m \times p}(s)$$

και

$$\begin{pmatrix} I_m & C(s) \\ -P(s) & I_p \end{pmatrix}^{-1} \in R_{pr}^{(p+m) \times (p+m)}(s)$$

Η τελευταία προϋπόθεση θα ισχύει αν ισχύει οποιαδήποτε από τις παρακάτω ισοδύναμες συνθήκες:

i. $\begin{pmatrix} I_m & C(s) \\ -P(s) & I_p \end{pmatrix} \in R_{pr}^{(p+m) \times (p+m)}(s)$ δεν έχει μηδενικά στο $s = \infty$, και αυτό γιατί

όταν ένα στοιχείο αντιστρέφεται στο δακτύλιο S οι πόλοι του γίνονται μηδενικά και τα μηδενικά γίνονται πόλοι

ii. $\begin{pmatrix} I_m & C(s) \\ -P(s) & I_p \end{pmatrix} \in R_{pr}^{(p+m) \times (p+m)}(s)$ είναι δικανονικός ρητός πίνακας (αφού για

να ανήκει στις κανονικές συναρτήσεις, θα πρέπει και όταν αντιστρέφεται να συνεχίζει να ανήκει στο ίδιο σύνολο άρα κάθε στοιχείο του πίνακα θα πρέπει να είναι δικανονική συνάρτηση

iii. $\left| \begin{pmatrix} I_m & C(\infty) \\ -P(\infty) & I_p \end{pmatrix} \right| = |I_m + P(\infty)C(\infty)| = |I_p + C(\infty)P(\infty)| \neq 0$, για να ορίζεται ο

αντίστροφος

Ορισμός 1.60 [4,σελ.315] *Αν ικανοποιούνται οι τρεις παραπάνω ισοδύναμες προϋποθέσεις και η συνάρτηση μεταφοράς $H_{yu}(P,C) \in R_{pr}^{(p+m) \times (p+m)}(s)$ είναι εκθετικά ευσταθής τότε σύμφωνα με τα προηγούμενα θεωρήματα για την ευστάθεια του PMD, το PMD θα είναι εκθετικά ευσταθές και λέμε ότι ο $C(s) \in R_{pr}^{m \times p}(s)$ είναι ένας σταθεροποιητής για το $P(s) \in R_{pr}^{p \times m}(s)$ στο Ω ή λέμε ότι ο $C(s)$ σταθεροποιεί το $P(s)$*

□

Αν θεωρήσουμε τώρα την ειδική περίπτωση του δακτυλίου S , θα μελετήσουμε τα χαρακτηριστικά του $C(s)$ σταθεροποιητή

Έστω:

$$P(s) = A_1(s)^{-1}B_1(s) = B_2(s)A_2(s)^{-1}$$

είναι από αριστερά και από δεξιά αντίστοιχα πρώτοι μεταξύ τους S-MFDs του $P(s)$ στο Ω , όπου $A_1(s) \in S^{p \times p}$, $B_1(s) \in S^{p \times m}$, $B_2(s) \in S^{p \times m}$, $A_2(s) \in S^{m \times m}$ και έστω :

$$C(s) = D_1(s)^{-1}N_1(s) = N_2(s)D_2(s)^{-1}$$

είναι επίσης από αριστερά και από δεξιά πρώτοι μεταξύ τους S-MFDs του $C(s)$, όπου $D_1(s) \in S^{m \times m}$, $N_1(s) \in S^{m \times p}$, $N_2(s) \in S^{m \times p}$, $D_2(s) \in S^{p \times p}$

Έτσι ο πίνακας της συνάρτησης μεταφοράς γίνεται:

$$\begin{pmatrix} I_m & C(s) \\ -P(s) & I_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_m & D_1(s)^{-1}N_1(s) \\ -A_1(s)^{-1}B_1(s) & I_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1(s)^{-1} & 0 \\ 0 & A_1(s)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1(s) & N_1(s) \\ -B_1(s) & A_1(s) \end{pmatrix}$$

έτσι ώστε

$$\begin{pmatrix} I_m & C(s) \\ -P(s) & I_p \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} D_1(s) & N_1(s) \\ -B_1(s) & A_1(s) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} D_1(s) & 0 \\ 0 & A_1(s) \end{pmatrix}$$

Και έτσι από τη σχέση (1) και αντικαθιστώντας τα $C(s) = D_1(s)^{-1} N_1(s)$ και

$P(s) = A_1(s)^{-1} B_1(s)$ θα έχω:

$$H_{yu}(P, C) = \underbrace{\begin{pmatrix} D_1(s) & N_1(s) \\ -B_1(s) & A_1(s) \end{pmatrix}^{-1}}_{D_{yl}(s)^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} N_1(s) & 0 \\ 0 & B_1(s) \end{pmatrix}}_{N_{yl}(s)}$$

όπου $D_{yl}(s) \in S^{(m+p) \times (m+p)}$ και $N_{yl}(s) \in S^{(m+p) \times (m+p)}$

Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να δείξουμε ότι:

$$H_{yu}(P, C) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & N_2(s) \\ B_2(s) & 0 \end{pmatrix}}_{N_{yr}(s)} \underbrace{\begin{pmatrix} B_2(s) & D_2(s) \\ A_2(s) & -N_2(s) \end{pmatrix}^{-1}}_{D_{yr}(s)^{-1}}$$

όπου $N_{yr}(s) \in S^{(m+p) \times (m+p)}$ και $D_{yr}(s)^{-1} \in S^{(m+p) \times (m+p)}$

Αν θεωρήσουμε τον εκτεταμένο πίνακα των $D_{yl}(s), N_{yl}(s)$ και των $D_{yr}(s), N_{yr}(s)$ αποδεικνύεται ότι είναι S-μονομετρικός άρα οι πρώτοι είναι από αριστερά πρώτοι μεταξύ τους ενώ οι δεύτεροι είναι από δεξιά πρώτοι μεταξύ τους

Έτσι για τη συνάρτηση μεταφοράς έχουμε από προηγούμενη πρόταση ότι:

$$H_{yu}(P, C) = D_{yl}(s)^{-1} N_{yl}(s) = N_{yr}(s) D_{yr}(s)^{-1}$$

είναι εκθετικά Ω-ευσταθής ή ισοδύναμα $H_{yu}(P, C) \in S^{(p+m) \times (p+m)}$ αν και μόνο αν οι πίνακες:

$$D_{yl}(s) = \begin{pmatrix} D_1(s) & N_1(s) \\ -B_1(s) & A_1(s) \end{pmatrix} \in S^{(m+p) \times (m+p)}$$

$$D_{yr}(s) = \begin{pmatrix} B_2(s) & D_2(s) \\ A_2(s) & -N_2(s) \end{pmatrix} \in S^{(p+m) \times (p+m)}$$

είναι και οι δύο S-μονομετρικοί

Όμως ο $D_{yl}(s)$ είναι S-μονομετρικός αν και μόνο αν

$$|D_{yl}(s)| = \left| \begin{pmatrix} D_1(s) & N_1(s) \\ -B_1(s) & A_1(s) \end{pmatrix} \right| = |D_1(s)| |A_1(s) + B_1(s)D_1(s)^{-1}N_1(s)| =$$

$$|D_1(s)| |A_1(s) + B_1(s)N_2(s)D_2(s)^{-1}| = |D_1(s)| |A_1(s)D_2(s) + B_1(s)N_2(s)| |D_2(s)^{-1}| =$$

$$= |A_1(s)D_2(s) + B_1(s)N_2(s)| =: u(s) \in S$$

είναι μονάδα του δακτυλίου.

Ισοδύναμα ο $D_{yl}(s)$ είναι S-μονομετρικός αν και μόνο αν

$$A_1(s)D_2(s) + B_1(s)N_2(s) =: F(s) \in S^{p \times p}$$

είναι S-μονομετρικός

Όμοια ακολουθώντας την ίδια διαδικασία καταλήγουμε ότι:

$D_{yr}(s)$ είναι S-μονομετρικός αν και μόνο αν

$$|D_{yr}(s)| = \left| \begin{pmatrix} B_2(s) & D_2(s) \\ A_2(s) & -N_2(s) \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} D_2(s) & B_2(s) \\ -N_2(s) & A_2(s) \end{pmatrix} \right| = |D_2(s)A_2(s) + N_2(s)B_2(s)| = u(s) \in S$$

είναι μονάδα του δακτυλίου ή ισοδύναμα αν και μόνο αν

$$D_2(s)A_2(s) + N_2(s)B_2(s) =: F(s) \in S^{m \times m}$$

είναι S-μονομετρικός

Όλη αυτή η ανάλυση μας οδηγεί στο θεώρημα όπου δίνονται οι απαραίτητες προϋποθέσεις ώστε ο $C(s)$ να σταθεροποιεί τον $P(s)$. Το αποτέλεσμα του παρακάτω θεωρήματος παίζει πολύ σημαντικό ρόλο στο πρόβλημα του υπολογισμού και της παραμετροποίησης των σταθεροποιητικών αντισταθμιστών, αφού ανάγει τον υπολογισμό του στην επίλυση μιας διοφαντικής εξίσωσης πινάκων πάνω από το δακτύλιο των κανονικών και ευσταθών ρητών συναρτήσεων.

