ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ

«ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ & ΘΕΩΡΙΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΕΛΕΓΧΟΥ»

Επίλυση Διοφαντικών Εξισώσεων και εφαρμογές στη Θεωρία Ελέγχου

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Δαραμήλας Ν. Χρήστος

Επιβλέπων Καθηγητής: Καραμπετάκης Νικόλαος, Αναπληρωτής Καθηγητής Α.Π.Θ.

Θεσσαλονίκη, Δεκέμβριος 2012

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ

«ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ & ΘΕΩΡΙΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΕΛΕΓΧΟΥ»

Επίλυση Διοφαντικών Εξισώσεων και εφαρμογές στη Θεωρία Ελέγχου

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Δαραμήλας Ν. Χρήστος

Επιβλέπων Καθηγητής: Καραμπετάκης Νικόλαος, Αναπληρωτής Καθηγητής Α.Π.Θ.

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την

…………………………	…………………………	…………………………
Καραμπετάκης Νικόλαος Αναπληρωτής Καθηγητής Α.Π.Θ.	Βαρδουλάκης Αντώνης – Ιωάννης Καθηγητής Α.Π.Θ.	Αντωνίου Ευστάθιος Επίκουρος Καθηγητής Γενικού Τμήματος Α.Τ.Ε.Ι. Θεσσαλονίκης

Θεσσαλονίκη, Δεκέμβριος 2012

…………………………………………..

Δαραμήλας Ν. Χρήστος

Πτυχιούχος Μαθηματικός Α.Π.Θ.

Όλο περιεχόμενο που εμφανίζεται στην παρούσα μεταπτυχιακή διπλωματική εργασία έχει αντιγραφεί από τις αναφερόμενες στο τέλος του τόμου «Βιβλιογραφία», εργασίες, βιβλία, δημοσιεύσεις και παρουσιάσεις σεμιναρίων. Δεν αποτελείται σε καμία περίπτωση από δικές μου απόψεις, συμπεράσματα και γενικότερα δεν περιέχει καινοτόμες δικές μου πνευματικές παραγωγές και επινοήσεις.

Π Ι Ν Α Κ Α Σ   Π Ε Ρ Ι Ε Χ Ο Μ Ε Ν Ω Ν

Π Ε Ρ Ι Λ Η Ψ Η

Αντικείμενο μελέτης της παρούσας εργασίας είναι η επίλυση Διοφαντικών εξισώσεων με άμεση εφαρμογή στην εύρεση και υπολογισμό σταθεροποιητικών αντισταθμιστών, τόσο για ένα σύστημα ελέγχου μίας εισόδου και μίας εξόδου, όσο και για ένα σύστημα ελέγχου, πολλών εισόδων και εξόδων, γραμμικό και χρονικά αναλλοίωτο. Η εύρεση αντισταθμιστών μελετάται επίσης και με την τεχνική της παραγοντοποίησης.

Συγκεκριμένα, εξετάζουμε το πρόβλημα σταθεροποίησης γραμμικών και χρονικά αναλλοίωτων συστημάτων, τα οποία χαρακτηρίζονται από αυστηρά κανονικές ρητές συναρτήσεις μεταφοράς ή από αυστηρά κανονικούς πίνακες ρητών συναρτήσεων μεταφοράς, μέσω κανονικών (δυναμικών) αντισταθμιστών στο βρόχο της ανάδρασης χρησιμοποιώντας την Ευκλείδεια διαίρεση πολυωνύμων και την Ευκλείδεια διαίρεση πολυωνυμικών πινάκων αντίστοιχα.

Αρχικά, μέσω ιστορικής αναδρομής συμπεραίνουμε ότι οι Διοφαντικές εξισώσεις είναι στην ουσία απόρροια του Ευκλειδείου Αλγορίθμου. Στη συνέχεια παραθέτουμε βασικές γνώσεις της θεωρίας αριθμών και αναπτύσσουμε τις Διοφαντικές εξισώσεις στο σύνολο των ακεραίων αριθμών. Έπειτα γενικεύουμε τη μελέτη αυτή σε πολυώνυμα και τέλος σε πολυωνυμικούς πίνακες. Επιπρόσθετα, ασχολούμαστε με ρητές συναρτήσεις που έχουν ως όρους πολυώνυμα δηλαδή με ρητές, κανονικές και Ω - ευσταθείς συναρτήσεις, το σύνολο των οποίων αποτελεί Ευκλείδειο δακτύλιο, καθώς και με πίνακες που έχουν στοιχεία τους στο δακτύλιο αυτό.

Λ έ ξ ε ι ς Κ λ ε ι δ ι ά

Διοφαντική εξίσωση, σταθεροποιητικός αντισταθμιστής, μέγιστος κοινός διαιρέτης, πολυώνυμα πρώτα μεταξύ τους, πολυωνυμικός πίνακας, Ω – ευσταθείς συνάρτησεις, S - αντιστρέψιμος πίνακας, πολυωνυμική κλασματική περιγραφή πίνακα, κανονική ρητή συνάρτηση μεταφοράς

A B S T R A C T

Subject of this paper is to solve Diophantine equations with direct application to find and calculate stabilizing compensators, for a control system of one input and one output, as well as for a control system of multiple inputs and outputs, linear and time invariant in both cases. Finding compensators is also studied by the technique of derivatization.

Specifically, we consider the problem of stabilizing linear time – invariant, control systems, characterized by strictly proper plants (transfer functions) via proper (dynamic) compensators in the feedback loop using the Euclidean division of polynomials and Euclidean division of polynomial matrices respectively.

Initially, through historical retrospection we conclude that Diophantine equations is essentially the result of Euclidean Algorithm. Then, we present basic knowledge of number theory and develop the Diophantine equations to all integers. Afterwards, we generalize this study to polynomials and polynomial matrices. Additionally, we deal with rational functions that have terms as polynomials ie, proper and Ω - stable functions, all of which is an Euclidean ring, and also with matrices that have elements in this ring.

K e y   w o r d s

Diophantine equation, stabilizing compensator, greatest common divisor, coprime polynomials, polynomial matrix, Ω – stable functions, S – unimodular matrix, polynomial fraction description, proper transfer function

Π Ρ Ο Λ Ο Γ Ο Σ - Ε Υ Χ Α Ρ Ι Σ Τ Ι Ε Σ

Αρχικά, θα ήθελα να ευχαριστήσω ολόθερμα και ολόψυχα, τον επιβλέποντα καθηγητή μου κύριο Καραμπετάκη Νικόλαο, Αναπληρωτή Καθηγητή Α.Π.Θ. για το χρόνο που αφιέρωσε σε όλη αυτή τη μακρά πορεία της εκπόνησης της παρούσας εργασίας. Οι συμβουλές του, οι καίριες υποδείξεις του, η στιβαρή καθοδήγησή του και η βοήθεια που μου προσέφερε εν γένει, συνετέλεσαν στο να συγγραφεί το παρακάτω κείμενο. Η δε υπομονή που επέδειξε προς το πρόσωπό μου ήταν στωική και υποδειγματική, ώστε ποτέ δε θεώρησα πως η συνεργασία μας υπήρξε για εκείνον φορτική.

Επιπρόσθετα ευχαριστώ θα ήθελα να πω και στα μέλη της τριμελούς επιτροπής, κύριο Βαρδουλάκη Αντώνιο – Ιωάννη, Καθηγητή Α.Π.Θ. και κύριο Αντωνίου Ευστάθιο, Επίκουρο Καθηγητή του Γενικού Τμήματος Α.Τ.Ε.Ι. Θεσσαλονίκης, για το χρόνο που αφιέρωσαν στη μελέτη και αξιολόγηση της εργασίας μου.

Θα ήθελα να τονίσω εδώ ότι το περιεχόμενο της παρούσας εργασίας αντλήθηκε εν συνόλω από την προσωπική πνευματική δουλειά, πάνω στο αντικείμενο, του κύριου Βαρδουλάκη και για το λόγο αυτό τον ευχαριστώ συγκεκριμένα και ιδιαίτερα.

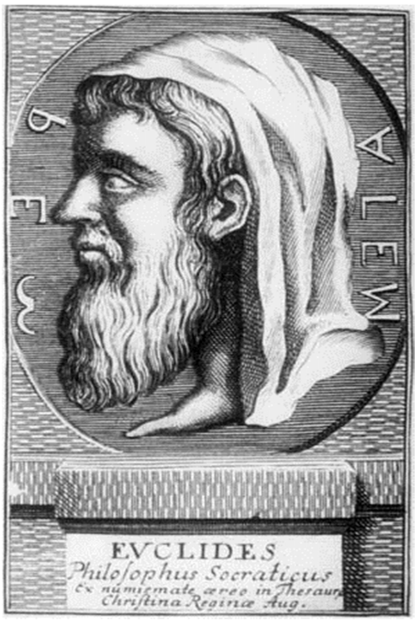
Τέλος, το μεγαλύτερο μου ευχαριστώ το οφείλω στους ανθρώπους που με αγαπούν πραγματικά, που δεν είναι άλλοι από τους γονείς μου, την οικογένειά μου και τους αληθινούς μου φίλους, οι οποίοι στέκονται πάντα δίπλα μου, αρωγοί, και βοηθούν όλοι, ο καθένας με τον δικό του τρόπο, ώστε να ευδοκιμεί η οποιαδήποτε φιλότιμη προσπάθειά μου.

Αφιερώνεται στους γονείς μου

και σε όλους όσους αγαπούν ανιδιοτελώς

Κεφάλαιο 1^{ο} : Ιστορική Αναδρομή

Ευκλείδης



Ο **Ευκλείδης** από την Αλεξάνδρεια (~ 325 π.Χ. - 265 π.Χ.), ήταν Έλληνας μαθηματικός, που δίδαξε και πέθανε στην Αλεξάνδρεια της Αιγύπτου, περίπου κατά την διάρκεια της βασιλείας του Πτολεμαίου Α΄ (323 π.Χ. - 283 π.Χ.). Στις μέρες μας, είναι γνωστός ως ο «πατέρας» της Γεωμετρίας. Ο Ευκλείδης δεν ήταν ακριβώς ένας μεγάλος καινοτόμος αλλά κυρίως οργανωτής που συστηματοποίησε και έθεσε σε στέρεες θεωρητικές βάσεις τα συμπεράσματα στα οποία έφτασαν ο Θαλής, ο Εύδοξος και άλλες προσωπικότητες της εποχής. Ο Ευκλείδης είχε την ικανότητα να ανασυντάξει τις αποδείξεις των θεωρημάτων σε σύντομους αυστηρούς όρους. Η μακροχρόνια όμως φύση και χρήση του έργου κάνει τον Ευκλείδη τον μεγαλύτερο μαθηματικό διδάσκαλο της αρχαιότητας.

Το πιο γνωστό έργο του είναι τα ***Στοιχεία***, που αποτελείται από 13 βιβλία. Είναι και αναμφίβολα το πιο σημαντικό έργο στην ιστορία των ελληνικών μαθηματικών. Εκεί, οι ιδιότητες των γεωμετρικών αντικειμένων και των ακεραίων αριθμών προκύπτουν από ένα σύνολο αξιωμάτων, εμπνέοντας την αξιωματική μέθοδο των μοντέρνων μαθηματικών. Παρ' ότι πολλά από τα θεωρήματα που περιέχονταν στα *Στοιχεία* ήταν ήδη γνωστά, ένα από τα επιτεύγματα του Ευκλείδη ήταν ότι τα παρουσίασε σε ένα ενιαίο, λογικά συμπαγές πλαίσιο. Το έργο του Ευκλείδη ήταν τόσο σημαντικό ώστε η γεωμετρία που περιέγραψε στα *Στοιχεία* του ονομάστηκε **Ευκλείδεια**, ενώ τα *Στοιχεία* σήμερα θεωρούνται ένα από τα σημαντικότερα μαθηματικά έργα όλων των εποχών. Ξέρουμε από ένα εδάφιο του μεταγενέστερου σχολιαστή Πρόκλου ότι ο Ευκλείδης δίδαξε στην Αλεξάνδρεια κατά τη διάρκεια της βασιλείας του Πτολεμαίου Α΄ και όταν αυτός του ζήτησε έναν πιο εύκολο τρόπο από τα *Στοιχεία* του για να μάθει Γεωμετρία η απάντηση του μεγάλου μαθηματικού ήταν: *«Δεν υπάρχει βασιλική οδός για τη Γεωμετρία»*.

Σχεδόν τίποτα δεν είναι γνωστό σχετικά με την ζωή του Ευκλείδη εκτός από αυτά που αναφέρονται στα βιβλία του και ελάχιστες βιογραφικές πληροφορίες που προέρχονται από αναφορές τρίτων. Ήταν ενεργό μέλος της βιβλιοθήκης της Αλεξάνδρειας και πιθανόν να είχε σπουδάσει στην Ακαδημία του Πλάτωνα στην Αθήνα. Φημίστηκε στην πόλη της Παλλάδας για τις μαθηματικές του εργασίες και γι' αυτό προσκλήθηκε από τον Πτολεμαίο Α΄ στην Αλεξάνδρεια. Η διάρκεια της ζωής του, όπως και ο τόπος γέννησής του μας παραμένουν άγνωστα. Κατά τον Μεσαίωνα, πολλοί δυτικοί συγγράφεις τον ταύτισαν λανθασμένα με έναν κατά ένα αιώνα προγενέστερο Σωκρατικό φιλόσοφο, αποκαλώντας τον *Ευκλείδη από τα Μέγαρα*.

ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΟΣ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ

Λόγος είναι η ελληνική λέξη για τη λογική ενώ Ratio είναι η λατινική λέξη από την οποία προέρχεται – πηγάζει η λέξη Rationality = ρητότητα, λογικότητα.

ΛΟΓΟΣ = RATIO = ΔΙΑΙΡΕΣΗ = ΜΕΤΡΗΣΗ – ΜΗΚΟΣ

Ρητοί αριθμοί (Rational numbers) είναι οι αριθμοί που μπορούν «να λεχθούν, να ειπωθούν, να γραφούν». Πρόκειται για αριθμούς που λαμβάνονται ως δείκτες μετρήσιμων μηκών, δηλαδή μήκη που μπορούν να μετρηθούν από ένα κοινό μήκος, όπως για παράδειγμα $\frac{3}{2}$ ενώ Ά-ρητοι, Α – Σύμμετροι, Ά – Λογοι (Non - Rational, I - Rational) είναι οι αριθμοί που δεν μπορούν «να λεχθούν, να ειπωθούν, να γραφούν». Πρόκειται για αριθμούς που λαμβάνονται ως δείκτες μη – μετρήσιμων μηκών, δηλαδή που δεν μπορούν να μετρηθούν από κοινό μήκος, όπως για παράδειγμα ο λόγος της διαγωνίου ενός τετραγώνου πλευράς 1 προς τη πλευρά του που τώρα παριστάνεται με τον συμβολισμό $\sqrt{2} = 1,4142..$

Οι Πυθαγόρειοι, λοιπόν, έχτισαν τα μαθηματικά τους πάνω σε σύμμετρα μεγέθη (είτε στους ρητούς αριθμούς είτε στα κοινά κλάσματα: $\frac{n}{d}$), αλλά η ανακάλυψη τους για την ασυμμετρία (ή για το άρρητο της ρίζας του 2) έδειξε πως όλη αυτή η προσπάθεια ήταν ανεπαρκής. Έτσι, αυτό προκάλεσε προβλήματα στη θεμελίωση των Μαθηματικών, τα οποία και δεν λύθηκαν πριν από την ανακάλυψη της θεωρίας των αναλογιών που βρίσκουμε στο βιβλίο V των Στοιχείων του Ευκλείδη.

Ο Ευκλείδειος Αλγόριθμος είναι ένας από τους αρχαιότερους γνωστούς αλγορίθμους. Γίνεται λόγος για αυτόν στο έργο του Ευκλείδη «Στοιχεία», γύρω στο 300 π.Χ. στο βιβλίο του 7 στην Πρόταση 2.

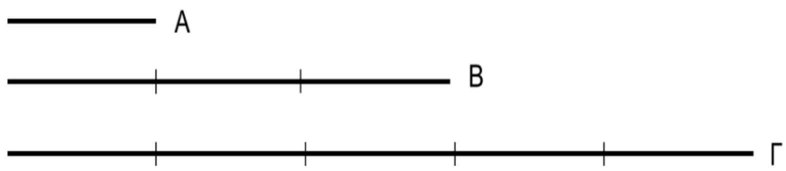
Ωστόσο, κατά πάσα πιθανότητα ο αλγόριθμος αυτός δεν ανακαλύφθηκε και από τον ίδιο τον Ευκλείδη. Μάλλον ήταν ήδη γνωστός μέχρι και 200 χρόνια νωρίτερα. Είναι σχεδόν βέβαιο πως ήταν γνωστός από τον Εύδοξο τον Κνίδο (περίπου το 375 π.Χ.). Επίσης, ο Αριστοτέλης γύρω στο 330 π. Χ. υπαινίσσεται κάτι για αυτόν στο έργο του «Θέματα» , 158β, 29 – 35.

Πως όμως ο Ευκλείδης κατέληξε στη διατύπωση του αλγορίθμου του αυτού;

Στις μέρες μας αντιλαμβανόμαστε τους φυσικούς αριθμούς, *πρώτους ή σύνθετους*, σαν αφηρημένα αντικείμενα και τους συμβολίζουμε με ιδεογράμματα

1 2 3 4 5 6 7 8 9 …

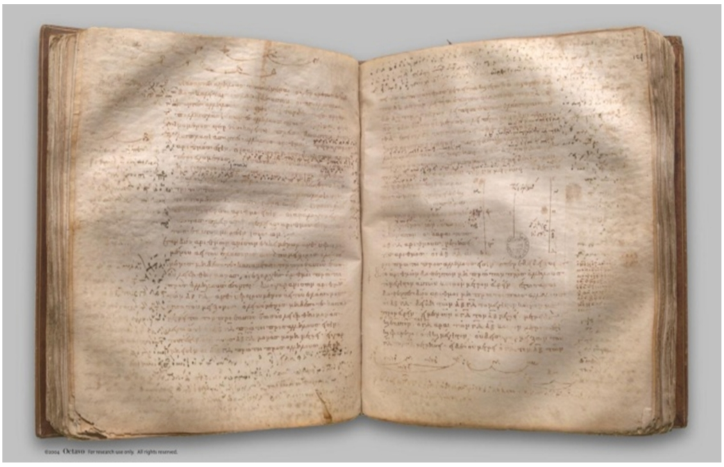
Οι αρχαίοι Έλληνες αντιλαμβάνονταν τους φυσικούς αριθμούς σαν **λόγους** ευθυγράμμων τμημάτων τα οποία ήταν πολλαπλάσια κάποιου μοναδιαίου ευθύγραμμου τμήματος.



