



ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ

“ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΕΛΕΓΧΟΥ”

**ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΩΝ ΠΙΝΑΚΩΝ  
ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ**

**ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ**

**Ευαγγελία Α. Αραμπατζή**

**Επιβλέπων:** Νικόλαος Καραμπετάκης

Καθηγητής Α.Π.Θ.

Θεσσαλονίκη, Ιούλιος 2015





ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ  
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ  
ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ  
“ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΕΛΕΓΧΟΥ”

## ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΩΝ ΠΙΝΑΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ  
Ευαγγελία Α. Αραμπατζή

**Επιβλέπων:** Νικόλαος Καραμπετάκης  
Καθηγητής Α.Π.Θ.

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 7<sup>η</sup> Ιουλίου 2015.

.....  
Ν. Καραμπετάκης  
Καθηγητής Α.Π.Θ.

.....  
Ο. Κοσμίδου  
Αν. Καθηγήτρια Α.Π.Θ.

.....  
Ε. Αντωνίου  
Επικ. Καθηγητής ΑΤΕΙΘ

Θεσσαλονίκη, Ιούλιος 2015

.....  
Ευαγγελία Α. Αραμπατζή  
Πτυχιούχος Μαθηματικός Α.Π.Θ.

Copyright © Ευαγγελία Α. Αραμπατζή, 2015.  
Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευτεί ότι εκφράζουν τις επίσημες θέσεις του Α.Π.Θ.

Αφιερωμένο στους γονείς μου,  
Αθανάσιο και Σοφία



## ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην παρούσα εργασία εξετάζουμε την διαίρεση πολυωνυμικών πινάκων με την βοήθεια των θεμελιωδών πινάκων που προκύπτουν από το ανάπτυγμα Laurent του αντίστροφου πίνακα. Θα δώσουμε σταδιακά όλους τους ορισμούς και θεωρήματα για να γίνει κατανοητή, ως προς τον αναγνώστη, η μεθοδολογία. Στη συνέχεια, θα κάνουμε μια εφαρμογή για να δείξουμε πόσο σημαντικός είναι ο υπολογισμός της διαίρεσης πολυωνυμικών πινάκων στην θεωρία ελέγχου.

Στο πρώτο κεφάλαιο δίνονται βασικοί ορισμοί των πινάκων, πολυωνύμων και του υπολογισμού του αντιστρόφου πίνακα και των θεμελιωδών πινάκων. Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζουμε έναν αλγόριθμο για την διαίρεση πολυωνυμικών πινάκων, ενώ στο τρίτο κεφάλαιο κάνουμε εφαρμογή του συγκεκριμένου αλγορίθμου στον υπολογισμό ενός ελεγκτή για την σταθεροποίηση ενός συστήματος πολλών εισόδων-εξόδων. Όλα τα παραπάνω συνοδεύονται με παραδείγματα και αναλυτική μεθοδολογία.

## ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ

Πολυωνυμικοί πίνακες, Αντίστροφος πίνακας, Ανάπτυγμα Laurent, Θεμελιώδεις πίνακες, Διαίρεση πολυωνυμικών πινάκων.





## **ABSTRACT**

In this paper we study the division of polynomial matrices. The division is performed in this terms of the fundamental matrices of the inverse  $A(s)$  coming from its' Laurent expansion. We give all the necessary definitions and theorems in order to have a better understanding of the methodology. The whole theory is implemented with an example from the Control Systems Theory.

In the first section we present basic definitions that concern of matrices, polynomials and the calculation of the fundamental matrices of the inverse of a polynomial matrix. In the second section the division of the polynomial matrix is examined whereas in the third chapter section, an application of the division algorithm is proposed in Control Systems Theory.

## **KEY WORDS**

Polynomial matrices, Inverse matrix, Laurent expansion, Fundamental matrices, Division of polynomial matrices.



## Περιεχόμενα

ΠΕΡΙΛΗΨΗ .....	vii
ABSTRACT.....	ix
Κεφάλαιο 1 .....	1
Εισαγωγικές έννοιες.....	1
1.1 Πίνακες.....	1
1.2 Πολυώνυμα .....	3
1.3 Πολυωνυμικοί πίνακες .....	3
1.4 Smith Mc-Millan μορφή στον $\mathbb{C}$ .....	4
1.5 Smith Mc-Millan μορφή στο $s=\infty$ .....	7
1.6 Υπολογισμός του αντιστρόφου ενός πολυωνυμικού πίνακα $A(s)$ .....	11
1.7 Υπολογισμός του αναπτύγματος Laurent του αντιστρόφου ενός πολυωνυμικού πίνακα .....	16
Κεφάλαιο 2 .....	23
Διαίρεση πολυωνυμικών πινάκων .....	23
2.1 Ευκλείδεια διαίρεση.....	23
2.2 Δεξιά και αριστερή διαίρεση πολυωνυμικών πινάκων .....	24
2.3 Διαίρεση ενός πολυωνυμικού πίνακα $A(s)$ με έναν πρωτοβάθμιο πολυωνυμικό πίνακα της μορφής $(sI-A)$ .....	28
2.4 Διαίρεση ενός πολυωνυμικού πίνακα $A(s)$ με έναν πολυωνυμικό πίνακα της μορφής $(sE-A)$ .....	32
2.5 Διαίρεση πολυωνυμικών πινάκων και άλλα αποτελέσματα .....	34
Κεφάλαιο 3 .....	45
Διαίρεση πολυωνυμικών πινάκων και εφαρμογές.....	45
3.1 Εισαγωγικές έννοιες.....	45
3.2 Κανονικότητα κατά γραμμή (στήλη) ενός πολυωνυμικού πίνακα .....	45
3.3 Πολυωνυμική κλασματική έκφραση πολυωνυμικού πίνακα.....	49

3.4 Επανατοποθέτηση πόλων ενός γραμμικού πολυμεταβλητού συστήματος με δυναμική απόκριση εξόδου.....	52
Βιβλιογραφία .....	59

## Κεφάλαιο 1

### Εισαγωγικές έννοιες

Στο κεφάλαιο αυτό θα αναφερθούμε σε κάποιες βασικές έννοιες, αναγκαίες για την κατανόηση των επομένων ενοτήτων. Θα δώσουμε τους ορισμούς των πινάκων, των πολυωνύμων, πολυωνυμικών πινάκων, της Smith-McMillan μορφής στο  $s = \infty$ , του αναπτύγματος Laurent και του αντιστρόφου ενός πολυωνυμικού πίνακα, καθώς και θα παρουσιάσουμε παραδείγματα για την εμπέδωση θεωρημάτων και μεθοδολογιών.

#### 1.1 Πίνακες

Έστω  $F$  ένα σώμα. Μια ορθογώνια διάταξη στοιχείων  $a_{ij}$  ( $i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m$ ) ενός σώματος  $F$ ,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

θα λέγεται *πίνακας*. Ο παραπάνω πίνακας θα λέμε ότι είναι *διάστασης*  $n \times m$ , ότι έχει δηλαδή  $n$  γραμμές και  $m$  στήλες. Αν έχουμε  $n = m$ , τότε λέμε ότι ο πίνακας είναι *τετραγωνικός*. Συμβολίζουμε με  $M_{n \times m}(F)$  το σύνολο των  $n \times m$  πινάκων με στοιχεία από το σώμα  $F$ . Συγκεκριμένα, αν ο πίνακας μας είναι τετραγωνικός θα γράφουμε  $M_n(F)$ .

**Ορισμός 1.1.** [13] Ένας τετραγωνικός πίνακας λέγεται *μοναδιαίος* αν όλα τα στοιχεία στην κυρία διαγώνιο είναι 1 και τα υπόλοιπα 0. Τον πίνακα αυτόν θα τον συμβολίζουμε με  $I_n$ . ■

**Ορισμός 1.2.** [13] Έστω  $A \in M_{n \times m}(F)$ . Ονομάζουμε *βαθμίδα* του πίνακα  $A$  τον μεγαλύτερο αριθμό από γραμμικά ανεξάρτητες στήλες (γραμμές) του  $A$ . Συμβολίζεται με  $rank(A)$ . ■

Συμβολίζουμε την *ορίζουσα* ενός πίνακα  $A \in M_n(F)$  με  $\det(A)$  ή με  $|A|$ . Η ορίζουσα είναι πάντα αριθμός και περιέχει κάποιες πληροφορίες για τον πίνακα. Υπολογίζεται από τον

τύπο  $\det(A) = \sum_j (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$ , όπου  $A_{ij}$  προκύπτει αν αφαιρέσουμε από τον  $A$  την γραμμή  $i$  και την στήλη  $j$  και  $\det[a_{ij}] = a_{ij}$ .

**Ορισμός 1.3.** [3] Ένας πίνακας  $A \in M_n(F)$  λέγεται *ομαλός* (*non-singular*) αν ισχύει  $|A| \neq 0$  και *ιδιόμορφος* (*singular*) αν ισχύει  $|A| = 0$ . ■

**Ορισμός 1.4.** [13] Έστω  $A \in M_{n \times m}(F)$ . Ο *ανάστροφος* πίνακας του  $A$  είναι ένας νέος πίνακας που προκύπτει αν τις γραμμές του  $A$  τις κάνουμε στήλες του καινούριου πίνακα. Συμβολίζεται με  $A^T$ . ■

**Ορισμός 1.5.** [13] Ένας πίνακας  $A \in M_n(F)$  θα λέγεται *συμμετρικός* αν ισχύει η σχέση  $A = A^T$  και *αντισυμμετρικός* αν ισχύει η σχέση  $A = -A^T$ . ■

**Ορισμός 1.6.** [13] Αν για τον πίνακα  $A \neq 0$  του  $M_n(F)$  υπάρχει ένας πίνακας  $B \in M_n(F)$ , ώστε να ισχύει η σχέση  $AB = I_n = BA$ , τότε ο πίνακας  $B$  λέγεται *αντίστροφος* πίνακας του  $A$  και συμβολίζεται με  $A^{-1}$ . ■

Ένας τρόπος υπολογισμού του αντίστροφου πίνακα είναι με τον τύπο  $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj}(A)$ , και  $\text{adj}(A)$  είναι ο πίνακας που περιέχει στοιχεία της μορφής  $\text{adj}(A) = ((-1)^{i+j} |A_{ij}|)^T$  και ο οποίος λέγεται *προσαρτημένος* πίνακας.

- $|A| \cdot |A^{-1}| = 1 \Leftrightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$
- $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$  (1.2)

Ιδιότητες οριζουσών: [12] Έστω οι πίνακες  $A, B \in M_n(F)$  για τους οποίους ισχύει

- $|A \cdot B| = |B \cdot A|$
- $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$
- $|A^2| = |A|^2$  (1.3)
- $|A| = |A^T|$
- $|\lambda A| = \lambda^n |A|$ ,  $\lambda \in F$ .

**Ορισμός 1.7.** [12] Έστω  $A \in M_{n \times m}(F)$ . Το πολυώνυμο  $|A - \lambda I_n|$  λέγεται *χαρακτηριστικό πολυώνυμο* του πίνακα  $A$ . Θα το συμβολίζουμε με  $c(\lambda)$ . Μας βοηθάει να υπολογίσουμε τις *ιδιοτιμές* και τα *ιδιοδιανύσματα* του πίνακα  $A$ . ■

## 1.2 Πολυώνυμα

Ένα πολυώνυμο με συντελεστές από το σώμα  $F$  θα γράφεται στην μορφή:

$$f(s) = a_0 s^m + a_1 s^{m-1} + \dots + a_m, \quad (1.4)$$

$a_0, a_1, a_2, \dots, a_m \in F$ .

Ο βαθμός του πολυωνύμου είναι ο μεγαλύτερος εκθέτης του πολυωνύμου. Συμβολίζεται με  $\deg f = m$ . Θα λέμε ότι το πολυώνυμο είναι σταθερού ή μηδενικού βαθμού αν ισχύει  $f(s) = a_0$ . Το μηδενικό πολυώνυμο δεν έχει βαθμό και είναι το  $f(s) = 0$ .

**Ορισμός 1.8.** [12] Ένα πολυώνυμο θα λέγεται κανονικό (*regular*) αν ο συντελεστής της μεγαλύτερης δύναμης είναι 1. ■

**Ορισμός 1.9.** [12] Θα λέμε ότι το πολυώνυμο  $f$  λέγεται πολυώνυμο μηδενιστής του πίνακα  $A \in M_n(F)$  αν ισχύει η σχέση  $f(A) = 0$ . ■

**Θεώρημα Cayley-Hamilton.** [12] Κάθε πίνακας τετραγωνικός πίνακας  $A \in M_n(F)$  ικανοποιεί την χαρακτηριστική εξίσωση. ■

Επομένως,  $c(A) = 0$  όπου  $c(\lambda) = |A - \lambda I_n|$  το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του  $A$ .

**Ορισμός 1.10.** [12] Ένα κανονικό πολυώνυμο  $\psi(\lambda)$ , το οποίο είναι πολυώνυμο μηδενιστής του  $A$ , και έχει το μικρότερο βαθμό λέγεται ελάχιστο πολυώνυμο του  $A$ . ■

## 1.3 Πολυωνυμικοί πίνακες

Ένας πίνακας του οποίου τα στοιχεία είναι πολυώνυμα με συντελεστές πάνω στο σώμα  $F$  θα λέγεται πολυωνυμικός πίνακας στο σώμα  $F$ .

$$A(s) = [a_{ij}(s)]_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, m}} = \begin{bmatrix} a_{11}(s) & \cdots & a_{1m}(s) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(s) & \cdots & a_{nm}(s) \end{bmatrix}, a_{ij}(s) \in F[s]. \quad (1.5)$$

Η διάσταση του πολυωνυμικού πίνακα θα είναι  $n \times m$ . Το σύνολο των πολυωνυμικών πινάκων με διάσταση  $n \times m$  πάνω στο σώμα  $F$  θα συμβολίζεται με  $F[s]^{n \times m}$ . Στην εργασία αυτή θα ασχοληθούμε με το σώμα των πραγματικών αριθμών  $\mathbb{R}$ .

Ένας πολυωνυμικός πίνακας  $A(s)$  μπορεί να γραφτεί και ως

$$A(s) = A_0 s^n + A_1 s^{n-1} + \dots + A_n \quad (1.6)$$

όπου ο αριθμός  $n$  θα είναι ο βαθμός του  $A(s)$  και θα συμβολίζεται με  $\deg A(s) = n$ , δεδομένου ότι  $A_0 \neq 0$ .

**Ορισμός 1.11.** [10] Ένας τετραγωνικός πολυωνυμικός πίνακας  $A(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times p}$  θα λέγεται *ομαλός (regular)* αν ισχύει  $\text{rank}_{\mathbb{R}} A_0 = p$ . ■

**Ορισμός 1.12.** [10] Ένας πολυωνυμικός πίνακας  $A(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times p}$  θα λέγεται *ευαδικός (monic)* αν ο πίνακας του μεγιστοβάθμιου όρου του είναι ο μοναδιαίος πίνακας. ■

**Ορισμός 1.13.** [1] Ένας πολυωνυμικός πίνακας  $U(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times p}$  θα λέγεται *αντιστρέψιμος (unimodular)* (ή  $\mathbb{R}[s]$ -αντιστρέψιμος) αν υπάρχει ένας  $\hat{U}(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times p}$ , τέτοιος ώστε  $U(s)\hat{U}(s) = I_p$ . Επίσης, αν ισχύει  $\det U(s) = a \in \mathbb{R}, a \neq 0$ . ■

**Ορισμός 1.14.** [1] Δύο πολυωνυμικοί πίνακες  $A_1(s), A_2(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$  ονομάζονται *αντιστρέψιμοι ισοδύναμοι (unimodular equivalent)*, *αριστερά αντιστρέψιμοι ισοδύναμοι (left unimodular equivalent)*, *δεξιά αντιστρέψιμοι ισοδύναμοι (right unimodular equivalent)* εάν και μόνο εάν υπάρχουν αντιστρέψιμοι πίνακες  $U_L \in \mathbb{R}[s]^{p \times p}$  και  $U_R \in \mathbb{R}[s]^{m \times m}$  τέτοιοι ώστε:

$$A_1(s) = U_L(s)A_2(s)U_R(s), \quad A_1(s) = U_L(s)A_2(s), \quad A_1(s) = A_2(s)U_R(s) \quad (1.7)$$

Οι παραπάνω εξισώσεις ορίζουν σχέσεις ισοδυναμίας στο  $\mathbb{R}[s]^{p \times m}$ . Συμβολίζουμε με  $E^{\mathbb{C}}$  την πρώτη σχέση ισοδυναμίας και έστω  $A_1(s), A_2(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$  δυο αντιστρέψιμοι ισοδύναμοι πίνακες. Συμβολίζουμε την ισοδυναμία αυτών των δυο πινάκων ως  $[A_1(s), A_2(s)] \in E^{\mathbb{C}}$ . Η  $E^{\mathbb{C}}$  -σχέση ισοδυναμίας για έναν καθορισμένο πολυωνυμικό πίνακα  $A(s)$  συμβολίζεται με  $[A(s)]_{E^{\mathbb{C}}}$ .

**Ορισμός 1.15.** [1] Έστω  $A(s) \in \mathbb{R}(s)^{p \times m}$  και

$$\mathbb{R}(s) := \left\{ t(s) \mid t(s) = \frac{n(s)}{d(s)}, n(s), d(s) \in \mathbb{R}[s], d(s) \neq 0 \right\} \quad (1.8)$$

Τότε πίνακας  $A(s)$  ονομάζεται (*πραγματικός*) *ρητός πίνακας*. ■

#### 1.4 Smith Mc-Millan μορφή στον $\mathbb{C}$

Σε αυτή την παράγραφο θα δώσουμε τον ορισμό της Smith-McMillan μορφής ενός πολυωνυμικού πίνακα στον  $\mathbb{C}$ . Θα δείξουμε πως υπολογίζεται και θα δώσουμε παραδείγματα.



**Ορισμός 1.16.** [10] Δυο ρητοί πίνακες  $A_1(s), A_2(s) \in \mathbb{R}(s)^{p \times m}$  ονομάζονται *ισοδύναμοι στο  $\mathbb{C}$*  (*equivalent in  $\mathbb{C}$* ), *αριστερά ισοδύναμοι στο  $\mathbb{C}$*  (*left equivalent in  $\mathbb{C}$* ), *δεξιά ισοδύναμοι στο  $\mathbb{C}$*  (*right equivalent in  $\mathbb{C}$* ) εάν και μόνο εάν υπάρχουν αντιστρέψιμοι πίνακες

$$A_L(s)A_1(s)A_R(s) = A_2(s), \quad A_L(s)A_1(s) = A_2(s), \quad A_1(s)A_R = A_2(s) \quad (1.9)$$

**Θεώρημα 1.17.** [10] Έστω  $A(s) \in \mathbb{R}(s)^{p \times m}$  με  $\text{rank}_{\mathbb{R}(s)} A(s) = r, r \leq \min\{p, m\}$ . Τότε ο  $A(s)$  είναι ισοδύναμος στο  $\mathbb{C}$  με έναν διαγώνιο πίνακα  $S_{A(s)}^{\mathbb{C}}$  που έχει την μορφή:

$$S_{A(s)}^{\mathbb{C}}(s) = \text{blockdiag} \left[ \frac{\varepsilon_1(s)}{\psi_1(s)}, \frac{\varepsilon_2(s)}{\psi_2(s)}, \dots, \frac{\varepsilon_r(s)}{\psi_r(s)}, 0_{p-r, m-r} \right] \quad (1.10)$$

όπου τα  $\varepsilon_i(s), \psi_i(s) \in \mathbb{R}[s]$  έχουν ως μεγιστοβάθμιο συντελεστή την μονάδα, είναι πρώτα μεταξύ τους και ικανοποιούν τις παρακάτω συνθήκες:

$$\varepsilon_i(s) / \varepsilon_{i+1}(s) \forall i \in r-1 \quad (1.11)$$

$$\psi_{i+1}(s) / \psi_i(s) \forall i \in r-1 \quad (1.12)$$

Ο διαγώνιος ρητός πίνακας  $S_{A(s)}^{\mathbb{C}}$  ονομάζεται Smith-McMillan μορφή του  $A(s)$  στο  $\mathbb{C}$ . ■

**Ορισμός 1.18.** [10] Οι ρητές συναρτήσεις  $\varepsilon_i(s) / \psi_i(s) =: f_i(s), i \in \mathbb{R}$  αποτελούν ένα πλήρες σύνολο αναλλοίωτων στην κλάση ισοδυναμίας  $E^{\mathbb{C}}$  των ισοδύναμων ρητών πινάκων στο  $\mathbb{C}$  και τις ονομάζουμε *αναλλοίωτες ρητές συναρτήσεις* (*invariant rational functions*) του  $A(s)$ . ■

**Ορισμός 1.19.** [10] Έστω  $A(s) \in \mathbb{R}(s)^{p \times m}$ . Ορίζουμε ως *μηδενικά* (*zeros*) του  $A(s)$  στο  $\mathbb{C}$  τα μηδενικά των πολυωνύμων  $\varepsilon_i(s), i \in \mathbb{R}$ . Ορίζουμε ως *πόλους* (*poles*) του  $A(s)$  στο  $\mathbb{C}$  τα μηδενικά των πολυωνύμων  $\psi_i(s), i \in \mathbb{R}$ . ■

Ένας τρόπος για να υπολογίσουμε την Smith-McMillan μορφή στο  $\mathbb{C}$  ενός ρητού πίνακα  $A(s) \in \mathbb{R}(s)^{p \times m}$  είναι να γράψουμε τον ρητό πίνακα  $A(s)$  στην εξής μορφή:

$$A(s) = \frac{N(s)}{d(s)} \quad (1.13)$$

όπου  $d(s)$  το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο όλων των παρονομαστών των στοιχείων  $t_{ij}(s) = n_{ij}(s) / d_{ij}(s)$  του  $A(s)$  και  $N(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$ . Στην συνέχεια βρίσκουμε την Smith

μορφή στο  $\mathbb{C}$  του  $N(s)$ , έστω  $S_{N(s)}^{\mathbb{C}} = \text{blocdiag}[n_1(s), n_2(s), \dots, n_r(s), 0_{p-r, m-r}]$ . Τα  $n_i(s) = \frac{\Delta_i}{\Delta_{i-1}}, \Delta_0 = 1$ , όπου  $\Delta_i = \text{ευαδικός μέγιστος κοινός διαιρέτης όλων των } i \times i \text{ οριζουσών του } N(s)$ . Διαιρούμε κάθε  $n_i(s), i \in r$  με το  $d(s)$  έτσι ώστε να απλοποιηθούν οι κοινοί παράγοντες. Στην συνέχεια παίρνουμε

$$\frac{n_i(s)}{d(s)} = \frac{\varepsilon_i(s)}{\psi_i(s)} \quad (1.14)$$

οπότε έχουμε την τελική Smith-McMillan μορφή στο  $\mathbb{C}$  του  $A(s)$ .