Θεώρημα 1.61[4,σελ.318] Έστω $P(s) \in R_{pr}^{p \times m}(s)$ και $P(s) = A_1(s)^{-1} B_1(s) = B_2(s) A_2(s)^{-1}$ είναι από αριστερά και από δεξιά αντίστοιχα πρώτοι μεταξύ τους S -MFDs του $P(s)$ στο Ω . Έστω $C(s) \in R_{pr}^{m \times p}(s)$ και $C(s) = D_1(s)^{-1} N_1(s) = N_2(s) D_2(s)^{-1}$ είναι από αριστερά και από δεξιά πρώτοι μεταξύ τους S -MFDs του $C(s)$ στο Ω .

Τότε ο $C(s)$ σταθεροποιεί τον $P(s)$ αν και μόνο αν οι επόμενες ισοδύναμες συνθήκες αληθεύουν:

$$i. \quad \begin{pmatrix} D_1(s) & N_1(s) \\ -B_1(s) & A_1(s) \end{pmatrix} \in S^{(m+p) \times (m+p)} \text{ είναι } S\text{-μονομετρικός}$$

$$ii. \quad \begin{pmatrix} B_2(s) & D_2(s) \\ A_2(s) & -N_2(s) \end{pmatrix} \in S^{(p+m) \times (p+m)} \text{ είναι } S\text{-μονομετρικός}$$

$$iii. \quad A_1(s) D_2(s) + B_1(s) N_2(s) =: F_1(s) \in S^{p \times p} \text{ είναι } S\text{-μονομετρικός}$$

$$iv. \quad D_1(s) A_2(s) + N_1(s) B_2(s) =: F_2(s) \in S^{m \times m} \text{ είναι } S\text{-μονομετρικός}$$

□

Έτσι καταλήγουμε στο παρακάτω πόρισμα :

Πόρισμα 1.62[4,σελ.318] Έστω $P(s) \in R_{pr}^{p \times m}(s)$ και $P(s) = A_1(s)^{-1} B_1(s) = B_2(s) A_2(s)^{-1}$

(2) είναι από αριστερά και από δεξιά πρώτοι μεταξύ τους S -MFDs του $P(s)$ στο Ω .

Έστω $C(s) \in R_{pr}^{m \times p}(s)$ και έστω $C(s)$ σταθεροποιεί τον $P(s)$ στο Ω . Τότε ο $C(s)$ έχει από αριστερά και από δεξιά πρώτους S -MFDs στο $\bar{\Omega}$ που δίνονται από τη σχέση:

$$C(s) = D_1(s)^{-1}N_1(s) = N_2(s)D_2(s)^{-1} \quad (3)$$

Τέτοια ώστε:

$$A_1(s)D_2(s) + B_1(s)N_2(s) = I_p \quad (4)$$

$$D_1(s)A_2(s) + N_1(s)B_2(s) = I_m \quad (5)$$

□

Παρατήρηση 1.63 [4,σελ.319] Αν γράψουμε τις εξισώσεις (2), (3), (4), (5) σε μορφή block πίνακα τότε καταλήγουμε στην παρακάτω ταυτότητα:

$$\begin{pmatrix} D_1(s) & N_1(s) \\ -B_1(s) & A_1(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_2(s) & -N_2(s) \\ B_2(s) & D_2(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & I_p \end{pmatrix}$$

Αντιστρέφοντας τη σειρά των πινάκων καταλήγουμε επίσης στην ταυτότητα:

$$\begin{pmatrix} A_2(s) & -N_2(s) \\ B_2(s) & D_2(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1(s) & N_1(s) \\ -B_1(s) & A_1(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & I_p \end{pmatrix}$$

Οι παραπάνω ταυτότητες είναι γνωστές και ως ταυτότητες Bezout και δείχνουν τη δυαδικότητα ανάμεσα στο $P(s)$ και στο σταθεροποιητή $C(s)$ του $P(s)$ □

Έτσι σύμφωνα μ' αυτές τις ταυτότητες προκύπτει το παρακάτω πόρισμα:

Πόρισμα 1.64 [4,σελ.319] Έστω $P(s) \in R_{pr}^{p \times m}(s)$ και $P(s) = A_1(s)^{-1}B_1(s) = B_2(s)A_2(s)^{-1}$ είναι από αριστερά και από δεξιά πρώτοι μεταξύ τους S-MFDs του $P(s)$ στο Ω . Έστω $C(s) \in R_{pr}^{m \times p}(s)$ και έστω $C(s)$ σταθεροποιεί τον $P(s)$ στο Ω . Τότε έχει από αριστερά και από δεξιά πρώτους μεταξύ τους S-MFDs στο $\bar{\Omega}$ που δίνονται από:

$$C(s) = D_1(s)^{-1}N_1(s) = N_2(s)D_2(s)^{-1}$$

έτσι ώστε:

$$A_2(s)D_1(s) + N_2(s)B_1(s) = I_m \quad (6)$$

$$D_2(s)A_1(s) + B_2(s)N_1(s) = I_p \quad (7)$$

$$A_2(s)N_1(s) = N_2(s)A_1(s) \quad \text{ή} \quad A_2(s)^{-1}N_2(s) = N_1(s)A_1(s)^{-1}$$

$$B_2(s)D_1(s) = D_2(s)B_1(s) \quad \text{ή} \quad D_2(s)^{-1}B_2(s) = B_1(s)D_1(s)^{-1}$$

□

Παρατήρηση 1.65 Παρατηρούμε ότι από τις σχέσεις (6) και (7) προκύπτει ότι οι $A_2(s), N_2(s)$ είναι από αριστερά πρώτοι μεταξύ τους στο $\bar{\Omega}$, οι $D_2(s), B_2(s)$ είναι και αυτοί από αριστερά πρώτοι στο $\bar{\Omega}$, οι $D_1(s), B_1(s)$ είναι από δεξιά πρώτοι μεταξύ τους στο $\bar{\Omega}$ και οι $A_1(s), N_1(s)$ είναι από δεξιά πρώτοι μεταξύ τους στο $\bar{\Omega}$

Έτσι όταν οι πίνακες είναι σχετικά πρώτοι μεταξύ τους, τότε αν ο $C(s)$ σταθεροποιεί τον $P(s)$ δεν έχω απλοποιήσεις ανάμεσα στους ασταθείς πόλους του $P(s)$ και στα ασταθή μηδενικά του $C(s)$. Όπως και στα συστήματα μιας εισόδου – μιας εξόδου που αυτό μας το εξασφαλίζει η ελεγκσιμότητα και η παρατηρησιμότητα, το ίδιο ισχύει και στη πολυμεταβλητή περίπτωση συστημάτων όταν οι πίνακες είναι σχετικά πρώτοι μεταξύ τους. □

Σύμφωνα με τα παραπάνω είναι σημαντικές οι παραπάνω συνθήκες αφού μπορούν να μας εξασφαλίσουν την ευστάθεια του συστήματος. Η συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ είναι μερική περιγραφή του συστήματος, δηλαδή περιγράφει τη σχέση εισόδου-εξόδου και δεν περιγράφει τι γίνεται εσωτερικά. Έτσι σύμφωνα με τη συνάρτηση μεταφοράς μπορεί φαινομενικά το σύστημα να είναι ευσταθές αφού από τις απλοποιήσεις μηδενικών και πόλων δεν θα μπορούμε να αντιληφθούμε τυχόν εσωτερικές αστάθειες.