Εκεί που εμείς μιλάμε για «διαιρετότητα» ο Ευκλείδης γράφει για ευθύγραμμα τμήματα τα οποία «μετρώνται», βλέποντας π.χ. το τμήμα Α να «μετράει» (διαιρεί) τα τμήματα Β ή Γ.

Ο Ευκλείδης, δηλαδή, διατύπωσε ουσιαστικά το πρόβλημα γεωμετρικά, τη διαδικασία της πεπερασμένης υφαίρεσης ως πρόβλημα εύρεσης του μέγιστου κοινού «μήκους – μέτρου» για δύο ορισμένα μήκη γραμμών. Το μέγιστο κοινό μήκος – μέτρο για δύο δεδομένα μήκη γραμμών είναι το μέτρο εκείνο που θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για τη μέτρηση των δύο γραμμών αυτών χωρίς υπόλοιπο.

Ο Ευκλείδειος Αλγόριθμος προχωρά με την επαναγόμενη αφαίρεση του μικρότερου τμήματος από το μεγαλύτερο.



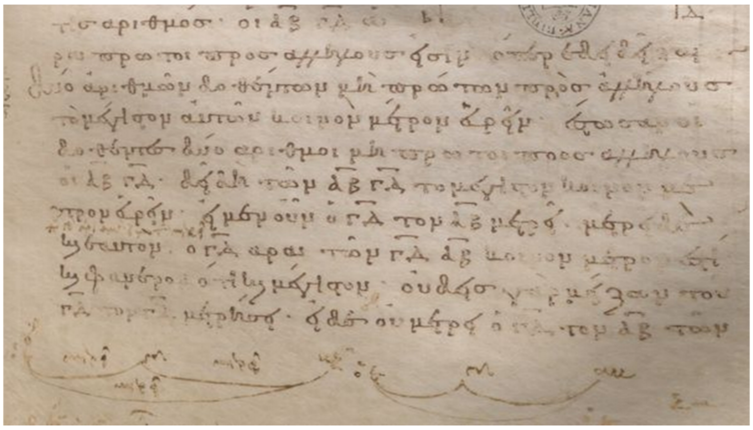
Εικόνα της σελίδας των Στοιχείων του Ευκλείδη στην οποία εμφανίζεται ο εν λόγω Ευκλείδειος Αλγόριθμος.

Το χειρόγραφο αυτό εδρεύει τώρα στη βιβλιοθήκη Bodleian του πανεπιστημίου της Οξφόρδης.

Στοιχεία του Ευκλείδη, Βιβλίο 7, Πρόταση 2:

Δύο ἀριθμῶν δοθέντων μὴ πρώτων πρὸς ἀλλήλους τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον εὑρεῖν.

Δηλαδή: Ἐὰν ἔχουμε δύο ἀριθμοὺς ποὺ δὲν εἶναι πρῶτοι μεταξύ τους, πρέπει νὰ βρεθῆ τὸ μεγαλύτερο κοινό τους μέτρο.



Παρατίθεται, επίσης, το αυθεντικό ελληνικό κείμενο του Ευκλείδειου Αλγορίθμου:

- Δύο ἀριθμῶν δοθέντων μὴ **πρώτων πρὸς ἀλλήλους** τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον εὑρεῖν.

- Ἔστωσαν οἱ δοθέντες δύο ἀριθμοὶ μὴ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους οἱ ΑΒ, ΓΔ. δεῖ δὴ τῶν ΑΒ, ΓΔ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον εὑρεῖν. Εἰ μὲν οὖν ὁ ΓΔ τὸν ΑΒ μετρεῖ, μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτόν, ὁ ΓΔ ἄρα τῶν ΓΔ, ΑΒ κοινὸν μέτρον ἐστίν. καὶ φανερόν, ὅτι καὶ μέγιστον: οὐδεὶς γὰρ μείζων τοῦ ΓΔ τὸν ΓΔ μετρήσει. Εἰ δὲ οὐ μετρεῖ ὁ ΓΔ τὸν ΑΒ, τῶν ΑΒ, ΓΔ ἀνθυφαιρουμένου ἀεὶ τοῦ ἐλάσσονος ἀπὸ τοῦ μείζονος λειφθήσεταί τις ἀριθμός, ὃς μετρήσει τὸν πρὸ ἑαυτοῦ. μονὰς μὲν γὰρ οὐ λειφθήσεται: εἰ δὲ μή, ἔσονται οἱ ΑΒ, ΓΔ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους: ὅπερ οὐχ ὑπόκειται. λειφθήσεταί τις ἄρα ἀριθμός, ὃς μετρήσει τὸν πρὸ ἑαυτοῦ. καὶ ὁ μὲν ΓΔ τὸν ΒΕ μετρῶν λειπέτω ἑαυτοῦ ἐλάσσονα τὸν ΕΑ, ὁ δὲ ΕΑ τὸν ΔΖ μετρῶν λειπέτω ἑαυτοῦ ἐλάσσονα τὸν ΖΓ, ὁ δὲ ΓΖ τὸν ΑΕ μετρείτω. ἐπεὶ οὖν ὁ ΓΖ τὸν ΑΕ μετρεῖ, ὁ δὲ ΑΕ τὸν ΔΖ μετρεῖ, καὶ ὁ ΓΖ ἄρα τὸν ΔΖ μετρήσει: μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτόν: καὶ ὅλον ἄρα τὸν ΓΔ μετρήσει. ὁ δὲ ΓΔ τὸν ΒΕ μετρεῖ: καὶ ὁ ΓΖ ἄρα τὸν ΒΕ μετρεῖ: μετρεῖ δὲ καὶ τὸν ΕΑ: καὶ ὅλον ἄρα τὸν ΒΑ μετρήσει: μετρεῖ δὲ καὶ τὸν ΓΔ: ὁ ΓΖ ἄρα τοὺς ΑΒ, ΓΔ μετρεῖ. ὁ ΓΖ ἄρα τῶν ΑΒ, ΓΔ κοινὸν μέτρον ἐστίν. λέγω δή, ὅτι καὶ μέγιστον. εἰ γὰρ μή ἐστιν ὁ ΓΖ τῶν ΑΒ, ΓΔ μέγιστον κοινὸν μέτρον, μετρήσει τις τοὺς ΑΒ, ΓΔ ἀριθμοὺς ἀριθμὸς μείζων ὢν τοῦ ΓΖ. μετρείτω, καὶ ἔστω ὁ Η. καὶ ἐπεὶ ὁ Η τὸν ΓΔ μετρεῖ, ὁ δὲ ΓΔ τὸν ΒΕ μετρεῖ, καὶ ὁ Η ἄρα τὸν ΒΕ μετρεῖ: μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸν ΒΑ: καὶ λοιπὸν ἄρα τὸν ΑΕ μετρήσει. ὁ δὲ ΑΕ τὸν ΔΖ μετρεῖ: καὶ ὁ Η ἄρα τὸν ΔΖ μετρήσει: μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸν ΔΓ: καὶ λοιπὸν ἄρα τὸν ΓΖ μετρήσει ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα: ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον: οὐκ ἄρα τοὺς ΑΒ, ΓΔ ἀριθμοὺς ἀριθμός τις μετρήσει μείζων ὢν τοῦ ΓΖ: ὁ ΓΖ ἄρα τῶν ΑΒ, ΓΔ μέγιστόν ἐστι κοινὸν μέτρον: [ὅπερ ἔδει δεῖξαι]. Πόρισμα Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἐὰν ἀριθμὸς δύο ἀριθμοὺς μετρῇ, καὶ τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον μετρήσει: **ὅπερ ἔδει δεῖξαι**.

Που σε ελεύθερη απόδοση στην νέα Ελληνική Γλώσσα είναι:

- Ἐὰν ἔχουμε δύο ἀριθμοὺς ποὺ δὲν εἶναι πρῶτοι μεταξύ τους, πρέπει νὰ βρεθῇ τὸ μεγαλύτερο κοινό τους μέτρο.

- Ἂς εἶναι οἱ δύο ἀριθμοὶ ποὺ μᾶς δόθηκαν οἱ ΑΒ καὶ ΓΔ. Πρέπει νὰ βροῦμε τὸ μέγιστο κοινὸ μέτρο τῶν δύο ἀριθμῶν. Ἂν ὁ ΓΔ μπορεῖ νὰ μετρήσει τὸν ΑΒ, τότε νὰ μπορεῖ νὰ μετρήσει καὶ τὸν ἑαυτό του, καὶ ἄρα ὁ ΓΔ εἶναι τὸ κοινὸ μέτρο τῶν ΑΒ καὶ ΓΔ. Καὶ φανερό, ὅτι εἶναι καὶ τὸ μέγιστο. Κανεῖς ἀριθμὸς μεγαλύτερος τοῦ ΓΔ δὲν πρόκειται νὰ μετρήσει τὸν ΓΔ. Ἂν ὁ ΓΔ δὲν μπορεῖ νὰ μετρήσει τὸν ΑΒ, ἀφοῦ μεταξὺ τῶν δύο ἀριθμῶν ἀφαιρέσουμε πάντα τὸν μικρότερο ἀπὸ τὸν μεγαλύτερο, θὰ βρεθεῖ κάποιος ἀριθμὸς ὁ ὁποῖος θὰ μετρήσει τὸν ἀριθμὸ ποὺ ὑπῆρχε πρὶν ἀπὸ αὐτόν. Δὲν πρόκειται αὐτὸ νὰ εἶναι ἡ μονάδα, διότι διαφορετικὰ οἱ δύο ἀριθμοὶ θὰ ἦταν πρῶτοι μεταξύ τους: αὐτὸ ὅμως δὲν εἶναι ἡ ὑπόθεση. Πρέπει νὰ ληφθεῖ κάποιος ἀριθμὸς ποὺ θὰ μετρήσει τὸν ἀριθμὸ ποὺ εἶναι πρὶν ἀπὸ αὐτόν. Καὶ ὁ μὲν ΓΔ μετρεῖ τὸν ΒΕ καὶ βρίσκει μικρότερό του τὸν ΕΑ, ὁ ΕΑ μετρούμενος μὲ τὸν ΔΖ βρίσκει μικρότερο ἀπὸ τὸν ἑαυτό του τὸν ΖΓ. ὁ δὲ ΓΖ θὰ μετρήσει τὸν ΑΕ, ἐπειδὴ λοιπὸν ὁ ΓΖ μετρεῖ τὸν ΑΕ, ὁ ΑΕ θὰ μετρήσει τὸν ΔΖ, καὶ ἄρα ὁ ΓΖ θὰ μετρήσει τὸν ΔΖ, θὰ μετρήσει καὶ τὸν ἑαυτό του, καὶ ἄρα ὅλο θὰ μετρήσει τὸν ΓΔ. Καὶ ὁ ΓΔ μετρᾶ τὸν ΒΕ, καὶ ἄρα καὶ ὁ ΓΖ μετρᾶ τὸν ΒΕ, καὶ ἄρα μετρᾶ καὶ τὸν ΒΑ, καὶ ὁλόκληρο μετρᾶ τὸν ΒΑ: θὰ μετρήσει καὶ τὸν ΓΔ, καὶ ἑπομένως ὁ ΓΖ μετρᾶ τοὺς ΑΒ, ΓΔ. Ἄρα ὁ ΓΖ εἶναι τὸ κοινὸ μέτρο τῶν ΑΒ, ΓΔ. Καὶ λέω ὅτι εἶναι καὶ τὸ μέγιστο. Ἂν ὁ ΓΖ δὲν εἶναι τὸ μέγιστο τῶν ΑΒ, ΓΔ, πρέπει νὰ τοὺς μετρήσει κάποιος ἀριθμὸς μεγαλύτερος τοῦ ΓΖ. Μετρᾶμε, καὶ βρίσκουμε ἂς ποῦμε τὸν Η. Καὶ ἐπειδὴ ὁ Η μετρᾶ τὸν ΓΔ, καὶ ὁ ΓΔ μετρᾶ τὸν ΒΕ, καὶ ὁ Η μετρᾶ τὸν ΒΕ. Καὶ ὅλο μετρᾶ τὸν ΒΑ, ἄρα θὰ μετρήσει καὶ τὸν ΑΕ. Ὁ ΑΕ ὅμως μετρᾶ τὸν ΔΖ, καὶ ἄρα μετρᾶ καὶ ὁ Η τὸν ΔΖ, καὶ μετρᾶ καὶ ὅλο τὸ ΓΔ, καὶ ἄρα λοιπὸν ὁ μέγιστος θὰ μετρήσει τὸν ἐλάχιστο ΓΖ, κάτι ποὺ εἶναι ἀδύνατο. Καὶ ἑπομένως δὲν μπορεῖ νὰ μετρήσει τοὺς ΑΒ, ΓΔ ἀριθμὸς μεγαλύτερος τοῦ ΓΖ, καὶ ἄρα ὁ ΓΖ εἶναι τὸ μέγιστο κοινὸ μέτρο τῶν ΑΒ, ΓΔ [καὶ αὐτὸ ἔπρεπε νὰ ἀποδειχθεῖ]. Πόρισμα: Ἀπὸ αὐτὰ εἶναι φανερό, ὅτι ἐὰν ἕνας ἀριθμὸς μετρᾶ δύο ἀριθμούς, θὰ μετρήσει καὶ τὸ μέγιστο κοινό τους μέτρο: **καὶ αὐτὸ ἔπρεπε νὰ ἀποδειχθεῖ.**

Στα Στοιχεία του Ευκλείδη, επίσης, στο βιβλίο του 7, στην Πρόταση 2 εμφανίζεται και «Το Πρόβλημα της Ισομετρίας».

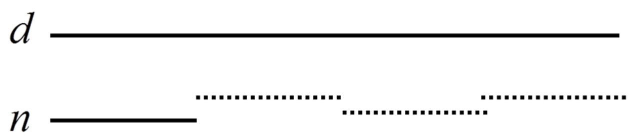
«Δοσμένων δύο αριθμών, μη πρώτων μεταξύ τους, βρες το μέγιστο κοινό τους μέτρο.»

- <u>Ορισμός 11:</u> Ένας πρώτος αριθμός είναι αυτός που μετράται από μία μονάδα μόνη της.
- <u>Ορισμός 22:</u> Αριθμοί πρώτοι μεταξύ τους είναι εκείνοι που μετρώνται με μία μονάδα μόνο ως κοινό μέτρο.

Μέγιστο Κοινό Μέτρο δύο ευθυγράμμων τμημάτων (αριθμών) = Μέγιστος Κοινός τους Διαιρέτης Μ.Κ.Δ. (GCD: Greatest Common Divisor)

Ο Ευκλείδειος Αλγόριθμος στηρίζεται σε δύο βασικές παρατηρήσεις:

- <u>Παρατήρηση 1^{η} :</u> Έστω d και n δύο ευθύγραμμα τμήματα.
  Αν το n μετρά (διαιρεί) το d , τότε για κάποιον ακέραιο q ισχύει: $d = qn$ και ως εκ τούτου το μέγιστο κοινό μέτρο (= μέγιστος κοινός διαιρέτης) του d και n είναι το n . Αυτό είναι πράγματι έτσι, επειδή δεν υπάρχει αριθμός (ο n συγκεκριμένα) που μπορεί να έχει διαιρέτη μεγαλύτερο από τον ίδιο τον αριθμό.



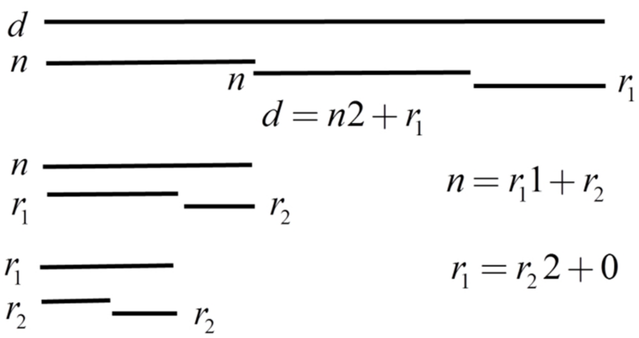
Εἰ μὲν οὖν ὁ ΓΔ τὸν ΑΒ μετρεῖ, μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτόν, ὁ ΓΔ ἄρα τῶν ΓΔ, ΑΒ κοινὸν μέτρον ἐστίν. καὶ φανερόν, ὅτι καὶ μέγιστον: οὐδεὶς γὰρ μείζων τοῦ ΓΔ τὸν ΓΔ μετρήσει.

Που σε ελεύθερη απόδοση στην νέα Ελληνική Γλώσσα είναι:

Αν τώρα το ΓΔ μετράει το ΑΒ - και επίσης μετράει και τον εαυτό του – τότε το ΓΔ είναι ένα κοινό μέτρο του ΓΔ και ΑΒ. Και είναι προφανές ότι είναι και το μεγαλύτερο αφού κανένα μεγαλύτερο του ΓΔ δεν μπορεί να το μετρήσει.