**Παράδειγμα 1.** Θα υπολογίσουμε την Smith-McMillan μορφή του  $A(s)$  στο  $\mathbb{C}$ .

$$A(s) = \begin{bmatrix} \frac{s-1}{s+1} & \frac{s-1}{(s+1)^2} \\ 0 & \frac{s+2}{s^2-1} \end{bmatrix}$$

υπολογίζω ότι  $d(s) = (s-1)(s+1)^2$  και  $N(s) = \begin{bmatrix} (s-1)^2(s+1) & (s-1)^2 \\ 0 & (s+1)(s+2) \end{bmatrix}$ .

Υπολογίζω την Smith μορφή του  $N(s)$  στο  $\mathbb{C}$ ,  $\Delta_0 = 1$ ,  $\Delta_1 = 1$ ,

$\Delta_2 = \det N(s) = (s-1)^2(s+1)^2(s+2)$ , επομένως  $n_1(s) = \frac{\Delta_1}{\Delta_0} = 1$  και

$n_2(s) = \frac{\Delta_2}{\Delta_1} = (s-1)^2(s+1)^2(s+2)$ . Άρα

$$S_{N(s)}^{\mathbb{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (s-1)^2(s+1)^2(s+2) \end{bmatrix}$$

οπότε η Smith-McMillan μορφή του  $A(s)$  στο  $\mathbb{C}$  θα είναι

$$S_{A(s)}^{\mathbb{C}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s-1)(s+1)^2} & 0 \\ 0 & (s-1)(s+2) \end{bmatrix}. \blacksquare$$

### 1.5 Smith Mc-Millan μορφή στο $s=\infty$

Σε αυτή την παράγραφο θα δώσουμε τον ορισμό της Smith-McMillan μορφής ενός πολυωνυμικού πίνακα στο  $s=\infty$ . Θα δείξουμε πως υπολογίζεται και θα δώσουμε παραδείγματα. Για τον υπολογισμό θα πρέπει πρώτα να δώσουμε τον ορισμό του  $\delta_\infty(\cdot)$ .

Έστω  $K$  ένα σώμα. Μια διακριτή εκτίμηση του  $K$  είναι η απεικόνιση  $\delta:K \rightarrow \mathbb{Z}$ , τέτοια ώστε για όλα τα μη μηδενικά στοιχεία  $x, y \in K$

$$\delta(xy) = \delta(x) + \delta(y) \quad (1.15)$$

$$\delta(x+y) \geq \min\{\delta(x), \delta(y)\} \quad (1.16)$$

Αν έχουμε  $t(s) = n(s)/d(s) \in \mathbb{R}(s)$  όπου  $n(s), d(s) \in \mathbb{R}[s], d(s) \neq 0$  ορίζουμε την απεικόνιση  $\delta_\infty(\cdot): \mathbb{R}(s) \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$  μέσω των σχέσεων

$$\delta_\infty(t(s)) := \deg d(s) - \deg n(s) \quad t(s) \neq 0 \quad (1.17)$$

$$\delta_\infty(t(s)) := +\infty \quad t(s) \equiv 0 \quad (1.18)$$

Από τα παραπάνω φαίνεται ότι η απεικόνιση  $\delta_\infty(\cdot)$  ικανοποιεί τις παραπάνω σχέσεις, οπότε είναι και αυτή μια διακριτή εκτίμηση του  $\mathbb{R}(s)$ . Άρα για μη μηδενικά  $t_1(s), t_2(s) \in \mathbb{R}(s)$  έχουμε ότι

$$\delta_\infty(t_1(s)t_2(s)) := \delta_\infty(t_1(s)) + \delta_\infty(t_2(s)) \quad (1.19)$$

$$\delta_\infty(t_1(s) + t_2(s)) \geq \min\{\delta_\infty(t_1(s)), \delta_\infty(t_2(s))\} \quad (1.20)$$

$$\delta_\infty(1) = \delta_\infty(-1) = 0 \quad (1.21)$$

**Παράδειγμα 2.** Αν  $t(s) = (s+2)/s(s+4)$  τότε  $\delta_\infty(t(s)) = 2-1=1$ . ■

**Λήμμα 1.20.** [1] Κάθε  $t(s) = n(s)/d(s) \in \mathbb{R}(s)$  μπορεί να γραφτεί ως

$$t(s) = \left(\frac{1}{s}\right)^{q_\infty} \frac{n_1(s)}{d_1(s)} \quad (1.22)$$

όπου  $q_\infty := \delta_\infty(t(s))$  και  $n_1(s), d_1(s) \in \mathbb{R}[s]$  με  $\deg n_1(s) = \deg d_1(s)$ . ■

**Ορισμός 1.21.** [1] Αν  $q_\infty > 0$  θα λέμε ότι η  $t(s)$  έχει μηδενικό στο  $s = \infty$  της τάξης  $q_\infty$  και αν  $q_\infty < 0$  τότε λέμε ότι η  $t(s)$  έχει πόλο στο  $s = \infty$  της τάξης  $|q_\infty|$ . ■

Εάν  $\delta_\infty(t(s)) \geq 0$  τότε η  $t(s)$  λέγεται κανονική ρητή συνάρτηση (proper) και αν η ανισότητα είναι αυστηρή τότε η  $t(s)$  λέγεται αυστηρά ρητή συνάρτηση (strictly proper) στο  $s = \infty$ . Το σύνολο των κανονικών ρητών συναρτήσεων το συμβολίζουμε με  $\mathbb{R}_{pr}(s)$ . Τα μοναδιαία στοιχεία  $u(s) \in \mathbb{R}_{pr}(s)$  είναι οι κανονικές ρητές συναρτήσεις για τις οποίες υπάρχει  $u'(s)$  τέτοιο ώστε  $u(s)u'(s) = 1$ . Είναι δηλαδή συναρτήσεις που δεν περιέχουν μηδενικά και στο  $s = \infty$  και είναι της μορφής  $u(s) = n(s)/d(s) \in \mathbb{R}_{pr}(s)$ , όπου  $\deg n(s) = \deg d(s)$ . Τα μοναδιαία στοιχεία του  $\mathbb{R}_{pr}(s)$  λέγονται *δικανονικά στοιχεία (biproper)*.

**Ορισμός 1.22.** [1] Έστω  $A(s) \in \mathbb{R}_{pr}(s)^{p \times p}$ . Ο  $A(s)$  λέγεται  $\mathbb{R}_{pr}(s)$ -αντιστρέψιμος ( $\mathbb{R}_{pr}(s)$ -unimodular) ή δικανονικός εάν και μόνον αν υπάρχει  $\bar{A}(s) \in \mathbb{R}_{pr}(s)^{p \times p}$  τέτοιο ώστε

$$A(s)\bar{A}(s) = I_p \quad (1.23)$$

**Ορισμός 1.23.** [1] Έστω  $A_1(s) \in \mathbb{R}(s)^{p \times m}$ ,  $A_2(s) \in \mathbb{R}(s)^{p \times m}$ . Τότε τα  $A_1(s)$  και  $A_2(s)$  ονομάζονται *ισοδύναμα στο άπειρο* αν υπάρχουν δικανονικοί πίνακες  $A_L(s) \in \mathbb{R}_{pr}(s)^{p \times p}$  και  $A_R(s) \in \mathbb{R}_{pr}(s)^{m \times m}$  τέτοιοι ώστε

$$A_L(s)A_1(s)A_R(s) = A_2(s) \quad (1.24)$$

Αν τα  $A_1(s)$  και  $A_2(s)$  είναι ισοδύναμα στο άπειρο τότε αυτό συμβολίζεται:

$$(A_1(s), A_2(s)) \in E^\infty \quad \text{ή} \quad A_1(s) \sim A_2(s)(E^\infty) \quad (1.25)$$

Η κλάση ισοδυναμίας  $E^\infty : [A(s)]_{E^\infty}$  είναι το σύνολο

$$\begin{aligned} [A(s)]_{E^\infty} &= \{A_i \in \mathbb{R}(s)^{p \times m} \mid A_i = A_L(s)A(s)A_R(s) \text{ όπου} \\ &= A_L(s) \in \mathbb{R}_{pr}(s)^{p \times p}, A_R(s) \in \mathbb{R}_{pr}(s)^{m \times m} \text{ είναι δικανονικά}\} \end{aligned} \quad (1.26)$$

Έστω  $A(s) \in \mathbb{R}(s)^{r \times m}$ ,  $\text{rank} A(s) = r$  και ας είναι το  $S_{A(s)}^\infty(s)$  η Smith-McMillan μορφή του  $A(s)$  στο  $s = \infty$ , τέτοιο ώστε

$$S_{A(s)}^\infty(s) = \text{blockdiag} \left[ s^{q_1}, s^{q_2}, \dots, s^{q_k}, \frac{1}{s^{\hat{q}_k+1}}, \dots, \frac{1}{s^{\hat{q}_r}}, \mathbf{0}_{p-r, m-r} \right] \quad (1.27)$$

όπου  $1 \leq k \leq r$  και  $\hat{q}_i = -q_i, i = k+1, \dots, r$ , τέτοιο ώστε  $q_1 \geq q_2 \geq \dots \geq q_k \geq 0$  να είναι οι τάξεις των πόλων του  $A(s)$  στο  $s = \infty$  και  $\hat{q}_r \geq \hat{q}_{r-1} \geq \dots \geq \hat{q}_{k+1} \geq 0$  είναι οι τάξεις των μηδενικών του  $A(s)$  στο  $s = \infty$ . Έστω  $q_1 > 0$ , υποθέτουμε ότι  $A(s)$  είναι μη-κανονικός και

$$A(s) = A_k s^k + A_{k-1} s^{k-1} + \dots + A_1 s + A_0 + A_{-1} s^{-1} + A_{-2} s^{-2} + \dots \quad (1.28)$$

είναι το ανάπτυγμα Laurent στο  $s = \infty$  του  $A(s)$  όπου  $A_k \neq 0, k > 0$  και  $A_{k+1} = 0, l = 1, 2, \dots$ . Μπορεί να αποδειχτεί ότι  $k = q_1$ .

**Πόρισμα 1.24.** [1] Έστω  $A(s) \in \mathbb{R}(s)^{r \times r}$  και η γραφή του ως πολυωνυμικός πίνακας

$$A(s) = A_k s^k + A_{k-1} s^{k-1} + \dots + A_1 s + A_0 \quad (1.29)$$

$A_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, 2, \dots, k > 0$ . Έστω  $S_{A(s)}^\infty(s)$  είναι όπως στην (1.27), τότε  $k = q_1$ , επομένως

$$A(s) = A_{q_1} s^{q_1} + A_{q_1-1} s^{q_1-1} + \dots + A_1 s + A_0 \quad (1.30)$$

**Πόρισμα 1.25.** [1] Έστω  $A(s) \in \mathbb{R}(s)^{r \times r}$  και γράφεται ως πολυώνυμο στην μορφή (1.28), με  $\text{rank} A(s) = r$  και το  $S_{A(s)}^\infty(s)$  δίνεται από την σχέση (1.27),  $r = m$ . Ας είναι  $\hat{q}_r > 0$  και υποθέτουμε ότι ο  $A(s)$  έχει το λιγότερο ένα μηδενικό στο  $s = \infty$  της τάξης  $|\hat{q}_r|$ . Ας είναι

$$\begin{aligned} A^{-1}(s) &= H_\nu s^\nu + H_{\nu-1} s^{\nu-1} + \dots + H_1 s + H_0 + H_{-1} s^{-1} + H_{-2} s^{-2} + \dots \\ &= \sum_{i=-\nu}^{\infty} H_{-i} s^{-i} \end{aligned} \quad (1.31)$$

το ανάπτυγμα Laurent του  $A^{-1}(s)$  στο  $s = \infty$ , όπου  $H_i \in \mathbb{R}^{r \times r}, i = \nu - j, j = 0, 1, 2, \dots, H_\nu \neq 0$  και  $H_{\nu+j} = 0$  για όλα τα  $j = 1, 2, \dots, \nu > 0$ . Τότε

$$\nu = \hat{q}_r \quad (1.32)$$

$$A^{-1}(s) = H_{\hat{q}_r} s^{\hat{q}_r} + H_{\hat{q}_r-1} s^{\hat{q}_r-1} + \dots + H_1 s + H_0 + H_{-1} s^{-1} + H_{-2} s^{-2} + \dots \quad (1.33)$$

**Ορισμός 1.26.** [1] Οι συντελεστές  $H_j, j \leq \nu$  στην παραπάνω σχέση λέγονται *θεμελιώδεις πίνακες* του πολυωνυμικού πίνακα  $A(s)^{-1}$ . ■

**Θεώρημα 1.27** [1] Έστω  $A(s) \in \mathbb{R}(s)^{r \times m}, \text{rank}_{\mathbb{R}} A(s) = r > 0$ . Ας είναι  $A(s) \sim S_{A(s)}^\infty(E^\infty)$ . Τότε η απεικόνιση  $g: \mathbb{R}(s)^{p \times m} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}; A(s) \rightarrow (q_1, q_2, \dots, q_r)$  είναι αμετάβλητη για το  $E^\infty$ .

Επίσης η απεικόνιση  $f : \mathbb{R}(s)^{p \times m} \rightarrow \mathbb{R}(s)^{p \times m}; A(s) \rightarrow S_{A(s)}^\infty$  είναι μια κανονική απεικόνιση από τον  $E^\infty$  στον  $\mathbb{R}(s)^{p \times m}$  και  $S_{A(s)}^\infty$  είναι μια κανονική μορφή από τον  $E^\infty$  στον  $\mathbb{R}(s)^{p \times m}$ . ■

Για να υπολογίσουμε την Smith-McMillan μορφή του  $A(s)$  στο  $s = \infty$  κάνουμε τα εξής βήματα. Υπολογίζουμε τα  $\xi_k(A) \in \mathbb{Z}$ , που είναι το μικρότερο  $\delta_\infty(\cdot)$  ανάμεσα από τα  $\delta_\infty(\cdot)$  των οριζουσών του  $A(s)$  τάξης  $k, k \in r$ . Στη συνέχεια υπολογίζουμε τις ρητές συναρτήσεις

$$\begin{aligned} f_1(s) &= s^{\xi_0(A) - \xi_1(A)} \\ f_2(s) &= s^{\xi_1(A) - \xi_2(A)} \\ &\vdots \\ f_r(s) &= s^{\xi_{r-1}(A) - \xi_r(A)} \end{aligned} \quad \xi_0(A) := 0 \quad (1.34)$$

και τέλος υπολογίζουμε το  $S_{A(s)}^\infty = \text{blockdiag}[f_1(s), f_2(s), \dots, f_r(s), 0_{p-r, m-r}]$ .

**Παράδειγμα 3.** Έστω ο  $A(s)$

$$A(s) = \begin{bmatrix} s+2 & 0 \\ s^2+4s+3 & -1 \end{bmatrix}$$

άρα έχουμε  $\xi_0(A) := 0$ ,  $\xi_1(A) = \min\{-1, -2, 0, +\infty\} = -2$ ,  $\xi_2(A) = -1$  και

$$f_1(s) = s^{\xi_0(A) - \xi_1(A)} = s^{0 - (-2)} = s^2$$

$$f_2(s) = s^{\xi_1(A) - \xi_2(A)} = s^{-2 - (-1)} = s^{-1}$$

με  $q_1 = 2, q_2 = -1$  και Smith-McMillan μορφή στο  $s = \infty$  την εξής:

$$S_{A(s)}^\infty = \begin{bmatrix} s^2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix}.$$

Παρατηρούμε δηλαδή ότι ο  $A(s)$  έχει έναν πόλο τάξης 2 στο  $s = \infty$  και ένα μηδενικό τάξης 1,  $\hat{q}_2 = -q_2 = 1$ . ■

### 1.6 Υπολογισμός του αντιστρόφου ενός πολυωνυμικού πίνακα $A(s)$

Θα υπολογίσουμε τον αντίστροφο του πολυωνυμικού πίνακα  $A(s)$  με βάση τους συντελεστές του προσαρτημένου πίνακα και της διακρίνουσας του  $A(s)$ , όπως στο [8].

Έστω ό πολυωνυμικός πίνακας  $A(s) = A_{q_1}s^{q_1} + A_{q_1-1}s^{q_1-1} + \dots + A_1s + A_0$ ,  $\text{rank}_{\mathbb{R}} A(s) = r$ .

Παρατηρούμε ότι  $A(s) = Iz - (Iz - A(s)) = Iz - \bar{A}(s)$ , όπου

$$\bar{A} = Iz - A(s) = Iz - (A_{q_1}s^{q_1} + \dots + A_1s + A_0) \quad (1.35)$$

Με την χρήση του αλγόριθμου Leverrier που ισχύει για σταθερούς πίνακες μπορεί να υπολογιστεί ο αντίστροφος του πίνακα  $A(s)$ , θεωρώντας ως σταθερό τον πίνακα  $Iz - A(s)$  ή αλλιώς τον  $\bar{A}$ . Ο ένας τρόπος για τον υπολογισμό του αντιστρόφου είναι η χρήση των αναδρομικών σχέσεων της παρακάτω σχέσης:

$$\left. \begin{aligned} R_0(s) &= I_r & p_1(s) &= -\text{tr}[\bar{A}] \\ R_1(s) &= \bar{A}R_0(s) + p_1I_r, & p_2(s) &= -\frac{1}{2}\text{tr}[\bar{A}R_1(s)] \\ R_2(s) &= \bar{A}R_1(s) + p_2I_r, & p_3(s) &= -\frac{1}{3}\text{tr}[\bar{A}R_2(s)] \\ &\vdots & &\vdots \\ R_{r-1}(s) &= \bar{A}R_{r-2}(s) + p_{r-1}I_r, & p_r(s) &= -\frac{1}{r}\text{tr}[\bar{A}R_{r-1}(s)] \end{aligned} \right\} \quad (1.36)$$

Οι πίνακες  $R_i(s) \in \mathbb{R}[s]^{r \times r}$ ,  $i = 0, 1, \dots, r-1$  μπορούν να υπολογιστούν από την παρακάτω σχέση:

$$R_i(s) = \bar{A}^i + p_1(s)\bar{A}^{i-1} + p_2(s)\bar{A}^{i-2} + \dots + p_i(s)I_r \quad (1.37)$$

Οι πίνακες  $R_i(s)$  δεν είναι άλλο παρά πίνακες συντελεστών των δυνάμεων του  $z$ , αλλά εξαρτώνται από το ίδιο το  $s$ . Εφόσον οι πίνακες δεν εξαρτώνται από το  $z$ , για λόγους απλότητας θεωρούμε ότι  $z = 0$ . Άρα η σχέση (1.35) γράφεται ως εξής:

$$\bar{A} = -A(s) = -(A_{q_1}s^{q_1} + \dots + A_1s + A_0) \quad (1.38)$$

Ένας άλλος τρόπος υπολογισμού του αντιστρόφου πίνακα του  $A(s)$  είναι με τον υπολογισμό των πινάκων  $R_{r-1}(s)$ ,  $p_r(s)$ , οι οποίοι ορίζονται παρακάτω.

Βλέπουμε ότι το  $R_i(s)$  και το  $p_i(s)$  μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$\begin{aligned} R_i(s) &= \sum_{k=0}^{iq_1} R_{ik}s^k, & i &= 0, 1, \dots, r-1 \\ p_i(s) &= \sum_{k=0}^{iq_1} p_{ik}s^k, & i &= 1, 2, \dots, r \end{aligned} \quad (1.39)$$

όπου  $R_{ik}$ ,  $p_{ik}$  είναι σταθεροί πίνακες συντελεστών των δυνάμεων του  $s^k$  αντίστοιχα. Οι πίνακες συντελεστές  $R_{r-1,k}(s)$  και οι συντελεστές  $p_{rk}(s)$  ορίζονται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} R(s) = R_{r-1}(s) = -adj\bar{A} &= \sum_{k=0}^{(r-1)q_1} R_{r-1,k} s^k \\ p(s) = p_r(s) = \det[\bar{A}(s)] &= \sum_{k=0}^{rq_1} p_{rk} s^k \end{aligned} \quad (1.40)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (1.39) στην αναδρομική σχέση (1.36), λαμβάνοντας υπόψη την σχέση (1.38) και εξισώνοντας τους συντελεστές των δυνάμεων του  $s$  και στις δυο μεριές κάθε εξίσωσης, έχουμε τις εξής αναδρομικές εξισώσεις που μας δίνουν τα  $p_{i+1,k}, R_{i,k}, i = 0, 1, \dots, r-1, k = 1, 2, \dots, iq_1$ .