Σύμφωνα με τις ταυτότητες Bezout θα έχουμε ότι:

$$D_{yl}(s)^{-1} = \begin{pmatrix} D_1(s) & N_1(s) \\ -B_1(s) & A_1(s) \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A_2(s) & -N_2(s) \\ B_2(s) & D_2(s) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} H_{yu}(P, C) = D_{yl}(s)^{-1} N_{yl}(s) &= \begin{pmatrix} A_2(s) & -N_2(s) \\ B_2(s) & D_2(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_1(s) & 0 \\ 0 & B_1(s) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} A_2(s)N_1(s) & -N_2(s)B_1(s) \\ B_2(s)N_1(s) & D_2(s)B_1(s) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Από το γεγονός ότι:

- i. η δομή των μηδενικών κάθε ρητού πίνακα $P(s)$ εξαρτάται από τη δομή των μηδενικών κάθε πίνακα $B_1(s) \in S^{p \times m}$ ή $B_2(s) \in S^{p \times m}$ που παρουσιάζονται σε δεξιά ή αριστερά πρώτους μεταξύ τους S-MFDs στο Ω
- ii. τα ζευγάρια $D_{yl}(s)$, $N_{yl}(s)$ και $D_{yr}(s)$, $N_{yr}(s)$ δηλώνουν από αριστερά και από δεξιά πρώτους μεταξύ τους S-MFDs στο Ω της συνάρτησης μεταφοράς του κλειστού συστήματος $H_{yu}(P, C)$

Συμπεραίνουμε ότι δεν μπορεί να απλοποιηθεί καμία αστάθεια μηδενικών του $P(s)$ και αν έχω κάποια τέτοια αστάθεια ή αν έχω μηδενικά στο $s=\infty$ στο $P(s)$ (ή στο $C(s)$) τότε αυτά κληρονομούνται και στη συνάρτηση μεταφοράς $H_{yu}(P, C)$

Έτσι έχοντας παρουσιάσει τα χαρακτηριστικά του σταθεροποιητή $C(s)$, θα ακολουθήσουμε μια διαδικασία για την εύρεση του. Έτσι για να τον βρούμε για ένα δεδομένο $P(s)$ είναι να λύσουμε καθεμιά από τις εξισώσεις (4) ή (5) ως προς $D_2(s)$, $N_2(s)$ ή ως προς $D_1(s)$, $N_1(s)$. Όπως ξέρουμε η εξίσωση (5) έχει λύση αν και μόνο αν κάθε μ.κ.δ. του $A_2(s)$ και $B_2(s)$ είναι από δεξιά διαιρέτης του $I_m \in S^{m \times m}$. Αφού όμως οι $A_2(s)$, $B_2(s)$ είναι από δεξιά πρώτοι μεταξύ τους, όλοι οι μ.κ.δ. τους θα είναι S-μονομετρικοί πίνακες άρα θα είναι και από δεξιά διαιρέτες του $I_m \in S^{m \times m}$. Έτσι οι εξισώσεις (4) και (5) έχουν πάντα λύση. Για την εύρεση τους χρησιμοποιούμε

προηγούμενο θεώρημα όπου φέρνω τους πίνακες $\begin{pmatrix} A_2(s) \\ B_2(s) \end{pmatrix}$ ή $(B_1(s) \ A_1(s))$ στη Smith

μορφή τους στο $\bar{\Omega}$ που είναι $\begin{pmatrix} I_m \\ 0 \end{pmatrix}$ ή $(0 \ I_p)$ αντίστοιχα.

Θα παρουσιάσουμε στη συνέχεια ένα παράδειγμα εύρεσης σταθεροποιητή σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα

4.3 Παραμετροποίηση των σταθεροποιητών

Έστω ότι $P(s) = A_1(s)^{-1}B_1(s) = B_2(s)A_2(s)^{-1}$ είναι από αριστερά και από δεξιά πρώτοι μεταξύ τους S-MFDs του P(s) στο $\bar{\Omega}$. Έστω ακόμα οι πίνακες $D_1(s) \in S^{m \times m}$,

$$N_1(s) \in S^{m \times p}, \quad N_2(s) \in S^{m \times p}, \quad D_2(s) \in S^{p \times p}$$

Ικανοποιούν την ταυτότητα Bezout:

$$\begin{pmatrix} D_1(s) & N_1(s) \\ -B_1(s) & A_1(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_2(s) & -N_2(s) \\ B_2(s) & D_2(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & I_p \end{pmatrix}$$

Πολλαπλασιάζοντας από αριστερά και από δεξιά με τους S-unimodular πίνακες

$$\begin{pmatrix} I_m & W(s) \\ 0 & I_p \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} I_m & -W(s) \\ 0 & I_p \end{pmatrix}$$

όπου $W(s) \in S^{m \times p}$

Τότε θα έχουμε:

$$\begin{pmatrix} D_1(s) - W(s)B_1(s) & N_1(s) + W(s)A_1(s) \\ -B_1(s) & A_1(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_2(s) & -[N_2(s) + A_2(s)W(s)] \\ B_2(s) & D_2(s) - B_2(s)W(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & I_p \end{pmatrix}$$

Οπότε:

$$X_1(s)A_2(s) + Y_1(s)B_2(s) = I_m$$

$$A_1(s)X_2(s) + B_1(s)Y_2(s) = I_p$$

όπου $A_1(s)^{-1}B_1(s) = B_2(s)A_2(s)^{-1}$ είναι από αριστερά και από δεξιά πρώτοι μεταξύ τους S-MFDs του $P(s)$ στο $\bar{\Omega}$. Έτσι αν $N_1(s) \in S^{m \times p}$, $D_1(s) \in S^{m \times m}$, είναι μια λύση της πρώτης εξίσωσης ενώ $N_2(s) \in S^{m \times p}$, $D_2(s) \in S^{p \times p}$ είναι μια λύση της δεύτερης εξίσωσης, τότε οι γενικές λύσεις των δυο εξισώσεων θα είναι:

$$X_1(s) = D_1(s) - W(s)B_1(s) \quad Y_1(s) = N_1(s) + W(s)A_1(s)$$

$$X_2(s) = D_2(s) - B_2(s)W(s) \quad Y_2(s) = N_2(s) + A_2(s)W(s)$$

Από τα παραπάνω φαίνεται ότι το σύνολο των λύσεων των εξισώσεων μπορεί να παραμετροποιηθεί από συγκεκριμένες λύσεις. Έτσι έχοντας παραμετροποιήσει το σύνολο των λύσεων των διοφαντικών εξισώσεων μπορούμε να προχωρήσουμε στην παραμετροποίηση του συνόλου των αντισταθμιστών ενός κανονικού $P(s)$

Θεώρημα 1.66[4,σελ.326] Έστω $P(s) \in R_{pr}^{p \times m}(s)$ και $P(s) = A_1(s)^{-1}B_1(s) = B_2(s)A_2(s)^{-1}$ είναι από αριστερά και από δεξιά πρώτοι μεταξύ τους στο $\bar{\Omega}$ S-MFDs του $P(s)$. Έστω ακόμα $D_1(s) \in S^{m \times m}$, $N_1(s) \in S^{m \times p}$, $N_2(s) \in S^{m \times p}$, $D_2(s) \in S^{p \times p}$ τέτοια ώστε να ικανοποιείται η ταυτότητα του Bezout. Τότε το σύνολο $\Phi(P)$ όλων των σταθεροποιητών $C_w(s)$ του $P(s)$ στο $\bar{\Omega}$ δίνεται από:

$$\begin{aligned} \Phi(P) &= \{C_w(s) = [D_1(s) - W(s)B_1(s)]^{-1}[N_1(s) + W(s)A_1(s)] \\ &= [N_2(s) + A_2(s)W(s)][D_2(s) - B_2(s)W(s)]^{-1}\} \end{aligned}$$

όπου $W(s) \in S^{m \times p}$ και τέτοιο ώστε:

$$|D_1(\infty) - W(\infty)B_1(s)| \neq 0 \quad |D_2(\infty) - B_2(s)W(\infty)| \neq 0$$

□

Το θεώρημα μας δίνει όλους τους πιθανούς σταθεροποιητές του $P(s)$. Η συνθήκη (i) εξασφαλίζει ότι κάθε $C_w(s) \in \Phi(P)$ είναι καλά ορισμένος στο $R^{m \times p}(s)$ όπως επίσης και στο $R_{pr}^{p \times m}(s)$, δηλαδή εξασφαλίζει ότι κάθε $C_w(s) \in \Phi(P)$ είναι κανονικός (proper)

Και αυτό αφού όταν $s \rightarrow \infty$ για να είναι η ορίζουσα των παραπάνω πινάκων μη μηδενική θα πρέπει ο πίνακας εντός της ορίζουσας που σχηματίζεται να είναι κανονικός (proper).