- <u>Παρατήρηση 2^{η} :</u> Αν $d = nq + r$ για ακεραίους d και n, τότε $\gcd(d,n) = \gcd(n,r)$. Δηλαδή, ο μέγιστος κοινός διαιρέτης (μέτρο) του d και του n είναι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης (μέτρο) του n και του r. Πράγματι, κάθε κοινός διαιρέτης (μέτρο) u, του d και του n, διαιρεί (μετράει) τον r, δηλαδή αν για τους ακεραίους t και s ισχύει: $d = tu$ και $n = su$, τότε από την 2η παρατήρηση θα προκύπτει: $r = d - nq = tu - suq = (t - sq)u$ και ως εκ τούτου ο u διαιρεί (μετρά) τον r.

$$d = nq_1 + r_1$$



$$d = n2 + r_1$$

$$n = r_1 1 + r_2$$

$$r_1 = r_2 2 + 0$$

$$d = n2 + r_1 = 3r_2 2 + 2r_2 = 8r_2$$

$$\begin{array}{lcll} d = n2 + r_1 & \Rightarrow & r_1 = d - n2 & (1) \\ n = r_1 1 + r_2 & \Rightarrow & r_2 = n - r_1 1 & (2) \\ r_1 = r_2 2 + 0 & \Rightarrow & r_2 = GCD(d,n) & \end{array}$$

$$(2) \Rightarrow r_2 = n - r_1 1 \overset{(1)}{=} n - (d - n2)1 = n - d + n2$$

$$r_2 = (-1)d + 3n$$

Έτσι, αν η διαδικασία επαναληφθεί ως έχει παίρνουμε ότι:

$$\begin{array}{lcl} d = nq_1 + r_1 & \Rightarrow & r_1 = d - nq_1 \\ n = r_1 q_2 + r_2 & \Rightarrow & r_2 = n - r_1 q_2 \\ r_1 = r_2 q_3 + r_3 & \Rightarrow & r_3 = r_1 - r_2 q_3 \\ \vdots & & \vdots \\ r_{k-2} = r_{k-1} q_k + r_k & \Rightarrow & r_k = r_{k-2} - r_{k-1} q_k \\ r_{k-1} = r_k q_{k+1} + 0 & \Rightarrow & r_k = GCD(d,n) \end{array}$$

Για παράδειγμα, ας είναι $k = 3$ θα έχουμε ότι:

$$
\begin{array}{llll}
d = nq_1 + r_1 & \Rightarrow & (1) & r_1 = d - nq_1 \\
n = r_1 q_2 + r_2 & \Rightarrow & (2) & r_2 = n - r_1 q_2 \\
r_1 = r_2 q_3 + r_3 & \Rightarrow & (3) & r_3 = r_1 - r_2 q_3 \\
r_2 = r_3 q_4 + 0 & & (4) &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
(3) \Rightarrow r_3 = r_1 - r_2 q_3 &\overset{(1)(2)}{=} (d - nq_1) - (n - r_1 q_2) q_3 \\
&\overset{(1)}{=} (d - nq_1) - \left[n - (d - nq_1) q_2\right] q_3 \\
&= d(1 + q_2 q_3) + n(-q_1 - q_3 - q_1 q_2 q_3) \\
&= dx + ny
\end{aligned} \tag{1.1}
$$

που είναι μια **Διοφαντική Εξίσωση**.

Θεώρημα 1.1 [16]: (Ευκλείδης και μετά από αυτόν ο Διόφαντος)

Αν ο g είναι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης (μέτρο) των ακεραίων d και n, τότε υπάρχουν ακέραιοι x και y τέτοιοι ώστε: $g = dx + ny$ (Ε).

Πολλαπλασιάζοντας την (Ε) με κάποιον ακέραιο α παίρνουμε ότι:

$$
d_c := g\alpha = d\alpha x + n\alpha y = d\overline{x} + n\overline{y}. \tag{1.2}
$$

Πόρισμα 1.1 [16] : Με τους d, n, d_c ακεραίους, η εξίσωση $d\overline{x} + n\overline{y} = d_c$ ($\overline{\text{Ε}}$) έχει ακέραια λύση την $(\overline{x}, \overline{y})$ αν και μόνο αν, ο μέγιστος κοινός διαιρέτης (μέτρο) g, των n και d, διαιρεί (μετρά) τον d_c.

Πόρισμα 1.2 [16]: Αν d, n σχετικά – συγγενικά πρώτοι, δηλαδή ο μέγιστος κοινός διαιρέτης τους (μέτρο) g είναι η μονάδα 1, τότε η εξίσωση $d\overline{x} + n\overline{y} = d_c$ ($\overline{\text{Ε}}$) έχει πάντα μια ακέραια λύση της μορφής $(\overline{x}, \overline{y})$.

Θεώρημα 1.2 [16]: (Στη σύγχρονη γλώσσα των Μαθηματικών) Ας είναι E ένας Ευκλείδειος δακτύλιος που είναι επίσης ακέραια περιοχή[1], και ας είναι n και d δύο στοιχεία του E. Έστω g ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των n και d. Τότε θα υπάρχουν στοιχεία x και y στον E έτσι ώστε:

[1] Μια ακέραια περιοχή είναι ένας αντιμεταθετικός δακτύλιος χωρίς μηδενικούς διαιρέτες και με πολλαπλασιαστική ταυτότητα το 1 (με ταυτικό ή μοναδιαίο στοιχείο το 1) που δεν είναι ίσο με το 0. Οι ακέραιες περιοχές είναι γενικεύσεις των ακεραίων.

$$g = dx + ny \tag{1.3}$$

Απόδειξη:

E Ευκλείδειος Δακτύλιος $\Leftrightarrow \exists\, q_1, r_1 \in E : d = nq_1 + r_1$ και αν $r_1 = 0$, τότε $r_1 < n$.

Αν $r_1 = 0$, τότε $d = nq_1$ και ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των n και d είναι ο n .

Αν $r_1 \neq 0$, τότε εφαρμόζουμε την Ευκλείδεια διαίρεση στους n και r_1 και θα είναι:

$n = r_1 q_2 + r_2$ και αν $r_2 = 0$ τότε $r_2 < r_1$.

Συνεχίζοντας με αυτόν το ρυθμό, και εφόσον $n > r_1 > r_2 > \cdots > r_k$ θα φτάσουμε με έναν πεπερασμένο αριθμό βημάτων σε έναν r_{k+1}, τέτοιον ώστε: $r_{k+1} = 0$, $k = 0,1,2,\ldots$.

ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΠΟΙΗΣΗ ΤΩΝ ΛΥΣΕΩΝ

Ας είναι $x, y \in \mathbb{Z}$ ένα ζεύγος λύσης της: $dx + ny = d_c$.

Ας είναι $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$ μια άλλη λύση της παραπάνω εξίσωσης με: $x_0 \neq x, y_0 \neq y$

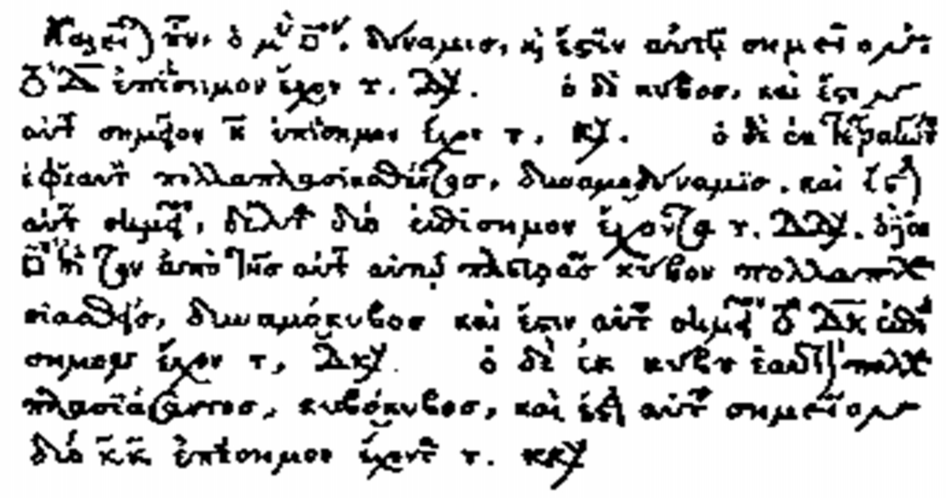
$$dx_0 + ny_0 = d_c \Rightarrow \ d(x - x_0) + n(y - y_0) = 0 \Rightarrow \ \begin{bmatrix} (x - x_0) & (y - y_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ n \end{bmatrix} = 0$$

Και εφόσον $\begin{bmatrix} n & -d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ n \end{bmatrix} = 0$ έπεται ότι: $\begin{bmatrix} n & -d \end{bmatrix}$=left Ker του $\begin{bmatrix} d \\ n \end{bmatrix}$ και ως εκ τούτου

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} (x - x_0) & (y - y_0) \end{bmatrix} = k\begin{bmatrix} n & -d \end{bmatrix} \text{ για } k \in \mathbb{Z} \\ &x - x_0 = kn \quad \Rightarrow \quad x = x_0 + kn \\ &y - y_0 = -kd \quad \Rightarrow \quad y = y_0 - kd \end{aligned}$$

Διόφαντος


DIOPHANTI
ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM
LIBRI SEX,
ET DE NVMERIS MVLTANGVLIS
LIBER VNVS.
CVM COMMENTARIIS C. G. BACHETI V. C.
& obseruationibus D. P. de FERMAT Senatoris Tolosani.
TOLOSÆ,
M. DC. LXX.



Οι Διοφαντικές Εξισώσεις πήραν το όνομά τους από τον Έλληνα Μαθηματικό Διόφαντο, ο οποίος έζησε στην Αλεξάνδρεια της Αιγύπτου τον 3ο αιώνα μ.Χ. (200 – 284 μ.Χ. περίπου) και ήταν ο πρώτος που μελέτησε συστηματικά στο έργο του «Αριθμητικά» την εύρεση των ακέραιων λύσεων εξισώσεων τέτοιας μορφής.

Η μεθοδολογία και η συλλογιστική του Διόφαντου στην αναζήτηση λύσης προβλημάτων σε μορφή εξισώσεων υπήρξε θεμελιώδης στην εξέλιξη του κλάδου των μαθηματικών και ειδικότερα της Άλγεβρας. Αν και την Άλγεβρα την είχαν παρουσιάσει προγενέστεροί του, όπως ο Ευκλείδης, ο Θυμαρίδας, ο Νικομήδης κ.ά., την εξέλιξε σε τέτοιο βαθμό, ώστε να θεωρείται «πατέρας» της. Με την ανάπτυξη της Άλγεβρας έθεσε τις βάσεις σε μια σημαντική πτυχή των σύγχρονων μαθηματικών, τη Διοφαντική Ανάλυση, δίνοντας μια μεθοδολογία επίλυσης απροσδιόριστων εξισώσεων με πολλαπλές λύσεις. Επίσης, θεωρείται πρόδρομος του μαθηματικού συμβολισμού, καθώς εισήγαγε πρώτος σύμβολα στις άγνωστες μεταβλητές των προβλημάτων, εγκαταλείποντας τη ρητορική άλγεβρα των νεοπυθαγορείων και νεοπλατωνικών σχολών, που τη χαρακτήριζε η έλλειψη κάθε συμβολισμού.

Το σύγγραμμά του «Αριθμητικά», είναι το αρχαιότερο ελληνικό σύγγραμμα άλγεβρας και είναι μια εργασία πάνω στη θεωρία των αριθμών. Από αυτό το έργο, μόνο έξι από τα δεκατρία βιβλία έχουν διασωθεί. Αυτά σώθηκαν σε ελληνικές και αραβικές μεταφράσεις. Τα τελευταία ανακαλύφθηκαν τη δεκαετία του 1970 στο Ιράν. Τα «Αριθμητικά» αποτελούν μια συλλογή από εκατόν τριάντα προβλήματα στα οποία δίνονται αριθμητικές λύσεις τόσο σε αριθμητικές παραστάσεις όσο και σε αόριστες εξισώσεις ή συστήματα. Πολλά από αυτά είναι απροσδιόριστη λύση πρώτου ή μεγαλύτερου βαθμού. Για τη λύση τους, ο Διόφαντος εισήγαγε τον βοηθητικό άγνωστο που παριστάνεται με σύμβολο παρόμοιο με το σίγμα τελικό (ς) και ανέπτυξε μια μεθοδολογία στην οποία χρησιμοποιεί συχνά την αλλαγή μεταβλητής ή τον βοηθητικό άγνωστο. Επίσης, ορίζει ως «άλογο» αριθμό αυτόν που περιέχει αριθμό μονάδων άγνωστων ακόμη, δηλαδή προσωρινά απροσδιόριστο. Στην αραβική μετάφραση αντίστοιχα χρησιμοποιείται η λέξη «πράγμα» με την αφηρημένη σημασία του ακαθόριστου. Πρέπει να τονιστεί ότι η λέξη «άλογος» δεν χρησιμοποιείται από τον Διόφαντο στην εκφώνηση των προβλημάτων αλλά μόνο στην επίλυσή τους, σαν μέσο για να λυθεί το πρόβλημα.

Ο Διόφαντος ασχολήθηκε και ανέπτυξε ιδιαίτερα τις **απροσδιόριστες (ή Διοφαντικές) εξισώσεις**, δηλαδή εξισώσεις με πολλαπλές λύσεις. Μελέτησε το Πυθαγόρειο Θεώρημα $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$, όπου α, β, γ, πλευρές ορθογώνιου τριγώνου, και έδωσε γνωστές τριάδες αριθμών που αποτελούν λύση του. Μια τέτοια τριάδα είναι οι αριθμοί 3, 4, 5. Παρότι δε χρησιμοποίησε αρνητικούς αριθμούς, αφού οι περιορισμοί που έθετε οδηγούσαν πάντοτε σε θετική λύση, πιθανόν να γνώριζε την ύπαρξή τους. Στην εισαγωγή του Α΄ Βιβλίου γράφει: «λείψις ἐπὶ λείψιν ποιεῖ ὕπαρξιν καὶ λείψις ἐπὶ ὕπαρξιν ποιεῖ λείψιν», δηλαδή με μαθηματικά σύμβολα: {- . - = + και - . + = - }.

Το σύγγραμμά του «Περί πολυγώνων αριθμών» είναι μια συλλογή προβλημάτων, όπου οι αριθμοί παριστάνονται με ευθύγραμμα τμήματα. Άλλα συγγράμματά του, όπως τα «Μοριακά», που αναφέρει ο Ιάμβλιχος, και τα «Πορίσματα», δεν έχουν διασωθεί. Από αναφορές των έργων του γνωρίζουμε ότι τα «Πορίσματα» ήταν μια συλλογή θεωρημάτων σχετικά με τις ιδιότητες των αριθμών, στα οποία επίσης παρέθετε και αποδείξεις ταυτοτήτων, χρήση των οποίων έκανε στα «Αριθμητικά».

Οι βασικοί συμβολισμοί που χρησιμοποιούνται στο έργο του Διόφαντου είναι οι ακόλουθοι:

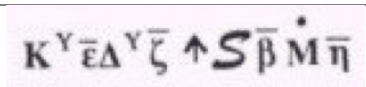
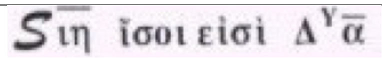
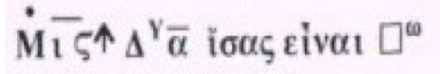
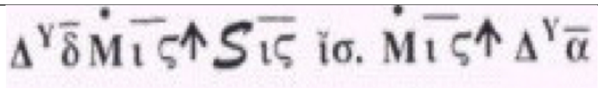
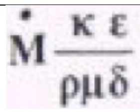
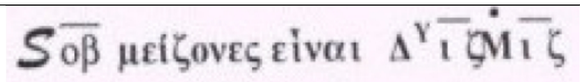
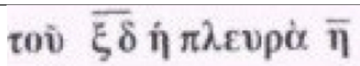
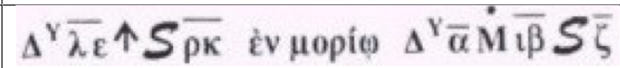
S	άγνωστος x
$\dot{M}$	μονάδα ή μονάδες
↑	σύμβολο αφαίρεσης
$\square^{ος}$	τετράγωνος

Επίσης, χρησιμοποιούνται τα σύμβολα: $\beta^{\pi\lambda}$ = διπλάσια, $\gamma^{\pi\lambda}$ = τριπλάσια, π^{λ} = πλευρά, γι = γίνεται, $\alpha^{ος}$ = πρώτος, $\beta^{ος}$ = δεύτερος. Οι δυνάμεις αναφέρονται ως: δύναμη = δεύτερη δύναμη, κύβος = τρίτη δύναμη, δυναμοδύναμη = τέταρτη δύναμη, κυβοκύβος = έκτη δύναμη. Για τα κλάσματα με αριθμητή τη μονάδα και παρονομαστή τον άγνωστο x χρησιμοποιείται η ορολογία: «αριθμοστόν» για το $\frac{1}{x}$, «δυναμοστόν» για το $\frac{1}{x^2}$, «κυβοστόν» για το $\frac{1}{x^3}$ καθώς και «δυναμοδυναμοστόν» για το $\frac{1}{x^4}$, «δυναμοκυβοστόν» για το $\frac{1}{x^5}$, «κυβοκυβοστόν» για το $\frac{1}{x^6}$. Ακόμη, τα κλάσματα παριστάνονται και ως εξής:

Αν ο αριθμητής είναι μονάδα, ο παρονομαστής γράφεται με την ένδειξη μέρους ή με τόνο ή με τους παραπάνω συμβολισμούς των δυνάμεων του x. Έτσι, για παράδειγμα θα είναι: $\frac{1}{4}=$ «μέρους δ», $\frac{1}{3}=$ «γ΄», $\Delta^{YX}\overline{\alpha}=\frac{1}{x^2}$.

Ενώ, αν ο αριθμητής είναι μεγαλύτερος από τον παρονομαστή, το κλάσμα σημειώνεται, όπως στη σύγχρονη αριθμητική, με τη διαφορά ότι γράφεται πάνω ο παρονομαστής και κάτω ο αριθμητής. Έτσι, για παράδειγμα θα είναι: $\frac{105}{7}=\dot{M}\frac{\zeta}{\rho\varepsilon}$.

Επομένως, σύμφωνα με τους συμβολισμούς αυτούς, έχουμε τις επόμενες γραφές για τις ακόλουθες αντίστοιχες παραστάσεις της σύγχρονης Άλγεβρας:

1. Το πολυώνυμο $5x^3+7x^2-2x+8$ γράφεται:	
2. Η ισότητα $18x=x^2$ γράφεται:	
3. Η ισότητα $16-x^2=$ τετράγωνος αριθμός γράφεται:	
4. Η ισότητα $4x^2+16-16x=16-x^2$ γράφεται:	
5. Το κλάσμα $\frac{144}{25}$ γράφεται:	
6. Η ανίσωση $72x>17x^2+17$ γράφεται:	
7. Η $\sqrt{64}=8$ διατυπώνεται:	
8. Το κλάσμα $\frac{35x^2-120x}{x^2+12-7x}$	

Σχόλια στο έργο του Διόφαντου έκανε η Υπατία (4ος αι. μ.Χ.) και αργότερα οι Βυζαντινοί: Μιχαήλ Ψελλός (11ος αι.), Γ. Παχυμέρης και Μ. Πλανούδης (13ος αι.). Έγκυρος σύγχρονος σχολιαστής των «Αριθμητικών» είναι ο Γάλλος P. Tannery.

Στο σημαντικότερο έργο της στην Άλγεβρα, η Υπατία, έγραψε σχόλια στα «Αριθμητικά» του Διόφαντου σε δεκατρία βιβλία. Τα σχόλιά της περιελάμβαναν εναλλακτικές λύσεις και πολλά νέα προβλήματα, που προέκυπταν ως συνέπεια των γραπτών του Διόφαντου. Αυτό το έργο επίσης δεν σώθηκε.