Ο αλγόριθμος υπολογισμού του αντίστροφου  $A(s)$

$$\text{Αρχικά: } R_{00} = I_r \quad (1.41)$$

$$\text{Οριακές συνθήκες: } R_{ik} = 0 \text{ για } k > iq_1 \text{ και } i = 0, 1, \dots, r-1 \quad (1.42)$$

$$\text{Α. αναδρομική σχέση για το } p_i(s): p_{i+1,k}(s) = \frac{1}{(i+1)} \text{tr} \left[ \sum_{j=0}^k A_j R_{i,k-j} \right] \text{ αν } k = 0, 1, \dots, (i+1)q_1$$

για  $i = 0, 1, \dots, r-1$ . (1.43)

$$\text{Β. αναδρομική σχέση για το } R_i(s): R_{i+1,k}(s) = - \left[ \sum_{j=0}^k A_j R_{i,k-j} \right] + p_{i+1,k} I_r \text{ αν } k = 0, 1, \dots, (i+1)q_1$$

για  $i = 0, 1, \dots, r-2$ . (1.44)

Τέλος:

$$\begin{aligned} R_k &= R_{r-1,k} \quad k = 0, 1, \dots, (r-1)q_1 \\ p_k &= p_{r,k} \quad k = 0, 1, \dots, rq_1 \end{aligned} \quad (1.45)$$

Φαίνεται λοιπόν ότι ο αλγόριθμος του αντίστροφου είναι δισδιάστατος αλγόριθμος καθώς εξαρτάται από δυο ανεξάρτητες μεταβλητές  $i, k$ .

**Παράδειγμα 4.** Θα υπολογίσουμε τον αντίστροφο του πολυωνυμικού πίνακα  $A(s)$  με τον παραπάνω τρόπο. Έστω ότι

$$A(s) = \begin{bmatrix} 1 & s^3 & 0 \\ 0 & 1 & s \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A_3} s^3 + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A_2} s^2 + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A_1} s + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A_0}$$



Παρατηρούμε ότι  $q_1 = 3, r = 3$ , άρα θέλουμε να υπολογίσουμε τα  $R_2(s)$  και  $p_3(s)$ . Από τις οριακές συνθήκες έχουμε ότι  $R_{00} = I_3$ . Για να υπολογίσουμε τους πίνακες  $R$  και τα  $p$  θα δείξουμε αναλυτικά πως τα υπολογίζουμε, μέσω των αναδρομικών σχέσεων, μόνο για  $i = 0$ .

Από την σχέση λοιπόν  $p_{i+1,k}(s) = \frac{1}{(i+1)} \text{tr} \left[ \sum_{j=0}^k A_j R_{i,k-j} \right]$  για  $k = 0, 1, \dots, (i+1)q_1$  και  $i = 0, 1, 2$ ,

έχουμε ότι

$\rightarrow i = 0$

$$k = 0 \quad p_{1,0} = \text{tr}[A_0 R_{0,0}] = \text{tr}[A_0] = 3$$

$$k = 1 \quad p_{1,1} = \text{tr}[A_0 R_{0,1} + A_1 R_{0,0}] = 0$$

$$k = 2 \quad p_{1,2} = \text{tr}[A_0 R_{0,2} + A_1 R_{0,1} + A_2 R_{0,0}] = 0$$

$$k = 3 \quad p_{1,3} = \text{tr}[A_0 R_{0,3} + A_1 R_{0,2} + A_2 R_{0,1} + A_3 R_{0,0}] = 0$$

Στη συνέχεια από την σχέση  $R_{i+1,k}(s) = - \left[ \sum_{j=0}^k A_j R_{i,k-j} \right] + p_{i+1,k} I_r$  για  $k = 0, 1, \dots, (i+1)q_1$  και

$i = 0, 1$ , έχουμε ότι

$\rightarrow i = 0$

$$k = 0 \quad R_{1,0} = -A_0 R_{00} + p_{10} I_3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$k = 1 \quad R_{1,1} = -[A_0 R_{0,1} + A_1 R_{0,0}] + p_{1,1} I_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$k = 2 \quad R_{1,2} = -[A_0 R_{0,2} + A_1 R_{0,1} + A_2 R_{0,0}] + p_{1,2} I_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$k = 3 \quad R_{1,3} = -[A_0 R_{0,3} + A_1 R_{0,2} + A_2 R_{0,1} + A_3 R_{0,0}] + p_{1,3} I_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε τα

$p_{2,0} = 3$  και  $p_{2,1} = p_{2,2} = p_{2,3} = p_{2,4} = p_{2,5} = p_{2,6} = 0$ , καθώς και τους πίνακες

$$R_{2,0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R_{2,1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_{2,3} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad R_{2,4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad R_{2,2} = R_{2,5} = R_{2,6} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Τέλος  $p_{3,0} = 1$  και  $p_{3,1} = p_{3,2} = p_{3,3} = p_{3,4} = p_{3,5} = p_{3,6} = p_{3,7} = p_{3,8} = p_{3,9} = 0$ . Επομένως μπορούμε να βρούμε το

$$\begin{aligned} R(s) = R_2(s) &= \sum_{k=0}^6 R_{2,k} s^k = R_{2,0} + R_{2,1}s + R_{2,2}s^2 + R_{2,3}s^3 + R_{2,4}s^4 + R_{2,5}s^5 + R_{2,6}s^6 \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} s^3 + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} s^4 \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -s^3 & s^4 \\ 0 & 1 & -s \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(s) = p_3(s) &= \sum_{k=0}^9 p_{3,k} s^k \\ &= p_{3,0} + p_{3,1}s + p_{3,2}s^2 + p_{3,3}s^3 + p_{3,4}s^4 + p_{3,5}s^5 + p_{3,6}s^6 + p_{3,7}s^7 + p_{3,8}s^8 + p_{3,9}s^9 \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } A(s)^{-1} = \frac{1}{p(s)} R(s) = \begin{bmatrix} 1 & -s^3 & s^4 \\ 0 & 1 & -s \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \blacksquare$$

**Παράδειγμα 5.** Έστω ο πολυωνυμικός πίνακας

$$B(s) = \begin{bmatrix} s+2 & 0 \\ s^2+4s+3 & -1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{B_2} s^2 + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}}_{B_1} s + \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}}_{B_0}$$

Με  $q_1 = 2, r = 2$ . Άρα χρειάζεται να υπολογίσουμε τα  $R_1(s)$  και  $p_2(s)$ . Επομένως έχουμε ότι

$$p_{1,0} = 1 \quad p_{1,1} = 1 \quad p_{1,2} = p_{1,3} = 0$$

$$R_{1,0} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \quad R_{1,1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \quad R_{1,2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad R_{1,3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$p_{2,0} = -2 \quad p_{2,1} = -1 \quad p_{2,2} = p_{2,3} = p_{2,4} = p_{2,5} = p_{2,6} = 0$$

$$\begin{aligned}
 R(s) = R_1(s) &= R_{1,0} + R_{1,1}s + R_{1,2}s^2 + R_{1,3}s^3 \\
 &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}s + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}s^2 \\
 &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -s^2 - 4s - 3 & s + 2 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$p(s) = p_2(s) = -2 - s$$

$$\text{Άρα } B(s)^{-1} = \frac{1}{p(s)} R(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+2} & 0 \\ \frac{(s+1)(s+3)}{s+2} & -1 \end{bmatrix}. \blacksquare$$

**Παράδειγμα 6.** Στον παραπάνω πίνακα  $B(s)$  θα βρούμε τον αντίστροφο πίνακα με τους πίνακες από την σχέση (1.36) που αναφέρουμε παραπάνω. Έστω ότι

$$\bar{B}(s) = -B(s) = \begin{bmatrix} -s-2 & 0 \\ -s^2-4s-3 & 1 \end{bmatrix}$$

τότε θα χρειαστεί να υπολογίσουμε τα  $R_1(s)$  και  $p_2(s)$ . Άρα  $R_{00} = I_2$  και  $p_1(s) = -tr[\bar{B}] = s+1$ . Από τις αναδρομικές σχέσεις (1.36) έχουμε ότι

$$R_1(s) = \bar{B}R_0(s) + p_1I_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -s^2-4s-3 & s+2 \end{bmatrix}$$

$$p_2(s) = -\frac{1}{2}tr[\bar{B}R_1(s)] = -(s+2)$$

$$\text{Επομένως } B(s)^{-1} = \frac{1}{p_2(s)} R_1(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+2} & 0 \\ \frac{(s+1)(s+3)}{s+2} & -1 \end{bmatrix}, \text{ πράγμα που μας δίνει τον ίδιο}$$

αντίστροφο με την προηγούμενη μέθοδο.  $\blacksquare$

### 1.7 Υπολογισμός του αναπτύγματος Laurent του αντιστρόφου ενός πολυωνυμικού πίνακα

Θα προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε το ανάπτυγμα Laurent του  $A(s)^{-1}$  με βάση τους πίνακες  $A_i, i = 0, 1, \dots, q_1$ .

$$\text{Γνωρίζουμε ότι } A(s)^{-1} = \det(A(s))^{-1} \text{adj}(A(s)) = p_r(s)^{-1} R_{r-1}(s) \quad (1.46)$$

$$\text{ή ισοδύναμα ότι } p_r(s)A(s)^{-1} = R_{r-1}(s) \quad (1.47)$$

Αντικαθιστώντας τα  $R_{r-1}(s)$ ,  $p_r(s)$  και  $A^{-1}(s)$  από την (1.39), (1.40) και (1.31) αντίστοιχα στην (1.47) και εξισώνοντας τους πίνακες συντελεστές κάθε δύναμης του  $s$ , έχουμε τις εξής σχέσεις:

$$\left. \begin{aligned} p_{r,rq_1} H_\nu &= 0 \\ p_{r,rq_1} H_{\nu-1} + p_{r,rq_1-1} H_\nu &= 0 \\ &\vdots \\ p_{r,rq_1} H_{-q_1+1} + p_{r,rq_1-1} H_{-q_1} + \dots + p_{r,(r-1)q_1-(\nu-1)} H_\nu &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.48)$$

$$\left. \begin{aligned} p_{r,rq_1} H_{-q_1+1} + p_{r,rq_1-1} H_{-q_1} + \dots + p_{r,(r-1)q_1-(\nu-1)} H_\nu &= R_{r-1,(r-1)q_1} \\ p_{r,rq_1} H_{-q_1-1} + p_{r,rq_1-1} H_{-q_1} + \dots + p_{r,(r-1)q_1-(\nu+1)} H_\nu &= R_{r-1,(r-1)q_1-1} \\ &\vdots \\ p_{r,rq_1} H_{-rq_1} + p_{r,rq_1-1} H_{-rq_1} + \dots + p_{r,0} H_0 &= R_{r-1,0} \end{aligned} \right\} \quad (1.49)$$

$$\left. \begin{aligned} p_{r,rq_1} H_{-rq_1} + p_{r,rq_1-1} H_{-rq_1+1} + \dots + p_{r,0} H_0 &= R_{r-1,0} \\ p_{r,rq_1} H_{-rq_1-1} + p_{r,rq_1-1} H_{-rq_1} + \dots + p_{r,0} H_{-1} &= 0 \\ p_{r,rq_1} H_{-rq_1-2} + p_{r,rq_1-1} H_{-rq_1-1} + \dots + p_{r,0} H_{-2} &= 0 \\ &\vdots \end{aligned} \right\} \quad (1.50)$$

Οι εξισώσεις της (1.48) μπορούν να γραφτούν σε μορφή πινάκων, ως εξής:

$$\begin{bmatrix} p_{r,rq_1} I_n & 0 & \cdots & 0 \\ p_{r,rq_1-1} I_n & p_{r,rq_1} I_n & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ p_{r,(r-1)q_1-(\nu-1)} I_n & \cdots & p_{r,rq_1} I_n & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_\nu \\ H_{\nu-1} \\ \vdots \\ H_{-rq_1+1} \end{bmatrix} = 0 \quad (1.51)$$

Η πρώτη σχέση μας δίνει  $p_{r,rq_1} H_\nu = 0$ . Από την στιγμή που έχουμε ήδη ορίσει  $H_\nu \neq 0$ , έχουμε  $p_{r,rq_1} = 0$ .

Ομοίως, αν πάρουμε την δεύτερη εξίσωση της σχέσης (1.50), λαμβάνοντας υπόψη την (1.52) και ότι  $H_\nu \neq 0$ , έχουμε ως αποτέλεσμα ότι  $p_{r,rq_1-1} = 0$ .

Κάνοντας παρόμοιες παρατηρήσεις για τις υπόλοιπες εξισώσεις της (1.51) καταλήγουμε στα εξής αποτελέσματα:

$$p_{r,i} = 0, \quad i = rq_1, rq_1 - 1, \dots, (r-1)q_1 - (\nu - 1) \quad (1.54)$$

Λαμβάνοντας υπόψη την (1.54) μπορεί η (1.42) μπορεί να ξαναγραφτεί ως:

$$p_r(s) = \sum_{k=0}^{(r-1)q_1 - \nu} p_{i,k} s^k \quad (1.55)$$

Το οποίο είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του  $A(s)$ . Επομένως καταλήγουμε στο παρακάτω πόρισμα.

**Πόρισμα 1.28.** [8] Ας έχουμε τον πολυωνυμικό πίνακα  $A(s)$  όπως στην (1.30). Τότε ο βαθμός  $\mu$  του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του αντίστροφου πίνακα του  $A(s)$  είναι

$$\mu = (r-1)q_1 - \nu \quad (1.56)$$

Χρησιμοποιώντας την (1.54), η εξίσωση (1.49) μπορεί να γραφτεί ως πίνακας στην μορφή:

$$P \times H = R \quad (1.57)$$

όπου

$$P = \begin{bmatrix} p_{r,(r-1)q_1 - \nu} I_n & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ p_{r,(r-1)q_1 - (\nu+1)} I_n & p_{r,(r-1)q_1 - \nu} I_n & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \ddots & \vdots \\ p_{r,0} I_n & p_{r,1} I_n & \cdots & p_{r,(r-1)q_1 - \nu} I_n & \cdots & 0 \\ 0 & p_{r,0} I_n & \cdots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & p_{r,0} I_n & \cdots & p_{r,(r-1)q_1 - \nu} I_n \end{bmatrix} \quad (1.58)$$

$$H = \begin{bmatrix} H_\nu \\ H_{\nu-1} \\ \vdots \\ H_{\nu - [(r-1) - \nu]} \\ \vdots \\ H_{-[(r-1) - \nu]} \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad R = \begin{bmatrix} R_{r-1,(r-1)q_1} \\ R_{r-1,(r-1)q_1 - 1} \\ \vdots \\ R_{r-1,\nu} \\ \vdots \\ R_{r-1,0} \end{bmatrix}$$

Εφόσον  $R_{r-1,(r-1)q_1} \neq 0$  (δες 1.45) και  $H_\nu \neq 0$  από τις πρώτες παραπάνω εξισώσεις έχουμε ότι  $p_{r,(r-1)q_1 - \nu} \neq 0$ . (1.59)

Επομένως ο τετραγωνικός Toeplitz πίνακας  $P$  στην (1.57) είναι πάντα ομαλός. Άρα μπορούμε να βρούμε μια μοναδική λύση  $H = P^{-1}R$  που προσδιορίζει τον πρώτο  $(r-1)q_1 + 1$  πίνακα  $H_i, i = \nu, \nu-1, \dots, -[(r-1)q_1 - \nu]$ . Λόγω της μορφής Toeplitz του  $P$ , ο αντίστροφος  $P^{-1}$  μπορεί να γραφτεί ως

$$D = P^{-1} = \begin{bmatrix} d_0 I_r & 0 & \cdots & 0 \\ d_1 I_r & d_0 I_r & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \\ d_{(r-1)q_1} I_r & d_{(r-1)q_1-1} I_r & \cdots & d_0 I_r \end{bmatrix} \quad (1.60)$$

$$\text{όπου } d_0 = \frac{1}{P_{r,(r-1)q_1-\nu}} \text{ και} \quad (1.61)$$

$$d_j = (-1)^j \left( \frac{1}{P_{r,(r-1)q_1-\nu}} \right)^{j+1} \times \begin{bmatrix} P_{r,(r-1)q_1-(\nu+1)} & P_{r,(r-1)q_1-(\nu+2)} & & P_{r,(r-1)q_1-(\nu+j)} \\ P_{r,(r-1)q_1-\nu} & P_{r,(r-1)q_1-(\nu+1)} & \cdots & P_{r,(r-1)q_1-(\nu+j+1)} \\ 0 & P_{r,(r-1)q_1-\nu} & \cdots & P_{r,(r-1)q_1-(\nu+j+2)} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & P_{r,(r-1)q_1-\nu} & P_{r,(r-1)q_1-(\nu-1)} \end{bmatrix} \quad (1.62)$$

for  $j = 1, 2, \dots, (r-1)q_1$

Χρησιμοποιώντας την (1.60), η (1.59) δίνει την εξής εξίσωση:

$$H = P^{-1}R \quad (1.63)$$

που δίνει τους πρώτους  $(r-1)q_1 + 1$  πίνακες  $H_i, i = \nu, \nu-1, \dots, -[(r-1)q_1 + 1]$ . Οι πίνακες  $H_j, j = -[(r-1)q_1 - \nu + 1], -[(r-1)q_1 - \nu + 2], \dots, -\infty$ , μπορούν να υπολογιστούν αναδρομικά από τις εξισώσεις (1.50), οι οποίες, με βάση την (1.54), μπορούν να γραφτούν σε μορφή πίνακα ως εξής:

$$\begin{bmatrix} p_{r,0} & p_{r,1} & \cdots & p_{r,(r-1)q_1-\nu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{-1} & H_{-2} & \cdots \\ H_{-2} & H_{-3} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \\ H_{-[(r-1)q_1-\nu+1]} & H_{-[(r-1)q_1-\nu+2]} & \cdots \end{bmatrix} = 0 \quad (1.64)$$

Η πρώτη εξίσωση του (1.64) μας δίνει ότι

$$p_{r,0}H_{-1} + p_{r,1}H_{-2} + \cdots + p_{r,(r-1)q_1-\nu}H_{-[(r-1)q_1-\nu+1]} = 0 \quad (1.65)$$

Στην (1.65) ξέρουμε ότι οι πίνακες  $H_k, k = -1, -2, \dots, -(r-1)q_1 - \nu$ . Επίσης, από την (1.61) είναι γνωστό ότι  $p_{r,(r-1)q_1-\nu} \neq 0$ . Επομένως η (1.65) μπορεί να λυθεί για  $H_{-(r-1)q_1-\nu+1}$  ως εξής:

$$H_{-(r-1)q_1-\nu+1} = -\frac{P_{r,0}}{P_{r,(r-1)q_1-\nu}} H_{-1} - \frac{P_{r,1}}{P_{r,(r-1)q_1-\nu}} H_{-2} - \dots - \frac{P_{r,(r-1)q_1-(\nu+1)}}{P_{r,(r-1)q_1-\nu}} H_{-(r-1)q_1-\nu} \quad (1.66)$$

Αν πάρουμε την δεύτερη εξίσωση της (1.64) έχουμε ότι

$$H_{-(r-1)q_1-\nu+2} = -\frac{P_{r,0}}{P_{r,(r-1)q_1-\nu}} H_{-2} - \frac{P_{r,1}}{P_{r,(r-1)q_1-\nu}} H_{-3} - \dots - \frac{P_{r,(r-1)q_1-(\nu+1)}}{P_{r,(r-1)q_1-\nu}} H_{-(r-1)q_1-\nu+1} \quad (1.67)$$

Ο γενικός τύπος των αναδρομικών σχέσεων των πινάκων  $H_k, k = -(r-1)q_1 - \nu + 1, -(r-1)q_1 - \nu + 2, \dots, -\infty$  δίνεται από το παρακάτω μοντέλο ARMA:

$$H_{-[\mu+k]} = -\sum_{i=0}^{\mu-1} \frac{P_{r,i}}{P_{r,m}} H_{-[i+k]} \quad (1.68)$$

για  $k = 1, 2, \dots, -\infty$  όπου  $\mu = (r-1)q_1 - \nu$ .