Αν υποθέσουμε ότι ο $P(s)$ είναι αυστηρά κανονικός (proper) τότε σύμφωνα με προηγούμενη πρόταση όπου ο $P(s)$ είναι κανονικός αν και μόνο αν $A_1(s) \in S^{p \times p}$, $A_2(s) \in S^{m \times m}$ είναι δικανονικοί ρητοί πίνακες συμπεραίνουμε ότι ο $P(s)$ θα ναι κανονικός αν και μόνο αν $|A_1(\infty)| \neq 0$, $|A_2(\infty)| \neq 0$, αφού στο άπειρο οι δικανονικοί πίνακες θα έχουν όριο πεπερασμένο αριθμό και η ορίζουσα τους θα ναι διάφορη του μηδενός

Ακόμα ο $P(s)$ θα ναι αυστηρά κανονικός αν και μόνο αν $B_1(\infty) = 0$, $B_2(\infty) = 0$

Έτσι σύμφωνα μ' αυτά από την ταυτότητα του Bezout θα χουμε:

$$D_1(\infty)A_2(\infty) = I_m$$

$$A_1(\infty)D_2(\infty) = I_p$$

από όπου συμπεραίνουμε ότι:

$$|D_1(\infty)| = |A_2(\infty)|^{-1} \neq 0 \quad \text{και} \quad |A_1(\infty)| = |D_2(\infty)|^{-1} \neq 0$$

άρα

$$[D_1(\infty) - W(\infty)B_1(s)] = D_1(\infty) \quad \text{και} \quad [D_2(\infty) - B_2(s)W(\infty)] = D_2(\infty) \quad \text{για κάθε } W(s) \in S^{m \times p}$$

Άρα σύμφωνα με τα παραπάνω αν ο $P(s)$ είναι αυστηρά κανονικός τότε η προϋπόθεση (i) του προηγούμενου θεωρήματος ικανοποιείται και έτσι για την παραμετροποίηση των αυστηρά κανονικών $P(s)$ θα έχουμε:

Θεώρημα 1.67[4,σελ.327] Έστω $P(s) \in R_{pr}^{p \times m}$ και έστω $P(s) = A_1(s)^{-1} B_1(s) = B_2(s) A_2(s)^{-1}$. Είναι από αριστερά και από δεξιά αντίστοιχα σχετικά πρώτοι μεταξύ τους S-MFDs του $P(s)$ στο $\bar{\Omega}$. Έστω ακόμα $D_1(s) \in S^{m \times m}$, $N_1(s) \in S^{m \times p}$, $N_2(s) \in S^{m \times p}$, $D_2(s) \in S^{p \times p}$ τέτοια ώστε η ταυτότητα Bezout να ικανοποιείται. Τότε το σύνολο όλων των αντισταθμιστών του $P(s)$ στο Ω είναι:

$$\begin{aligned} \Phi(P) &= \{C_w(s) = [D_1(s) - W(s)B_1(s)]^{-1} [N_1(s) + W(s)A_1(s)] \\ &= [N_2(s) + A_2(s)W(s)][D_2(s) - B_2(s)W(s)]^{-1}\} \end{aligned}$$

□

Το ερώτημα που προκύπτει σε αυτό το σημείο είναι αν ο $P(s)$ θα μπορεί πάντα να σταθεροποιείται από έναν κανονικό σταθεροποιητή, αν ο $P(s)$ είναι κανονικός αλλά όχι αυστηρά κανονικός έτσι ώστε να μπορούμε να κάνουμε πάντα χρήση του 1^{ου} θεωρήματος.

Έτσι για να μπορούμε να δώσουμε απάντηση αν ο $P(s)$ σταθεροποιείται πάντα ακόμα και αν δεν είναι αυστηρά κανονικός, θα πρέπει να ελέγξουμε την περίπτωση $p=m=1$ δηλαδή την βαθμωτή περίπτωση του $P(s)$ και στη συνέχεια την πολυμεταβλητή περίπτωση. Αν υπάρχει πάντα $W(s)$ που να ικανοποιεί την συνθήκη (i) του 1^{ου} θεωρήματος τότε θα υπάρχει πάντα σταθεροποιητής για τον $P(s)$ αν είναι κανονικός και όχι αυστηρά κανονικός.

Αν $p=m=1$ τότε δεν έχουμε καμία διάκριση ανάμεσα στα αριστερά και δεξιά σχετικά πρώτα μεταξύ τους S-MFDs του $P(s)$. Έστω $a(s)^{-1}b(s) = P(s)$, όπου $a(s) \in S$, $b(s) \in S$ με $a(s) \neq 0$ να είναι ένα S-MFD στο Ω . Στην βαθμωτή περίπτωση, όταν ο $P(s)$ δεν είναι αυστηρά κανονικός σημαίνει πως είναι δικανονικός, το οποίο σημαίνει ότι και το $a(s)$ και το $b(s)$ είναι δικανονικά. Έστω ακόμα $d(s) \in S$, $n(s) \in S$ τέτοια ώστε:

$$d(s)a(s) + n(s)b(s) = 1$$

το οποίο σημαίνει ότι $rank[d(\infty), n(\infty)] = 1$, όπως προκύπτει από προηγούμενη πρόταση, το οποίο κατ' επέκταση σημαίνει πως τουλάχιστον ένας από τα $d(s)$, $n(s)$ είναι

δικανονικό. Αν $d(s) \neq 0$ και $d(s)$ είναι δικανονικό και έστω $k(s) := [d(s)/b(s)]$, $k(s) \neq 0$ τότε ικανοποιείται η συνθήκη (i) αφού:

$$d(\infty) - w(\infty)b(\infty) \neq 0$$

για κάθε $w(s) \in S$ τέτοιο ώστε $w(\infty) \neq k(\infty)$, έχοντας ορίσει ότι $k(s) \neq 0$.

Αν $d(s) = 0$ ή $d(s) \neq 0$ αλλά είναι αυστηρά κανονικό τότε η συνθήκη

$$d(\infty) - w(\infty)b(\infty) \neq 0$$

ικανοποιείται για κάθε $w(s) \in S$ που είναι δικανονικό. Έτσι από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι για κάθε βαθμωτή περίπτωση δικανονικού $P(s)$ το σύνολο $U(w) \neq \emptyset$ και το σύνολο των σταθεροποιητών $\Phi(P) \neq \emptyset$

Έτσι μπορούμε να συμπεράνουμε ότι :

Πόρισμα 1.68 [4,σελ.328] Έστω $P(s) \in R_{pr}(s)$. Τότε μπορεί πάντα να σταθεροποιηθεί στο Ω από κανονικό αντισταθμιστή.

□

Τώρα θα αναφερθούμε στην πολυμεταβλητή περίπτωση. Με την ακόλουθη πρόταση θα δώσουμε τις απαραίτητες προϋποθέσεις που πρέπει να ισχύουν έτσι ώστε το σύνολο των πινάκων $W(s) \in S^{m \times p}$ που είναι το σύνολο $V_k \subset S^{m \times p}$ να μην είναι κενό έτσι ώστε να ικανοποιείται και η συνθήκη (i) του προηγούμενου θεωρήματος.

Πρόταση 1.69[4,σελ.328] Έστω $P(s) \in R_{pr}^{p \times m}(s)$ και έστω $P(s) = A_1(s)^{-1} B_1(s) = B_2(s) A_2(s)^{-1}$ είναι από αριστερά και από δεξιά σχετικά πρώτοι μεταξύ τους S -MFDs του $P(s)$ στο $\bar{\Omega}$. Έστω ακόμα $D_1(s) \in S^{m \times m}$, $N_1(s) \in S^{m \times p}$, $N_2(s) \in S^{m \times p}$, $D_2(s) \in S^{p \times p}$ τέτοια ώστε η ταυτότητα Bezout να ικανοποιείται. Τότε θα υπάρχει ένα μη κενό σύνολο $V_k \subset S^{m \times p}$ από πίνακες $W(s) \in S^{m \times p}$ τέτοιο ώστε:

$$|D_1(\infty) - W(\infty)B_1(s)| \neq 0, \quad |D_2(\infty) - B_2(s)W(\infty)| \neq 0$$

για κάθε $W(s) \in V_k \subset S^{m \times p}$

ή ισοδύναμα τέτοιο ώστε:

$$\begin{aligned} C_w(s) &= [D_1(s) - W(s)B_1(s)]^{-1} [N_1(s) + W(s)A_1(s)] \\ &= [N_2(s) + A_2(s)W(s)][D_2(s) - B_2(s)W(s)]^{-1} \in R_{pr}^{m \times p}(s) \end{aligned}$$

αν και μόνο αν υπάρχει $K \in R^{m \times p}$ τέτοιο ώστε:

$$|A_1(\infty) + B_1(\infty)K| \neq 0$$

ή ισοδύναμα τέτοιο ώστε:

$$|A_2(\infty) + KB_2(\infty)| \neq 0$$

ή ισοδύναμα τέτοιο ώστε:

$$|I_p + P(\infty)K| = |I_m + KP(\infty)| \neq 0$$

Το σύνολο V_k όλων αυτών των πινάκων $W(s) \in S^{m \times p}$ παραμετροποιείται από το

$K \in R^{m \times p}$ και δίνεται από:

$$\begin{aligned} V_k &= \{W(s) \in S^{m \times p} / W(\infty) = [D_1(\infty)K - N_1(\infty)][A_1(\infty) + B_1(\infty)K]^{-1} \\ &= [A_2(\infty) + KB_2(\infty)]^{-1}[KD_2(\infty) - N_2(\infty)]\} \end{aligned}$$