Το έργο του Διόφαντου δεν αναγνωρίστηκε από τους σύγχρονούς του μαθηματικούς. Μεταφράστηκε, όμως, αρκετά αργότερα στην αραβική και διαδόθηκε στους Άραβες λόγιους που το αξιοποίησαν. Κατά τον Ευρωπαϊκό Μεσαίωνα, οι Άραβες μελέτησαν και εμπλούτισαν την άλγεβρα και σ' αυτούς οφείλει και την ονομασία της (άλγεβρα = παραφθορά του όρου al-gabr = πλήρης / ολοκληρωμένη αριθμητική ή κατ' άλλους προήλθε όμοια από το έργο Αράβων μαθηματικών του 9ου αιώνα μ.Χ.: al – gabr w' al-mugabala = ανασύσταση και μείωση).

Υστερότερα, η άλγεβρα και η ανάλυση διαδόθηκαν στην Ιταλία κυρίως μέσω του Leonardo της Πίζας (Fibonazzi), ο οποίος μετέφερε πολλές γνώσεις από τα ταξίδια του στην Ανατολή. Αργότερα, κατά τον 16ο αι., το έργο του Διόφαντου έγινε γνωστό και άρχισαν να δημοσιεύονται μεταφράσεις των «Αριθμητικών». Τελικά, το 1570 ο Ιταλός μαθηματικός Ραφαήλ Μπομπέλι (Rafaelle Bobelli) μετέφρασε στα λατινικά τα «Αριθμητικά» και χρησιμοποίησε τα προβλήματα που περιείχαν για τα δικά του συγγράμματα.

Τον επόμενο αιώνα, περίπου στα 1621 μ.Χ., τα γραπτά του Διόφαντου επηρέασαν τον εξέχοντα μαθηματικό Πιερ ντε Φερμά (Piere de Fermat), ο οποίος έγραψε το τελευταίο του θεώρημα στα περιθώρια του βιβλίου: «Αν ένας ακέραίος n είναι μεγαλύτερος από 2, τότε η $a^n + b^n = c^n$ δεν έχει μη μηδενικές ακέραιες λύσεις a, b, και c. Έχω μια πραγματικά θαυμάσια απόδειξη του θεωρήματος αυτής της πρότασης αλλά το περιθώριο είναι πολύ στενό για να την χωρέσει».

Η απόδειξη του Fermat ποτέ δεν βρέθηκε και το θεώρημα έμεινε άλυτο για αιώνες. Η απόδειξη έγινε το 1994 από τον Andrew Wiles μετά από επταετή δουλειά. Λέγεται ότι ο Fermat δεν είναι ο πρώτος μαθηματικός που έγραψε σε περιθώριο βιβλίου του Διόφαντου. Ο πρώτος ήταν ο Μάξιμος Πλανούδης που έγραψε: «Η δική σου ψυχή Διόφαντε, σίγουρα βρίσκεται δίπλα στον Σατανά εξαιτίας της δυσκολίας των θεωρημάτων σου».

Arithmeticorum Liber II. 61

interuallum numerorum 2. minor autem 1 N. atque ideo maior 1 N. + 2. Oportet itaque 4 N. + 4. triplos esse ad 2. & adhuc superaddere 10. Ter igitur 2. adscitis vnitatibus 10. æquatur 4 N. + 4. & fit 1 N. 3. Erit ergo minor 3. maior 5. & satisfaciunt quæstioni.

IN QVAESTIONEM VII.

CONDITIONIS appositæ eadem ratio est quæ & appositæ præcedenti quæstioni, nil enim aliud requirit quàm vt quadratus interualli numerorum sit minor interuallo quadratorum, & Canones iidem hic etiam locum habebunt, vt manifestum est.

QVÆSTIO VIII.

PROPOSITVM quadratum diuidere in duos quadratos. Imperatum sit vt 16. diuidatur in duos quadratos. Ponatur primus 1 Q. Oportet igitur 16 − 1 Q. æquales esse quadrato. Fingo quadratum à numeris quotquot libuerit, cum defectu tot vnitatum quod continet latus ipsius 16. esto à 2 N. − 4. ipse igitur quadratus erit 4 Q. + 16. − 16 N. hæc æquabuntur vnitatibus 16 − 1 Q. Communis adiiciatur vtrimque defectus, & à similibus auferantur similia, fient 5 Q. æquales 16 N. & fit 1 N. 16/5. Erit igitur alter quadratorum 256/25. alter verò 144/25 & vtriusque summa est 400/25 seu 16. & vterque quadratus est.

OBSERVATIO DOMINI PETRI DE FERMAT.

CVbum autem in duos cubos, aut quadratoquadratum in duos quadratoquadratos & generaliter nullam in infinitum vltra quadratum potestatem in duos eiusdem nominis fas est diuidere cuius rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet.

QVÆSTIO IX.

RVRSVS oporteat quadratum 16 diuidere in duos quadratos. Ponatur rursus primi latus 1 N. alterius verò quotcunque numerorum cum defectu tot vnitatum, quot constat latus diuidendi. Esto itaque 2 N. − 4. erunt quadrati, hic quidem 1 Q. ille verò 4 Q. + 16. − 16 N. Cæterum volo vtrumque simul æquari vnitatibus 16. Igitur 5 Q. + 16. − 16 N. æquatur vnitatibus 16. & fit 1 N. 16/5 erit

H iii

Πρόβλημα ΙΙ.8 στα *Arithmetica* (έκδοση του 1670), σχολιασμένη με το κείμενο του Fermat που κατέληξε στο «τελευταίο θεώρημα»

DIOPHANTI
ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM
LIBRI SEX.
ET DE NVMERIS MVLTANGVLIS
LIBER VNVS.
Nunc primum Græcè & Latinè editi, atque absolutissimis Commentariis illustrati.
AVCTORE CLAVDIO GASPARE BACHETO
MEZIRIACO SEBVSIANO, V.C.
LVTETIAE PARISIORVM,
Sumptibus SEBASTIANI CRAMOISY, via Iacobæa, sub Ciconiis.
M. DC. XXI.
CVM PRIVILEGIO REGIS.

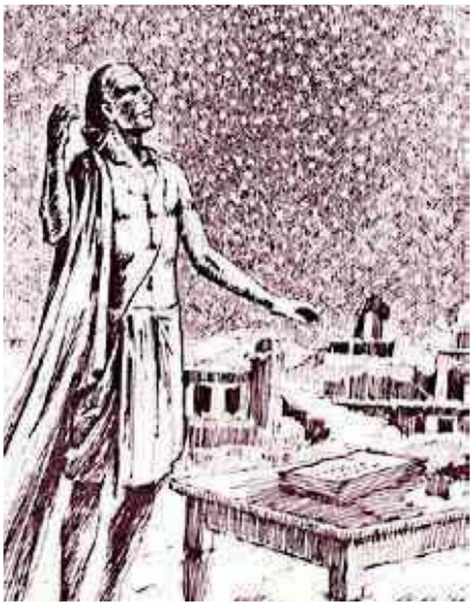
Εξώφυλλο της έκδοσης του 1621 της αριθμητικής του Διόφαντου, που μεταφράστηκε στα Λατινικά από τον Claude Gaspard Bachet de Méziriac

Σήμερα **«Διοφαντικές»** καλούνται οι εξισώσεις ακέραιων συντελεστών, των οποίων ζητούνται οι ακέραιες λύσεις. Από τους νεότερους μαθηματικούς ο Euler μελέτησε τον Διόφαντο και έδωσε παρόμοιες λύσεις με αυτόν στις εξισώσεις του.

Η σημασία του έργου του, τον ανέδειξε μεταξύ των μεγαλύτερων μαθηματικών της αρχαιότητας, ενώ σπουδαία είναι η συμβολή του στην εξέλιξη των νεότερων μαθηματικών.

«Δεν είν' νεκρό εκείνο που αιώνια μπορεί να περιμένει.
Μα με το διάβα των παράξενων αιώνων ως κι ο θάνατος μπορεί να πεθαίνει...»

Αριαμπάτα



Ένας άλλος μαθηματικός, ο οποίος αναφέρθηκε στην επίλυση Διοφαντικών Εξισώσεων πρώτου βαθμού ήταν ο Ινδός Μαθηματικός Αριαμπάτα (Aryabhata). Από όσα γνωρίζουμε από τους σχολιαστές του, μπορούμε να πούμε ότι ο Αριαμπάτα (Aryabhata), στο ΙΙ μέρος - κεφάλαιο του έργου του Αριαμπάτιγια (Aryabatiya) ασχολήθηκε με ζεύγη γραμμικών εξισώσεων της μορφής: $\begin{matrix} \alpha_1 x_1 + c_1 = \beta_1 y \\ \alpha_2 x_2 + c_2 = \beta_2 y \end{matrix}$ ζητώντας την εύρεση ακέραιων λύσεων για τα x_1, x_2 και y.

Ο Αριαμπάτα είναι ο πρώτος σημαντικός Ινδός αστρονόμος, του οποίου το έργο περιλαμβάνει κάποια κεφάλαια με καθαρά μαθηματικό περιεχόμενο. Γεννήθηκε το 476 μ.Χ. σύμφωνα με την πληροφορία που δίνει ο ίδιος, δηλαδή ότι ήταν 23 ετών κατά το έτος 3600 της περιόδου Kaliyuga, που αντιστοιχεί με την χρονολογία 499 μ. Χ.Έζησε στην πόλη Kusumapura (την σημερινή Patua), πρωτεύουσα της αρχαιότερης ινδικής μοναρχίας. Το έργο του, που φέρει το όνομα Aryabhatiya, είναι το πρώτο αξιόλογο έργο μαθηματικού ενδιαφέροντος. Θεωρείται το παλαιότερο σωζόμενο έργο εκείνης της περιόδου και περιέχει το σύνολο της μέχρι τότε αστρονομικής και μαθηματικής γνώσης των Ινδιών.

Ο Αριαμπάτα κλείνει το ΙΙ κεφάλαιο της Aryabhatiya, με δύο στίχους που θεωρούνται και οι πιο σημαντικοί του έργου του. Αναφέρονται στη λύση Διοφαντικών εξισώσεων πρώτου βαθμού. Το κείμενο είναι ιδιαίτερα συνοπτικό και δυσνόητο, δοσμένο κατ’ αυτόν τον τρόπο, για εύκολη απομνημόνευση και με την προϋπόθεση ότι οι απαραίτητες εξηγήσεις και διευκρινήσεις, δίνονται κατά την προφορική διδασκαλία.

Πολλά ερμηνευτικά σχόλια και παραδείγματα έχουν δοθεί για τον σκοπό αυτό από διάφορους μελετητές. Ο B. L. Waerden μαζί με το κείμενο παραθέτει μέσα σε αγκύλες, κάποιες απαραίτητες επεξηγήσεις που πρόσθεσε κατά την μετάφρασή του ο Clark, ο οποίος με την σειρά του βασίστηκε σε σχόλια και ερμηνείες των Ινδών μαθηματικών Parameshvara και Brahmagupta. Η διατύπωση των στίχων αυτών είναι η ακόλουθη: *II 32-33. «Διαίρεσε τον διαιρέτη που δίνει το μεγαλύτερο υπόλοιπο με τον διαιρέτη που δίνει το μικρότερο υπόλοιπο. Το υπόλοιπο διαιρείται αμοιβαία, [θα λέγαμε ότι, το υπόλοιπο γίνεται διαιρέτης του αρχικού διαιρέτη και το υπόλοιπο της δεύτερης διαίρεσης, γίνεται διαιρέτης του δεύτερου διαιρέτη κ.λ.π.]. [Τοποθετώντας τα πηλίκα το ένα κάτω του άλλου, σχηματίζεται έτσι η λεγόμενη αλυσίδα]. [Το τελευταίο υπόλοιπο πολλαπλασιάζεται με έναν υποθετικό αριθμό και προστίθεται στη διαφορά μεταξύ υπολοίπων. Πολλαπλασιάστε τον προτελευταίο αριθμό με τον αριθμό που είναι πάνω απ’ αυτόν και προσθέστε τον αριθμό που είναι κάτω απ’ αυτόν]. [Συνεχίστε αυτή την διαδικασία μέχρι την αρχή της αλυσίδας]. Διαιρέστε τον αριθμό που βρίσκεται στην αρχή, με τον αριθμό που δίνει το μικρότερο υπόλοιπο. Πολλαπλασιάστε το υπόλοιπο, με τον διαιρέτη που δίνει το μεγαλύτερο υπόλοιπο. Το αποτέλεσμα θα είναι ο αριθμός, που ικανοποιεί τους δύο διαιρέτες και τα δύο υπόλοιπα».*
Ο B. L. Waerden μας δίνει τον τρόπο που υποδεικνύει ο Αριαμπάτα, για την επίλυση Διοφαντικών εξισώσεων, χρησιμοποιώντας σύγχρονο συμβολισμό. Από όσα γνωρίζουμε από τους σχολιαστές, μπορούμε να πούμε ότι ο Aryabhata, ασχολήθηκε με ζεύγη γραμμικών εξισώσεων της μορφής:

$$\begin{aligned} \alpha_1 x_1 + c_1 &= \beta_1 y \\ \alpha_2 x_2 + c_2 &= \beta_2 y \end{aligned} \tag{1.4}$$

ζητώντας την εύρεση ακέραιων λύσεων για τα x_1, x_2 και y. Η διαδικασία που ακολούθησε έχει ως εξής:
Βρίσκουμε τη λύση του ζεύγους αυτού των εξισώσεων, αν γνωρίζουμε τον τρόπο επίλυσης της εξίσωσης με γενικό τύπο $\alpha x + c = \beta y$ για την εύρεση των ακέραιων λύσεων της οποίας εκτελούμε τα ακόλουθα βήματα. Αρχικά, πρέπει να βρούμε τον μέγιστο κοινό διαιρέτη d των συντελεστών α και β. Αν ο d διαιρεί το c , τότε όλοι οι όροι της εξίσωσης διαιρούνται με d και «διαιρώντας τους συντελεστές με το κοινό μέτρο, μένουν οι

τελικές ποσότητες». Αν ο d όμως δεν διαιρεί το c τότε η εξίσωση είναι αδύνατη. Έτσι, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $d=1$ και το επόμενο βήμα είναι να διαιρέσουμε το β με το α: $\beta = q\alpha + r,$ όπου $r < \alpha$. Θέτουμε $x = qy + z$ και αντικαθιστώντας τις δύο παραπάνω σχέσεις στην αρχική έχουμε: $\alpha(qy+z)+c=(q\alpha+r)y$ ή αφαιρώντας τον όρο αqy από τα δύο μέλη καταλήγουμε στην $ry-c=\alpha z$. Η τελευταία έχει τον ίδιο τύπο με την αρχική εξίσωση. Συνεχίζουμε τη διαδικασία μέχρι εκείνου του σημείου που θα έχουμε (τελικό) υπόλοιπο τη μονάδα. «Διαιρέστε συνεχώς μέχρις ότου γίνει μονάδα το υπόλοιπο.»

Έτσι, τελικά φτάνουμε σε μια εξίσωση της μορφής: $1u + c' = gw$, όπου 1 και g είναι το τελευταίο και προτελευταίο υπόλοιπο. Ο όρος c' είναι ίσος με c αν ο αριθμός των διαιρέσεων που έγιναν είναι άρτιος και ίσος με –c αν ο αριθμός των διαιρέσεων είναι περιττός. Το σημείο αυτό τονίζεται ρητά: «Αυτή ακριβώς είναι η λειτουργία όταν ο αριθμός των πηλίκων είναι άρτιος. Αλλά αν είναι περιττός, οι αριθμοί που βρέθηκαν πρέπει να αφαιρεθούν». Μπορούμε τώρα, να πάρουμε μια τυχαία ακέραια τιμή του w και να υπολογίσουμε από την προηγούμενη εξίσωση το u. Συνήθως επιλέγεται η τιμή $w=0$ ενώ συχνά προτείνεται η επιλογή ενός κατάλληλου αριθμού w, που αφού πολλαπλασιαστεί με το προτελευταίο υπόλοιπο, αφαιρείται από αυτό ο όρος c', δηλαδή $u = gw - c'$. Έστω τώρα $q_1, q_2, ..., q_k$ τα πηλίκα των διαιρέσεων. Οι Ινδοί σχολιαστές προτείνουν για ευκολία, να γράφονται αυτά σε μία στήλη, το ένα κάτω του άλλου και στο τέλος να βάζουμε τα u και w.

Οι επαναλαμβανόμενες διαιρέσεις απαιτούν την προσθήκη νέων αγνώστων, των $z, t, ..., v, u, w$ και έτσι δημιουργούνται οι ακόλουθες σχέσεις:

$$\begin{aligned} x &= q_1 y + z \\ y &= q_2 z + t \\ &\dots \\ v &= q_k u + w \end{aligned} \tag{1.5}$$

Τώρα έχοντας υπολογίσει τα u και w, ακολουθούμε αντίστροφη διαδικασία. Υπολογίζουμε τα u και w και στη συνέχεια βρίσκουμε με τη σειρά τους υπόλοιπους αγνώστους καταλήγοντας στους x και y. Οι τιμές των x και y είναι μια μερική λύση της αρχικής εξίσωσης.

Η μέθοδος που χρησιμοποιούσαν οι Ινδοί μαθηματικοί, για την επίλυση των γραμμικών Διοφαντικών εξισώσεων, φέρει την χαρακτηριστική ονομασία «κονιοποιητής» (kuttaka). Ο λόγος που δόθηκε αυτή η ονομασία είναι προφανής, αφού οι αρχικοί συντελεστές α και β, μέσα από την διαδικασία που προαναφέραμε, γίνονται κάθε φορά όλο και μικρότεροι, είναι σαν να «κονιοποιούνται».