**Παράδειγμα 7.** Θα υπολογίσουμε το ανάπτυγμα Laurent του αντίστροφου πίνακα του

$$N(s) = \begin{bmatrix} s+2 & 0 \\ s^2+4s+3 & -1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{N_2} s^2 + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}}_{N_1} s + \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}}_{N_0}$$

Παρατηρούμε ότι  $q=2, r=2$ , άρα σύμφωνα με την προηγούμενη παράγραφο ψάχνουμε τους πίνακες  $R_1(s), p_2(s)$ . Από τις αρχικές συνθήκες έχουμε ότι  $R_{00} = I_2$ . Επομένως βρίσκουμε ότι:

$$\begin{aligned} p_{1,0} &= 1 & p_{1,1} &= 1 & p_{1,2} &= 0 \\ p_{2,0} &= -2 & p_{2,1} &= -1 & p_{2,2} &= p_{2,3} = p_{2,4} = 0 \\ R_{1,0} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} & R_{1,1} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} & R_{1,2} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } R(s) = R_1(s) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -s^2 - 4s - 3 & s + 2 \end{bmatrix} \text{ και } p(s) = p_2(s) = -(s+2).$$

$$\text{Επομένως } N(s)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+2} & 0 \\ \frac{(s+1)(s+3)}{s+2} & -1 \end{bmatrix}.$$

Θα βρούμε την Smith Mc-Millan μορφή του  $N(s)$ . Υπολογίζουμε τα  $\xi_0 = 0$ ,  $\xi_1 = -2$ ,  $\xi_2 = -1$  και  $f_1(s) = s^2$ ,  $f_2(s) = s^{-1}$ . Άρα προκύπτει ο πίνακας

$$S_{N(s)}^\infty = \begin{bmatrix} s^2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix}$$

και παρατηρούμε ότι  $\nu = 1$ . Καταλήγουμε λοιπόν να υπολογίσουμε τον πίνακα

$$\begin{bmatrix} p_{2,1}I_2 & 0 & 0 \\ p_{2,0}I_2 & p_{2,1}I_2 & 0 \\ 0 & p_{2,0}I_2 & p_{2,1}I_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1 \\ H_0 \\ H_{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{1,2} \\ R_{1,1} \\ R_{1,0} \end{bmatrix}$$

Αυτό που πρέπει ουσιαστικά να λύσουμε είναι  $H = P^{-1}R$ , όπου

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} d_0I_2 & 0 & 0 \\ d_1I_2 & d_0I_2 & 0 \\ d_2I_2 & d_1I_2 & d_0I_2 \end{bmatrix}$$

και  $d_0 = \frac{1}{p_{2,1}} = -1$ ,  $d_1 = (-1) \left( \frac{1}{p_{2,1}} \right)^2 \mid p_{2,0} \mid = 2$ ,  $d_2 = (-1)^2 \left( \frac{1}{p_{2,1}} \right)^3 \begin{vmatrix} p_{2,0} & p_{2,-1} \\ p_{2,1} & p_{2,0} \end{vmatrix} = -4$ , άρα

$$\begin{bmatrix} H_1 \\ H_0 \\ H_{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Δηλαδή } H_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad H_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \quad H_{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Υπολογίζουμε ότι  $\mu = (r-1)q_1 - \nu = 1$ , άρα για να βρούμε τους αναδρομικούς πίνακες

χρησιμοποιούμε τον τύπο  $H_{-[1+k]} = -\frac{p_{2,0}}{p_{2,1}} H_{-k}$ .

$$\rightarrow k=1 \quad H_{-2} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$



$$\rightarrow k=2 \quad H_{-3} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow k=3 \quad H_{-4} = \begin{bmatrix} -8 & 0 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow k=4 \quad H_{-5} = \begin{bmatrix} 16 & 0 \\ -16 & 0 \end{bmatrix} \text{ κ.ο.κ. } \blacksquare$$

**Παράδειγμα 8.** Θα βρούμε τους θεμελιώδεις πίνακες και στην συνέχεια το ανάπτυγμα Laurent του πολυωνυμικού πίνακα

$$A(s) = \begin{bmatrix} s+2 & s^3 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A_3} s^3 + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A_2} s^2 + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A_1} s + \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A_0}$$

Βλέπουμε ότι  $q_1 = 3, r = 2$ . Η Smith-McMillan μορφή του πίνακα είναι

$$S_{A(s)}^\infty = \begin{bmatrix} s^3 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix}$$

Επομένως  $\hat{q}_2 = \nu = 1$ . Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε τους πίνακες  $R_1(s)$  και  $p_2(s)$ , με τον τρόπο που δείξαμε στην προηγούμενη παράγραφο. Έχουμε λοιπόν ότι

$$p_{1,0} = 3 \quad p_{1,1} = 2 \quad p_{1,2} = p_{1,3} = 0$$

$$p_{2,0} = 2 \quad p_{2,1} = 3 \quad p_{2,2} = 1 \quad p_{2,3} = p_{2,4} = p_{2,5} = p_{2,6} = 0 \text{ και}$$

$$R_{1,0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad R_{1,1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R_{1,2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad R_{1,3} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Άρα  $R(s) = \begin{bmatrix} s+1 & -s^3 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix}$  και  $p(s) = 2 + 3s + s^2 = (s+1)(s+2)$ . Έτσι

$$A(s)^{-1} = \frac{1}{p(s)} R(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+2} & \frac{-s^3}{(s+1)(s+2)} \\ 0 & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}.$$

Υπολογίζουμε τον πίνακα

$$\begin{bmatrix} p_{2,2}I_2 & 0 & 0 & 0 \\ p_{2,1}I_2 & p_{2,2}I_2 & 0 & 0 \\ p_{2,0}I_2 & p_{2,1}I_2 & p_{2,2}I_2 & 0 \\ 0 & p_{2,0}I_2 & p_{2,1}I_2 & p_{2,2}I_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1 \\ H_0 \\ H_{-1} \\ H_{-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{1,3} \\ R_{1,2} \\ R_{1,1} \\ R_{1,0} \end{bmatrix}.$$

Επειδή  $P \times H = R \Leftrightarrow H = P^{-1}R$ , βρίσκουμε τον πίνακα

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} d_0 I_2 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 I_2 & d_0 I_2 & 0 & 0 \\ d_2 I_2 & d_1 I_2 & d_0 I_2 & 0 \\ d_3 I_2 & d_2 I_2 & d_1 I_2 & d_0 I_2 \end{bmatrix},$$

$$\text{όπου} \quad d_0 = \frac{1}{p_{2,2}} = 1, \quad d_1 = (-1) \frac{1}{p_{2,2}} \times |p_{2,1}| = -3, \quad d_2 = \begin{vmatrix} p_{2,1} & p_{2,0} \\ p_{2,2} & p_{2,1} \end{vmatrix} = 7,$$

$$d_3 = (-1) \begin{vmatrix} p_{2,1} & p_{2,0} & p_{2,-1} \\ p_{2,2} & p_{2,1} & p_{2,0} \\ 0 & p_{2,2} & p_{2,1} \end{vmatrix} = -15.$$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -15 & 0 & 7 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -15 & 0 & 7 & 0 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Επομένως

$$\begin{bmatrix} H_1 \\ H_0 \\ H_{-1} \\ H_{-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \\ 1 & -7 \\ 0 & 1 \\ 2 & 15 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \text{ άρα } H_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, H_0 = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, H_{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -7 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, H_{-2} = \begin{bmatrix} 2 & 15 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Εφόσον  $\mu = 2$ , θα υπολογίσουμε τους πίνακες

$$H_{-[2+k]} = -\sum_{i=0}^1 \frac{p_{2,i}}{p_{2,2}} H_{-[i+k]}, \text{ για } k = 1, 2, \dots, +\infty$$

$$k = 1 \quad H_{-3} = -\sum_{i=0}^1 \frac{p_{2,i}}{p_{2,2}} H_{-[i+1]} = \begin{bmatrix} -8 & -31 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$k = 2 \quad H_{-4} = -\sum_{i=0}^1 \frac{p_{2,i}}{p_{2,2}} H_{-[i+2]} = \begin{bmatrix} 20 & 63 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \text{ κ.ο.κ. } \blacksquare$$

## Κεφάλαιο 2

### Διαίρεση πολυωνυμικών πινάκων

Στο κεφάλαιο αυτό θα αναφερθούμε στο κύριο μέρος αυτής της εργασίας. Θα δώσουμε ορισμούς και μια ολοκληρωμένη εικόνα για το πώς γίνεται η διαίρεση πολυωνυμικών πινάκων.

#### 2.1 Ευκλείδεια διαίρεση

Έστω  $a, b \in \mathbb{Z}$ . Υποθέτουμε ότι υπάρχει ένας  $c \in \mathbb{Z}$  τέτοιος, ώστε να ισχύει  $a = bc$ . Θα λέμε ότι ο  $a$  είναι *διαιρετός* του  $b$ , ή ότι ο  $a$  είναι *πολλαπλάσιο* του  $b$ . Επίσης θα λέμε ότι ο  $b$  είναι *διαιρέτης* του  $a$ , ή ότι ο  $b$  *διαιρεί* τον  $a$ . Θα γράφουμε  $b|a$  και αν ο  $b$  δεν διαιρεί τον  $a$ ,  $b \nmid a$ .

**Θεώρημα 2.1.** [14] Έστω  $a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$ . Τότε, υπάρχει μοναδικό ζεύγος  $(q, r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  τέτοιο, ώστε  $a = bq + r$  και  $0 \leq r < |b|$ .

**Απόδειξη.** Αρχικά πρέπει να αποδείξουμε την ύπαρξη ενός τέτοιου ζεύγους ακεραίων  $(q, r)$ . Ας υποθέσουμε ότι  $b > 0$ . Θεωρούμε το σύνολο  $A = \{a - bx / x \in \mathbb{Z}\}$  και έστω  $S$  το σύνολο όλων των φυσικών αριθμών που περιέχονται σε αυτό και  $S \neq \emptyset$ . Πραγματικά, ο ακέραιος  $c = a - b(-|a|)$  είναι στοιχείο του  $A$ . Επιπλέον, καθώς  $b \geq 1$ , έχουμε  $c = a - b(-|a|) = a + b|a| = |a|(b \pm 1) \geq 0$ . Άρα  $c \in S$ . Το  $S$  είναι μη κενό, επομένως σύμφωνα με την πρόταση της αρχής της καλής διάταξης, θα έχει μοναδικό ελάχιστο στοιχείο. Υπάρχει άρα  $q \in \mathbb{Z}$  τέτοιο, ώστε ο ακέραιος  $r = a - bq$ , ώστε να είναι το ελάχιστο στοιχείο του  $S$ .

Αν  $r \geq b$ , τότε  $0 \leq r - b = a - bq - b = a - b(q + 1)$ , δηλαδή  $r - b \in S$ . Επειδή  $b \neq 0$ , έχουμε  $r - b < r$ , που αντιβαίνει το γεγονός ότι το  $r$  είναι ελάχιστο στοιχείο του  $S$ . Επομένως ισχύει ότι  $0 \leq r < b$ . Υποθέτουμε ότι  $b < 0$ . Τότε, σύμφωνα με τα παραπάνω, υπάρχουν  $q, r \in \mathbb{Z}$  με  $0 \leq r < |b|$  και  $a = |b|q + r = (-q)b + r$ . Έτσι δείξαμε ότι για κάθε  $a, b \in \mathbb{Z}$  με  $b \neq 0$  υπάρχει ζεύγος  $(q, r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  τέτοιο, ώστε

$$a = bq + r \text{ και } 0 \leq r < |b| \quad (2.1)$$

Στη συνέχεια για να αποδείξουμε την μοναδικότητα του ζεύγους  $(q, r)$ , υποθέτουμε ότι υπάρχουν δυο ζεύγη  $(q_1, r_1), (q_2, r_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  τέτοια, ώστε

$$a = bq_1 + r_1 = bq_2 + r_2 \quad \text{και} \quad 0 \leq r_1, r_2 < |b| \quad (2.2)$$

Επομένως  $|r_1 - r_2| = |b| |q_1 - q_2|$  και  $0 \leq |r_1 - r_2| < |b|$ , από όπου  $|b| |q_1 - q_2| < |b|$ .

Συνεπώς, έχουμε  $|q_1 - q_2| < 1$  και άρα  $q_1 = q_2$ . Τότε  $r_1 = a - bq_1 = a - bq_2 = r_2$ .

Άρα  $(q_1, r_1) = (q_2, r_2)$ . ■

Ο παραπάνω ακέραιος  $q$  ονομάζεται *πηλίκο* της διαίρεσης του  $a$  δια του  $b$  και ο φυσικός  $r$  *υπόλοιπο*.

## 2.2 Δεξιά και αριστερή διαίρεση πολυωνυμικών πινάκων

Στην ενότητα αυτή θα αναφερθούμε στην πιο γενική μορφή διαίρεσης πολυωνυμικών πινάκων. Η παρακάτω ανάλυση και απόδειξη έχει παρθεί από το βιβλίο του Gantmacher [3].

Έστω  $A(s)$  και  $B(s)$  δύο τετραγωνικοί πολυωνυμικοί πίνακες διάστασης  $n$ . Θεωρούμε τον ομαλό  $A(s)$ :

$$B(s) = B_0 s^m + B_1 s^{m-1} + \dots + B_m, B_0 \neq 0 \quad (2.3)$$

$$A(s) = A_0 s^n + A_1 s^{n-1} + \dots + A_m, |A_0| \neq 0 \quad (2.4)$$

Θα λέμε ότι οι πολυωνυμικοί πίνακες  $Q(s)$  και  $R(s)$  είναι το δεξιό (ή από δεξιά) πηλίκο και δεξιό (ή από δεξιά) υπόλοιπο, αντίστοιχα, της διαίρεσης του  $B(s)$  με το  $A(s)$  αν

$$B(s) = Q(s)A(s) + R(s), \deg R(s) < n \quad \text{ή} \quad R(s) = 0 \quad (2.5)$$

Ομοίως, θα λέμε ότι οι πολυωνυμικοί πίνακες  $\hat{Q}(s)$  και  $\hat{R}(s)$  είναι το αριστερό (ή από αριστερά) πηλίκο και το αριστερό (ή από αριστερά) υπόλοιπο, αντίστοιχα, της διαίρεσης του  $B(s)$  με τον  $A(s)$  αν

$$B(s) = A(s)\hat{Q}(s) + \hat{R}(s), \deg \hat{R}(s) < n \quad \text{ή} \quad \hat{R}(s) = 0 \quad (2.6)$$

Θα δούμε παρακάτω ότι δεν αρκεί στην διαίρεση πολυωνυμικών πινάκων η αναφορά σε πηλίκο και υπόλοιπο, αλλά απαιτούνται οι προσδιορισμοί ‘από δεξιά’ ή ‘από αριστερά’. Αυτό συμβαίνει γιατί, σε σχέση με το θεμελιώδες θεώρημα της θεωρίας αριθμών και της διαίρεσης πολυωνύμων, οι πίνακες δεν αντιμετωπίζονται, σε αντίθεση με τους αριθμούς και τα πολυώνυμα.

**Θεώρημα 2.2.** [3] Η αριστερή και δεξιά διαίρεση τετραγωνικών πολυωνυμικών πινάκων είναι πάντα δυνατή και μοναδική, δεδομένου ότι ο διαιρέτης είναι ομαλός πολυωνυμικός πίνακας.

**Απόδειξη.** [3] Αν  $m < n$  τότε ισχύει ότι  $Q(s) = 0$  και  $R(s) = A(s)$ . Αν  $m \geq n$ , τότε εργαζόμαστε στην (2.5) με ανάλογο τρόπο όπως την διαίρεση πολυωνύμων: ‘διαιρούμε’ τον μεγιστοβάθμιο όρο  $B_0 s^m$  του  $B(s)$  με τον μεγιστοβάθμιο όρο  $A_0 s^n$  του  $A(s)$  και δημιουργείται η σχέση

$$B(s) = B_0 A_0^{-1} s^{m-n} A(s) + B^{(1)}(s), \deg B^{(1)}(s) < m \quad (2.7)$$

Έστω ότι  $\deg B^{(1)}(s) = m^{(1)}$ . Τότε μπορούμε να γράψουμε τον  $A^{(1)}(s)$  στην μορφή:

$$B^{(1)}(s) = B_0^{(1)} s^{m^{(1)}} + B_1^{(1)} s^{m^{(1)}-1} + \dots + B_{m^{(1)}}^{(1)}, B_0^{(1)} \neq 0, m^{(1)} < m. \quad (2.8)$$

Αν  $m^{(1)} \geq n$ , τότε επαναλαμβάνουμε την παραπάνω διαδικασία για τον  $B^{(1)}(s)$ :

$$B^{(1)}(s) = B_0^{(1)} A_0^{-1} s^{m^{(1)}-n} A(s) + B^{(2)}(s), \deg B^{(2)}(s) < m^{(1)} \quad (2.9)$$

$$B^{(2)}(s) = B_0^{(2)} s^{m^{(2)}} + B_1^{(2)} s^{m^{(2)}-1} + \dots + B_{m^{(2)}}^{(2)}, B_0^{(2)} \neq 0, m^{(2)} < m^{(1)}. \quad (2.10)$$

Ο βαθμός των  $B(s), B^{(1)}(s), B^{(2)}(s), \dots$  ελαττώνεται και σε κάποια φάση καταλήγουμε στο υπόλοιπο  $R(s)$ , του οποίου ο βαθμός είναι λιγότερος από το  $n$ . Επομένως προκύπτει ότι

$$B(s) = Q(s)A(s) + R(s) \quad (2.11)$$

$$\text{όπου, } Q(s) = B_0 A_0^{-1} s^{m-n} + B_0^{(1)} A_0^{-1} s^{m^{(1)}-n} + \dots \quad (2.12)$$

Θα αποδείξουμε την μοναδικότητα της δεξιάς διαίρεσης πολυωνυμικών πινάκων. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν, εκτός των  $Q(s)$  και  $R(s)$ , άλλοι δυο πολυωνυμικοί πίνακες  $Q^*(s)$  και  $R^*(s)$ , τέτοιο ώστε

$$B(s) = Q(s)A(s) + R(s) \text{ και } B(s) = Q^*(s)A(s) + R^*(s), \text{ όπου ο βαθμός του } R^*(s) \text{ και } R(s) \text{ είναι μικρότερος του } A(s), \text{ μικρότερος του } n. \text{ Εξισώνοντας τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι } [Q(s) - Q^*(s)]A(s) = R^*(s) - R(s). \quad (2.13)$$

Αν ισχύει ότι  $Q(s) - Q^*(s) \neq 0$ , τότε ο βαθμός στο δεξί μέλος της (2) θα προκύπτει από το άθροισμα των βαθμών του  $A(s)$  και  $Q(s) - Q^*(s)$ , γιατί  $|A_0| \neq 0$ , επομένως θα είναι το λιγότερο ίσος με  $n$ . Πράγμα αδύνατο καθώς ο βαθμός των πολυωνύμων στο δεξί μέλος της (2.13) είναι μικρότερος από  $n$ . Άρα,  $Q(s) - Q^*(s) = 0$  καθώς και  $R(s) - R^*(s) = 0$ , που σημαίνει ότι

$$Q(s) = Q^*(s), \quad R(s) = R^*(s). \quad (2.14)$$

Ομοίως γίνεται η απόδειξη της ύπαρξης και μοναδικότητας του αριστερά πηλίκου και υπολοίπου. ■

**Παράδειγμα 9.** Θα βρούμε το δεξί πηλίκο και δεξί υπόλοιπο της διαίρεσης του  $B(s)$  από το  $A(s)$ . Έστω οι πολυωνυμικοί πίνακες

$$B(s) = \begin{bmatrix} s^3 + s & 2s^2 + s \\ s^2 + 2s & s^2 + 3s \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{B_0} s^3 + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{B_1} s^2 + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}}_{B_2} s$$

και  $A(s) = \begin{bmatrix} s^2 + 1 & -s \\ s & s^2 + s \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A_0} s^2 + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{A_1} s + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A_2}$

παρατηρούμε ότι  $|A_0| = 1, B_0 \neq 0$  και  $\deg B(s) = 3, \deg A(s) = 2$ . Οπότε ξεκινάμε να υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} B_0 A_0^{-1} s A(s) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} s \begin{bmatrix} s^2 + 1 & -s \\ s & s^2 + s \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} s \begin{bmatrix} s^2 + 1 & -s \\ s & s^2 + s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s^2 + 1 & -s \\ s & s^2 + s \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} s^3 + s & -s^2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B^{(1)}(s) &= B(s) - B_0 A_0^{-1} s A(s) = \begin{bmatrix} s^3 + s & 2s^2 + s \\ s^2 + 2s & s^2 + 3s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} s^3 + s & -s^2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 3s^2 + s \\ s^2 + 2s & s^2 + 3s \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{B_0^{(1)}} s^2 + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}}_{B_1^{(1)}} s \end{aligned}$$

Άρα  $B^{(1)}(s) = B_0^{(1)} A_0^{-1} A(s) + B^{(2)}(s)$

$$\begin{aligned} B_0^{(1)} A_0^{-1} A(s) &= \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s^2 + 1 & -s \\ s & s^2 + s \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s^2 + 1 & -s \\ s & s^2 + s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3s & 3s^2 + 3s \\ s^2 + s + 1 & s^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B^{(2)}(s) &= B^{(1)}(s) - B_0^{(1)} A_0^{-1} A(s) \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 3s^2 + s \\ s^2 + 2s & s^2 + 3s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3s & 3s^2 + 3s \\ s^2 + s + 1 & s^2 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -3s & -2s \\ s - 1 & 3s \end{bmatrix} = R(s)
 \end{aligned}$$

$$\text{και } Q(s) = B_0 A_0^{-1} s + B_0^{(1)} A_0^{-1} = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Βρήκαμε έτσι το δεξί πηλίκο και υπόλοιπο. ■

**Παράδειγμα 10.** Θα κάνουμε τώρα την αριστερή διαίρεση του παραπάνω πολυωνυμικού πίνακα  $B(s)$  από τον  $A(s)$ . Τα βήματα που κάνουμε είναι τα ίδια με το παραπάνω παράδειγμα. Οπότε έχουμε

$$\begin{aligned}
 B(s) &= \begin{bmatrix} s^3 + s & 2s^2 + s \\ s^2 + 2s & s^2 + 3s \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{B_0} s^3 + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{B_1} s^2 + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}}_{B_2} s \\
 A(s) &= \begin{bmatrix} s^2 + 1 & -s \\ s & s^2 + s \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A_0} s^2 + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{A_1} s + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A_2}
 \end{aligned}$$

παρατηρούμε ότι  $|A_0| = 1, B_0 \neq 0$  και  $\deg B(s) = 3, \deg A(s) = 2$ . Οπότε ξεκινάμε να υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}
 A(s) A_0^{-1} B_0 s &= \begin{bmatrix} s^2 + 1 & -s \\ s & s^2 + s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} s = \\
 &= \begin{bmatrix} s^2 + 1 & -s \\ s & s^2 + s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} s = \begin{bmatrix} s^2 + 1 & -s \\ s & s^2 + s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} s^3 + s & 0 \\ s^2 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B^{(1)}(s) &= B(s) - A(s) A_0^{-1} B_0 s = \begin{bmatrix} s^3 + s & 2s^2 + s \\ s^2 + 2s & s^2 + 3s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} s^3 + s & 0 \\ s^2 & 0 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 2s^2 + s \\ 2s & s^2 + 3s \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{B_0^{(1)}} s^2 + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}}_{B_1^{(1)}} s
 \end{aligned}$$

Άρα  $B^{(1)}(s) = A(s) A_0^{-1} B_0^{(1)} + B^{(2)}(s)$

$$\begin{aligned} A(s)A_0^{-1}B_0^{(1)} &= \begin{bmatrix} s^2+1 & -s \\ s & s^2+s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} s^2+1 & -s \\ s & s^2+s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2s^2-s+2 \\ 0 & s^2+3s \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B^{(2)}(s) &= B^{(1)}(s) - A(s)A_0^{-1}B_0^{(1)} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 2s^2+s \\ 2s & s^2+3s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 2s^2-s+2 \\ 0 & s^2+3s \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 2s-2 \\ 2s & 0 \end{bmatrix} = \hat{R}(s) \end{aligned}$$

$$\text{και } \hat{Q}(s) = A_0^{-1}B_0s + A_0^{-1}B_0^{(1)} = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \blacksquare$$

### 2.3 Διαίρεση ενός πολυωνυμικού πίνακα $A(s)$ με έναν πρωτοβάθμιο πολυωνυμικό πίνακα της μορφής $(sI-A)$

Η διαίρεση ενός πολυωνυμικού πίνακα με έναν πολυωνυμικό πίνακα  $1^{\text{ου}}$  βαθμού, εκτός του ότι είναι μια απλή διαδικασία, έχει πολύ ενδιαφέροντα αποτελέσματα.