Ακόμα έχουμε ότι $C_w(\infty) = K$ για κάθε $W(s) \in V_k$

□

Παρατήρηση 1.70 [4,σελ.331] Αν $K \in R^{m \times p}$ είναι τέτοιο ώστε οι ισοδύναμες συνθήκες της πρότασης να ικανοποιούνται τότε γενικά μπορούμε να διαλέξουμε πίνακα $W(s) \in V_k$ σύμφωνα με τα ακόλουθα:

$$W(s) = W(s)_{sp} + W(\infty)$$

όπου $W(s)_{sp} \in R_{pr}^{m \times p}(s)$ είναι αυστηρά κανονικό και ο πίνακας $W(\infty) \in R^{m \times p}(s)$ δίνεται από τη σχέση της προηγούμενης πρότασης. Έτσι για να είναι ο $W(s)$ στοιχείο του συνόλου V_k είναι σημαντικό να έχουμε διαλέξει τον $W(s)_{sp} \in R_{pr}^{m \times p}(s)$ έτσι ώστε να είναι αυστηρά κανονικός, δεν έχει πόλους στο Ω , και κατά τα άλλα να είναι αυθαίρετος.
□

Πόρισμα 1.71 [4,σελ.331] Κάθε $P(s) \in R_{pr}(s)$ μπορεί να σταθεροποιηθεί στο Ω από έναν αυστηρά κανονικό αντισταθμιστή. Το σύνολο όλων των αυστηρά κανονικών αντισταθμιστών του $P(s)$ στο Ω δίνεται από:

$$\begin{aligned} \Phi(P) &= \{C_w(s) = [D_1(s) - W(s)B_1(s)]^{-1}[N_1(s) + W(s)A_1(s)] \\ &= [N_2(s) + A_2(s)W(s)][D_2(s) - B_2(s)W(s)]^{-1}\} \end{aligned}$$

όπου

$$V_0 = \{W(s) \in S^{m \times p} / W(\infty) = -N_1(\infty)A_1(\infty)^{-1} = -A_2(\infty)^{-1}N_2(\infty)\} \quad \square$$

4.4 Αλγόριθμος για τον υπολογισμό των σταθεροποιητών στο $\bar{\Omega}$

Κάνοντας μια περίληψη των όσων έχουν ειπωθεί παραπάνω για την εύρεση και την παραμετροποίηση ενός σταθεροποιητή $C_w(s)$ στο $\bar{\Omega}$ έχουμε ότι η διαδικασία είναι η εξής:

ΣΤΟΙΧΕΙΑ: $P(s) \in R_{pr}(s)$

ΒΗΜΑ 1^ο

Υπολογίζω από αριστερά και από δεξιά πρώτους μεταξύ τους S-MFDs $A_1(s)^{-1}B_1(s) = B_2(s)A_2(s)^{-1}$ του $P(s)$ στο $\bar{\Omega}$

ΒΗΜΑ 2^ο

Υπολογίζω τους πίνακες $N_1(s), D_1(s), N_2(s), D_2(s)$ τέτοιους ώστε η ταυτότητα Bezout να ικανοποιείται

ΒΗΜΑ 3^ο

Αν ο $P(s)$ είναι αυστηρά κανονικός τότε υπολογίζω τον $C_w(s)$ από τη σχέση της παραπάνω πρότασης. Αν ο $P(s)$ δεν είναι αυστηρά κανονικός τότε πάω στο ΒΗΜΑ 4^ο.

ΒΗΜΑ 4^ο

Διαλέγω $K \in R^{m \times p}$ τέτοιο ώστε $|I_p + P(\infty)K| \neq 0$ και υπολογίζω τον πίνακα $W(\infty) \in R^{m \times p}$ από τη σχέση $W(\infty) = [D_1(\infty)K - N_1(\infty)][A_1(\infty) + B_1(\infty)K]^{-1} = [A_2(\infty) + KB_2(\infty)]^{-1}[KD_2(\infty) - N_2(\infty)]$

ΒΗΜΑ 5^ο

Διαλέγω πίνακα $W(s)_{sp} \in R_{pr}^{m \times p}(s)$ που να είναι αυστηρά κανονικό και αλλιώς αυθαίρετο. Υπολογίζω $W(s) = W(s)_{sp} + W(\infty)$

ΒΗΜΑ 6^ο

Υπολογίζω τον σταθεροποιητή $C_w(s) \in R_{pr}^{m \times p}(s)$ από τη σχέση:

$$\begin{aligned} \Phi(P) &= \{C_w(s) = [D_1(s) - W(s)B_1(s)]^{-1}[N_1(s) + W(s)A_1(s)] \\ &= [N_2(s) + A_2(s)W(s)][D_2(s) - B_2(s)W(s)]^{-1}\} \end{aligned}$$

4.5 Παραμετροποίηση όλων των πινάκων συναρτήσεων μεταφοράς των κλειστών συστημάτων

Από τη σχέση:

$$\begin{aligned} H_{yu}(P, C) = D_{yl}(s)^{-1} N_{yl}(s) &= \begin{pmatrix} A_2(s) & -N_2(s) \\ B_2(s) & D_2(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_1(s) & 0 \\ 0 & B_1(s) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} A_2(s)N_1(s) & -N_2(s)B_1(s) \\ B_2(s)N_1(s) & D_2(s)B_1(s) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

και από τον υπολογισμό του $C_w(s)$ μπορούμε εύκολα να έχουμε και μια παραμετροποίηση των πινάκων $H_{yu}(P, C)$ όλων των κλειστών συστημάτων:

Έτσι

$$\begin{aligned} H_{yu}(P, C_w) &= \begin{pmatrix} A_2(s)[N_1(s) + W(s)A_1(s)] & -[N_2(s) + A_2(s)W(s)]B_1(s) \\ B_2(s)[N_1(s) + W(s)A_1(s)] & [D_2(s) - B_2(s)W(s)]B_1(s) \end{pmatrix} = \\ &= H_{yu}(P, C) + \begin{pmatrix} A_2(s) \\ B_2(s) \end{pmatrix} W(s) \begin{pmatrix} A_1(s) \\ -B_1(s) \end{pmatrix}^T \in S^{(m+p) \times (m+p)} \end{aligned}$$

4.6 Παραμετροποίηση όλων των αντισταθμιστών στο $\bar{\Omega}$ όπου $P(s)$ είναι εκθετικά ευσταθές

Αν $\Omega \equiv C^+$ και $P(s) \in S^{p \times m}$, δηλαδή ο $P(s)$ είναι εκθετικά ευσταθής τότε έχουμε:

$B_1(s) = B_2(s) = P(s)$, $A_1(s) = I_p$, $A_2(s) = I_m$, $D_2(s) = I_p$, $N_2(s) = O_{p,m}$, $D_1(s) = I_m$, $N_1(s) = O_{p,m}$. Τότε η ταυτότητα Bezout ικανοποιείται και από προηγούμενο θεώρημα έχουμε:

Θεώρημα 1.72 Έστω $\Omega \equiv C^+$ και $P(s) \in S$. τότε το σύνολο $\Phi(P)$ όλων των σταθεροποιητών $C_w(s)$ του $P(s)$ δίνεται από:

$$\Phi(P) = \{C_w(s) = [I_m - W(s)P(s)]^{-1}W(s) = W(s)[I_p - P(s)W(s)]^{-1}\}$$

όπου $W(s) \in \mathcal{S}^{m \times p}$ είναι τέτοιο ώστε:

$$\left| I_m - W(\infty)P(\infty) \right| \neq 0 \quad \left| I_p - P(\infty)W(\infty) \right| \neq 0$$

Έτσι σύμφωνα με τα παραπάνω θα έχουμε:

$$H_{yu}(P, C_w) = \begin{pmatrix} W(s) & -W(s)P(s) \\ P(s) & [I_p - P(s)W(s)]P(s) \end{pmatrix} \in \mathcal{S}^{(m+p) \times (m+p)}$$

□

Αν ο $P(s)$ είναι εκθετικά ευσταθής και αυστηρά κανονικός τότε οι συνθήκες (i) του προηγούμενου θεωρήματος αυτόματα ικανοποιούνται και το σύνολο $\Phi(P)$ όλων των αντισταθμιστών δίνεται πάλι από την προηγούμενη σχέση.