Ο Parameshvara στα σχετικά σχόλιά του πάνω στους στίχους του Αριαμπάτα επεξηγεί μία μέθοδο επίλυσης προβλημάτων, που αποτελούν σύστημα δύο γραμμικών εξισώσεων με τρείς αγνώστους. Η μέθοδος αυτή βασίζεται πάλι, στους στίχους II 32-33 της Aryabhatiya. Ο Parameshvara παρουσιάζει δύο τύπους προβλημάτων, εκ των οποίων το δεύτερο είναι ειδική περίπτωση του πρώτου και είναι τα εξής:

(A) «*Να βρείτε έναν αριθμό y τέτοιο ώστε, αν το* $\beta_1 y$ *διαιρεθεί με το* a_1 *να αφήνει υπόλοιπο* c_1 *, και το* $\beta_2 y$ *αν διαιρεθεί με το* a_2 *να αφήνει υπόλοιπο* c_2 *».*

(B) «*Να βρείτε έναν αριθμό y τέτοιο ώστε, αν διαιρεθεί με το* a_1 *να αφήνει υπόλοιπο* c_1 *, και αν διαιρεθεί με το* a_2 *να αφήνει υπόλοιπο* c_2 *».*

Όπως είπαμε το πρόβλημα (B) αποτελεί ειδική περίπτωση του (A), με $\beta_1 = \beta_2 = 1$. Η ερμηνεία του προβλήματος (A), μας οδηγεί σ' ένα ζεύγος εξισώσεων του τύπου:

$$\alpha_1 x_1 + c_1 = \beta_1 y$$
$$\alpha_2 x_2 + c_2 = \beta_2 y$$

Ο Parameshvara προτείνει την εξής μέθοδο για την επίλυση του συστήματος: Πρώτα να βρεθεί η γενική λύση της πρώτης, μετά η γενική λύση της δεύτερης και τέλος να εξισώσουμε τις δύο εκφράσεις ως προς τον κοινό άγνωστο *y*.

Κλείνοντας, θα χαρακτηρίζαμε το έργο του Αριαμπάτα, σαν μίγμα του απλού και του περίπλοκου, του σωστού και του λανθασμένου. Δικαιολογημένα, λοιπόν, ο Άραβας μελετητής Αλ-Μπιρούνι πέντε αιώνες αργότερα, έρχεται να περιγράψει τα ινδικά μαθηματικά «*σαν μίγμα απλών βότσαλων και πολύτιμων κρυστάλλων*».

Κεφάλαιο 2ο : Διοφαντικές Εξισώσεις στους Ακεραίους – Βασικές Γνώσεις Θεωρίας Αριθμών

2.1 Ευκλείδεια Διαίρεση – Διαιρετότητα

Θεώρημα 2.1 [14]: Αν α και β φυσικοί αριθμοί με $\beta \neq 0$, τότε υπάρχουν μοναδικοί φυσικοί κ και υ, τέτοιοι ώστε:

$$\alpha = \kappa\beta + \upsilon, \quad 0 \leq \upsilon < \beta \tag{2.1}$$

Απόδειξη:

- Θεωρούμε τους ακέραιους $\alpha,\ \alpha-\beta,\ \alpha-2\beta,\ \alpha-3\beta,...$ και από αυτούς παίρνουμε τους μη αρνητικούς. Σχηματίζουμε δηλαδή το σύνολο

$$S = \{\alpha - x\beta \mid x \in \mathbf{N},\ \alpha - x\beta \geq 0\}$$

Το σύνολο αυτό είναι υποσύνολο του $\mathbb{N}$ και επιπλέον είναι διάφορο του κενού, αφού περιέχει τον $\alpha - 0\cdot\beta = \alpha \geq 0$. Αν υ είναι το ελάχιστο στοιχείο[2] του S, τότε θα υπάρχει $\kappa \in \mathbb{N}$, τέτοιος, ώστε $\upsilon = \alpha - \kappa\beta$, οπότε θα ισχύει

$$\alpha = \kappa\beta + \upsilon \quad \text{και} \quad 0 \leq \upsilon .$$

Για τον υ πρέπει να δείξουμε ότι είναι και μικρότερος του β. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι $\upsilon \geq \beta$. Τότε

$$\upsilon - \beta \geq 0 \quad \text{και} \quad \upsilon - \beta = \alpha - \kappa\beta - \beta = \alpha - (\kappa+1)\beta = \alpha - x\beta \quad \text{με} \quad x = \kappa + 1 \in \mathbb{N}.$$

Άρα, ο $\upsilon - \beta$ είναι στοιχείο του συνόλου S, του οποίου ελάχιστο στοιχείο είναι το υ. Έτσι θα ισχύει $\upsilon - \beta \geq \upsilon$, που είναι άτοπο. Επομένως, $\alpha = \kappa\beta + \upsilon,\ \ 0 \leq \upsilon < \beta$.

- Μένει τώρα να αποδείξουμε ότι οι φυσικοί αριθμοί κ και υ είναι μοναδικοί. Ας υποθέσουμε ότι και οι φυσικοί κ' και υ' έχουν την ιδιότητα

$$\alpha = \kappa'\beta + \upsilon',\ \ 0 \leq \upsilon' < \beta .$$

[2] Αποδεικνύεται ότι κάθε μη κενό υποσύνολο των φυσικών αριθμών έχει ελάχιστο στοιχείο ("αρχή της καλής διάταξης").

Επειδή $\alpha = \kappa\beta + \upsilon$, $0 \le \upsilon < \beta$, θα ισχύει $\kappa'\beta + \upsilon' = \kappa\beta + \upsilon$, οπότε

$$\upsilon - \upsilon' = \beta(\kappa' - \kappa).$$

Όμως, $0 \le \upsilon < \beta$ και $0 \le \upsilon' < \beta$, οπότε $-\beta < -\upsilon' \le 0$. Επομένως, με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε:

$$\begin{aligned} -\beta < &\ \upsilon - \upsilon' && < \beta \\ -\beta < &\ \beta(\kappa' - \kappa) && < \beta \\ -1 < &\ \kappa' - \kappa && < 1 \end{aligned}$$

Αλλά ο μοναδικός ακέραιος μεταξύ -1 και 1 είναι το 0. Άρα $\kappa' - \kappa = 0$, δηλαδή $\kappa' = \kappa$, οπότε και $\upsilon' = \upsilon$. ▲

Αποδεικνύεται ότι το θεώρημα ισχύει γενικότερα για οποιουσδήποτε ακέραιους α και β, με $\beta \neq 0$ και διατυπώνεται ως εξής:

Θεώρημα 2.2 [14]: Αν α και β ακέραιοι με $\beta \neq 0$, τότε υπάρχουν μοναδικοί ακέραιοι κ και υ, τέτοιοι, ώστε:

$$\alpha = \kappa\beta + \upsilon, \quad 0 \le \upsilon < |\beta| \tag{2.2}$$

Η διαδικασία εύρεσης των κ, υ λέγεται **ευκλείδεια ή αλγοριθμική διαίρεση** του α με τον β. Το κ λέγεται **πηλίκο** και το υ **υπόλοιπο** της διαίρεσης αυτής. Όταν το υπόλοιπο μιας ευκλείδειας διαίρεσης είναι ίσο με το 0, η διαίρεση λέγεται **τέλεια**. ▲

Έννοια Διαιρετότητας

Ορισμός 2.1 [14]: Έστω α, β δύο ακέραιοι με $\beta \neq 0$. Θα λέμε ότι ο ***β* διαιρεί τον *α*** και θα γράφουμε β / α, όταν η διαίρεση του α με τον β είναι τέλεια, δηλαδή όταν υπάρχει ακέραιος κ, τέτοιος ώστε:

$$\alpha = \kappa\beta \tag{2.3}$$

Στην περίπτωση αυτή λέμε επίσης ότι ο β είναι **διαιρέτης** ή **παράγοντας** του α ή ότι ο α **διαιρείται με τον** β ή ακόμα ότι ο α **είναι πολλαπλάσιο του** β, και γράφουμε $\alpha = \pi o\lambda\beta$.

Για να δηλώσουμε ότι ο ακέραιος β δε διαιρεί τον ακέραιο α, γράφουμε $\beta \nmid \alpha$ ή ισοδύναμα $\alpha \neq \pi o\lambda\beta$. Για παράδειγμα, $5|20$, αφού $20 = 4 \cdot 5$, ενώ $5 \nmid 18$, αφού η διαίρεση του 18 με τον 5 δεν είναι τέλεια.

Αν β / α, τότε $\alpha = \kappa\beta$ ή ισοδύναμα $\alpha = (-\kappa)(-\beta)$, που σημαίνει ότι αν ο β είναι διαιρέτης του α, τότε και ο $-\beta$ είναι διαιρέτης του α. Επομένως, οι διαιρέτες ενός ακέραιου εμφανίζονται κατά ζεύγη αντίθετων ακέραιων. □

Ως άμεσες συνέπειες του παραπάνω ορισμού έχουμε τις εξής:

- $\pm 1 / \alpha$ και $\pm\alpha / \alpha$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{Z}^*$
- $\beta / 0$, για κάθε $\beta \in \mathbb{Z}^*$
- Αν β / α, τότε $\kappa\beta / \kappa\alpha$, για κάθε $\kappa \in \mathbb{Z}^*$

Τονίζουμε ότι στο συμβολισμό β / α, οι αριθμοί α και β είναι πάντα ακέραιοι και $\beta \neq 0$
.

Θεώρημα 2.3 [14]: Έστω α, β, γ ακέραιοι. Ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες

α. Αν α / β και β / α, τότε $\alpha = \beta$ ή $\alpha = -\beta$

β. Αν α / β και β / γ, τότε α / γ.

γ. Αν α / β, τότε $\alpha / \lambda\beta$ για κάθε ακέραιο λ.

δ. Αν α / β και α / γ, τότε $\alpha | (\beta + \gamma)$.

ε. Αν α / β και $\beta \neq 0$, τότε $|\alpha| \leq |\beta|$.

Απόδειξη:

α. Επειδή α / β και β / α, υπάρχουν ακέραιοι κ, λ, τέτοιοι, ώστε $\beta = \kappa\alpha$ και $\alpha = \lambda\beta$, οπότε $\alpha = \kappa\lambda\alpha$ και επομένως, $\kappa\lambda = 1$, που σημαίνει ότι $\kappa = \lambda = 1$ ή $\kappa = \lambda = -1$, δηλαδή ότι $\alpha = \beta$ ή $\alpha = -\beta$.

β. Επειδή α / β και β / γ, υπάρχουν ακέραιοι κ, λ, τέτοιοι, ώστε $\beta = \kappa\alpha$ και $\gamma = \lambda\beta$, οπότε $\gamma = \lambda\kappa \cdot \alpha$ και άρα α / γ.

γ. Επειδή α / β υπάρχει ακέραιος κ, τέτοιος, ώστε $\beta = \kappa\alpha$, οπότε $\lambda\beta = \lambda\kappa \cdot \alpha$ και άρα $\alpha / \lambda\beta$.

δ. Επειδή α / β και α / γ, υπάρχουν ακέραιοι κ, λ, τέτοιοι, ώστε $\beta = \kappa\alpha$ και $\gamma = \lambda\alpha$, οπότε $\beta + \gamma = (\kappa + \lambda)\alpha$ και άρα $\alpha \mid (\beta + \gamma)$.

ε. Επειδή α / β και $\beta \neq 0$, υπάρχει ακέραιος $\kappa \neq 0$ με $\beta = \kappa\alpha$. Επομένως, $|\beta| = |\kappa| \cdot |\alpha| \geq |\alpha|$, αφού $|\kappa| \geq 1$.

Από τις ιδιότητες γ. και δ. του παραπάνω θεωρήματος προκύπτει ότι: **«Αν α / β και α / γ, τότε $\alpha / (\kappa\beta + \lambda\gamma)$ για όλους τους ακεραίους κ και λ.»**

Ο ακέραιος $\kappa\beta + \lambda\gamma$, όπου $\kappa, \lambda \in \mathbb{Z}$ λέγεται **γραμμικός συνδυασμός** των β και γ. ▲

2.2 Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης - Ευκλείδειος Αλγόριθμος

Έστω α, β δύο ακέραιοι. Ένας ακέραιος δ λέγεται **κοινός διαιρέτης** των α και β, όταν είναι διαιρέτης και του α και του β. Το σύνολο των θετικών κοινών διαιρετών δύο ακεραίων έχει ένα τουλάχιστον στοιχείο, αφού ο 1 είναι πάντα ένας θετικός κοινός διαιρέτης τους. Αν ένας τουλάχιστον από τους δύο ακεραίους είναι διαφορετικός από το 0, τότε το σύνολο των θετικών κοινών διαιρετών τους είναι πεπερασμένο, και επομένως ανάμεσά τους υπάρχει μέγιστο στοιχείο. Αν όμως και οι δύο ακέραιοι είναι μηδέν, τότε κάθε θετικός ακέραιος είναι κοινός διαιρέτης τους και επομένως το σύνολο των θετικών κοινών διαιρετών τους δεν έχει μέγιστο στοιχείο.

Ορισμός 2.2 [14]: Έστω α και β δύο ακέραιοι, από τους οποίους ένας τουλάχιστον είναι διάφορος του μηδενός. Ορίζουμε ως **Μέγιστο Κοινό Διαιρέτη** (Μ.Κ.Δ.) των α και β, και τον συμβολίζουμε με $\delta = (\alpha, \beta)$, το μεγαλύτερο[3] από τους θετικούς κοινούς διαιρέτες

[3] Ισχύει προφανώς ότι κάθε πεπερασμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ έχει μέγιστο στοιχείο.

τους. Δηλαδή, ο Μ.Κ.Δ. δύο ακεραίων α και β είναι ο μοναδικός θετικός ακέραιος δ που έχει τις επόμενες δύο ιδιότητες:

α. δ / α και δ / β

β. Αν x / α και x / β, τότε $x \leq \delta$.

Παρατηρούμε επίσης ότι:

- Για κάθε *θ ε τ ι κ ό* ακέραιο α ισχύει $(\alpha,\alpha) = \alpha$, $(\alpha,0) = \alpha$ και $(\alpha,1) = 1$.
- Αν α, β είναι δύο *θ ε τ ι κ ο ί* ακέραιοι με β / α, τότε $(\alpha,\beta) = \beta$.

Ο αλγόριθμος εύρεσής του συνδέει τη διαιρετότητα δύο αριθμών με τη διαιρετότητα των διαδοχικών υπολοίπων τους, ενώ η αντίστροφη διαδικασία εκφράζει, όπως θα αποδείξουμε στη συνέχεια τη γραμμική Διοφαντική εξίσωση.

□

Ορισμός 2.3 [14]: Αν ο ΜΚΔ των α, β είναι ίσος με τη μονάδα τότε οι αριθμοί α και β ονομάζονται **πρώτοι μεταξύ τους ή σχετικά πρώτοι**. Προφανώς, αν α / β τότε $(\alpha,\beta) = \alpha$.

□

Θεώρημα 2.4 [14]: Έστω δύο ακέραιοι αριθμοί α, β και δ ένας θετικός κοινός διαιρέτης τους. Τότε ο δ είναι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των α και β αν και μόνο αν για κάθε θετικό κοινό διαιρέτη δ' των α και β ισχύει δ' / δ.

Απόδειξη: Αν $\delta = (\alpha,\beta)$ τότε θα γράφεται $\delta = \kappa\alpha + \lambda\beta$, όπου κ και λ είναι κατάλληλοι ακέραιοι. Επομένως, για κάθε δ' με δ' / α και δ' / β έχουμε $\delta' / (\kappa\alpha + \lambda\beta)$ και δ' / δ. Αντίστροφα, αν υποθέσουμε ότι ο δ είναι ένας θετικός κοινός διαιρέτης των α και β, τέτοιος ώστε δ' / δ για κάθε κοινό διαιρέτη δ' των α και β, τότε είναι προφανές ότι $\delta' \leq \delta$ και $\delta = (\alpha,\beta)$.

Το θεώρημα αυτό αποδεικνύει επιπλέον ότι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης δύο αριθμών είναι μοναδικός. Πράγματι, αν δ_1 και δ_2 είναι δύο μέγιστοι κοινοί διαιρέτης των α και β, τότε

δ_1 / δ_2 και δ_2 / δ_1, τότε από γνωστή πρόταση ισχύει $\delta_1 = \delta_2$, δηλαδή ο ΜΚΔ δύο αριθμών είναι μοναδικός. ▲

Αν για τον υπολογισμό του Μ.Κ.Δ. δύο ακεραίων προσδιορίζουμε προηγουμένως τους διαιρέτες τους, τότε, ιδιαίτερα για μεγάλους αριθμούς, απαιτείται πολύς χρόνος. Μια σύντομη και αποτελεσματική μέθοδος προσδιορισμού του Μ.Κ.Δ., η οποία θα λέγαμε είναι και η ουσιαστική μέθοδος εύρεσης του Μ.Κ.Δ., οφείλεται στον Ευκλείδη και λέγεται **Ευκλείδειος αλγόριθμος**. Ο αλγόριθμος αυτός στηρίζεται στο επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 2.5 [14]: Αν α και β δύο φυσικοί αριθμοί και υ είναι το υπόλοιπο της ευκλείδειας διαίρεσης του α με τον β, τότε:

$$(\alpha, \beta) = (\beta, \upsilon). \tag{2.4}$$

Απόδειξη:

Έστω $\alpha = \kappa\beta + \upsilon$, $0 \le \upsilon < \beta$ η ισότητα της ευκλείδειας διαίρεσης του α με τον β. Αν $\delta = (\alpha, \beta)$ και $\delta' = (\beta, \upsilon)$, τότε:

- Επειδή δ / α και δ / β, προκύπτει ότι $\delta / (\alpha - \kappa\beta)$, δηλαδή δ / υ. Έτσι δ / β και δ / υ, άρα $\delta \le \delta'$.

- Επειδή δ' / β και δ' / υ, προκύπτει ότι $\delta' / (\kappa\beta + \upsilon)$, δηλαδή δ' / α. Έτσι δ' / β και δ' / α, άρα $\delta' \le \delta$.