Θεωρούμε τον πολυωνυμικό πίνακα διάστασης  $n$

$$F(s) = F_0s^m + F_1s^{m-1} + \dots + F_m \quad (F_0 \neq 0). \quad (2.15)$$

Το συγκεκριμένο πολυώνυμο μπορεί να γραφτεί ως εξής

$$F(s) = s^m F_0 + s^{m-1} F_1 + \dots + F_m \quad (F_0 \neq 0). \quad (2.16)$$

Για ένα μέγεθος  $s$ , και οι δυο παραπάνω τύποι μας δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα. Παρόλο αυτά, αν αντικαταστήσουμε το  $s$  με έναν πολυωνυμικό πίνακα  $A$  διάστασης  $n$ , τότε τα αποτελέσματα της αντικατάστασης στους παραπάνω τύπους θα είναι, εν γένει, διαφορετικά. Αυτό συμβαίνει καθώς οι δυνάμεις του  $A$  δεν μετατίθενται με τους συντελεστές  $F_0, F_1, \dots, F_m$ .

Ορίζουμε τις σχέσεις

$$F(A) = F_0A^m + F_1A^{m-1} + \dots + F_m \quad \text{και} \quad \hat{F}(A) = A^m F_0 + A^{m-1} F_1 + \dots + F_m, \quad (2.17)$$

ονομάζουμε με  $F(A)$  την δεξιά τιμή και  $\hat{F}(A)$  την αριστερή τιμή του  $F(s)$ , όταν αντικαταστήσουμε τον  $A$  στο  $s$ .

Διαιρούμε το  $F(s)$  με το διώνυμο  $sI_n - A$ . Σε αυτήν την περίπτωση το δεξί υπόλοιπο  $R(s)$  και το αριστερό υπόλοιπο  $\hat{R}(s)$  δεν θα εξαρτώνται από το  $s$ . Για να προσδιορίσουμε το δεξί υπόλοιπο διαιρούμε όπως είδαμε στην προηγούμενη ενότητα:



$$\begin{aligned}
F(s) &= F_0 s^m + F_1 s^{m-1} + \dots + F_m \\
&= F_0 s^{m-1} (sI_n - A) + (F_0 A + F_1) s^{m-1} + F_2 s^{m-2} + \dots \\
&= [F_0 s^{m-1} + (F_0 A + F_1) s^{m-2}] (sI_n - A) + (F_0 A^2 + F_1 A + F_2) s^{m-2} + F_3 s^{m-3} + \dots \\
&= [F_0 s^{m-1} + (F_0 A + F_1) s^{m-2} + \dots \\
&\quad + F_0 A^{m-1} + F_1 A^{m-2} + \dots + F_{m-1}] (sI_n - A) \\
&\quad + F_0 A^m + F_1 A^{m-1} + \dots + F_m.
\end{aligned} \tag{2.18}$$

οπότε καταλήξαμε ότι

$$R = F_0 A^m + F_1 A^{m-1} + \dots + F_m = F(A).$$

ομοίως  $\hat{R} = \hat{F}(A)$ .

**Θεώρημα 2.3. (Γενικευμένο θεώρημα Bezout).** [3] Όταν ο πολυωνυμικός πίνακας  $F(s)$  διαιρείται από δεξιά από το διώνυμο  $sI_n - A$ , τότε το υπόλοιπο είναι  $F(A)$ ; όταν διαιρείται από αριστερά, το υπόλοιπο είναι  $\hat{F}(A)$ . ■

Από το θεώρημα αυτό προκύπτει το επόμενο συμπέρασμα.

**Πόρισμα 2.4.** [3] Ο πολυωνυμικός πίνακας  $F(s)$  διαιρείται από το διώνυμο  $sI_n - A$  από δεξιά (από αριστερά) χωρίς υπόλοιπο αν και μόνον αν  $F(A) = 0$  ( $\hat{F}(A) = 0$ ). ■

**Παράδειγμα 11.** Θα κάνουμε την διαίρεση του πίνακα  $F(s)$ , που γράφουμε παρακάτω, με τον πολυωνυμικό πίνακα πρώτου βαθμού  $B(s)$ . Αναλύουμε το  $B(s)$  και έχουμε

$$B(s) = sI_2 - \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}_A$$

Από τα προηγούμενα θεωρήματα γνωρίζουμε ότι το δεξί υπόλοιπο ισούται με  $R(s) = F(A)$ .

Θα τα υπολογίσουμε και στην συνέχεια θα κάνουμε και μια επαλήθευση.

$$F(s) = \begin{bmatrix} s^2 + 1 & -s \\ s & s^2 + s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} s^2 + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ οπότε}$$

$$\begin{aligned}
F(A) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^2 + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = R(s)
\end{aligned}$$

Επομένως  $F(s) = Q(s)B(s) + R(s)$ . Για να βρούμε το  $Q(s)$  λύνουμε την εξίσωση και έχουμε

$$\begin{aligned}
Q(s) &= F(s)B^{-1}(s) - R(s)B^{-1}(s) \\
&= \begin{bmatrix} s^2+1 & -s \\ s & s^2+s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{s-2}{(s-1)(s-2)} & \frac{-1}{(s-1)(s-2)} \\ 0 & \frac{s-1}{(s-1)(s-2)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{s-2}{(s-1)(s-2)} & \frac{-1}{(s-1)(s-2)} \\ 0 & \frac{s-1}{(s-1)(s-2)} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} s+1 & -2 \\ 1 & s+3 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Επαλήθευση:

$$\begin{aligned}
F(s) &= Q(s)B(s) + R(s) \\
&= \begin{bmatrix} s+1 & -2 \\ 1 & s+3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s-1 & 1 \\ 0 & s-2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} s^2+1 & -s \\ s & s^2+s \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Επομένως εφαρμόσαμε το γενικευμένο θεώρημα Bezout για την δεξιά διαίρεση πολυωνυμικών πινάκων. Με όμοιο τρόπο γίνεται και αριστερή διαίρεση. ■

Θα υπολογίσουμε τώρα το ανάπτυγμα Laurent του αντιστρόφου του πολυωνυμικού πίνακα  $B(s)$  του προηγούμενου παραδείγματος.

**Παράδειγμα 12.** Ο  $B(s)$  του προηγούμενου παραδείγματος γράφεται ως εξής

$$B(s) = sI_2 - \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}_A = \begin{bmatrix} s-1 & 1 \\ 0 & s-2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{B_1} s + \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}}_{B_0}$$

Παρατηρούμε ότι  $q_1 = 1, r = 2$ . Πρώτα υπολογίζουμε τα  $R_1(s), p_2(s)$ :

$$p_{1,0}(s) = -3 \quad p_{1,1}(s) = 2 \quad p_{1,2}(s) = p_{1,3}(s) = 0$$

$$p_{2,0}(s) = 2 \quad p_{2,1}(s) = -3 \quad p_{2,2}(s) = 1 \quad p_{2,3}(s) = p_{2,4}(s) = p_{2,5}(s) = p_{2,6}(s) = 0$$

$$R_{1,0} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad R_{1,1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R_{1,2} = R_{1,3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R(s) = \begin{bmatrix} s-2 & -1 \\ 0 & s-1 \end{bmatrix} \text{ και } p(s) = s^2 - 3s + 2, \text{ επομένως } B(s)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s-1} & \frac{-1}{(s-1)(s-2)} \\ 0 & \frac{1}{s-2} \end{bmatrix}.$$

Υπολογίζουμε την Smith-McMillan μορφή στο  $s = \infty$  του  $B(s)$ :

$\xi_0 = 0, \xi_1 = -1, \xi_2 = -2$ , άρα  $f_1(s) = s, f_2(s) = s$ , επομένως

$$S_{B(s)}^\infty = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}$$

άρα  $q_1 = 1, r = 2, \nu = -1$ . Μπορούμε να υπολογίσουμε το ανάπτυγμα Laurent:

$$\begin{bmatrix} p_{2,2}I_2 & 0 \\ p_{2,1}I_2 & p_{2,2}I_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{-1} \\ H_{-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{1,1} \\ R_{1,0} \end{bmatrix}$$

όπου  $H = P^{-1}R$ .

$$D = P^{-1} = \begin{bmatrix} d_0I_2 & 0 \\ d_1I_2 & d_0I_2 \end{bmatrix} \text{ με } d_0 = \frac{1}{p_{2,2}} = 1, d_1 = (-1) \left( \frac{1}{p_{2,2}} \right)^2 \mid p_{2,1} \mid = 3$$

$$\begin{bmatrix} H_{-1} \\ H_{-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -2 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

επομένως

$$H_{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, H_{-2} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

με  $\mu = 2$ , άρα

$$H_{-[2+k]} = -\sum_{i=0}^1 \frac{p_{2,i}}{p_{2,2}} H_{-[i+k]}$$

για  $k = 1$ , έχουμε ότι

$$H_{-3} = -(2H_{-1} - 3H_{-2}) = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \text{ κ.ο.κ. } \blacksquare$$

## 2.4 Διαίρεση ενός πολυωνυμικού πίνακα $A(s)$ με έναν πολυωνυμικό πίνακα της μορφής $(sE-A)$

Ας είναι  $E, A \in \mathbb{R}[s]^{n \times n}$  με χαρακτηριστικό πολυώνυμο το

$$\Delta(s) = |sE - A| = p_0 s^n - p_1 s^{n-1} - \dots - p_n \quad (2.19)$$

Ο μεγιστοβάθμιος συντελεστής  $p_0$  μπορεί να μην απαραίτητα μονάδα, αλλά μπορεί να είναι μηδέν. Υποθέτουμε ότι  $|sE - A| \neq 0$ , και  $(sE - A)$  είναι ομαλός πίνακας. Ο προσαρτημένος πίνακας  $B(s)$  ορίζεται από το

$$(sE - A)^{-1} = \frac{B(s)}{|sE - A|} \quad (2.20)$$

Ο προσαρτημένος πίνακας έχει την μορφή

$$B(s) = B_0 s^{n-1} + B_1 s^{n-2} + \dots + B_{n-1} \quad (2.21)$$

όπου  $B_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

Η κανονικότητα μας εξασφαλίζει την μοναδικότητα του αναπτύγματος Laurent

$$(sE - A)^{-1} = s^{-1} \sum_{k=-\mu}^{\infty} H_k s^{-k} \quad (2.22)$$

όπου  $\mu$  είναι η μέγιστη τάξη μηδενικών στο  $s = \infty$  του  $(sE - A)$ . Αν ισχύει το  $E = I$ , έχουμε ότι  $H_k = 0, k < 0$  και  $H_k = A^k, k \geq 0$ .

Θεωρούμε τον πολυωνυμικό πίνακα,  $F(s) = F_0 s^m + F_1 s^{m-1} + \dots + F_m$ ,  $F_0 \neq 0, F_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

Ορίζουμε

$$F[H_k] = H_k F_0 + H_{k-1} F_1 + \dots + H_{k-m} F_m \quad (2.23)$$

μπορούμε να γράψουμε

$$F(s) = (sE - A)Q(s) + R(s) \quad (2.24)$$

όπου

$$\begin{aligned} Q(s) &= F[H_{-\mu}]s^{m+\mu-1} + F[H_{-\mu+1}]s^{m+\mu-2} \\ &+ \dots + F[H_{-1}]s^m + F[H_0]s^{m-1} + \dots + F[H_{m-1}] \\ &\triangleq Q_{-\mu}s^{m+\mu-1} + \dots + Q_{-1}s^m + Q_0s^{m-1} + \dots + Q_{m-1} \end{aligned} \quad (2.25)$$

και το υπόλοιπο είναι

$$R(s) = EF[H_{m+1}] \quad (2.26)$$

Οπότε μπορούμε να εκφράσουμε το θεώρημα Bezout.

**Θεώρημα 2.5** [7] Όταν ένας πολυωνυμικός πίνακας  $F(s)$  διαιρείται από τα αριστερά από τον ομαλό πίνακα  $(sE - A)$ , το υπόλοιπο δίνεται από την (2.26), όπου το  $H_k$  ικανοποιεί την (2.22). ■

Όμοια γίνεται η διαίρεση από δεξιά με το  $(sE - A)$ .

Θεωρώντας το  $F(s) = \Delta(s)I = |sE - A|I$ , καταλήγουμε στο θεώρημα Cayley-Hamilton.

**Θεώρημα 2.6.** [7] Υποθέτουμε ότι το  $(sE - A)$  είναι κανονικός με  $H_k$  να δίνεται από την σχέση (2.22) και το χαρακτηριστικό πολυώνυμο να δίνεται από την (2.19). Τότε

$$\Delta(H_k) = p_0 H_k - p_1 H_{k-1} - \dots - p_n H_{k-n} = 0, \text{ για } k \geq n \text{ και } k \leq -1 \quad (2.27)$$

Το θεώρημα Cayley-Hamilton ισχύει για την περίπτωση που  $k \geq n$ . Στην περίπτωση που  $E = I$ , η ποσότητα  $\Delta[H_n] = 0$  γίνεται με το γνωστό θεώρημα Cayley-Hamilton. ■

**Θεώρημα 2.7.** [7] Έστω το  $(sE - A)$  να είναι ομαλός και με χαρακτηριστικό πολυώνυμο όπως στην (2.19) και τα  $H_k$  από την (2.22). Τότε οι πίνακες συντελεστών του προσαρτημένου πίνακα δίνονται από

$$B_k = \Delta[H_k] = p_0 H_k - p_1 H_{k-1} - \dots - p_n H_{k-n}, k = 0, \dots, n-1 \quad (2.28)$$

Τα αποτελέσματα αυτά μας δίνουν πεπερασμένες εκφράσεις για τον προσαρτημένο πίνακα αν είναι

$$(sE - A)^{-1} = \frac{1}{\Delta(s)} \sum_{i=0}^{n-1} \Delta[H_{n-i-1}] s^i \quad (2.29)$$

$$\text{ή} \quad (sE - A)^{-1} = \frac{1}{\Delta(s)} \sum_{i=-\mu}^{n-1} \Delta_{i+1}(s) H_i \quad (2.30)$$

όπου τα relative πολυώνυμα Tschirnhausen υπολογίζονται αναδρομικά από το

$$\Delta_n(s) = p_0 \quad (2.31)$$

$$\Delta_i(s) = s\Delta_{i+1}(s) - p_{n-i}, \quad i = n-1, \dots, 1 \quad (2.32)$$

$$\Delta_0(s) = s\Delta_1(s) - p_0 s^n - p_n \quad (2.33)$$

$$\Delta_i(s) = s\Delta_{i+1}(s) - p_{-i} s^n, \quad i = -1, \dots, -\mu+1 \quad (2.34)$$

$$\text{Σημειώνουμε ότι } \Delta(s) = p_0 s^n + \Delta_0(s). \quad (2.35)$$

Δες παράδειγμα 15.

## 2.5 Διαίρεση πολυωνυμικών πινάκων και άλλα αποτελέσματα

Θα δείξουμε τώρα πως γίνεται η διαίρεση πολυωνυμικών πινάκων με την χρήση του αναπτύγματος Laurent και με την βοήθεια των θεμελιωδών πινάκων, όπως στο [6]. Θα παραθέσουμε ορισμούς και πορίσματα, καθώς και παραδείγματα.

Ας είναι  $A(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times p}$  ( $A(s) \in \mathbb{R}[s]^{q \times q}$ ) και  $B(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times q}$  ομαλός πίνακας, ώστε

$$B(s) = B_0 s^m + B_1 s^{m-1} + \dots + B_m \in \mathbb{R}[s]^{p \times q} \text{ με } B_0 \neq 0_{p \times q} \quad (2.36)$$

$$A(s) = A_0 s^n + A_1 s^{n-1} + \dots + A_n \in \mathbb{R}[s]^{q \times q} \text{ με } A_0 \neq 0_{q \times q} \text{ και } m \geq n \quad (2.37)$$

Ένας πρώτος τρόπος για να προσδιορίσουμε το αριστερό πηλίκο  $Q(s)$  και υπολοίπου  $R(s)$  δίνεται παρακάτω.

**Θεώρημα 2.8.** [6] Όταν ένας πολυωνυμικός πίνακας  $B(s)$  διαιρείται από αριστερά από με τον πολυωνυμικό πίνακα  $A(s)$ , τότε το αριστερό πηλίκο  $Q(s)$  και το αριστερό υπόλοιπο  $R(s)$  δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις

$$Q(s) = \text{πολυωνυμικό μέρος του } A(s)^{-1}B(s) \quad (2.38)$$

$$R(s) = B(s) - A(s)Q(s) \quad (2.39)$$

Ομοίως γίνεται ο υπολογισμός για την δεξιά διαίρεση πολυωνυμικών πινάκων. ■

**Παράδειγμα 13.** Θα κάνουμε την αριστερή διαίρεση του πολυωνυμικού πίνακα  $B(s)$  με τον  $A(s)$ , σύμφωνα με τον τρόπο του θεωρήματος 2.8. Έστω

$$B(s) = \begin{bmatrix} s^2 + 1 & s + 2 \\ s & 1 \end{bmatrix} \text{ και } A(s) = \begin{bmatrix} s & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix}$$

Υπολογίζουμε τον αντίστροφο πολυωνυμικό πίνακα  $A(s)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & -\frac{1}{s^2} \\ 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix}$  και στην συνέχεια

θέλουμε να βρούμε το πολυωνυμικό μέρος του πολυωνυμικού πίνακα  $A(s)^{-1}B(s)$ , που θα ισούται με τον  $Q(s)$

$$A(s)^{-1}B(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & -\frac{1}{s^2} \\ 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s^2 + 1 & s + 2 \\ s & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & \frac{s^2 + 2s - 1}{s^2} \\ 1 & \frac{1}{s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & 1 + \frac{2}{s} - \frac{1}{s^2} \\ 1 & \frac{1}{s} \end{bmatrix}$$

επομένως  $Q(s) = \begin{bmatrix} s & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  και  $R(s) = B(s) - A(s)Q(s) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  είναι το αριστερό πηλίκο και

αριστερό υπόλοιπα, αντίστοιχα. ■

Λόγω του γεγονότος ότι ο πολυωνυμικός πίνακας  $A(s)$  είναι ομαλός έχουμε την ύπαρξη μοναδικού αναπτύγματος Laurent

$$A^{-1}(s) = \sum_{k=-\mu}^{\infty} H_k s^{-k} \quad (2.40)$$

στο  $s = \infty$ , με  $\mu$  την μεγαλύτερη τάξη άπειρων μηδενικών του  $A(s)$ . Έχουμε δείξει τρόπο υπολογισμού των θεμελιωδών πινάκων  $H_k$ , οπότε ορίζουμε τα εξής:

$$B[H_k] = H_k B_0 + H_{k-1} B_1 + \cdots + H_{k-m} B_m \quad (2.41)$$

$$A[H_k] = A_0 H_k + A_1 H_{k-1} + \cdots + A_n H_{k-n} \quad (2.42)$$

$$A^T[H_k] = H_k A_0 + H_{k-1} A_1 + \cdots + H_{k-n} A_n \quad (2.43)$$

$$A[B[H_k]] = A_0 B[H_k] + A_1 B[H_{k-1}] + \cdots + A_n B[H_{k-n}] \quad (2.44)$$

$$B[A[H_k]] = A[H_k] B_0 + A[H_{k-1}] B_1 + \cdots + A[H_{k-m}] B_m \quad (2.45)$$

και έχουμε το εξής λήμμα:

**Λήμμα 2.9.** A)  $A[B[H_k]] = B[A[H_k]]$

$$B) A[H_i] = \begin{cases} 0 & i \neq n \\ I_q & i = n \end{cases} \quad \text{και} \quad A^T[H_i] = \begin{cases} 0 & i \neq n \\ I_q & i = n \end{cases}$$

**Απόδειξη.**

A)

$$\begin{aligned} A[B[H_k]] &\stackrel{(2.44)}{=} A_0 [H_k B_0 + H_{k-1} B_1 + \cdots + H_{k-m} B_m] + \\ &\quad + A_1 [H_{k-1} B_0 + H_{k-2} B_1 + \cdots + H_{k-m-1} B_m] + \\ &\quad + \cdots + \\ &\quad + A_n [H_{k-n} B_0 + H_{k-n-1} B_1 + \cdots + H_{k-m-n} B_m] = \\ &= [A_0 H_k + A_1 H_{k-1} + \cdots + A_n H_{k-n}] B_0 + \\ &\quad + [A_0 H_{k-1} + A_1 H_{k-2} + \cdots + A_n H_{k-n-1}] B_1 + \\ &\quad + \cdots + \\ &\quad + [A_0 H_{k-m} + A_1 H_{k-m-1} + \cdots + A_n H_{k-m-n}] B_m = \\ &\stackrel{(2.42, 2.45)}{=} B[A[H_k]] \end{aligned}$$

Β) Μπορεί να αποδειχτεί εξισώνοντας του συντελεστές των δυνάμεων του  $s$  του δεξιού και αριστερού μέρους στην εξίσωση  $A^{-1}(s)A(s) = I_q$  ( $A^{-1}(s)A(s) = I_q$ ). ■

**Θεώρημα 2.10.** [6] Όταν ένας πολυωνυμικός πίνακας  $B(s)$  διαιρείται από αριστερά από τον ομαλό πολυωνυμικό πίνακα  $A(s)$ , τότε το πηλίκο και το υπόλοιπο δίνονται αντίστοιχα από τους τύπους:

$$Q(s) = \sum_{i=-\mu}^m B[H_i]s^{m-i} \quad (2.46)$$

$$R(s) = \sum_{i=0}^{n-1} \left( \sum_{j=0}^i A_j B[H_{m+i+1-j}] \right) s^{n-1-i} \quad (2.47)$$