4.7 Παραδείγματα εύρεσης αντισταθμιστή στην βαθμωτή και στην πολυμεταβλητή περίπτωση

Θα παραθέσουμε παραδείγματα για τη βαθμωτή και την πολυμεταβλητή περίπτωση για την εύρεση του ζητούμενου σταθεροποιητή και στη συνέχεια την παραμετροποίηση του. Στο πρώτο παράδειγμα παρουσιάζουμε την περίπτωση της Hurwitz ευστάθειας αφού θα ορίσουμε ως απαγορευμένη περιοχή πόλων το δεξί μιγαδικό επίπεδο. Δίνεται η αρχική

συνάρτηση μεταφοράς $P(s) = \frac{s - \frac{1}{2}}{s^2 + s - 6}$ η οποία έχει ένα πόλο στο δεξί μιγαδικό

επίπεδο. Με τη χρήση του πακέτου Rings.m [2] σε περιβάλλον Mathematica θα σταθεροποιήσουμε το σύστημα με τη χρήση αντισταθμιστή ο οποίος δεν είναι απαραίτητο να είναι stable. Σύμφωνα με πρόταση της scalar περίπτωσης κάθε ρητή συνάρτηση $t(s) \in R(s)$ μπορεί να γραφτεί με μη μοναδικό τρόπο στη μορφή

$t(s) = t_1(s)t_2(s)^{-1}$ όπου $t_1(s), t_2(s)$ είναι πρώτοι μεταξύ τους στο $\bar{\Omega}$. Στην απόδειξη της παραπάνω πρότασης ορίζονται:

$$\bar{p} := \deg \hat{d}(s) - \deg n_{\Omega}(s)$$

$$\bar{q} := \deg \hat{n}(s) - \deg d_{\Omega}(s)$$

$$l := \min\{\bar{p}, \bar{q}\}$$

Με την βοήθεια των παραπάνω μπορώ σε κάθε ρητή συνάρτηση να δημιουργώ μια κλασματική μορφή:

$$t(s) = \frac{n_{\Omega}(s)}{\hat{d}(s)}(s+a)^l \left[\frac{d_{\Omega}(s)}{\hat{n}(s)}(s+a)^l \right]^{-1}$$

όπου $-a \in R$, και $-a \notin \Omega$

Έτσι στην αρχική συνάρτηση μεταφοράς που ορίσαμε μπορώ να δημιουργήσω μια κλασματική μορφή όπου $t_1(s) = \frac{2(s-2)}{s+1}$ και $t_2(s) = \frac{2s-1}{s^2+4s+3}$, οι οποίες ανήκουν στο σύνολο των proper και stable συναρτήσεων αφού έχουν πόλο στο αριστερό μιγαδικό επίπεδο. Έτσι αν $a(s)=t_1(s)$ και $b(s)=t_2(s)$, με τη χρήση της διοφαντικής εξίσωσης $a(s)d(s)+b(s)n(s)=1$, η οποία λύνεται με τη χρήση του ευκλείδειου αλγορίθμου θα βρω τις ρητές συναρτήσεις $n(s)$, $d(s)$, έτσι ώστε να προσδιορίσω τον ζητούμενο αντισταθμιστή. Με τη χρήση του Mathematica βρίσκω ότι στο συγκεκριμένο παράδειγμα θα έχω:

$$d(s) = \frac{s-2}{2(s+1)} \text{ και } n(s) = \frac{3(s+3)}{s+1}$$

Έτσι ο αρχικός μας controller θα είναι $C(s) = \frac{6(s+3)}{s-2}$ αφού $C(s) = \frac{n(s)}{d(s)}$ ενώ το

αντίστοιχο κλειστό σύστημα θα έχει συνάρτηση μεταφοράς $Hs = \frac{6s-3}{(s+1)^2}$ η οποία

υπολογίζεται από $H(s) = \frac{P(s) \cdot C(s)}{1 + P(s) \cdot C(s)}$. Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση μεταφοράς

ανήκει στο δακτύλιο των κανονικών και ευσταθών συναρτήσεων αφού παρουσιάζει πόλο στο $s = -1$ που είναι εκτός της απαγορευμένης περιοχής. Στη συνέχεια θα παραμετροποιήσουμε τον Cs καθώς και τη συνάρτηση μεταφοράς Hs έτσι ώστε να

μπορούμε να έχουμε και άλλες δυνατές λύσεις στο πρόβλημα. Ο αντισταθμιστής $C(s)$ θα πρέπει και μετά την παραμετροποίηση να ανήκει στο σύνολο των κανονικών συναρτήσεων, δεν είναι απαραίτητο να ανήκει όμως στο σύνολο των stable συναρτήσεων. Η παράμετρος που θα χρησιμοποιήσουμε θα ανήκει στο σύνολο των κανονικών και ευσταθών συναρτήσεων. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα βάζω ως παράμετρο $W(s) = \frac{s+2}{s+3}$ που είναι proper και stable αφού παρουσιάζει πόλο στο $s = -3$ και είναι και proper αφού δεν έχει πόλους όταν $s \rightarrow \infty$. Με τη χρήση αυτής της παραμέτρου θα υπολογίσω τον αντισταθμιστή $C(s)$ και την συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$, δηλαδή

$$C(s) = \frac{n(s) + W(s) \cdot a(s)}{d(s) - W(s) \cdot b(s)} \quad \text{και} \quad H(s) = \frac{P(s) \cdot C(s)}{1 + P(s) \cdot C(s)}$$

Έτσι $C(s) = \frac{2(s+3)(5s^2+18s+19)}{s^3-9s-14}$ ενώ $H(s) = \frac{6s-3}{(s+1)^2}$, η οποία ανήκει στο σύνολο

των κανονικών και ευσταθών συναρτήσεων.

Θα παραθέσουμε δυο ακόμα παραδείγματα της βαθμωτής περίπτωσης όπου αλλάζει η απαγορευμένη περιοχή πόλων.

2^ο Παράδειγμα

Στο 2^ο παράδειγμα θα εξετάσουμε την περίπτωση της Shur ευστάθειας αφού θα ορίσουμε ως απαγορευμένη περιοχή πόλων το συμπλήρωμα του μοναδιαίου δίσκου. Πρόκειται για συστήματα διακριτού χρόνου ενώ στα υπόλοιπα παραδείγματα μελετάμε συστήματα συνεχούς χρόνου. Έστω η αρχική συνάρτηση μεταφοράς $P(z) = \frac{z-1}{z^2-2z}$ η οποία έχει πόλους στην απαγορευμένη περιοχή αφού παρουσιάζει πόλο στο $z = 2$. Θα χρησιμοποιήσουμε και πάλι αντισταθμιστή $C(z)$ ώστε να βρίσκονται οι πόλοι της στην επιτρεπτή περιοχή και με τη χρήση του πακέτου Rings.m [2] σε περιβάλλον Mathematica θα σταθεροποιήσουμε το σύστημα διακριτού χρόνου. Όμοια με πριν μπορώ να δημιουργήσω μια κλασματική μορφή όπου τα $a(z)$ και $\beta(z)$ θα ανήκουν

στο σύνολο των κανονικών και ευσταθών συναρτήσεων. Έτσι $a(z) = \frac{z-2}{z}$ και

$b(z) = \frac{z-1}{z^2}$, οι οποίες έχουν πόλο στο $z=0$, δηλαδή εντός του μοναδιαίου δίσκου.

Έτσι με τη λύση της διοφαντικής εξίσωσης $a(z) \cdot d(z) + b(z) \cdot n(z) = 1$ βρίσκω τις ρητές συναρτήσεις $d(z) = \frac{z-2}{z}$ και $n(z) = 4$.

Υπολογίζω τον αρχικό αντισταθμιστή για το σύστημα μου αφού $C(z) = \frac{n(z)}{d(z)}$, άρα στο

συγκεκριμένο παράδειγμα $C(z) = \frac{4z}{z-2}$, όπως και τη συνάρτηση μεταφοράς

$H(z) = \frac{p(z) \cdot c(z)}{1 + p(z) \cdot c(z)}$, η οποία θα είναι $H(z) = \frac{4(z-1)}{z^2}$. Θα παραμετροποιήσουμε και

πάλι τον αντισταθμιστή και τη συνάρτηση μεταφοράς για να έχουμε και άλλες δυνατές λύσεις στο πρόβλημα. Έτσι αν χρησιμοποιήσουμε την παράμετρο $W(z) = \frac{z+2}{2z-1}$ που

ανήκει στο σύνολο των κανονικών και ευσταθών συναρτήσεων αφού έχει πόλο στο $z = \frac{1}{2}$ τότε για τον αντισταθμιστή και τη συνάρτηση μεταφοράς θα έχω ότι

$C(z) = \frac{z(9z^2 - 4z - 4)}{2z^3 - 6z^2 + z + 2}$ και $H(z) = \frac{9z^3 - 13z^2 + 4}{z^3(2z-1)}$, η οποία ανήκει στο σύνολο των

κανονικών και ευσταθών συναρτήσεων αφού έχει πόλους στο $z=0$, $z = \frac{1}{2}$ ώστε να είναι ευσταθής και δεν έχει πόλους όταν $z \rightarrow \infty$.