Επομένως, $\delta = \delta'$. ▲

Παράδειγμα 2.1 : Ας χρησιμοποιήσουμε το παραπάνω θεώρημα στον υπολογισμό του Μ.Κ.Δ. των 111 και 78. Εφαρμόζοντας διαδοχικά την ευκλείδεια διαίρεση έχουμε:

$$111 = 1 \cdot 78 + 33,\ 78 = 2 \cdot 33 + 12,\ 33 = 2 \cdot 12 + 9,\ 12 = 1 \cdot 9 + 3,\ 9 = 3 \cdot 3 + 0$$

Επομένως,

$$(111, 78) = (78, 33) = (33, 12) = (12, 9) = (9, 3) = (3, 0) = 3,$$

δηλαδή $(111,78)=3$, που είναι και το τελευταίο μη μηδενικό υπόλοιπο των διαδοχικών διαιρέσεων. □

Γενικά, για δύο θετικούς ακεραίους α, β με $\alpha > \beta$, η διαδικασία μπορεί να περιγραφεί ως εξής: Εφαρμόζουμε επανειλημμένα και διαδοχικά την ευκλείδεια διαίρεση και γράφουμε

$$\alpha = \kappa_1 \beta + \upsilon_1, \quad 0 < \upsilon_1 < \beta$$

$$\beta = \kappa_2 \upsilon_1 + \upsilon_2, \quad 0 < \upsilon_2 < \upsilon_1$$

$$\upsilon_1 = \kappa_3 \upsilon_2 + \upsilon_3, \quad 0 < \upsilon_3 < \upsilon_2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Από τον έλεγχο των ανισοτήτων στη δεξιά στήλη βλέπουμε ότι για την ακολουθία των διαδοχικών υπολοίπων ισχύει $\beta > \upsilon_1 > \upsilon_2 > \upsilon_3 > \ldots \geq 0$. Επομένως, ύστερα από β το πολύ βήματα θα εμφανιστεί το υπόλοιπο 0. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι

$$\upsilon_{\nu-2} = \kappa_\nu \upsilon_{\nu-1} + \upsilon_\nu, \; \upsilon_\nu > 0$$

$$\upsilon_{\nu-1} = \kappa_{\nu+1} \upsilon_\nu + 0.$$

Τότε ισχύει $(\alpha, \beta) = \upsilon_\nu$. Αυτό προκύπτει από τη διαδοχική εφαρμογή του προηγούμενου θεωρήματος, σύμφωνα με το οποίο

$$(\alpha, \beta) = (\beta, \upsilon_1) = (\upsilon_1, \upsilon_2) = \ldots = (\upsilon_\nu, 0) = \upsilon_\nu.$$

Επομένως, ο Μ.Κ.Δ. των α και β είναι **το τελευταίο θετικό υπόλοιπο** των παραπάνω αλγοριθμικών διαιρέσεων.

Η διαδικασία αυτή αποτελεί τον **Ευκλείδειο αλγόριθμο** και χρησιμοποιείται γενικότερα για τον προσδιορισμό του Μ.Κ.Δ. δύο οποιωνδήποτε ακεραίων.

Από τον παραπάνω αλγόριθμο μπορεί να προκύψει η πολύ σημαντική ιδιότητα του Μ.Κ.Δ. δύο αριθμών α, β, ότι δηλαδή αυτός μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός των α και β.

Γενικά, ισχύει:

Θεώρημα 2.6 [14]: Αν δ είναι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των α και β, τότε υπάρχουν ακέραιοι κ και λ τέτοιοι ώστε:

$$\delta = (\alpha, \beta) = \kappa\alpha + \lambda\beta. \tag{2.5}$$

Οι ακέραιοι κ και λ δεν είναι μοναδικοί. Για παράδειγμα για το Μ.Κ.Δ. των 111 και 78 είναι $3 = (-7)\cdot 111 + 10\cdot 78$ αλλά και $3 = 71\cdot 111 + (-101)\cdot 78$.

Δηλαδή, ο Μ.Κ.Δ. δύο ακέραιων μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των ακεραίων αυτών.

Πόρισμα 2.1 [14]: Δύο ακέραιοι αριθμοί α και β είναι πρώτοι μεταξύ τους αν και μόνο αν υπάρχουν ακέραιοι κ και λ τέτοιοι ώστε:

$$\kappa\alpha + \lambda\beta = 1 \tag{2.6}$$

Απόδειξη:

- Αν α, β είναι πρώτοι μεταξύ τους, τότε $(\alpha, \beta) = 1$ και επομένως υπάρχουν ακέραιοι κ, λ με $\kappa\alpha + \lambda\beta = 1$

- Αν υπάρχουν ακέραιοι κ, λ με $\kappa\alpha + \lambda\beta = 1$ και αν $\delta = (\alpha, \beta)$, τότε δ / α και δ / β και επομένως, $\delta / (\kappa\alpha + \lambda\beta)$, δηλαδή $\delta / 1$, οπότε $\delta = 1$. ▲

Αν $\kappa\alpha + \lambda\beta = \delta$ είναι η γραμμική έκφραση του μέγιστου κοινού διαιρέτη των ακεραίων α και β, τότε $\kappa\left(\frac{\alpha}{\delta}\right) + \lambda\left(\frac{\beta}{\delta}\right) = 1$, που σημαίνει ότι $\left(\frac{\alpha}{\delta}, \frac{\beta}{\delta}\right) = 1$. Δηλαδή:

«Αν διαιρέσουμε δύο ακέραιους με το Μ.Κ.Δ. τους, προκύπτουν αριθμοί πρώτοι μεταξύ τους.»

Παράδειγμα 2.2 : Εύρεση του ΜΚΔ των 567 και 392.

$567 = 1\cdot 392 + 175$ (βήμα 1)

$392 = 2\cdot 175 + 42$ (βήμα 2)
$175 = 4\cdot 42 + 7$ (βήμα 3) άρα $(567,392) = 7$.
$42 = 6\cdot 7$

Επαλήθευση: Είναι $567 = 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 7$ και $392 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 7\cdot 7$. Πράγματι, ο αριθμός 7 είναι ο μοναδικός κοινός διαιρέτης των δύο αριθμών, μεγαλύτερος του 1, οπότε ο ΜΚΔ είναι 7.

Για να βρούμε τώρα τους αριθμούς κ, λ εργαζόμαστε ως εξής:

$$
\begin{aligned}
7 &= 175 - 4\cdot 42 && \text{(από το βήμα 3)}\\
&= 175 - 4(392 - 2\cdot 175) && \text{(από το βήμα 2)}\\
&= -4\cdot 392 + 9\cdot 175 \\
&= -4\cdot 392 + 9(567 - 392) && \text{(από το βήμα 1)}\\
&= 9\cdot 567 - 13\cdot 392
\end{aligned}
$$

□

Πόρισμα 2.2 [14]: Οι κοινοί διαιρέτες δύο ακεραίων α και β είναι οι διαιρέτες του μέγιστου κοινού διαιρέτη τους.

Απόδειξη: Έστω $\delta = (\alpha, \beta)$. Προφανώς κάθε διαιρέτης του δ είναι και κοινός διαιρέτης των α και β. Αλλά και αντιστρόφως, κάθε κοινός διαιρέτης δ' των α και β είναι και διαιρέτης του Μ.Κ.Δ. των α, β. Πράγματι, αν $\kappa\alpha + \lambda\beta = \delta$ είναι η γραμμική έκφραση του δ, τότε $\delta' / (\kappa\alpha + \lambda\beta)$, δηλαδή δ' / δ. ▲

Θεώρημα 2.7 [14]: (Λήμμα του Ευκλείδη)

Αν για τους ακέραιους α, β και γ ισχύει ότι $\gamma / \alpha\beta$ και $(\gamma, \alpha) = 1$, τότε γ / β.

Απόδειξη: Αφού $(\gamma, \alpha) = 1$ τότε από την παραπάνω πρόταση έχουμε ότι $(\gamma\beta, \alpha\beta) = \beta$. Όμως, $\gamma / \gamma\beta$ και $\gamma / \alpha\beta$, δηλαδή ο γ είναι κοινός διαιρέτης των $\gamma\beta$ και $\alpha\beta$ και από το θεώρημα προκύπτει ότι γ / β.) ▲

Η έννοια του μέγιστου κοινού διαιρέτη γενικεύεται και για περισσότερους από δύο ακεραίους. Συγκεκριμένα, αν $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_\nu$ ακέραιοι με έναν τουλάχιστον διάφορο του μηδενός, τότε ορίζουμε ως μέγιστο κοινό διαιρέτη αυτών, και τον συμβολίζουμε με $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_\nu)$, τον μεγαλύτερο από τους θετικούς κοινούς διαιρέτες τους.

Αποδεικνύεται ότι:

«Ο Μ.Κ.Δ. τριών ή περισσότερων ακεραίων δε μεταβάλλεται αν αντικαταστήσουμε δύο από αυτούς με το μέγιστο κοινό διαιρέτη τους.»

Παράδειγμα 2.3 : $(24,12,16) = ((24,16),12) = (8,12) = 4$ □

Για το Μ.Κ.Δ. περισσότερων από δύο ακεραίους ισχύουν ανάλογες ιδιότητες με τις ιδιότητες του Μ.Κ.Δ. δύο ακεραίων. Έτσι ,για παράδειγμα, για τρεις ακέραιους α, β, γ αποδεικνύεται ότι:

- Αν $\delta = (\alpha, \beta, \gamma)$, τότε υπάρχουν ακέραιοι κ, λ, μ, τέτοιοι, ώστε

$$\delta = \kappa\alpha + \lambda\beta + \mu\gamma .$$

- Αν $\delta = (\alpha, \beta, \gamma)$, τότε $\left(\frac{\alpha}{\delta}, \frac{\beta}{\delta}, \frac{\gamma}{\delta}\right) = 1$.

Πρόταση 2.1 [14]: Έστω τρείς μη μηδενικοί ακέραιοι α, β και γ. Τότε ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις:

i) $(\alpha, \beta) = (\beta, \alpha) = (\alpha, -\beta) = (\alpha, \beta + \alpha\gamma)$
ii) $(\alpha, (\beta, \gamma)) = ((\alpha, \beta), \gamma)$

Πρόταση 2.2 [14]: Έστω α, β και γ τρείς ακέραιοι αριθμοί, με $\gamma > 0$. Τότε, ισχύουν τα εξής:

i) $(\alpha\gamma, \beta\gamma) = \gamma \cdot (\alpha, \beta)$
ii) Αν γ / α και γ / β, τότε $(\frac{\alpha}{\gamma}, \frac{\beta}{\gamma}) = \frac{1}{\gamma}(\alpha, \beta)$

Πόρισμα 2.4 [14]: Αν $\delta = (\alpha, \beta)$ είναι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των α και β, τότε οι αριθμοί α / δ και β / δ είναι πρώτοι μεταξύ τους, δηλαδή $(\frac{\alpha}{\delta}, \frac{\beta}{\delta}) = 1$.

1.3 Γραμμική Διοφαντική Εξίσωση

Ορισμός 2.4 [14]: Ας θεωρήσουμε δύο ακέραιους αριθμούς α και β. Γνωρίζουμε ότι υπάρχουν ακέραιοι κ και λ τέτοιοι ώστε: $\kappa\alpha+\lambda\beta=(\alpha,\beta)$. Η αντίστροφη δηλαδή διαδικασία προσδιορισμού του ΜΚΔ των α, β οδηγεί στην εύρεση καταλλήλων κ, λ που ικανοποιούν την παραπάνω σχέση. Η γενική μορφή μιας τέτοιας εξίσωσης είναι η:

$$\alpha x+\beta y=\gamma \tag{2.7}$$

όπου α, β και γ γνωστοί ακέραιοι αριθμοί ενώ x, y είναι άγνωστοι ακέραιοι.
Η εξίσωση αυτή είναι γνωστή και ως **γραμμική Διοφαντική εξίσωση**.
□

Παράδειγμα 2.4 : Η εξίσωση $3x+5y=4$ έχει λύση το ζεύγος $(3,-1)$, διότι $3\cdot3+5\cdot(-1)=4$. Αντίθετα, η εξίσωση $2x+20y=1$ δεν έχει λύση, γιατί για κάθε επιλογή του ζεύγους (x, y) το αριστερό μέρος της είναι άρτιος ενώ το δεξί μέρος της είναι περιττός αριθμός. □

Θεώρημα 2.8 [14]: Η γραμμική Διοφαντική εξίσωση $\alpha x+\beta y=\gamma$ έχει λύση αν και μόνο αν ο $\delta=(\alpha,\beta)$ διαιρεί τον ακέραιο γ.

Απόδειξη: Ας υποθέσουμε ότι η εξίσωση $\alpha x+\beta y=\gamma$ έχει λύση την (x_0, y_0), δηλαδή ισχύει ότι: $\alpha x_0+\beta y_0=\gamma$.
Θέτουμε $\alpha=\kappa\delta$ και $\beta=\lambda\delta$, όπου κ, λ ακέραιοι. Έτσι, έχουμε ότι $\gamma=\alpha x_0+\beta y_0=\delta(\kappa x_0+\lambda y_0)$, όπου ο αριθμός $\kappa x_0+\lambda y_0$ είναι ακέραιος, οπότε δ / γ

Αντίστροφα, ας θεωρήσουμε ότι δ / γ, οπότε $\gamma = \delta \cdot \mu$, όπου μ ακέραιος. Έτσι, υπάρχουν κ, λ ακέραιοι τέτοιοι ώστε: $\kappa\alpha + \lambda\beta = (\alpha, \beta) = \delta$ ή $\alpha(\kappa\mu) + \beta(\lambda\mu) = \delta\mu = \gamma$. Άρα, η εξίσωση $\alpha x + \beta y = \gamma$ έχει λύση $x_0 = \kappa\mu, y_0 = \lambda\mu$. ▲

Παραμετροποίηση των λύσεων

Μια χαρακτηριστική ιδιότητα της γραμμικής Διοφαντικής εξίσωσης είναι ότι οι λύσεις της, αν υπάρχουν, είναι άπειρες και ανήκουν στην ίδια κλάση ισο-ϋπόλοιπων ακεραίων[4].

Θεώρημα 2.9 [14]: Αν (x_0, y_0) είναι μια λύση της εξίσωσης $\alpha x + \beta y = \gamma$ και $\delta = (\alpha, \beta)$, τότε όλες οι λύσεις της είναι της μορφής: $x = x_0 + (\frac{\beta}{\delta})t$ και $y = y_0 - (\frac{\alpha}{\delta})t$, όπου $t \in \mathbb{Z}$.

Απόδειξη: Έστω η εξίσωση $\alpha x + \beta y = \gamma$ έχει μια γνωστή λύση (x_0, y_0). Αν υποθέσουμε πως (x, y) είναι μια άλλη λύση, τότε $\alpha x_0 + \beta y_0 = \gamma = \alpha x' + \beta y'$, το οποίο είναι ισοδύναμο με $\alpha(x' - x_0) = \beta(y_0 - y')$. Διαιρώντας με τον $\delta = (\alpha, \beta)$, παίρνουμε ότι $\kappa(x' - x_0) = \lambda(y_0 - y')$, όπου οι $\kappa = \frac{\alpha}{\delta}$ και $\lambda = \frac{\beta}{\delta}$ είναι σχετικά πρώτοι. Επομένως, έχουμε ότι $\kappa / \lambda(y_0 - y')$ και $(\kappa, \lambda) = 1$, οπότε έχουμε ότι $\kappa / (y_0 - y')$. Δηλαδή, υπάρχει ακέραιος t τέτοιος ώστε $y_0 - y' = \kappa t$. Όμοια, αποδεικνύεται ότι $x' - x_0 = \lambda t$ και έτσι καταλήγουμε στους τύπους:

$$\begin{aligned} x' &= x_0 + \lambda t = x_0 + (\frac{\beta}{\delta})t \\ y' &= y_0 - \kappa t = y_0 - (\frac{\alpha}{\delta})t \end{aligned} \tag{2.8}$$

▲

[4] Έστω m ένας θετικός ακέραιος. Δύο ακέραιοι α και β λέγονται ισοϋπόλοιποι με μέτρο m, όταν διαιρούμενοι με m αφήνουν το ίδιο υπόλοιπο. Συμβολίζουμε με: $\alpha \equiv \beta (\bmod m)$ και διαβάζουμε «α ισοϋπόλοιπος του β μόντουλο m».

Παρατήρηση 2.1 : Εύκολα μπορεί κανείς να παρατηρήσει ότι αν $(\alpha,\beta)=1$ και η (x_0, y_0) είναι μια λύση της γραμμικής Διοφαντικής εξίσωσης, τότε όλες οι λύσεις της είναι της μορφής: $x = x_0 + \beta t$ και $y = y_0 - \alpha t$ για κάθε ακέραιο t.

Η επίλυση μια γραμμικής Διοφαντικής εξίσωσης ανάγεται στον προσδιορισμό μιας αρχικής της λύσης (x_0, y_0).

Η αντίστροφη διαδικασία του αλγορίθμου του Ευκλείδη δίνει τον τρόπο προσδιορισμού μιας τέτοιας λύσης.

Αν $\delta = (\alpha,\beta)$, τότε μπορούμε να βρούμε ακέραιους κ, λ ώστε $\kappa\alpha + \lambda\beta = \delta$. Υποθέτουμε ότι δ / γ (για να υπάρχει λύση) δηλαδή $\gamma = \delta\mu$, για κάποιον ακέραιο μ. Άρα, $\mu\kappa\alpha + \mu\lambda\beta = \mu\delta = \gamma$, δηλαδή μια λύση της αρχικής εξίσωσης είναι η $x_0 = \mu\kappa,\ y_0 = \mu\lambda$ οπότε η γενική λύση είναι η:

$$x = \mu\kappa + (\frac{\beta}{\delta})t,\ y = \mu\lambda - (\frac{\alpha}{\delta})t,\ \text{όπου } t \in \mathbb{Z}.$$

Η **γεωμετρική ερμηνεία** του παραπάνω θεωρήματος προκύπτει, αν λάβουμε υπόψη ότι κάθε εξίσωση της μορφής $\alpha x + \beta y = \gamma$, με $\alpha \neq 0$ ή $\beta \neq 0$, παριστάνει στο επίπεδο μια ευθεία. Στην περίπτωση που $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{Z}$, η ευθεία αυτή διέρχεται από άπειρα σημεία με ακέραιες συντεταγμένες, αν και μόνο αν ο δ / γ, όπου $\delta = (\alpha,\beta)$.

Για παράδειγμα, η ευθεία $2x + 3y = 1$ διέρχεται από άπειρο πλήθος σημείων με ακέραιες συντεταγμένες, ενώ η $6x + 4y = 5$ δε διέρχεται από κανένα τέτοιο σημείο.

Κεφάλαιο 3ο : Πολυωνυμικές Διοφαντικές Εξισώσεις

Στο κεφάλαιο αυτό μελετάμε την επέκταση των Διοφαντικών εξισώσεων σε πολυώνυμα καθώς η λύση τους, όπως θα δούμε, αποτελεί ένα βασικό εργαλείο για την εύρεση και τον υπολογισμό ενός σταθεροποιητικού αντισταθμιστή ενός συστήματος αυτόματου ελέγχου μιας εισόδου και μίας εξόδου. (Single input single output case – siso case)

3.1 Πολυώνυμα και ρητές συναρτήσεις

Έστω $\mathbb{R}[s]$ το σύνολο των πολυωνύμων μιας ανεξάρτητης μεταβλητής s με συντελεστές στο σώμα των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$.
Το $\mathbb{R}[s]$ εφοδιασμένο με τις πράξεις: Πρόσθεση $+ : \mathbb{R}[s]+\mathbb{R}[s]\rightarrow\mathbb{R}[s]$ και Πολλαπλασιασμό $\cdot : \mathbb{R}[s]\times\mathbb{R}[s]\rightarrow\mathbb{R}[s]$ είναι **δακτύλιος (ring)**.