**Απόδειξη.** Από το θεώρημα 2.8 έχουμε ότι το αριστερό πηλίκο  $Q(s)$  δίνεται από:

$$\begin{aligned} Q(s) &= \text{πολυωνυμικό μέρος του } A^{-1}(s)B(s) = \\ &= \text{πολυωνυμικό μέρος του } \left\{ \left( \sum_{k=-\mu}^{\infty} H_k s^{-k} \right) \left( \sum_{k=0}^m B_k s^{m-k} \right) \right\} \\ &= [H_{-\mu} B_0] s^{\mu+m} + [H_{-\mu+1} B_0 + H_{-\mu} B_1] s^{\mu+m-1} + \\ &\quad + \dots + \\ &\quad + [H_m B_0 + H_{m-1} B_1 + \dots + H_0 B_m] = \\ &= B[H_{-\mu}] s^{\mu+m} + B[H_{-\mu+1}] s^{\mu+m-1} + \dots + B[H_m] = \\ &= \sum_{i=-\mu}^m B[H_i] s^{m-i} \end{aligned}$$

το υπόλοιπο δίνεται από τον τύπο:

$$\begin{aligned} R(s) &= B(s) - A(s)Q(s) = (B_0 s^m + B_1 s^{m-1} + \dots + B_m) - \\ &= (A_0 s^n + A_1 s^{n-1} + \dots + A_n) ([H_{-\mu} B_0] s^{\mu+m} + \dots + [H_m B_0 + H_{m-1} B_1 + \dots + H_0 B_m]) = \\ &= (B_0 s^m + B_1 s^{m-1} + \dots + B_m) - \\ &= \{ A[B[H_{-\mu}]] s^{\mu+m+n} + A[B[H_{-\mu+1}]] s^{\mu+m+n-1} + \dots + A[B[H_{m+n}]] \} - \\ &\quad - \sum_{i=0}^{n-1} \left( \sum_{j=0}^i A_j B[H_{m+i+1-j}] \right) s^{n-1-i} \quad \text{Λήμμα 2.9α} \\ &= (B_0 s^m + B_1 s^{m-1} + \dots + B_m) - \\ &\quad \left( B[A[H_{-\mu}]] s^{\mu+m+n} + \dots + B[A[H_{m+n}]] - \sum_{i=0}^{n-1} \left( \sum_{j=0}^i A_j B[H_{m+i+1-j}] \right) s^{n-1-i} \right) \end{aligned} \quad (2.48)$$

Παρόλο, από το Λήμμα 2.9 έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} B[A[H_{-\mu}]] &= B[A[H_{-\mu+1}]] = \dots = B[A[H_{n-1}]] = 0 \\ B[A[H_{n+i}]] &= B_{m-i} \quad \text{για } i = 0, 1, \dots, m \end{aligned} \quad (2.49)$$



Επομένως, από την σχέση (2.48) και (2.49)

$$\begin{aligned} R(s) &= (B_0 s^m + B_1 s^{m-1} + \dots + B_m) - \\ & - (B_0 s^m + B_1 s^{m-1} + \dots + B_m - \sum_{i=0}^{n-1} \left( \sum_{j=0}^i A_j B[H_{m+i+1-j}] \right) s^{n-1-i}) \\ & = \sum_{i=0}^{n-1} \left( \sum_{j=0}^i A_j B[H_{m+i+1-j}] \right) s^{n-1-i} \end{aligned}$$

Μπορούμε να ελέγξουμε ότι

$$\begin{aligned} \text{πολυωνυμικό μέρος}[A^{-1}(s)R(s)] &\stackrel{(2.40,2.47)}{=} H_{-\mu} A_0 B[H_{m+1}] s^{\mu+n-1} + \\ & + [H_{-\mu} [A_0 B[H_{m+2}] + A_1 B[H_{m+1}]] + H_{-\mu+1} A_0 B[H_{m+1}]] s^{\mu+n-2} + \\ & + \dots + \\ & + [H_0 [A_0 B[H_{m+n}] + \dots + A_{n-1} B[H_{m+1}]] + \dots + H_{n-1} A_0 B[H_{m+1}]] = \\ & = \{ [H_{-\mu} A_0] B[H_{m+1}] \} s^{\mu+n-1} + \{ [H_{-\mu} A_1 + H_{-\mu+1} A_0] B[H_{m+1}] + \\ & + [H_{-\mu} A_0] B[H_{m+2}] \} s^{\mu+n-2} + \dots + \\ & + \{ [H_{-\mu} A_{n-1} + \dots + H_{n-1} A_0] B[H_{m+1}] + \dots + [H_0 A_0] B[H_{m+n}] \} \stackrel{(2.43)}{=} \\ & = A^T [H_{-\mu}] B[H_{m+1}] s^{\mu+n-1} + \\ & \{ A^T [H_{-\mu+1}] B[H_{m+1}] + A^T [H_{-\mu+1}] B[H_{m+2}] \} s^{\mu+n-2} + \\ & + \dots + \{ A^T [H_{n-1}] B[H_{m+1}] + \dots + A^T [H_0] B[H_{m+n}] \} \stackrel{\text{Λήμμα 2.9}\beta}{=} 0 \end{aligned}$$

επομένως το  $A^{-1}(s)R(s)$  εξαλείφεται στο  $s = \infty$ , το οποίο αποδεικνύει το θεώρημα. ■

**Παράδειγμα 14.** Θα κάνουμε την αριστερή διαίρεση του  $D(s)$  από τον  $N(s)$ .

$$\begin{aligned} D(s) &= \begin{bmatrix} 0 & s+1 \\ s^3 + 5s^2 + 8s + 4 & -s-2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{D_0} s^3 + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}}_{D_1} s^2 + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}}_{D_2} s + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}}_{D_3} \\ N(s) &= \begin{bmatrix} s+2 & 0 \\ s^2 + 4s + 3 & -1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{N_0} s^2 + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}}_{N_1} s + \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}}_{N_2} \end{aligned}$$

Οι θεμελιώδεις πίνακες του  $N(s)$  υπολογίστηκαν στο παράδειγμα 6, απλά επειδή χρησιμοποιούμε σε αυτήν την μέθοδο άλλα όρια για το ανάπτυγμα Laurent θα αλλάξουν οι δείκτες των πινάκων. Επομένως έχουμε ότι

$$H_{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad H_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \quad H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad H_2 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$H_3 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} \quad H_4 = \begin{bmatrix} -8 & 0 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} \quad H_5 = \begin{bmatrix} 16 & 0 \\ -16 & 0 \end{bmatrix}$$

Επομένως το αριστερό πηλίκο υπολογίζεται από τον τύπο

$$Q(s) = \sum_{i=-1}^3 D[H_i]s^{3-i} = D[H_{-1}]s^4 + D[H_0]s^3 + D[H_1]s^2 + D[H_2]s + D[H_3]$$

$$D[H_{-1}] = H_{-1}D_0 + H_{-2}D_1 + H_{-3}D_2 + H_{-4}D_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D[H_0] = H_0D_0 + H_{-1}D_1 + H_{-2}D_2 + H_{-3}D_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D[H_1] = H_1D_0 + H_0D_1 + H_{-1}D_2 + H_{-2}D_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D[H_2] = H_2D_0 + H_1D_1 + H_0D_2 + H_{-1}D_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -8 & 4 \end{bmatrix}$$

$$D[H_3] = H_3D_0 + H_2D_1 + H_1D_2 + H_0D_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

Επομένως το αριστερό πηλίκο είναι  $Q(s) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -s^3 - 5s^2 - 8s - 4 & s^2 + 4s + 3 \end{bmatrix}$ .

Για να βρούμε το αριστερό υπόλοιπο της διαίρεσης χρησιμοποιούμε τον τύπο:

$$R(s) = \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^i N_j D[H_{4+i-j}]s^{1-i} = N_0 D[H_4]s + N_0 D[H_5] + N_1 D[H_4]$$

$$D[H_4] = H_4D_0 + H_3D_1 + H_2D_2 + H_1D_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D[H_5] = H_5D_0 + H_4D_1 + H_3D_2 + H_2D_3 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Άρα το αριστερό πηλίκο της διαίρεσης είναι το  $R(s) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -s-2 \end{bmatrix}$ . ■

**Πόρισμα 2.11.** [6] Σε περίπτωση που  $A(s) = sE - A \equiv A_0s + A_1$ , με  $\det[E]$  όχι απαραίτητα ίσον με το μηδέν, τότε το αριστερό υπόλοιπο της διαίρεσης του  $B(s)$  με το  $A(s)$  είναι σύμφωνα με το θεώρημα 2.10 ίσον με

$$R(s) = A_0B[H_{m+1}] = EB[H_{m+1}] \quad (2.50)$$

το οποίο συμπίπτει με το αποτέλεσμα στην ενότητα 2.3. ■

**Παράδειγμα 15.** Θα κάνουμε την αριστερή διαίρεση του πολυωνυμικού πίνακα  $B(s)$  από τον  $A(s)$  που είναι πρώτου βαθμού  $(sE - A)$ . Έστω

$$B(s) = \begin{bmatrix} s^2 + 2 & s + 1 \\ s & 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{B_0} s^2 + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{B_1} s + \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{B_2} \text{ και}$$

$$A(s) = \begin{bmatrix} s & 2 \\ 0 & s \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A_0} s + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A_1}$$

Βλέπουμε ότι  $|A_0| = 1 \neq 0$ . Υπολογίζουμε τον αντίστροφο  $A(s)^{-1}$ .

$$A(s)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & -\frac{2}{s^2} \\ 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{H_1} \frac{1}{s} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{H_2} \frac{1}{s^2} \equiv H_1 s^{-1} + H_2 s^{-2}$$

Από τους τύπους μπορούμε να υπολογίσουμε το αριστερό πηλίκο και υπόλοιπο της διαίρεσης.

$$\begin{aligned} Q(s) &= \sum_{i=1}^2 B[H_i] s^{2-i} = B[H_1]s + B[H_2] = \\ &= [H_1 B_0]s + [H_2 B_0 + H_1 B_1] = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R(s) &= A_0 B[H_3] = A_0 [H_3 B_0 + H_2 B_1 + H_1 B_2] \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Με όμοιο τρόπο γίνεται η δεξιά διαίρεση. ■

**Πόρισμα 2.12.** [6] Το παραπάνω θεώρημα είναι ανεξάρτητο από την ομαλότητα του πίνακα συντελεστών  $A_0$ , μπορούμε δηλαδή να έχουμε πολυωνυμικό πίνακα της μορφής (2.37) με  $\det[A_0] = 0$ . Σε περίπτωση που  $\det[A_0] \neq 0$  ο μεγαλύτερος εκθέτης του αναπτύγματος Laurent  $A^{-1}(s)$  δεν είναι  $\mu$  αλλά  $-n$  και έτσι έχουμε το αριστερό πηλίκο και το υπόλοιπο της παραπάνω διαίρεσης από τους εξής τύπους αντίστοιχα



$$\begin{bmatrix} A_0 & 0 & \cdots & 0 \\ A_1 & A_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n-1} & A_{n-2} & \cdots & A_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{m+1} & H_m & \cdots & H_1 \\ H_{m+2} & H_{m+1} & \cdots & H_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{m+n} & H_{m+n-1} & \cdots & H_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_0 \\ B_1 \\ \vdots \\ B_m \end{bmatrix} = 0 \quad (2.52)$$

■

Επομένως η παραπάνω σχέση είναι απαραίτητη προϋπόθεση για τον  $A(s)$  να είναι αριστερός διαιρέτης του  $B(s)$ . Όμοια αποτελέσματα έχουμε όταν η διαίρεση γίνεται από δεξιά από το  $A(s)$ . Στην περίπτωση που ο  $A_0$  είναι μη ιδιόμορφος, τότε ο πρώτος πίνακας της παραπάνω σχέσης είναι μη ιδιόμορφος, άρα έχουμε ότι

$$\begin{bmatrix} H_{m+1} & H_m & \cdots & H_1 \\ H_{m+2} & H_{m+1} & \cdots & H_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{m+n} & H_{m+n-1} & \cdots & H_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_0 \\ B_1 \\ \vdots \\ B_m \end{bmatrix} = 0 \quad (2.53)$$

Γράφοντας το  $B(s) = \Delta(s) \times I_q = \det[A(s)] \times I_q$  καταλήγουμε στο Cayley-Hamilton θεώρημα σε όρους θεμελιωδών πινάκων  $H_k$  όπως στο (2.40).

**Θεώρημα 2.14.** [6] Υποθέτουμε ότι ο  $A(s)$  είναι ομαλός με  $H_k$  να δίνονται από την σχέση (2.40) και  $\det[A(s)] = p_0 s^l + p_1 s^{l-1} + \cdots + p_l$ , όπου  $nq \geq l \geq n$ . Τότε

$$\Delta(H_k) = p_0 H_k + p_1 H_{k-1} + \cdots + p_l H_{k-l} = 0, \text{ για } k > l \text{ \& } k < l - \mu - n \quad (2.54)$$

**Απόδειξη.** Έχουμε ότι

$$A^{-1}(s) = \frac{Adj[A^{-1}(s)]}{\det[A(s)]} \Leftrightarrow \Delta(s)A^{-1}(s) = Adj[A^{-1}(s)] \quad (2.55)$$

Αντικαθιστώντας το  $A^{-1}(s)$  από την (2.40) και εξισώνοντας του συντελεστές α) των αρνητικών δυνάμεων του  $s$  στην (2.55) και β) τις δυνάμεις του  $s$  μεγαλύτερες του  $\mu + m$  έχουμε το αποτέλεσμα που θέλουμε. ■

Φαίνεται λοιπόν από την (2.55) ότι ο  $A(s)$  είναι αριστερός διαιρέτης του  $\Delta(s)$  και επομένως από το Πρόσιμα 2.12 έχουμε ότι

$$\begin{bmatrix} A_0 & 0 & \cdots & 0 \\ A_1 & A_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n-1} & A_{n-2} & \cdots & A_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{l+1} & H_l & \cdots & H_1 \\ H_{l+2} & H_{l+1} & \cdots & H_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{l+n} & H_{l+n-1} & \cdots & H_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0 I_q \\ p_1 I_q \\ \vdots \\ p_m I_q \end{bmatrix} = 0$$

$Adj[A^{-1}(s)]$  είναι το αριστερό πηλίκο της αριστερής διαίρεσης του  $\Delta(s) \times I_q$  με το  $A(s)$  και επομένως μπορεί να γραφτεί σύμφωνα με το Θεώρημα 2.10 ως

$$\begin{aligned} Adj[A^{-1}(s)] &= [H_{-\mu} p_0] s^{\mu+n} + [H_{-\mu+1} p_0 + H_{-\mu} p_1] s^{\mu+n-1} + \\ &+ \cdots + [H_n p_0 + H_{n-1} p_1 + \cdots + H_0 p_n] = \\ &= \Delta[H_{-\mu}] s^{\mu+n} + \Delta[H_{-\mu+1}] s^{\mu+n-1} + \cdots + \Delta[H_n] = \sum_{i=0}^{\mu+n} \Delta[H_{n-i}] s^i \end{aligned} \quad (2.56)$$

ή ισοδύναμα

$$\begin{aligned} Adj[A^{-1}(s)] &= H_{-\mu} [p_0 s^{\mu+n} + p_1 s^{\mu+n-1} + \cdots + p_l s^{\mu+n-l}] + \\ &+ H_{-\mu+1} [p_0 s^{\mu+n-1} + p_1 s^{\mu+n-2} + \cdots + p_l s^{\mu+n-l-1}] + \\ &+ \cdots + \\ &+ H_0 [p_0 s^n + p_1 s^{n-1} + \cdots + p_n] \\ &+ \cdots + \\ &+ H_{n-1} [p_0 s + p_1] + \\ &+ H_n [p_0] \equiv \\ &\equiv \sum_{i=-\mu}^n \Delta_i(s) H_i \end{aligned} \quad (2.57)$$

Επομένως καταλήγουμε στο επόμενο θεώρημα.

**Θεώρημα 2.15** [6] Ο προσαρτημένος πίνακας  $A(s)$  εκφράζεται με όρους θεμελιωδών πινάκων  $H_k$  από την σχέση

$$A^{-1}(s) = \frac{1}{q(s)} \left\{ \sum_{i=-\mu}^m \Delta_i(s) H_i \right\} \quad (2.58)$$

όπου  $q(s)$  είναι η ορίζουσα του  $A(s)$  όπως ορίζεται στην (2.54) και  $\Delta_i, i = -\mu, -\mu+1, \dots, m$  είναι τα πολυώνυμα Tschirnhausen όπως ορίστηκαν παραπάνω. ■

Υποθέτουμε τώρα ότι ο  $A_0$  είναι ομαλός πίνακας. Χωρίς απώλεια της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι  $A_0 = I_q$ , αλλιώς, αντί να κάνουμε την αριστερή διαίρεση του  $B(s)$  από το  $A(s)$  μπορούμε να κάνουμε την διαίρεση του  $A_0^{-1} B(s)$  από το  $A_0^{-1} A(s)$  π.χ.

$$A_0^{-1}B(s) = A_0^{-1}A(s)\hat{Q}(s) + \hat{R}(s) \quad (2.59)$$

άρα το αριστερό πηλίκο και υπόλοιπο του  $B(s)$  από το  $A(s)$  θα είναι αντίστοιχα  $Q(s) = \hat{Q}(s)$  και  $R(s) = \hat{R}(s)$ . Οπότε μπορούμε να δηλώσουμε το γενικευμένο θεώρημα Bezout.

**Θεώρημα 2.16.** [6] Αν είναι  $A_0 = I_q$  τότε το αριστερό πηλίκο και υπόλοιπο της διαίρεσης του  $B(s)$  από το  $A(s)$  θα είναι αντίστοιχα:

$$Q(s) = Y_0 s^{m-n} + Y_1 s^{m-n-1} + \dots + Y_{m-n} \quad (2.60)$$

$$R(s) = Y_{m-n+1} s^{n-1} + Y_{m-n+2} s^{n-2} + \dots + Y_m \quad (2.61)$$

όπου  $Y_i$  ορίζονται σύμφωνα με την ακόλουθη αναδρομική σχέση

$$Y_0 = B_0 \quad (2.62)$$

$$Y_j = B_j - \sum_{i=\max(0, j-n)}^{\min(j-1, m-n)} A_{j-i} Y_i \quad (2.63)$$

**Απόδειξη.** Για να προσδιορίσουμε το αριστερό υπόλοιπο χρησιμοποιούμε τον συνήθη τρόπο της διαίρεσης

$$\begin{aligned} B(s) &= A(s)B_0 s^{m-n} + (B_1 - A_1 B_0) s^{m-1} + \\ &+ (B_2 - A_2 B_0) s^{m-2} + \dots + B_m = \\ &= A(s)[B_0 s^{m-n} + [B_1 - A_1 B_0] s^{m-n-1}] + \\ &+ [B_2 - A_2 B_0 - A_1 [B_1 - A_1 B_0]] s^{m-2} + \dots + B_m = \\ &= \dots = \\ &= A(s)[Y_0 s^{m-n} + Y_1 s^{m-n-1} + \dots + Y_{m-n}] + \\ &+ [Y_{m-n+1} s^{n-1} + Y_{m-n+2} s^{n-2} + \dots + Y_m] \end{aligned}$$

Παρόλο αυτά,  $\det[A_0] \neq 0$ . Επομένως,  $A(s)$  είναι σε ελαττωμένη μορφή στήλης ( γραμμής) και η  $i$ -οστή γραμμή βαθμού ( $n$ ) είναι μεγαλύτερη από την  $i$ -οστή στήλη βαθμού  $R(s)$  που είναι το πολύ  $n-1$ . Έτσι, το  $A^{-1}(s)R(s)$  εξαλείφεται στο  $s = \infty$  το οποίο αποδεικνύει το θεώρημα. ■

**Παράδειγμα 16.** Θα χρησιμοποιήσουμε τους πίνακες του παραδείγματος 10. Τότε

$$Y_0 = B_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Y_1 = B_1 - A_1 Y_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Y_2 = B_2 - A_1 Y_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Επομένως  $Q(s) = Y_0 s + Y_1 = \begin{bmatrix} s & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  και  $R(s) = Y_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ , είναι το αριστερό πηλίκο και αριστερό υπόλοιπο αντίστοιχα. ■

Επιπρόσθετα υποθέτουμε ότι  $B(s) = \Delta(s) = \det[A(s)] = p_0 s^{q_n} + p_1 s^{q_n-1} + \dots + p_{q_n}$  και εφαρμόζοντας το Θεώρημα 2.16 έχουμε ότι

$$R(s) = Y_{m-n+1} s^{n-1} + Y_{m-n+2} s^{n-2} + \dots + Y_m \equiv 0 \quad (2.64)$$

Αντικαθιστώντας το  $B_i$  για  $p_i I_q$  και  $Y_j$  και από τις σχέσεις (2.62), (2.63) έχουμε μια εναλλακτική μορφή του γενικευμένου θεωρήματος Cayley-Hamilton.



## Κεφάλαιο 3

### Διαίρεση πολυωνυμικών πινάκων και εφαρμογές

#### 3.1 Εισαγωγικές έννοιες

Για να κάνουμε την εφαρμογή της διαίρεσης πολυωνυμικών πινάκων που θέλουμε, πρέπει πρώτα να αναφερθούμε σε απαραίτητες έννοιες προς κατανόηση της εφαρμογής. Θα συμβολίσουμε με  $\mathbb{R}[s]^{p \times m}$ ,  $\mathbb{R}(s)^{p \times m}$ ,  $\mathbb{R}_{pr}(s)^{p \times m}$ ,  $\mathbb{R}_{pr0}(s)^{p \times m}$  το σύνολο των  $p \times m$  πινάκων με στοιχεία στο σύνολο των πολυωνυμικών, ρητών, κανονικών ρητών, αυστηρά κανονικών ρητών αντίστοιχα και με συντελεστές από το σώμα των πραγματικών  $\mathbb{R}$ . Επίσης με  $\bar{\mathbb{R}}[s]^{m \times m}$ ,  $\bar{\mathbb{R}}(s)^{m \times m}$ ,  $\bar{\mathbb{R}}_{pr}(s)^{m \times m}$ ,  $\bar{\mathbb{R}}_{pr0}(s)^{m \times m}$  θα συμβολίζουμε τα υποσύνολα από τα αντίστοιχα σύνολα, των οποίων τα στοιχεία είναι ομαλοί πίνακες.