3^ο Παράδειγμα

Σε αυτό το παράδειγμα θα μελετήσουμε και πάλι σύστημα συνεχούς χρόνου στο οποίο θα ορίσουμε δική μας απαγορευμένη περιοχή πόλων και θα το σταθεροποιήσουμε με τη χρήση του πακέτου Rings.m [2] σε περιβάλλον Mathematica. Έτσι ορίζω πάνω στο μιγαδικό επίπεδο ως απαγορευμένη περιοχή πόλων την περιοχή όπου για το όρισμα του

μιγαδικού αριθμού θα ισχύει: $-\frac{3\pi}{4} \leq \arg(s) \leq \frac{3\pi}{4}$ δηλαδή η γωνία που σχηματίζει ο

μιγαδικός με τον άξονα $x'x$ θα είναι $-\frac{3\pi}{4} \leq \varphi$ και $\varphi \leq \frac{3\pi}{4}$. Ακόμα στην απαγορευμένη

περιοχή θα βρίσκεται και κάθε μιγαδικός του οποίου το πραγματικό μέρος είναι $\text{Re}(s) \geq -2$. Τέλος στην απαγορευμένη περιοχή ορίζουμε να βρίσκεται και κάθε μιγαδικός του οποίου το μέτρο είναι άπειρο. Έτσι στην απαγορευμένη περιοχή που ορίσαμε θα βρίσκεται κάθε μιγαδικός ο οποίος σχηματίζει γωνία $\varphi \leq \frac{3\pi}{4}$ και $-\frac{3\pi}{4} \leq \varphi$ ή κάθε μιγαδικός για τον οποίο ισχύει $\text{Re}(s) \geq -2$. Θεωρούμε αρχική συνάρτηση

μεταφοράς $P(s) = \frac{s-1}{s^2+s-6}$ η οποία παρουσιάζει πόλους στο $s=2$ ή $s=-3$, δηλαδή

εντός της απαγορευμένης μας περιοχής. Θα βρούμε αντισταθμιστή $C(s)$ έτσι ώστε να σταθεροποιήσουμε το σύστημα. Με όμοιο τρόπο όπως προηγούμενα δημιουργώ μια

κλασματική μορφή για το $P(s)$, έτσι $a(s) = \frac{2(s^2-s+6)}{(s+3)^2}$ και $b(s) = \frac{2s-1}{(s+3)^2}$. Με τη

λύση της διοφαντικής εξίσωσης $a(s)d(s)+b(s)n(s)=1$ βρίσκω τα $n(s)$ και $d(s)$ έτσι

ώστε να προσδιορίσω το ζητούμενο σταθεροποιητή. Άρα $d(s) = \frac{23s+160}{46(s+3)}$ και

$n(s) = \frac{35s+339}{23(s+3)}$. Έτσι ο αρχικός αντισταθμιστής θα είναι $C(s) = \frac{2(35s+339)}{23s+160}$ και η

συνάρτηση μεταφοράς θα είναι $H(s) = \frac{(2s-1)(35s+339)}{23(s+3)^3}$. Η συνάρτηση μεταφοράς

$H(s)$ ανήκει στο σύνολο των κανονικών και ευσταθών συναρτήσεων αφού παρουσιάζει πόλο στο $s=-3$ και δεν παρουσιάζει πόλους όταν $s \rightarrow \infty$. Στη συνέχεια θα παραμετροποιήσουμε τον αντισταθμιστή $C(s)$ έτσι ώστε να έχουμε και άλλες δυνατές

λύσεις για το πρόβλημα. Έτσι $C(s) = \frac{n(s)+w(s) \cdot a(s)}{d(s)-w(s) \cdot b(s)}$ και $H(s) = \frac{p(s) \cdot c(s)}{1+p(s) \cdot c(s)}$. Θέτω

ως παράμετρο $w(s) = \frac{s+2}{s+3}$ η οποία είναι κανονική και ευσταθής και θα έχουμε

$C(s) = \frac{2(s+3)(31s^2+150s+201)}{3s^3-20s^2-147s-222}$, ενώ $H(s) = \frac{(2s-1)(31s^2+150s+201)}{3(s+3)^4}$, η οποία

είναι όμοια κανονική και ευσταθής. Θέτοντας κάθε φορά άλλη παράμετρο η οποία να ανήκει στο σύνολο των proper και stable συναρτήσεων θα βρίσκω και μια άλλη δυνατή λύση στο πρόβλημα και έτσι το σύστημα μας θα σταθεροποιείται στην περιοχή που εμείς επιλέξαμε.

Τέλος θα παρουσιάσουμε ένα πρόβλημα πολυμεταβλητής περίπτωσης:

4^ο Παράδειγμα

Σε αυτό το παράδειγμα θα μελετήσουμε τη πολυμεταβλητή περίπτωση, δηλαδή το σύστημα έχει παραπάνω από μια εισόδους – εξόδους και όμοια με πριν θα το σταθεροποιήσουμε με τη χρήση του πακέτου Rings.m [2] σε περιβάλλον Mathematica. Θα ορίσουμε και πάλι εδώ την απαγορευμένη περιοχή πόλων, η οποία εδώ συγκεκριμένα θα είναι το δεξί μιγαδικό επίπεδο. Μπορούμε και πάλι εδώ να ορίσουμε οποιαδήποτε περιοχή ως απαγορευμένη και να σταθεροποιήσουμε το σύστημα μας στην επιθυμητή . Εδώ συγκεκριμένα έχουμε ως αρχική συνάρτηση μεταφοράς

$$P(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{s^2 - 3s + 2} & \frac{s}{s - 2} \\ \frac{1}{s - 1} & \frac{s + 2}{s^2 - 3s + 2} \end{pmatrix}. \text{ Γνωρίζω ότι κάθε πίνακα της μορφής } T(s) \in \mathbb{R}(s)^{p \times m}$$

μπορούμε να τον εκφράσουμε με μη μοναδικό τρόπο ως:

$$T(s) = A_1(s)^{-1} B_1(s) = B_2(s) A_2(s)^{-1} \text{ όπου } A_1(s) \in S^{p \times p}, B_1(s) \in S^{p \times m} \text{ είναι από αριστερά πρώτοι μεταξύ τους στο } \bar{\Omega} \text{ και } A_2(s) \in S^{m \times m}, B_2(s) \in S^{p \times m} \text{ είναι από δεξιά πρώτοι μεταξύ τους στο } \bar{\Omega}.$$

Με βάση προηγούμενο θεώρημα μπορούμε να δημιουργήσουμε μια αριστερή – δεξιά κλασματική μορφή για κάθε πίνακα. Έτσι αν ένας πίνακας έχει τη μορφή $T(s) = N(s)D(s)^{-1}$, όπου $T(s) \in \mathbb{R}_{pr}(s)^{p \times m}$ τότε μπορώ να δημιουργήσω μια δεξιά κλασματική μορφή αποφεύγοντας έτσι να υπολογίζουμε τη Smith-McMillan μορφή $S_{T(s)}^{\bar{\Omega}}$ του $T(s)$ που χρειάζεται για να βρούμε την αριστερή – δεξιά κλασματική μορφή του $T(s)$.

Με τη βοήθεια του Mathematica δημιουργώ μια δεξιά κλασματική μορφή για την αρχική συνάρτηση μεταφοράς όπου:

$$A_2(s) = \begin{pmatrix} \frac{s^2 - 3s + 2}{(s + 1)^2} & -\frac{32041(s^2 - 3s + 2)(9s^2 - 4s + 10)}{2592(s + 1)^4} \\ 0 & \frac{32041(s^2 - 3s + 2)}{2592(s + 1)^2} \end{pmatrix}$$

$$B_2(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{(s+1)^2} & \frac{32041(s^4 + s^3 - 10s^2 + 3s - 10)}{2592(s+1)^4} \\ \frac{s-2}{(s+1)^2} & -\frac{32041(8s^3 - 26s^2 + 13s - 22)}{2592(s+1)^4} \end{pmatrix}$$

Στη συνέχεια ελέγχουμε αν οι $A_2(s), B_2(s)$ ανήκουν στο δακτύλιο των κανονικών και ευσταθών συναρτήσεων και αφού και οι δυο πίνακες είναι proper και stable προσπαθούμε με τη βοήθεια του Mathematica να λύσουμε τη διοφαντική εξίσωση $D_1(s) \cdot A_2(s) + N_1(s) \cdot B_2(s) = I$ ώστε να υπολογίσουμε το αριστερό παρονομαστή του αντισταθμιστή $D_1(s)$ και το αριστερό αριθμητή του αντισταθμιστή $N_1(s)$. Έτσι:

$$D_1(s) = \begin{pmatrix} \frac{12s^5 + 610s^4 - 1525s^3 + 1320s^2 - 275s + 242}{12(s+1)^5} & -\frac{5(110s^2 + s + 23)(2s^3 - 7s^2 + s - 2)}{12(s+1)^5} \\ -\frac{216(49s - 17)}{32041(s+1)^2} & \frac{216(110s^2 + s + 23)}{32041(s+1)^2} \end{pmatrix}$$

$$N_1(s) = \begin{pmatrix} \frac{604s^5 - 2475s^4 + 5030s^3 - 2195s^2 + 1170s - 406}{6(s+1)^5} & -\frac{5(49s - 17)(2s^3 - 7s^2 + s - 2)}{12(s+1)^4} \\ -\frac{432(49s^2 - 115s + 34)}{32041(s+1)^2} & \frac{216(49s - 17)}{32041(s+1)} \end{pmatrix}$$

όπου $N_1(s), D_1(s)$ ανήκουν στο δακτύλιο των proper και stable συναρτήσεων.