Ορισμός 3.1 [13]: Το σύνολο $\mathbb{R}[s]$ αποτελεί δακτύλιο και μάλιστα, το $\mathbb{R}[s]$ είναι ένας **Ευκλείδειος δακτύλιος**. Υπάρχει, δηλαδή, μια συνάρτηση $\partial(\cdot):\mathbb{R}[s]\rightarrow\mathbb{Z}^{*}(\mathbb{Z}^{*}$ το σύνολο των μη αρνητικών ακεραίων) τέτοια ώστε για κάθε $a(s)\in\mathbb{R}[s], a(s)\,\mathrm{T}\,0$, συμβολίζουμε $\partial a(s)=\deg a(s)\in\mathbb{Z}^{*}$ και ονομάζουμε $\deg a(s)$ «**βαθμό**[5] **(degree)** του $a(s)$» και είναι:

i. Για $a(s),b(s)\in\mathbb{R}[s]$, τέτοια ώστε $a(s)b(s)\neq 0, \deg[a(s)b(s)]\geq\deg a(s)$

ii. Για κάθε $a(s),b(s)\in\mathbb{R}[s], b(s)\neq 0$, υπάρχουν $q(s),r(s)\in\mathbb{R}[s]$ τέτοια ώστε

$$a(s)=b(s)q(s)+r(s)$$

και ή $r(s)=0$ ή $\deg r(s)<\deg b(s)$. Το σύνολο των μοναδιαίων στοιχείων του $\mathbb{R}[s]$ είναι το $\mathbb{R}-\{0\}$.

Σημειώνουμε ότι $\mathbb{R}[s]\subset\mathbb{R}(s)$ και ότι το $\mathbb{R}(s)$ ως σώμα είναι, επίσης, ένας Ευκλείδειος Δακτύλιος. $\mathbb{R}[s]$ ως εκ τούτου είναι ένας υποδακτύλιος του $\mathbb{R}(s)$. Τα στοιχεία του $\mathbb{R}[s]$ είναι τα μη μηδενικά στοιχεία του $\mathbb{R}$. □

[5] Ο βαθμός του μηδενικού πολυωνύμου $a(s)=0$, ορίζεται $\deg(0):=-\infty$.

Ορισμός 3.2 [13]: Έστω τώρα $\mathbb{R}(s)$ το σύνολο των κλασμάτων των στοιχείων του $\mathbb{R}[s]$:

$$\mathbb{R}(s) := \left\{ t(s) / t(s) = \frac{n(s)}{d(s)}, n(s), d(s) \in \mathbb{R}[s], d(s) \neq 0 \right\}.$$

Το $\mathbb{R}(s)$ αποτελεί σώμα και ονομάζεται **σώμα των (πραγματικών) ρητών συναρτήσεων**.

□

Ορισμός 3.3 [13]: Μια ρητή συνάρτηση $t(s) = \frac{n(s)}{d(s)}$ ονομάζεται **κανονική ρητή συνάρτηση (proper rational function)** αν $\deg d(s) \geq \deg n(s)$ ή ισοδύναμα αν $t(\infty) = k \in \mathbb{R}$.

Το σύνολο των κανονικών ρητών συναρτήσεων συμβολίζουμε με $\mathbb{R}_{pr}(s)$.

Αν για τα στοιχεία $t(s) = \frac{n(s)}{d(s)} \in \mathbb{R}_{pr}(s)$ ορίσουμε βαθμό της $t(s): q_\infty := \delta_\infty(t(s))$ μέσω της συνάρτησης $\delta_\infty(\cdot): \mathbb{R}_{pr}(s) \to \mathbb{Z}^*$, $\delta_\infty(t(s)) = \begin{cases} \deg d(s) - \deg n(s), t(s) \neq 0 \\ +\infty, t(s) = 0 \end{cases}$ το σύνολο $\mathbb{R}_{pr}(s)$ αποτελεί κι αυτό Ευκλείδειο δακτύλιο με μοναδιαία στοιχεία τα στοιχεία $t(s) = \frac{n(s)}{d(s)} \in \mathbb{R}_{pr}(s)$ για τα οποία $\delta_\infty(t(s)) = 0 \Leftrightarrow \deg d(s) = \deg n(s)$.

Ισοδύναμα, $t(s) = \frac{n(s)}{d(s)} \in \mathbb{R}_{pr}(s)$ είναι μοναδιαίο στοιχείο του $\mathbb{R}_{pr}(s)$, αν και μόνο αν $t^{-1}(s) = \frac{d(s)}{n(s)} \in \mathbb{R}_{pr}(s)$ ή αν και μόνο αν $t(\infty) = k \neq 0$.

□

Ορισμός 3.4 [13]: Αν $t(s) = \frac{n(s)}{d(s)} \in \mathbb{R}_{pr}(s)$ και $\deg d(s) > \deg n(s)$, τότε η κανονική ρητή συνάρτηση $t(s)$ ονομάζεται **αυστηρά κανονική ρητή συνάρτηση (strictly proper rational function).** Το σύνολο των αυστηρά κανονικών ρητών συναρτήσεων συμβολίζουμε με $\mathbb{R}_{pr0}(s)$ και αποτελεί κι αυτό δακτύλιο. □

Ισχύει, επίσης, ότι αν $t(s)\in\mathbb{R}_{pr}(s)$, τότε $t(s)\in\mathbb{R}_{pr0}(s)$ αν και μόνο αν $t(\infty)=0$. Λέμε ότι η $t(s)$ έχει ένα «μηδενικό στο σημείο $s=\infty$», βαθμού

$q_{\infty}=\delta_{\infty}(t(s))=\deg d(s)-\deg n(s)>0$.

Για τα παραπάνω σύνολα έχουμε τις σχέσεις:
$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}_{pr0}(s) & \subset & \mathbb{R}_{pr}(s) \ \subset \ \mathbb{R}(s) \\ \mathbb{R} & \subset & \mathbb{R}_{pr}(s) \\ \mathbb{R}\cup\mathbb{R}_{pr0}(s) & = & \mathbb{R}_{pr}(s) \\ \mathbb{R}[s] & \subset & \mathbb{R}(s) \\ \mathbb{R}[s]\cup\mathbb{R}_{pr0}(s) & = & \mathbb{R}(s) \end{array}$$

Ορισμός 3.5 [13]: (μηδενικά και πόλοι ρητών συναρτήσεων)

Έστω $x(t)\leftrightarrow X(s)$ και έστω ότι $X(s)=\dfrac{N(s)}{D(s)}\in\mathbb{R}(s)$, όπου:

$$\begin{array}{rcl} N(s) & = & b_m s_m + b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s+b_0\in\mathbb{R}[s] \\ D(s) & = & a_n s_n + b_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0\in\mathbb{R}[s] \quad ,a_n\neq 0 \end{array}$$

$b_i\in\mathbb{R}, i=0,1,2,...,m, a_j\in\mathbb{R}, j=0,1,2,...,n.$

Έστω $p_1,p_2,...,p_n\in\mathbb{C}$ οι ρίζες της εξίσωσης $D(s)=0$ και $z_1,z_2,...,z_m\in\mathbb{C}$ οι ρίζες της εξίσωσης $N(s)=0$ έτσι ώστε:

$$D(s)=a_n(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n) \text{ και } N(s)=b_m(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m) .$$

Λόγω του ότι οι συντελεστές $a_j\in\mathbb{R}, j=0,1,2,...,n,(b_i\in\mathbb{R}, i=0,1,2,...,m)$ αν για κάποιο $j\in\{0,1,2,...,n\},(i\in\{0,1,2,...,m\})$ $p_i=\sigma_i+j\omega_i$ και $\omega_i\neq 0,(z_k=\zeta_k+i\xi_k,$ και $\xi_k\neq 0)$ αν δηλαδή η ρίζα $p_i(\xi_k)$ είναι μιγαδικός αριθμός, τότε μεταξύ των $n(m)$ ριζών της $D(s)=0$ ($N(s)=0$) θα υπάρχει και συζυγής ρίζα $\overline{p}_i=\sigma_i-j\omega_i$ ($\overline{z}_k=\zeta_k i\xi_k$).

Με άλλα λόγια οι καθαρά ρίζες πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές πάντα εμφανίζονται σε συζυγή ζεύγη. Λόγω των $D(s)=0$ και $N(s)=0$, η ρητή συνάρτηση $X(s)$ γράφεται ως:

$$X(s)=\frac{b_m(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{a_n(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)} . \tag{3.1}$$

Αν $z_i\neq p_i$, αν δηλαδή τα πολυώνυμα $D(s)$ και $N(s)$ δεν έχουν κοινές ρίζες μεταξύ τους (έτσι ώστε αν για κάποιο $i=1,2,...,m, z_i=p_i$ όροι της μορφής $(s-z_i)$ στον αριθμητή

$N(s)$ της $X(s)$ να απλοποιούνται με όρους της μορφής $(s-p_i)$ στον παρονομαστή $D(s)$της $X(s)$) τότε και λόγω του ότι στην περίπτωση αυτή $X(z_i)=0$ οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1, z_2, ..., z_m$ ονομάζονται **μηδενικά (zeros)** της $X(s)$(στο $\mathbb{C}$) (μηδενίζουν την $X(s)$). Επίσης, και κάτω από την παραπάνω υπόθεση, λόγω του ότι $\lim_{s\to p_i}|X(s)|=\infty$ οι μιγαδικοί αριθμοί $p_1, p_2, ..., p_n$ ονομάζονται **πόλοι (poles)** της $X(s)$(στο $\mathbb{C}$) (απειρίζουν την $X(s)$). □

3.2 Σταθεροποιησιμότητα και σταθεροποίηση συστημάτων – Σύνθεση σταθεροποιητικού αντισταθμιστή

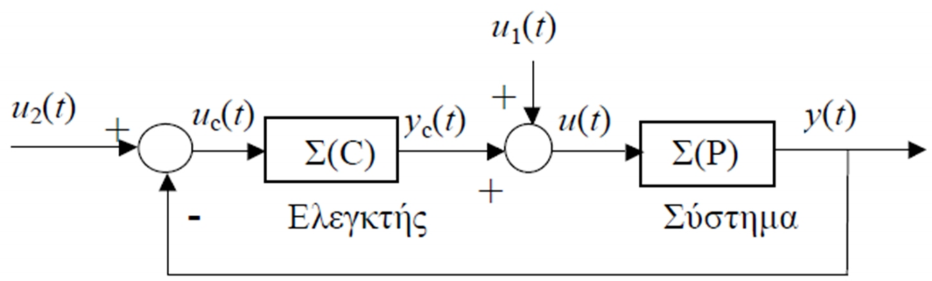
Δίνεται ένα αιτιατό, γραμμικό, χρονικά αναλλοίωτο και πεπερασμένης διάστασης ασταθές σύστημα $\Sigma(P)$ συνεχούς χρόνου μιας εισόδου και μιας εξόδου, του οποίου η σχέση μεταξύ εισόδου και εξόδου περιγράφεται από μια αυστηρά κανονική ρητή συνάρτηση μεταφοράς $P(s)$.

Το πρόβλημα της σταθεροποιησιμότητας και στην συνέχεια της σταθεροποίησης του $\Sigma(P)$ μέσω ανάδρασης, έχει ως αντικείμενο τη διερεύνηση της ύπαρξης και την εύρεση της (κανονικής ρητής) συνάρτησης μεταφοράς $C(s)$ ενός γραμμικού, χρονικά αναλλοίωτου και πεπερασμένης διάστασης συστήματος $\Sigma(C)$, το οποίο είναι τέτοιο ώστε, αν τα $\Sigma(P)$ και $\Sigma(C)$ συνδεθούν όπως στο λειτουργικό διάγραμμα μοναδιαίας ανάδρασης (unity feedback) του παρακάτω σχήματος 1, το κλειστό σύστημα $\Sigma(P,C)$ με τις δύο εισόδους $u_1(t)$ και $u_2(t)$ και τις δύο εξόδους $y(t)$ και $y_c(t)$, που προκύπτει από τη διασύνδεση των δύο συστημάτων, είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

Σε μια τέτοια περίπτωση το σύστημα $\Sigma(C)$ονομάζεται σταθεροποιητικός αντισταθμιστής (stabilizing compensator) ή σταθεροποιητικός ελεγκτής (stabilizing controller).

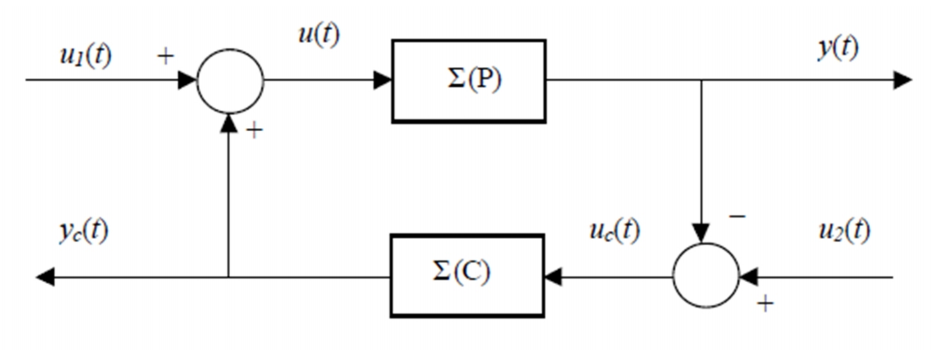
Στη συνέχεια δίνονται κάποιοι απαραίτητοι ορισμοί και διατυπώνονται θεωρήματα και προτάσεις ώστε να καταλήξουμε στην σύνθεση του σταθεροποιητικού ελεγκτή και ακολούθως να καταλήξουμε στον υπολογισμό του μέσω της λύσης μιας **πολυωνυμικής Διοφαντικής εξίσωσης**.

Ορισμός 3.6 [13]: Αν για ένα σύστημα $\Sigma(P)$ υπάρχει ένας σταθεροποιητικός ελεγκτής $\Sigma(C)$, τότε λέμε ότι το $\Sigma(P)$ είναι σταθεροποιήσιμο και ότι το $\Sigma(C)$ σταθεροποιεί το $\Sigma(P)$. □



Σχήμα 1: Σύστημα ελέγχου μοναδιαίας ανάδρασης

Πρόταση 3.1 [13]: Το σύστημα $\Sigma(C)$ σταθεροποιεί το σύστημα $\Sigma(P)$, αν και μόνο αν το σύστημα $\Sigma(P)$ σταθεροποιεί το σύστημα $\Sigma(C)$.



Σχήμα 2

Δεδομένου ενός συστήματος $\Sigma(P)$ δεν υπάρχει πάντα ένας σταθεροποιητικός ελεγκτής $\Sigma(C)$.

Τα σταθεροποιήσιμα συστήματα χαρακτηρίζονται από την έλλειψη αποσυζευκτικών μηδενικών εντός του κλειστού δεξιού μιγαδικού ημιεπιπέδου $\overline{\mathbb{C}}^{+}=\{s\in\mathbb{C}, R\in(s)\geq 0\}$.

Για απλούστευση της ανάλυσης του προβλήματος της σταθεροποίησης του $\Sigma(P)$ εισάγουμε τον παρακάτω συμβολισμό. Έστω $\rho^{i}:=\frac{d^{i}}{dt^{i}}, i=0,1,2,...\left(\rho^{0}:=1\right)$ ο διαφορικός τελεστής έτσι ώστε αν

$$D(\rho)=\rho^{n}+d_{n-1}\rho^{n-1}+...+d_{1}\rho+d_{0}$$

$$N(\rho)=n_{m}\rho^{m}+n_{m-1}\rho^{m-1}+...+n_{1}\rho+n_{0}$$

η γραμμική διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές που περιγράφει την σχέση μεταξύ της εισόδου $u(t)$ και της εξόδου $y(t)$ του $\Sigma(P)$ να γράφεται ως

$$D(\rho)y(t)=N(\rho)u(t) \tag{3.2}$$

Έστω, επίσης,

$$X(\rho)y_{c}(t)=Y(\rho)u_{c}(t) \tag{3.3}$$

η διαφορική εξίσωση του σταθεροποιητικού ελεγκτή $\Sigma(C)$, όπου $X(\rho)$ και $Y(\rho)$ πολυώνυμα ως προς ρ, τα οποία επιθυμούμε να προσδιορίσουμε, και $u_{c}(t), y_{c}(t)$ η είσοδος και η έξοδος αντίστοιχα του ελεγκτή $\Sigma(C)$. Αν τα δύο συστήματα (3.2) και (3.3) συνδεθούν σε συνδεσμολογία ανάδρασης (feedback) όπως το λειτουργικό διάγραμμα του σχήματος 1, αν δηλαδή

$$u(t)=y_{c}(t)+u_{1}(t) \tag{3.4}$$

$$u_{c}(t)=u_{2}(t)-y(t) \tag{3.5}$$

όπου $u_{1}(t), u_{2}(t)$ εξωτερικές είσοδοι αναφοράς, τότε από τις (3.2) και (3.6) προκύπτουν οι διαφορικές εξισώσεις:

$$D(\rho)y(t)-N(\rho)y_{c}(t)=N(\rho)u_{1}(t) \tag{3.6}$$

$$Y(\rho)y(t)+X(\rho)y_{c}(t)=Y(\rho)u_{2}(t) \tag{3.7}$$

Γράφοντας τις παραπάνω διαφορικές εξισώσεις με τη μορφή πινάκων έχουμε

$$\begin{bmatrix} D(\rho) & -N(\rho) \\ Y(\rho) & X(\rho) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(t) \\ y_c(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N(\rho) & 0 \\ 0 & Y(\rho) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} \tag{3.8}$$

και άρα, αν η ορίζουσα

$$\det \begin{bmatrix} D(\rho) & -N(\rho) \\ Y(\rho) & X(\rho) \end{bmatrix} = X(\rho)D(\rho) + Y(\rho)N(\rho)$$

δεν είναι εκ ταυτότητος ίση με μηδέν, οπότε ο αντίστροφος του πίνακα στα αριστερά της (3.8) υπάρχει, τότε

$$\begin{bmatrix} y(t) \\ y_c(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D(\rho) & -N(\rho) \\ Y(\rho) & X(\rho) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} N(\rho) & 0 \\ 0 & Y(\rho) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$$

Υπολογίζοντας τον αντίστροφο πίνακα και απλοποιώντας τον συμβολισμό γράφοντας $D = D(\rho)$, τελικά έχουμε

$$\begin{bmatrix} y(t) \\ y_c(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{XN}{XD+YN} & \dfrac{NY}{XD+YN} \\ -\dfrac{YN}{XD+YN} & \dfrac{YD}{XD+YN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

και άρα οι διαφορικές εξισώσεις που περιγράφουν το κλειστό σύστημα $\Sigma(P,C)$ είναι οι

$$[XD+YN]\,y(t) = XNu_1(t) + NYu_2(t) \tag{3.10}$$

$$[XD+YN]\,y_c(t) = -YNu_1(t) + DYu_2(t) \tag{3.11}$$

▲

Παρατήρηση 3.1: Από τις (3.10), (3.11) προκύπτει ότι το κλειστό σύστημα $\Sigma(P,C)$ περιγράφεται και από τις δ.ε.

$$(XD+YN)\,y(t) = XNu_1(t) \tag{3.12}$$

$$(XD+YN)\,y(t) = NYu_2(t) \tag{3.13}$$

$$(XD+YN)\,y_c(t) = -YNu_1(t) \tag{3.14}$$

$$(XD+YN)\,y_c(t) = YDu_2(t) \tag{3.15}$$

Ορισμός 3.7 [13]: Έστω δύο πολυώνυμα $D(s)$ και $N(s)$ και έστω $G(s)$ ένα πολυώνυμο που διαιρεί τα $D(s)$ και $N(s)$. Έστω δηλαδή ότι υπάρχουν πολυώνυμα $\overline{D}(s),\overline{N}(s)$ τέτοια ώστε $D(s)=\overline{D}(s)G(s)$ και $N(s)=\overline{N}(s)G(s)$. Αν όλοι οι κοινοί διαιρέτες $f(s)$ των $D(s)$ και $N(s)$ έχουν την ιδιότητα $\deg f(s)\leq \deg G(s)$, τότε ονομάζουμε το $G(s)$ **μέγιστο κοινό διαιρέτη (ΜΚΔ)** των $D(s)$ και $N(s)$.