**Ορισμός 3.1.** [1] Έστω  $A(s) \in \mathbb{R}(s)^{p \times m}$ , ο πίνακας  $A(s)$  λέγεται κανονικός ρητός πίνακας (*proper rational*) αν  $\lim_{s \rightarrow \infty} A(s) = E \in \mathbb{R}^{p \times m}$ , ή αν όλα τα στοιχεία  $a_{ij}(s)$  του  $A(s)$  είναι κανονικές ρητές συναρτήσεις, δηλαδή αν  $a_{ij}(s) = n(s)/d(s)$  τότε  $\deg d(s) \geq \deg n(s)$ . ■

**Ορισμός 3.2** [1] Έστω  $A(s) \in \mathbb{R}(s)^{p \times m}$ , ο πίνακας  $A(s)$  λέγεται αυστηρά κανονικός (*strictly proper*) αν  $\lim_{s \rightarrow \infty} A(s) = 0 \in \mathbb{R}^{p \times m}$ , ή αν όλα τα στοιχεία  $a_{ij}(s)$  του  $A(s)$  είναι αυστηρώς κανονικά, δηλαδή αν  $a_{ij}(s) = n(s)/d(s)$  τότε  $\deg d(s) > \deg n(s)$ . ■

#### 3.2 Κανονικότητα κατά γραμμή (στήλη) ενός πολυωνυμικού πίνακα

Στην παράγραφο αυτήν θα αναφερθούμε στους ορισμούς κανονικών κατά γραμμές (στήλες) (*row (column) proper*) πολυωνυμικών πινάκων και θα δείξουμε πως υπολογίζεται.

Έστω ο πολυωνυμικός πίνακας  $A(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$ ,  $\text{rank}_{\mathbb{R}(s)} A(s) = \min\{p, m\}$  τότε θα γράφουμε τα ‘διανύσματα γραμμών’  $\tilde{a}_i(s) = [a_{i1}(s), a_{i2}(s), \dots, a_{im}(s)] \in \mathbb{R}[s]^{1 \times m}$ ,  $i \in p$ , ή τα

‘διανύσματα στηλών’  $a_j(s) = [a_{1j}(s), a_{2j}(s), \dots, a_{pj}(s)]^T \in \mathbb{R}[s]^{p \times 1}$ ,  $j \in m$  και μπορούμε πλέον να γράφουμε

$$A(s) = \begin{bmatrix} \tilde{a}_1(s) \\ \tilde{a}_2(s) \\ \vdots \\ \tilde{a}_p(s) \end{bmatrix} \quad \text{ή} \quad A(s) = [a_1(s), a_2(s), \dots, a_m(s)] \quad (3.1)$$

**Ορισμός 3.3.** [1] Η *συμπλεκτικότητα γραμμών (στηλών) (row (column) complexity)*  $c_r(A)$  ( $c_c(A)$ ) του  $A(s)$  ορίζεται ως το άθροισμα των βαθμών του κάθε πολυωνυμικού διανύσματος γραμμής (στήλης)

$$c_r(A) := \sum_{i=1}^p \deg \tilde{a}_i(s) \quad c_c(A) = \sum_{j=1}^m \deg a_j(s) \quad (3.2)$$

**Ορισμός 3.4.** [1] Ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου της γραμμής του πίνακα  $A(s)$ , συμβολίζεται με  $[A(s)]_r^h$  και ορίζεται ως

$$[A(s)]_r^h := \begin{bmatrix} \tilde{a}_{1r_1}^T \\ \tilde{a}_{2r_2}^T \\ \vdots \\ \tilde{a}_{pr_p}^T \end{bmatrix} \in \mathbb{R}[s]^{p \times m} \quad (3.3)$$

Αντίστοιχα ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου της στήλης του πίνακα  $A(s)$ , συμβολίζεται με  $[A(s)]_c^h$  και ορίζεται ως

$$[A(s)]_c^h := [a_{1q_1}, a_{2q_2}, \dots, a_{mq_m}] \in \mathbb{R}[s]^{p \times m} \quad (3.4)$$

**Παράδειγμα 17.** Έστω  $A(s) = \begin{bmatrix} s^3 + 2s^2 & 2s^2 - 1 \\ s + 1 & 3s^2 \end{bmatrix}$ , τότε

$$[A(s)]_r^h = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad [A(s)]_c^h = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

**Ορισμός 3.5.** [1] Ένας πολυωνυμικός πίνακας  $A(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$  λέγεται *κανονικός κατά γραμμές (στήλες) (row (column) proper)* αν  $\text{rank}_{\mathbb{R}} [A(s)]_r^h = \min\{p, m\}$ , ( $\text{rank}_{\mathbb{R}} [A(s)]_c^h = \min\{p, m\}$ ). ■

**Ορισμός 3.6.** [1] Έστω  $A(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$  με  $\text{rank}_{\mathbb{R}} A(s) = p (= m)$ . Τότε ο  $A(s)$  είναι κανονικός κατά γραμμές (στήλες) αν και μόνον αν η συμπλεκτικότητα γραμμών (στηλών)  $c_r(A)(c_c(A))$  είναι ίση με τον βαθμό του  $A(s)$ . ■

**Ορισμός 3.7.** [11] Έστω  $A(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$  με  $\text{rank}_{\mathbb{R}} A(s) = p (= m)$ . Τότε υπάρχει ένας αντιστρέψιμος πίνακας  $U_L(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times p}$  ( $U_R(s) \in \mathbb{R}[s]^{m \times m}$ ) τέτοιος ώστε

$$\bar{A}(s) = U_L(s)A(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m} \quad (3.5)$$

να είναι κανονικός κατά γραμμές

$$\bar{A}(s) = A(s)U_R(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m} \quad (3.6)$$

να είναι κανονικός κατά στήλες. ■

Για να δημιουργήσουμε έναν κανονικό κατά γραμμές πολυωνυμικό πίνακα, ουσιαστικά πρέπει να διαλέξουμε έναν  $U_L(s)$  ώστε η συμπλεκτικότητα κατά γραμμές του γινομένου στην (3.5) να είναι μικρότερη και να ισούται με τον βαθμό του, που από την σχέση  $\deg \bar{A}(s) = \deg U_L + \deg A(s)$  παραμένει αναλλοίωτο αν και μόνον αν ο  $U_L(s)$  είναι αντιστρέψιμος. Τότε ο  $\bar{A}(s)$  θα είναι κανονικός κατά γραμμές. Τότε υποθέτουμε ότι  $\text{rank}_{\mathbb{R}} V < p$  που εξασφαλίζει την ύπαρξη ενός μη μηδενικού  $a^T = [a_1, a_2, \dots, a_p] \in \mathbb{R}[s]^{1 \times p}$ , τέτοιου ώστε  $a^T V = 0$ . Έστω  $r_0 = \max_{i \in p} \{r_i\}$  και έστω ότι ο βαθμός αυτός γίνεται στην γραμμή  $i_0$  του  $A(s)$ . Τότε ορίζουμε

$$a^T := [a_1 s^{r_0 - r_1}, a_2 s^{r_0 - r_2}, \dots, a_{i_0}, \dots, a_p s^{r_0 - r_p}] \in \mathbb{R}[s]^{1 \times p} \quad (3.7)$$

Προφανώς  $\deg a^T < r_0$  και αν ορίσουμε το πολυωνυμικό διάνυσμα

$$\begin{aligned} \hat{a}_{i_0} &:= a(s)^T A(s) = a(s)^T [\text{diag}(s^{r_1}, \dots, s^{r_p})V + A_r(s)] \\ &= s^{r_0} a^T V + a(s)^T A_r(s) \\ &= a(s)^T A_r(s) \end{aligned} \quad (3.8)$$

έχουμε ότι  $\hat{r}_0 := \deg \hat{a}_{i_0}(s) < r_0 := \deg \hat{a}_{i_0}$ . (3.9)

**Παράδειγμα 18.** Έστω  $A(s) = \begin{bmatrix} 2 & s^2 & 0 \\ 0 & s & 3 \end{bmatrix}$

και  $[A(s)]_c^h = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} := V$ , παρατηρώ ότι  $\text{rank}_{\mathbb{R}} V = 1 < 2$ , άρα  $A(s)$  δεν είναι κανονικός

κατά γραμμές. Τότε  $a^T = [1 \ -1]$ , τέτοιο ώστε  $a^T V = [0 \ 0 \ 0]$ . Επίσης

$r_1 = \deg[2 \ s^2 \ 0] = 2$ ,  $r_2 = \deg[2 \ s \ 3] = 1$ , άρα  $r_0 = \max\{r_1, r_2\} = 2 = r_1$ ,

$i_0 = 1$   $a^T = [1 \ -s]$ , τότε

$$U_L(s) = \begin{bmatrix} 1 & -s \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

και  $\bar{A}(s) := U_L(s)A(s) = \begin{bmatrix} 1 & -s \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & s^2 & 0 \\ 0 & s & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3s \\ 0 & s & 3 \end{bmatrix}$

με  $[\bar{A}(s)]_c^h = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\text{rank}_{\mathbb{R}} [\bar{A}(s)]_c^h = 2$ ,

επομένως ο  $\bar{A}(s)$  είναι κανονικός κατά γραμμές. Αντίστοιχα γίνεται ένας πολυωνυμικός πίνακας κανονικός κατά στήλες. ■

### 3.3 Πολυωνυμική κλασματική έκφραση πολυωνυμικού πίνακα

**Ορισμός 3.8.** [10] Έστω τρεις πολυωνυμικοί πίνακες  $A(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$ ,  $B(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times q}$ ,  $C(s) \in \mathbb{R}[s]^{q \times m}$  τέτοιοι ώστε:

$$A(s) = B(s)C(s) \quad (3.10)$$

Τότε ο  $C(s)$  θα ονομάζεται δεξιός διαιρέτης (*right divisor*) του  $A(s)$ , ο  $B(s)$  θα ονομάζεται αριστερός διαιρέτης (*left divisor*) του  $A(s)$  και ο  $A(s)$  θα ονομάζεται αριστερό πολλαπλάσιο (*left multiple*) του  $C(s)$  ή δεξιό πολλαπλάσιο (*right multiple*) του  $B(s)$ . ■

**Ορισμός 3.9.** [10] Έστω δυο πολυωνυμικοί πίνακες που έχουν τον ίδιο αριθμό γραμμών (στηλών),  $T_1(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times l} (\in \mathbb{R}[s]^{l \times m})$ ,  $T_2(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times t} (\in \mathbb{R}[s]^{t \times m})$  και έστω  $T_L(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times p}$  ( $T_R(s) \in \mathbb{R}[s]^{m \times m}$ ) είναι ένας αριστερός (δεξιός) διαιρέτης των  $T_1(s), T_2(s)$  τέτοιος ώστε:

$$T_1(s) = T_L(s)\bar{T}_1(s) (= \bar{T}_1(s)T_R(s)) \quad \text{και} \quad T_2(s) = T_L(s)\bar{T}_2(s) (= \bar{T}_2(s)T_R(s)) \quad (3.11)$$

όπου  $\bar{T}_1(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times l} (\in \mathbb{R}[s]^{l \times m})$ ,  $\bar{T}_2(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times t} (\in \mathbb{R}[s]^{t \times m})$ . Τότε ο  $T_L(s)(T_R(s))$  θα λέγεται αριστερός (δεξιός) κοινός διαιρέτης (*left (right) common divisor*) (α.κ.δ. (δ.κ.δ)) των  $T_1(s)$  και  $T_2(s)$ . Εάν ο  $T_L(s)(T_R(s))$  είναι το δεξιό πολλαπλάσιο (αριστερό πολλαπλάσιο) κάθε α.κ.δ. (δ.κ.δ.) των  $T_1(s)$  και  $T_2(s)$  τότε ο  $T_L(s)(T_R(s))$  θα λέγεται μέγιστος κοινός αριστερός (δεξιός) διαιρέτης (*greatest left (right) common divisor*) (μ.κ.α.δ. (μ.κ.δ.δ)) των  $T_1(s)$  και  $T_2(s)$ . ■

**Ορισμός 3.10.** [1] Έστω δυο πολυωνυμικοί πίνακες με τον ίδιο αριθμό γραμμών (στηλών),  $T_1(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times l} (\in \mathbb{R}[s]^{l \times m})$ ,  $T_2(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times t} (\in \mathbb{R}[s]^{t \times m})$  με  $\text{rank}_{\mathbb{R}(s)}[T_1(s) \ T_2(s)] = p \leq l + p(\text{rank}_{\mathbb{R}(s)}[T_1(s)^T \ T_2(s)^T]^T = m \leq l + t)$ . Οι  $T_1(s)$  και  $T_2(s)$  θα ονομάζονται αριστερά (δεξιά) πρώτοι (*left (right) coprime*), εάν και μόνο εάν ο μ.κ.α.δ. (μ.κ.δ.δ.) τους  $T_{GL}(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times p}$  ( $T_{GR}(s) \in \mathbb{R}[s]^{m \times m}$ ) είναι αντιστρέψιμος. ■

**Ορισμός 3.11.** [1] Έστω  $T_1(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times l}$ ,  $T_2(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times t}$ , με

$\text{rank}_{\mathbb{R}(s)}[T_1(s) \ T_2(s)] = p \leq m = l + t$ . Τότε οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:

1. Οι  $T_1(s)$  και  $T_2(s)$  είναι αριστερά πρώτοι.
2.  $\text{rank}_{\mathbb{C}}[T_1(s_0) \ T_2(s_0)] = p, \forall s_0 \in \mathbb{C}$ .

**Ορισμός 3.12.** [4] Έστω  $A(s) \in \mathbb{R}(s)^{p \times m}$ ,  $\text{rank}_{\mathbb{R}(s)} A(s) = r, 1 \leq r \leq \min\{p, m\}$ . Τότε υπάρχουν πάντα μη-μοναδικά ζευγάρια  $D_L(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times p}$ ,  $N_L(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$ , αριστερά πρώτοι και  $N_R(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$ ,  $D_R(s) \in \mathbb{R}[s]^{m \times m}$  δεξιά πρώτοι, τέτοια ώστε

$$A(s) = D_L(s)^{-1} N_L(s) = N_R(s) D_R(s)^{-1} \quad (3.12)$$

Η παραπάνω σχέση του ρητού πίνακα  $A(s)$  λέγεται *αριστερά (δεξιά) πρώτη πολυωνυμική κλασματική έκφραση (Π.Κ.Ε.) (right (left) polynomial matrix fraction description-MFD)*.

Το γεγονός ότι αναφερόμαστε σε μη-μοναδικούς πίνακες  $D_L(s)$ ,  $N_L(s)$ ,  $N_R(s)$ ,  $D_R(s)$  μπορεί πάρα πολύ εύκολα να αποδειχτεί. Αν  $N_L(s)$ ,  $D_L(s)$  είναι αριστερά πρώτοι πολυωνυμικοί πίνακες του  $A(s)$  τότε ορίζουμε τα

$$\bar{D}_L(s) := U(s) D_L(s) \quad \bar{N}_L(s) := U(s) N_L(s) \quad (3.13)$$

όπου  $U(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times p}$  αντιστρέψιμος πίνακας, τότε

$$\bar{D}_L(s)^{-1} \bar{N}_L(s) = D_L(s)^{-1} U(s)^{-1} U(s) N_L(s) = D_L(s)^{-1} N_L(s) = A(s) \quad (3.14)$$

οπότε αποδείχτηκε ότι και  $\bar{D}_L(s)$ ,  $\bar{N}_L(s)$  είναι αριστερά πρώτα του  $A(s)$ . Τα ίδια αποτελέσματα έχουμε και για τα δεξιά πρώτα πολυώνυμα.

Μπορούμε να ορίσουμε τον πολυωνυμικό πίνακα  $N_L(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$  ( $N_R(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$ ) ως *αριθμητή (numerator)* του  $A(s)$  και τον πολυωνυμικό πίνακα  $D_L(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times p}$  ( $D_R(s) \in \mathbb{R}[s]^{m \times m}$ ) ως *παρονομαστή (denominator)* του  $A(s)$ .

Μια σημαντική σχέση που συνδέει τα μηδενικά του αριθμητή  $N_L(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$  ( $N_R(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$ ) ή του παρονομαστή  $D_L(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times p}$  ( $D_R(s) \in \mathbb{R}[s]^{m \times m}$ ) μιας αριστεράς (δεξιάς) πρώτης πολυωνυμικής κλασματικής έκφρασης και των πόλων/μηδενικών του  $A(s)$  είναι η παρακάτω:

Δομή των μηδενικών του  $A(s) \equiv$  Δομή των μηδενικών του  $N_L(s)$  ( $N_R(s)$ ) στο  $\mathbb{C}$

Δομή των πόλων του  $A(s) \equiv$  Δομή των μηδενικών του  $D_L(s)$  ( $D_R(s)$ ) στο  $\mathbb{C}$

Για να υπολογίσουμε τα αριστερά και δεξιά πρώτα πολυώνυμα ενός  $A(s)$ , μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε την 1<sup>η</sup> στήλη του πίνακα με το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των

παρονομαστών και παίρνουμε τον πίνακα  $N_R(s)$ . Το ίδιο κάνουμε και στην 2<sup>η</sup> στήλη. Στη συνέχεια δημιουργείται ο διαγώνιος πίνακας με τα αντίστοιχα ελάχιστα κοινά πολλαπλάσια που είναι ο  $D_R(s)^{-1}$ .

**Παράδειγμα 19.** Θα βρούμε δεξιά πρώτα Π.Κ.Ε. του ρητού πολυωνυμικού πίνακα  $T(s)$ , με τον παραπάνω τρόπο.

Το ε.κ.π. των παρονομαστών της 1<sup>ης</sup> στήλης του  $T(s)$  είναι  $(s+1)(s+2)$  και της 2<sup>ης</sup> στήλης  $(s+3)$ . Άρα έχουμε

$$\begin{aligned} T(s) &= \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ \frac{1}{s+2} & \frac{1}{s+3} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} s+2 & 0 \\ s+1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (s+1)(s+2) & 0 \\ 0 & s+3 \end{bmatrix}^{-1} = \\ &= N_R(s) D_R(s)^{-1} \end{aligned}$$

Πράγματι είναι μια δεξιά πολυωνυμική κλασματική έκφραση, γιατί

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} N_R(s) \\ D_R(s) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} s+2 & 0 \\ s+1 & 1 \\ (s+1)(s+2) & 0 \\ 0 & (s+3) \end{bmatrix}, \\ \text{rank}_{\mathbb{C}} \begin{bmatrix} N_R(s) \\ D_R(s) \end{bmatrix} &= 2 \quad \text{για } s = -1, s = -2, s = -3 \end{aligned}$$

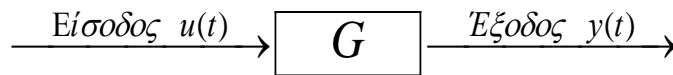
και  $S_{N_R(s)}^{\mathbb{C}} = \text{diag}[1, s+2]$  και  $S_{D_R(s)}^{\mathbb{C}} = \text{diag}[1, (s+1)(s+2)(s+3)]$

με  $\deg \det D_R(s) = 3$ . ■

### 3.4 Επανατοποθέτηση πόλων ενός γραμμικού πολυμεταβλητού συστήματος με δυναμική απόκριση εξόδου

Ένα Σύστημα Αυτομάτου Ελέγχου αντιστοιχεί σε ένα σύνολο κατάλληλα συνδεδεμένων στοιχείων με τέτοια μορφή ώστε να επιτυγχάνεται η επιθυμητή απόκριση.

Στην απλούστερη μορφή του έχουμε μια είσοδο  $u(t)$  και μια έξοδο  $y(t)$  όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Εικόνα 4.1: Σύστημα Αυτομάτου Ελέγχου

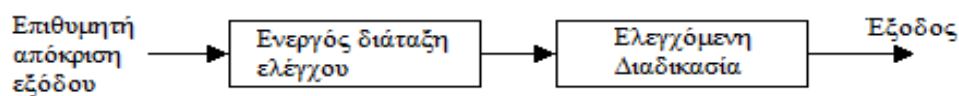
Η *συνάρτηση μεταφοράς*  $G(s)$  ενός συστήματος ορίζεται ως ο λόγος του μετασχηματισμού Laplace της εξόδου προς το μετασχηματισμό Laplace της εισόδου.

Οι *πόλοι* ενός συστήματος είναι οι τιμές της μεταβλητής  $s$  που μηδενίζουν τον παρονομαστή της συνάρτησης μεταφοράς  $G(s)$ , ενώ τα *μηδενικά* είναι οι τιμές που μηδενίζουν τον αριθμητή της συνάρτησης μεταφοράς. Οι πόλοι και τα μηδενικά της συνάρτησης μεταφοράς ονομάζονται *ιδιάζοντα σημεία* του συστήματος.

*Ανάδραση (feedback)* ονομάζεται η ανατροφοδότηση της εξόδου ενός συστήματος στην είσοδο του. Η ανάδραση μπορεί να είναι είτε (συνηθέστερα) αρνητική ανάδραση, είτε (σπανιότερα) θετική ανάδραση. Η ανάδραση εκτός από την ελάττωση του σφάλματος ενός συστήματος επιδρά στην ευστάθεια, το εύρος συχνοτήτων, το συνολικό κέρδος, την εμπέδηση και την ευαισθησία.

Τα συστήματα αυτομάτου ελέγχου μπορεί να είναι είτε ανοιχτού βρόγχου είτε κλειστού βρόγχου.