Έτσι ο ζητούμενος σταθεροποιητής δίνεται από:

$$C(s) = D_1(s)^{-1} N_1(s) = \begin{pmatrix} \frac{19s - 11}{s + 6} & 0 \\ -\frac{(s+1)(98s^2 - 671s + 221)}{110s^3 + 661s^2 + 29s + 138} & \frac{(s+1)(49s - 17)}{110s^2 + s + 23} \end{pmatrix}$$

ενώ η συνάρτηση μεταφοράς του ολικού συστήματος $\Sigma(P,C)$ θα είναι:

$$H(s) = (I + P \cdot C)^{-1} P \cdot C$$

Δηλαδή:

$$H(s) = \begin{pmatrix} \frac{-49s^7 + 17s^6 + 1241s^5 - 3235s^4 + 4874s^3 - 2272s^2 + 258s - 66}{6(s+1)^7} & \frac{(s-1)^2 s(49s-17)(s^2+4s-12)}{12(s+1)^6} \\ \frac{996s^6 - 5485s^5 + 11685s^4 - 11813s^3 + 5075s^2 - 522s + 64}{6(s+1)^7} & -\frac{(49s-17)(18s^4 - 73s^3 + 62s^2 - 29s - 2)}{12(s+1)^6} \end{pmatrix}$$

η οποία ανήκει στο σύνολο των κανονικών και ευσταθών συναρτήσεων.

Μπορούμε να παραμετροποιήσουμε τα αποτελέσματα δίνοντας και άλλες δυνατές λύσεις για τον σταθεροποιητή και τη συνάρτηση μεταφοράς αν θέσουμε ως παράμετρο μια συνάρτηση κανονική και ευσταθή. Έτσι αν θέσουμε για παράδειγμα $w(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

βρίσκουμε τον αντισταθμιστή και τη συνάρτηση μεταφοράς αντίστοιχα

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα μας δίνεται η γενική περίπτωση όπου η αρχική συνάρτηση μεταφοράς $P(s)$ προκύπτει από οποιοδήποτε PMD και έτσι για να βρούμε τον σταθεροποιητή και την τελική συνάρτηση μεταφοράς δεν είναι απαραίτητο να χρησιμοποιήσω προηγούμενα θεωρήματα που έχουμε αναφέρει. Αν ασχοληθούμε με τη συγκεκριμένη περίπτωση όπου θα ισχύει ότι: $B(s) = I_2$ και $D(s) = O_{2 \times 2}$ τότε η αρχική συνάρτηση μεταφοράς θα είναι στη μορφή $P(s) = C(s)A(s)^{-1}$ και μπορώ σύμφωνα με προηγούμενο θεώρημα να δημιουργήσω μια δεξιά κλασματική μορφή με τη βοήθεια ενός διαγώνιου πίνακα του οποίου τα στοιχεία θα είναι πολυώνυμα με τα μηδενικά τους έξω από την ανεπιθύμητη περιοχή. Έτσι έχοντας δημιουργήσει τους πίνακες $A_2(s)$,

$B_2(s)$ στη συνέχεια φέρνω τον πίνακα $\begin{pmatrix} A_2(s) \\ B_2(s) \end{pmatrix}$ στη Smith μορφή του όπου σύμφωνα με προηγούμενο θεώρημα όταν $T_1(s) \in S^{p \times l}$, $T_2(s) \in S^{p \times l}$ είναι από δεξιά πρώτοι μεταξύ τους θα πρέπει να υπάρχει S-μονομετρικός πίνακας τέτοιος ώστε:

$$T_L(s) \begin{pmatrix} T_1(s) \\ T_2(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_p \\ \mathbf{0}_{p, m-p} \end{pmatrix}$$

Άρα για τους $A_2(s)$, $B_2(s)$ θα υπάρχει S-μονομετρικός πίνακας $\begin{pmatrix} D_1(s) & N_1(s) \\ -B_1(s) & A_1(s) \end{pmatrix}$

τέτοιος ώστε να ισχύει:

$$\begin{pmatrix} D_1(s) & N_1(s) \\ -B_1(s) & A_1(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_2(s) \\ B_2(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Απ' όπου προκύπτουν οι πίνακες $D_1(s)$, $N_1(s)$ για τον υπολογισμό του ζητούμενου σταθεροποιητή.

5. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Πολλά από τα προβλήματα ελέγχου απαιτούν τον σχεδιασμό ενός σταθεροποιητή που θα πληροί ορισμένες ιδιότητες όπως η τοποθέτηση των πόλων σε συγκεκριμένη περιοχή του μιγαδικού επιπέδου. Αυτά τα προβλήματα έχουν ήδη λυθεί θεωρητικά, υπάρχουν όμως και προγράμματα όπως το πρόγραμμα του Mathematica το οποίο περιέχει όλα τα απαραίτητα εργαλεία ώστε να χρησιμοποιεί τη θεωρία των Ω -ευσταθών συναρτήσεων και πινάκων και να λύνει τα αντίστοιχα προβλήματα που αφορούν την σταθεροποίηση συστημάτων. Έτσι ο υπολογισμός του ζητούμενου σταθεροποιητή και της συνάρτησης μεταφοράς μπορεί να γίνει με εφαρμογή των παραπάνω θεωρημάτων στην περίπτωση που το PMD έχει συγκεκριμένη μορφή. Ακόμα και σε αυτή την περίπτωση είναι δυσκολότερο να γίνουν οι στοιχειώδεις πράξεις γραμμών που απαιτούνται για να ανάγουμε ένα πίνακα στη Smith μορφή του και να βρούμε στη συνέχεια τον αντισταθμιστή και τη συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος. Με τη χρήση του προγράμματος γίνεται ο υπολογισμός και στη γενική περίπτωση που το PMD έχει οποιαδήποτε μορφή. Και αυτό γιατί το πρόγραμμα περιέχει αλγορίθμους που λύνουν Διοφαντικές εξισώσεις για πίνακες πάνω σε διάφορους δακτυλίους λύνοντας έτσι πολλά από τα προβλήματα ελέγχου όπως είναι η σταθεροποίηση του συστήματος ή η τοποθέτηση πόλων. Ο χρήστης μπορεί να διαλέξει έναν δακτύλιο των Ω -ευσταθών συναρτήσεων όπως το δακτύλιο της Hurwitz ευστάθειας, Shur ευστάθειας, το δακτύλιο των πολωνύμων ή ακόμα και να δημιουργήσει δακτύλιο περιγράφοντας την απαγορευμένη περιοχή πόλων όπως κάναμε σε προηγούμενο παράδειγμα. Συμπερασματικά στη συγκεκριμένη μελέτη ασχοληθήκαμε σταδιακά με τη μετατροπή οποιασδήποτε ρητής συνάρτησης σε πηλίκo κανονικών και Ω -ευσταθών συναρτήσεων λύνοντας έτσι και προβλήματα σταθεροποίησης συστημάτων μιας εισόδου-εξόδου. Στη συνέχεια μελετήσαμε και την πολυμεταβλητή περίπτωση συστημάτων και τη σταθεροποίηση τους αφού πρώτα εξετάσαμε πίνακες με στοιχεία στο δακτύλιο των κανονικών και Ω -ευσταθών συναρτήσεων. Δείξαμε θεωρητικά την επίλυση ενός τέτοιου προβλήματος όπως και την επίλυση του με τη βοήθεια του παραπάνω προγράμματος, το οποίο μπορεί να χρησιμοποιηθεί και στη γενική περίπτωση που το PMD του συστήματος έχει οποιαδήποτε μορφή.

6. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] V. Kucera, “Diophantine equations in control—A survey,” *Automatica*, vol. 29, no. 6, pp. 1361–1375, 1993.
- [2] N. P. Karampetakis, E. N. Antoniou, A. I. G. Vardulakis, and S. Vologiannidis, “Symbolic Computations on Rings of Rational Functions and Applications in Control Engineering,” in *Computer Aided Systems Theory - EUROCAST 2009*, vol. 5717, R. Moreno-Díaz, F. Pichler, and A. Quesada-Arencibia, Eds. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2009, pp. 587-594.
- [3] Kucera V. (1979) *Discrete Linear Control* Wiley, New York
- [4] Vardulakis, A.I.G.: *Linear Multivariable Control - Algebraic Analysis and Synthesis Methods*. John Willey & Sons Ltd., New York (1991)