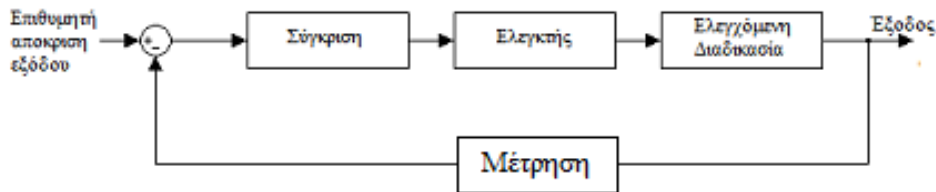
Ένα σύστημα *ανοιχτού βρόγχου* (χωρίς ανάδραση) χρησιμοποιεί μία ενεργό συσκευή (που παράγει το σήμα εισόδου) για να ελέγξει απευθείας την διεργασία χωρίς την χρήση ανατροφοδότησης. Είναι μια απλή και οικονομική κατασκευή, συνήθως χωρίς προβλήματα αστάθειας αλλά συνήθως είναι ανακριβής.



Εικόνα 4.2: Σύστημα χωρίς ανάδραση



Στα συστήματα κλειστού βρόγχου (με ανάδραση) το ελεγχόμενο σήμα  $y$  θα πρέπει να ανατροφοδοτηθεί και να συγκριθεί με την είσοδο αναφοράς και ένα σήμα διέργησης ανάλογο της διαφοράς της εισόδου από την έξοδο θα πρέπει να οδηγηθεί στο σύστημα για τη διόρθωση του σφάλματος. Συνήθως πετυχαίνουμε πιο ακριβή και προσαρμόσιμο έλεγχο.



Εικόνα 4.3: Σύστημα με ανάδραση

Κατά την ανάλυση και την σχεδίαση ενός συστήματος, η *ευστάθεια* αποτελεί έναν πολύ σημαντικό παράγοντα. Ένα σύστημα είναι *ευσταθές*, αν για πεπερασμένη είσοδο, η έξοδος του είναι επίσης πεπερασμένη. Μπορούμε να κατηγοριοποιήσουμε την ευστάθεια ως απόλυτη ευστάθεια και σχετική ευστάθεια. Εάν εξασφαλιστεί η απόλυτη ευστάθεια, εξετάζεται η σχετική του ευστάθεια, η οποία εκφράζει το πόσο ευσταθές είναι το σύστημα κάτω από συγκεκριμένες λειτουργικές συνθήκες. Τόσο η απόλυτη όσο και η σχετική ευστάθεια ενός συστήματος σχετίζονται άμεσα με την θέση των ριζών της χαρακτηριστικής εξίσωσης. Για να είναι ένα σύστημα ευσταθές θα πρέπει οι ρίζες της χαρακτηριστικής του εξίσωσης να βρίσκονται στο αριστερό ημιεπίπεδο. Όσο πιο απομακρυσμένοι είναι οι πόλοι από τον φανταστικό άξονα τότε τόσο πιο ευσταθές είναι το σύστημα. Αν υπάρχουν πόλοι πάνω στον φανταστικό άξονα το σύστημα είναι οριακά ευσταθές.

Εμείς θα ασχοληθούμε με συστήματα πολλών εισόδων και πολλών εξόδων (MIMO systems).



Εικόνα 4.4: MIMO σύστημα αυτομάτου ελέγχου

Η περιγραφή του παραπάνω συστήματος γίνεται με ένα μαθηματικό πρότυπο της μορφής

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), x(0) = 0 \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \quad (3.15)$$

όπου

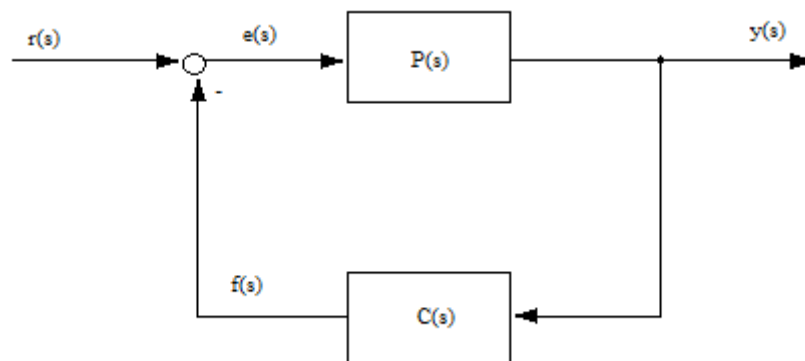
$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_r(t) \end{bmatrix}, y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_m(t) \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

και  $x(t)$  είναι η κατάσταση του συστήματος,  $u(t)$  είναι η (διανυσματική) είσοδος του συστήματος και  $y(t)$  είναι η (διανυσματική) έξοδος του συστήματος.

Οι πίνακες  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times r}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $D \in \mathbb{R}^{m \times r}$  καλούνται πίνακες του χώρου κατάστασης, ενώ η διάσταση  $n$  καλείται (δυναμική) τάξη του συστήματος.

Η συνάρτηση μεταφοράς ενός συστήματος (3.15) είναι  $G(s) = C(sI_n - A)^{-1}B + D$ . Οι πόλοι του συστήματος είναι όλα τα  $s_i$  που μηδενίζουν το χαρακτηριστικό πολυώνυμο  $|sI_n - A| = 0$ .

Έστω το παρακάτω γραμμικό χρονικό αναλλοίωτο σύστημα  $\Sigma_c$



**Εικόνα 4.5:** Σύστημα κλειστού βρόγχου  $\Sigma_c$

όπου  $P(s)$  αυστηρά κανονική συνάρτηση μεταφοράς και θεωρούμε την συνάρτηση μεταφοράς  $P_c(s)$  του συστήματος κλειστού βρόγχου ανάδρασης  $\Sigma_c$  και  $C(s)$  η συνάρτηση μεταφοράς ενός κανονικού δυναμικού αντισταθμιστή. Θα συμβολίζουμε με  $[P(s)]_R$  την κλάση των συναρτήσεων μεταφοράς κλειστών βρόγχων  $P_c(s)$  που μπορούν να ληφθούν από το  $P(s)$ , μέσω της χρήσης κανονικού δυναμικού αντισταθμιστή ανάδρασης  $C(s)$ . Με  $P$  θα συμβολίζουμε την κλάση των συναρτήσεων μεταφοράς, οι οποίες μέσω ενός κανονικού

αντισταθμιστή ανάδρασης μας δίνουν ένα ευσταθές σύστημα κλειστού βρόγχου  $\Sigma_c$ , με συνάρτηση μεταφοράς  $P_c(s) \in [P(s)]_R$ , η οποία δεν έχει μηδενικά στο  $\bar{\mathbb{C}}^+$ .

Αυτό που θα μας απασχολήσει είναι ο υπολογισμός της επιθυμητής συνάρτησης μεταφοράς  $P_c(s) \in [P(s)]_R$ , ώστε ο αντισταθμιστής μας  $C(s)$  να έχει πόλους σε επιθυμητό διάστημα και να εξασφαλίσουμε την ευστάθεια του συστήματος  $\Sigma_c$ .

Στη συνέχεια θα αναφερθούμε στο θεώρημα που θα χρησιμοποιήσουμε και στον αλγόριθμο επίλυσης του παραπάνω προβλήματος. Για την επίλυση του προβλήματος θα χρησιμοποιήσουμε θεωρήματα από τα προηγούμενα κεφάλαια.

**Θεώρημα 3.13.** [9] Έστω ένα γραμμικό χρονικά αναλλοίωτο πολυμεταβλητό σύστημα  $\Sigma$  με συνάρτηση μεταφοράς εισόδου-εξόδου την  $P(s) = N_R(s)D_R(s)^{-1} \in \bar{\mathbb{R}}_{pr0}(s)^{m \times m}$  και έστω  $Q(s) \in \bar{\mathbb{R}}[s]^{m \times m}$  είναι το πηλίκο της διαίρεσης του  $D_R(s)$  από το  $N_R(s)$ . Έστω  $U(s) \in \bar{\mathbb{R}}[s]^{m \times m}$  είναι  $\mathbb{R}[s]$ -αντιστρέψιμος, έτσι ώστε  $\bar{Q}_+(s) := U(s)Q_+(s)$  να είναι κανονικός κατά γραμμή. Έστω  $\bar{D}_{RC}(s) = \text{diag}[\bar{D}_1(s), \bar{D}_2(s), \dots, \bar{D}_m(s)] \in \bar{\mathbb{R}}[s]^{m \times m}$ , όπου  $\bar{D}_i(s), i = 1, \dots, m$  ευαδικά πολυώνυμα με επιθυμητά μηδενικά στο  $\mathbb{C}^-$  και  $D_{RC}(s) = U(s)^{-1}\bar{D}_{RC}(s)$ . Ας είναι  $N_{RC}(s)$  το πηλίκο της διαίρεσης του  $\bar{D}_{RC}(s)$  από το  $\bar{Q}_+(s)$  ή του  $D_{RC}(s)$  από το  $Q_+(s)$ . Έστω  $P_c(s) := N_{RC}(s)D_{RC}(s)^{-1}$ . Αν  $P(s) \in P$ , τότε ο αντισταθμιστής ανάδρασης  $C(s) := P_c(s)^{-1} - P(s)^{-1} \in \bar{\mathbb{R}}_{pr}(s)^{m \times m}$  μας δίνει ένα ευσταθές κλειστό σύστημα  $\Sigma_c$  με συνάρτηση μεταφοράς  $P_c(s) \in [P(s)]_R$  αν

$$\deg \bar{D}_i(s) \geq \deg_{ri} \bar{Q}_+(s) + \max_{j,k=1,\dots,m} \{\deg q_{jk}(s)\} - 1 \quad (3.17)$$

$i = 1, \dots, m$ , όπου  $\max_{j,k=1,\dots,m} \{\deg q_{jk}(s)\}$  είναι ο μεγαλύτερος βαθμός από τους βαθμούς των στοιχείων  $q_{jk}$  του  $Q_+(s)$ . ■

**Ορισμός 3.14.** [9] Έστω  $Q(s) = Q_k s^k + Q_{k-1} s^{k-1} + \dots + Q_0, Q_i \in \mathbb{R}^{m \times m}$ . Τότε το αστηρώς πολυωνυμικό μέρος του  $Q(s)$  είναι  $Q_+(s) := Q(s) - Q_0 \in \bar{\mathbb{R}}[s]^{m \times m}$ . ■

Βάσει του παραπάνω θεωρήματος καταλήγουμε στον παρακάτω αλγόριθμο εύρεσης αντισταθμιστή:

Θα δίνεται ένα γραμμικό χρονικά αναλλοίωτο πολυμεταβλητό σύστημα  $\Sigma$  με  $m \times m$  ομαλή αυστηρώς κανονική συνάρτηση μεταφοράς  $P(s) \in P$ , τότε ο αλγόριθμος για να υπολογίσουμε έναν κανονικό δυναμικό αντισταθμιστή  $C(s)$  έτσι ώστε το κλειστό σύστημα βρόγχου ανάδρασης  $\Sigma_c$  να είναι ευσταθές και η συνάρτηση μεταφοράς εισόδου-εξόδου  $P_c(s)$  να είναι αυστηρώς κανονική και να έχει αριστερό Π.Κ.Ε. με επιθυμητό πίνακα παρονομαστή  $D_{RC}(s)$ , είναι:

1. Ορίζουμε τον  $Q(s): P(s)^{-1}, [P(s)^{-1}]_{pol} := Q(s), [P(s)^{-1}]_{sp}$ .
2. Υπολογίζουμε το  $Q_+(s) := Q(s) - Q_0$  και επιλέγουμε  $U(s) \in \bar{\mathbb{R}}[s]^{m \times m}$  και  $\mathbb{R}[s]$ -αντισταθμιστής, τέτοιο ώστε  $\bar{Q}_+(s) := U(s)Q_+(s)$  να είναι κανονικός κατά γραμμές.
3. Διαλέγουμε  $\bar{D}_{RC}(s) = \text{diag}[\bar{D}_1(s), \bar{D}_2(s), \dots, \bar{D}_m(s)] \in \bar{\mathbb{R}}[s]^{m \times m}$ ,  $\bar{D}_i(s) \in \mathbb{R}[s], i = 1, \dots, m$  με επιθυμητά μηδενικά στου  $\mathbb{C}^-$ , ώστε να ικανοποιείται η σχέση (3.17).
4. Υπολογίζουμε:  $T(s) := \bar{Q}_+(s)^{-1} \bar{D}_{RC}(s) \in \bar{\mathbb{R}}[s]^{m \times m}$ ,  $[T(s)]_{pol} := N_{RC}(s)$  και  $[T(s)]_{sp}$ .
5. Υπολογίζουμε  $D_{RC}(s) = U(s)^{-1} \bar{D}_{RC}(s) \in \bar{\mathbb{R}}[s]^{m \times m}$ ,
6. Η συνάρτηση μεταφοράς του κλειστού συστήματος θα είναι η  $P_c(s) := N_{RC}(s)D_{RC}(s)^{-1} \in \bar{\mathbb{R}}_{pr0}(s)^{m \times m}$  και ο αντισταθμιστής θα είναι  $C(s) := P_c(s)^{-1} - P(s)^{-1} \in \mathbb{R}_{pr}(s)^{m \times m}$ .

**Παράδειγμα 20.** Έστω

$$P(s) = \begin{bmatrix} \frac{s+2}{s(s+1)} & \frac{2}{s+3} \\ \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_{pr0}[s]^{2 \times 2}$$

1<sup>ο</sup> Βήμα: Υπολογίζουμε τους δεξιά πρώτους πολωνυμικούς πίνακες του  $P(s)$ :

$$\begin{aligned} P(s) &= \begin{bmatrix} s+2 & 2(s+2) \\ s & s+3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s(s+1) & 0 \\ 0 & (s+3)(s+2) \end{bmatrix}^{-1} \\ &= N_R(s)D_R(s)^{-1} \end{aligned}$$

πράγματι είναι δεξιά πρώτοι πολωνυμικοί πίνακες, γιατί

$$\text{rank}_C \begin{bmatrix} N_R(s) \\ D_R(s) \end{bmatrix} = 2 \quad \text{για} \quad s = -1, s = -2, s = -3$$

Επομένως θέλω να υπολογίσω το  $P(s)^{-1} = D_R(s)N_R(s)^{-1}$ . Παρατηρούμε ότι  $\det N_R(s) = -s^2 + s + 6 \neq 0$ , οπότε βρίσκουμε ότι

$$N_R(s)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{s+3}{(s+2)(s-3)} & \frac{-2}{s-3} \\ -\frac{s}{(s+2)(s-3)} & \frac{1}{s-3} \end{bmatrix} \quad \text{και έτσι μπορούμε να υπολογίσουμε τον πίνακα:}$$

$$P(s)^{-1} = D_R(s)N_R(s)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{(s+3)(s+1)s}{(s+2)(s-3)} & \frac{-2s(s+1)}{s-3} \\ -\frac{s(s+3)}{(s+2)(s-3)} & \frac{(s+2)(s+3)}{s-3} \end{bmatrix}.$$

Κάνουμε την διαίρεση του  $D_R(s)$  από το  $N_R(s)$  και βρίσκουμε το αριστερό πηλίκο, που είναι ο πίνακας  $Q(s)$ . Βρίσκουμε το δεξί πηλίκο και υπόλοιπο, τα οποία είναι αντίστοιχα:

$$Q(s) = \begin{bmatrix} -s-5 & 2s+8 \\ s+6 & -s-8 \end{bmatrix} \quad R(s) = \begin{bmatrix} 10 & -4 \\ -12 & 6 \end{bmatrix}$$

2° Βήμα: Υπολογίζουμε το αυστηρώς κανονικό κατά γραμμές μέρος του  $Q(s)$ , το οποίο είναι:

$$Q_+(s) = Q(s) - Q_0 = \begin{bmatrix} -s & 2s \\ s & -s \end{bmatrix}$$

Θέλω το  $Q_+(s)$  να είναι κανονικός κατά γραμμές, κάτι που παρατηρούμε ότι είναι, γιατί

$$\text{rank} [Q_+(s)]_r^h = \text{rank} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = 2, \quad \text{καθώς και} \quad c_r(Q_+(s)) = 2.$$

3° Βήμα: Βλέπουμε ότι  $\deg_{r_1} Q_+(s) = 1$  και  $\deg_{r_2} Q_+(s) = 1$ . Επομένως ο βαθμός των στοιχείων του διαγώνιου πίνακα  $\bar{D}_{RC}(s)$  θα είναι:  $\deg D_1 \geq 1+1-1=1$  και  $\deg D_2 \geq 1+1-1=1$ . Επομένως διαλέγουμε επιθυμητά μηδενικά, τέτοια ώστε  $\bar{D}_{RC}(s) = \text{diag}[s+1, s+3]$ .

$$4^\circ \text{ Βήμα: Υπολογίζουμε τον πίνακα } T(s) = Q_+(s)^{-1} D_{RC}(s) = \begin{bmatrix} \frac{s+1}{s} & \frac{2s+6}{s} \\ \frac{s+1}{s} & \frac{s+3}{s} \end{bmatrix}.$$

Τότε  $[T(s)]_{pol} = N_{RC}(s)$  ή το  $N_{RC}(s)$  μπορεί να υπολογισθεί ως το δεξί πηλίκο της διαίρεσης

του  $D_{RC}(s)$  από το  $Q_+(s)$ . Επομένως βρίσκουμε ότι  $N_{RC}(s) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ .

5<sup>ο</sup> Βήμα: Παρατηρούμε ότι  $D_{RC}(s) = \bar{D}_{RC}(s)$

6<sup>ο</sup> Βήμα: Έτσι φτάσαμε στο σημείο να υπολογίσουμε τον

$$P_c(s) = N_{RC}(s)D_{RC}(s)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{2}{s+3} \\ \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+3} \end{bmatrix} \text{ και εν συνεχεία τον}$$

$$P_c(s)^{-1} = D_{RC}(s)N_{RC}(s)^{-1} = \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 0 & s+3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(s+1) & 2(s+1) \\ s+3 & -(s+3) \end{bmatrix}.$$

Άρα ο επιθυμητός αντισταθμιστής μας προκύπτει από τον τύπο

$$\begin{aligned} C(s) = P_c(s)^{-1} - P(s)^{-1} &= \begin{bmatrix} -(s+1) & 2(s+1) \\ s+3 & -(s+3) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{(s+3)(s+1)s}{(s+2)(s-3)} & \frac{-2s(s+1)}{s-3} \\ -\frac{s(s+3)}{(s+2)(s-3)} & \frac{(s+2)(s+3)}{s-3} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{2(2s^2+5s+3)}{-s^2+s+6} & -\frac{6(s+1)}{s-3} \\ -\frac{3(s+3)}{s-3} & \frac{5(s+3)}{s-3} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_{pr.}(s)^{2 \times 2} \end{aligned}$$

Έτσι κατασκευάσαμε μια συνάρτηση μεταφοράς του κλειστού συστήματος με επιθυμητά μηδενικά τα  $-1, -3$ . ■

## Βιβλιογραφία

- [1] A.I.G Vardulakis, *Linear Multivariable Control-Algebraic Analysis and Synthesis Methods*. New York: Wiley, 1991.
- [2] Tadeusz Kaczorek, *Polynomial and Rational Matrices-Applications in Dynamical Systems Theory*. Springer-Verlag London, 2007.
- [3] F.R. Gantmacher, *The Theory of Matrices (Volume 1)*. Chelsea Publishing Company, New York, 1960.
- [4] T. Kailath, *Linear Systems*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall, 1980.
- [5] P.J. Antsaklis, A.N. Michel, *Linear Systems*. Birkhauser, Boston, 2006.
- [6] P. Tzekis, N.P. Karampetakis, A.I. Vardulakis, *On The Division Of Polynomial Matrices*. IMA J Math Control Info 16 (4), pp.391-401, 1999.
- [7] F.L. Lewis, *Further Remarks on the Caley-Hamilton Theorem and Leverrier's Method for the Matrix Pencil (sE-A.)*. IEEE Trans. on Auto. Control, Vol. 31, No.9, pp.869-870, 1986.
- [8] G. Fragulis, B.G. Mertzios, A.I. Vardulakis, *Computation of the inverse of a polynomial matrix and evaluation of its Laurent expansion*. Int. J. Control, Vol.53, No.2, pp.431-443, 1991.
- [9] A.I.G. Vardulakis, C. Kazantzidou, *Denominator Assignment, Invariants and Canonical Forms Under Dynamic Feedback Compensation in Linear Multivariable Systems*. IEEE Trans. on Auto. Control, Vol. 56, No.5, pp.1180-1185, 2011.
- [10] N.Π. Καραμπετάκης, *Έννοιες ισοδυναμίες για γραμμικά, χρονικά αμετάβλητα, πολυμεταβλητά συστήματα αυτομάτου ελέγχου*. Διδακτορική διατριβή στο τμήμα Μαθηματικών, στον Τομέα Επιστήμης Υπολογιστών και Αριθμητικής Ανάλυσης, Θεσσαλονίκη, 1989.
- [11] A.N Βελώνη, *Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου Ανάλυση και Προσομοίωση*. Εκδόσεις Τζιόλα, Αθήνα, 2011.
- [12] Π.Χ. Βασιλείου, Γ. Τσακλίδης, *Εφαρμοσμένη Θεωρία Πινάκων*. Εκδόσεις ΖΗΤΗ, Θεσσαλονίκη, 2003.
- [13] Θ. Θεοχάρη-Αποστολίδη, Χ. Χαραλάμπους, Χ. Βαβατσούλας, *Εισαγωγή στη Γραμμική Άλγεβρα*. Θεσσαλονίκη, 2006.
- [14] Δ.Μ. Πουλάκης, *Θεωρία Αριθμών, Μια σύγχρονη θεώρηση της κλασικής Θεωρίας Αριθμών*. Εκδόσεις ΖΗΤΗ, Θεσσαλονίκη, 2001.