Αν ο ΜΚΔ των $D(s)$ και $N(s)$ είναι η μονάδα (το «σταθερό πολυώνυμο»: 1), τότε τα $D(s)$ και $N(s)$ ονομάζονται **πρώτα μεταξύ τους.**

□

Έστω τώρα ότι τα πολυώνυμα $D(s)$ και $N(s)$ έχουν κοινές ρίζες εντός του κλειστού δεξιού ημιεπιπέδου $\overline{\mathbb{C}}^{+}=\{s\in\mathbb{C},\mathrm{Re}(s)\geq 0\}$ και έστω $G(s)$ ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των $D(s)$ και $N(s)$ του οποίου όλες οι ρίζες βρίσκονται εντός του $\overline{\mathbb{C}}^{+}$.

Έστω δηλαδή ότι:

$$D(s)=\overline{D}(s)G(s) \tag{3.16}$$

$$N(s)=\overline{N}(s)G(s) \tag{3.17}$$

όπου $\overline{D}(s),\overline{N}(s)$ πολυώνυμα, που δεν έχουν κοινές ρίζες εντός του $\overline{\mathbb{C}}^{+}$. Κάτω από αυτές τις προϋποθέσεις, για κάθε ζεύγος πολυωνύμων $X(s),Y(s)$, και άρα για κάθε σταθεροποιητικό ελεγκτή $\Sigma(C)$, θα είναι:

$$X(s)D(s)+Y(s)N(s)=\left[X(s)\overline{D}(s)+Y(s)\overline{N}(s)\right]G(s) \tag{3.18}$$

Από την τελευταία σχέση είναι προφανές ότι τα χαρακτηριστικό πολυώνυμο του κλειστού συστήματος $\Sigma(P,C)$ θα έχει ρίζες και τις ρίζες του $G(s)$(οι οποίες εξ υποθέσεως βρίσκονται εντός του $\overline{\mathbb{C}}^{+}$) και άρα για κάθε ζεύγος πολυωνύμων $X(s),Y(s)$ το κλειστό σύστημα $\Sigma(P,C)$ θα είναι ασταθές. Στην περίπτωση αυτή, το σύστημα $\Sigma(P)$ δεν είναι σταθεροποιήσιμο. Ο ορισμός των αποσυζευκτικών μηδενικών ενός συστήματος οδηγεί στη διατύπωση της παρακάτω πρότασης, η οποία χαρακτηρίζει ένα σταθεροποιήσιμο σύστημα $\Sigma(P)$.

Ορισμός 3.8 [13]: (Μηδενικά και Πόλοι Συστήματος)

Θεωρούμε το γραμμικό, χρονικά αναλλοίωτο και πεπερασμένης διάστασης σύστημα συνεχούς χρόνου μιας εισόδου και μιας εξόδου.

Ορισμός 3.8.1 [13]: Το πολυώνυμο $D(s)=a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1}+...+a_1 s + a_0$ ονομάζεται **χαρακτηριστικό πολυώνυμο του συστήματος** και η εξίσωση $D(s)=a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1}+...+a_1 s + a_0 = 0$ **χαρακτηριστική εξίσωση του συστήματος**. Οι ρίζες $p_i \in \mathbb{C}, i=1,2,...,n$ της χαρακτηριστικής εξίσωσης του συστήματος ονομάζονται **χαρακτηριστικές τιμές ή πόλοι του συστήματος**. □

Ορισμός 3.8.2 [13]: Οι ρίζες $z_i \in \mathbb{C}, i=1,2,...,m$ της $N(s)=b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1}+...+b_1 s + b_0 = 0$ ονομάζονται **μηδενικά του συστήματος**.

□

Θεωρούμε τώρα την συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ του συστήματος, η οποία εξ ορισμού δίνεται από την σχέση:

$$H(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1}+...+b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1}+...+a_1 s + a_0}\ .$$

Γενικά, τα $N(s)$ και $D(s)$ δεν είναι πρώτα μεταξύ τους.

Έστω $f(s)\in\mathbb{R}[s]$ ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των $N(s)$ και $D(s)$. Έστω, δηλαδή,

$$\begin{aligned} N(s) &= f(s)\bar{N}(s) \\ D(s) &= f(s)\bar{D}(s) \end{aligned}$$

όπου $\bar{N}(s),\bar{D}(s)$ είναι πολυώνυμα πρώτα μεταξύ τους. Τότε, η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος είναι: $H(s)=\frac{\bar{N}(s)}{\bar{D}(s)}$. Αν $f(s)$ δεν είναι σταθερά, τότε λέμε ότι η συνάρτηση $H(s)=\frac{\bar{N}(s)}{\bar{D}(s)}$ δεν περιγράφει πλήρως το σύστημα.

Ορισμός 3.8.3 [13]: Οι ρίζες του μέγιστου κοινού διαιρέτη $f(s)$ των πολυωνύμων $N(s)$ και $D(s)$ ονομάζονται **αποσυζευκτικά μηδενικά του συστήματος (decoupling zeros)**.

Τα αποσυζευκτικά μηδενικά του συστήματος, αν υπάρχουν, είναι πόλοι του συστήματος αλλά δεν είναι πόλοι της συνάρτησης μεταφοράς $H(s)=\dfrac{\overline{N}(s)}{\overline{D}(s)}$ του συστήματος, κι έτσι έχουμε την σχέση: {πόλοι του συστήματος} = {πόλοι της συνάρτησης μεταφοράς} ∪ {αποσυζευκτικά μηδενικά του συστήματος}.)

□

Πρόταση 3.2 [13]: Οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες

(i) Το σύστημα $\Sigma(P)$ είναι σταθεροποιήσιμο.

(ii) Αν $G(s)$ είναι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των πολυωνύμων $D(s)$ και $N(s)$, τότε $G(s_0)\neq 0$ για κάθε $s_0 \in \overline{\mathbb{C}}^{+}$.

(iii) Όλα τα αποσυζευκτικά μηδενικά $s_i \in \mathbb{C}$ του συστήματος $\Sigma(P)$ ανήκουν στο $\mathbb{C}^{-}=\{s\in\mathbb{C},\operatorname{Re}(s)<0\}$. Αν δηλαδή $s_i \in \mathbb{C}$ ικανοποιεί τις $D(s_i)=0, N(s_i)=0$ τότε $s_i \in \mathbb{C}^{-}$.

(iv) για κάθε $s_0 \in \overline{\mathbb{C}}^{+} : D(s_0)\neq 0, N(s_0)\neq 0$.

Απόδειξη: (i) $\Rightarrow$ (ii) Έστω ότι το $\Sigma(P)$ είναι σταθεροποιήσιμο, έστω δηλαδή ότι υπάρχουν πολυώνυμα $X(s),Y(s)$ τέτοια ώστε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $X(s)D(s)+Y(s)N(s)$ του κλειστού συστήματος $\Sigma(P,C)$ να έχει όλες τις ρίζες εντός του $\mathbb{C}^{-}$. Έστω $G(s)$ ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των πολυωνύμων $D(s)$ και $N(s)$, έστω δηλαδή

$$\begin{aligned} D(s)&=\overline{D}(s)G(s) \\ N(s)&=\overline{N}(s)G(s) \end{aligned} \tag{3.19}$$

όπου $\overline{D}(s)$, $\overline{N}(s)$ πρώτα μεταξύ τους και έστω ότι αντίθετα με την (ii) υπάρχει $s_0 \in \mathbb{C}^+$ τέτοιο ώστε $G(s_0) \neq 0$ για κάθε $s_0 \in \mathbb{C}^+$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Εξ ορισμού, αποσυζευκτικά μηδενικά του συστήματος είναι οι ρίζες του $G(s) = \text{ΜΚΔ}\{D(s), N(s)\}$, όλοι δηλαδή οι μιγαδικοί αριθμοί $s_0 \in \mathbb{C}$ που είναι τέτοιοι ώστε, αν $D(s) = \overline{D}(s)G(s)$ και $N(s) = \overline{N}(s)G(s)$, όπου $\overline{D}(s), \overline{N}(s)$ πρώτα μεταξύ τους, να έχουμε $G(s_0) = 0$. Εφόσον από την (ii) για κάθε $s_0 \in \mathbb{C}^+$ είναι $G(s_0) \neq 0$, αν το σύστημα έχει αποσυζευκτικά μηδενικά, αν δηλαδή υπάρχουν μιγαδικοί αριθμοί $s_i \in \mathbb{C}$ τέτοιοι ώστε $G(s_i) = 0$, θα πρέπει $s_i \in \mathbb{C}^-$.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) προφανές από τον ορισμό των αποσυζευκτικών μηδενικών. ▲

Παρατήρηση 3.2 : Προφανώς κάθε ασυμπτωτικά ευσταθές σύστημα $\Sigma(C)$είναι σταθεροποιήσιμο αλλά το αντίθετο δεν ισχύει, δηλαδή ένα σταθεροποιήσιμο σύστημα δεν είναι απαραίτητα και ασυμπτωτικά ευσταθές.

Λόγω της συμμετρίας μεταξύ του συστήματος $\Sigma(P)$ και του σταθεροποιητικού ελεγκτή $\Sigma(C)$ την παραπάνω ανάλυση για την σταθεροποιησιμότητα του $\Sigma(P)$ θα μπορούσε κανείς να επαναλάβει και για τον σταθεροποιητικό ελεγκτή $\Sigma(C)$. Αν δηλαδή τα πολυώνυμα $X(s)$ και $Y(s)$ έχουν κοινές ρίζες εντός του κλειστού δεξιού ημι-επιπέδου $\overline{\mathbb{C}}^+$, αν δηλαδή για κάποιο πολυώνυμο $L(s)$ του οποίου όλες οι ρίζες βρίσκονται εντός του $\overline{\mathbb{C}}^+$, έχουμε

$$X(s) = L(s)\overline{X}(s)$$

$$Y(s) = L(s)\overline{Y}(s)$$

όπου $\overline{X}(s)$, $\overline{Y}(s)$ πολυώνυμα, τότε

$$X(s)D(s) + Y(s)N(s) = L(s)G(s)\left[\overline{X}(s)\overline{D}(s) + \overline{Y}(s)\overline{N}(s)\right]$$

και το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $X(s)D(s)+Y(s)N(s)$ του κλειστού συστήματος $\Sigma(P,C)$ θα έχει ρίζες και τις ρίζες του $L(s)$ (οι οποίες από την υπόθεση βρίσκονται εντός του $\overline{\mathbb{C}}^+$) και άρα το κλειστό σύστημα $\Sigma(P,C)$ θα είναι ασταθές.

Πρόταση 3.3 [13]: Μια αναγκαία συνθήκη για να είναι το σύστημα $\Sigma(C)$ένας σταθεροποιητικός ελεγκτής ή ισοδύναμα για να είναι το κλειστό σύστημα $\Sigma(P,C)$ ασυμπτωτικά ευσταθές είναι: το σύστημα $\Sigma(C)$να μην έχει αποσυζευκτικά μηδενικά εντός του κλειστού δεξιού μηδενικού ημι-επιπέδου $\overline{\mathbb{C}}^+$.

Παρατήρηση 3.3 : Σύμφωνα με τα παραπάνω, μια διαφορετική διατύπωση της παραπάνω πρότασης είναι ότι «ένας σταθεροποιητικός ελεγκτής $\Sigma(C)$είναι ένα σταθεροποιήσιμο σύστημα».

Θεώρημα (Vardulakis) 3.1 [13]: Έστω ένα γραμμικό και χρονικά αναλλοίωτο σύστημα $\Sigma(P)$του οποίου η σχέση μεταξύ της εισόδου $u(t)$ και της εξόδου $y(t)$ περιγράφεται από τη γραμμική διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές

$$D(\rho)y(t)=N(\rho)u(t)$$

με $\deg D(s)\geq \deg N(s)$ και έστω ότι το $\Sigma(P)$ είναι σταθεροποιήσιμο. Το $\Sigma(P)$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές, αν και μόνο αν η συνάρτηση μεταφοράς $P(s)$ του $\Sigma(P)$ είναι κανονική και ευσταθής ρητή συνάρτηση. Ισοδύναμα, αν $\deg D(s)\geq \deg N(s)$ και το $\Sigma(P)$ δεν έχει αποσυζευκτικά μηδενικά εντός του $\overline{\mathbb{C}}^+$, τότε όλες οι ρίζες της $D(s)=0$ βρίσκονται εντός του $\mathbb{C}^-$, αν και μόνο αν $P(s)\in\mathbb{R}_s(s)$.

Απόδειξη. ($\Rightarrow$) (Δηλαδή: $\deg D(s)\geq \deg N(s)$) και όλες οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης $D(s)=0$ βρίσκονται εντός του $\mathbb{C}^-$ συνεπάγεται ότι $P(s)\in\mathbb{R}_s(s)$).

(i) Από τον ορισμό του συνόλου $\mathbb{R}_{pr}(s)$, η $\deg D(s)\geq \deg N(s)$ συνεπάγεται την

$$P(s)=\frac{N(s)}{D(s)}\in\mathbb{R}_{pr}(s)$$

(ii) Λόγω πιθανών απλοποιήσεων μεταξύ κοινών παραγόντων μεταξύ των πολυωνύμων $N(s)$ και $D(s)$, το σύνολο των πόλων της $P(s)=\dfrac{N(s)}{D(s)}$ είναι υποσύνολο των ριζών της $D(s)=0$ και άρα η υπόθεση ότι η χαρακτηριστική εξίσωση $D(s)=0$ έχει όλες τις ρίζες της εντός του $\mathbb{C}^-$ συνεπάγεται ότι {πόλοι της $P(s)$ } $\subseteq\mathbb{C}^-$. Συνδυάζοντας τις (i) και (ii) έχουμε ότι $P(s)\in\mathbb{R}_s(s)$.

($\Leftarrow$) (Δηλαδή: $P(s)\in\mathbb{R}_s(s)$ συνεπάγεται τις $\deg D(s)\geq\deg N(s)$ και ότι όλες οι ρίζες της $D(s)=0$ βρίσκονται εντός του $\mathbb{C}^-$).

Από τον ορισμό του συνόλου $\mathbb{R}_s(s)$, η $P(s)\in\mathbb{R}_s(s)$ συνεπάγεται την $P(s)\in\mathbb{R}_{pr}(s)$, η οποία συνεπάγεται την $\deg D(s)\geq\deg N(s)$. Όσον αφορά το δεύτερο συμπέρασμα, έστω αντίθετα ότι αν και $P(s)\in\mathbb{R}_s(s)$, η χαρακτηριστική εξίσωση $D(s)=0$ έχει τουλάχιστο μία ρίζα εντός του $\overline{\mathbb{C}}^+$. Έστω ότι $G(s)$ είναι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των $D(s)$ και $N(s)$, έστω δηλαδή ότι

$$\begin{gathered}D(s)=\overline{D}(s)G(s)\\ D(s)=\overline{D}(s)G(s)\end{gathered}\tag{3.20}$$

όπου $\overline{D}(s)$, $\overline{N}(s)$ πολυώνυμα πρώτα μεταξύ τους και επειδή το $\Sigma(P)$ είναι εξ υποθέσεως σταθεροποιήσιμο, $G(s_0)\neq 0$ για κάθε $s_0\in\overline{\mathbb{C}}^+$. Άρα, αν η εξίσωση $D(s)=0$ έχει τουλάχιστο μία ρίζα εντός του $\overline{\mathbb{C}}^+$, η ρίζα αυτή θα είναι και ρίζα της $\overline{D}(s)=0$. Είναι:

$$P(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{\overline{N}(s)}{\overline{D}(s)}$$

και άρα η $P(s)$ θα έχει τουλάχιστον έναν πόλο εντός του $\overline{\mathbb{C}}^{+}$ ή $P(s) \notin \mathbb{R}_s(s)$ το οποίο είναι άτοπο, διότι συμβαίνει στην υπόθεση. Άρα, $\Sigma(P)$ σταθεροποιήσιμο και $P(s) \in \mathbb{R}_s(s)$ συνεπάγεται ότι όλες οι ρίζες της εξίσωσης $D(s)=0$ βρίσκονται εντός του $\mathbb{C}^{-}$. ▲

Παρατήρηση 3.4 : Το κλειστό σύστημα $\Sigma(P,C)$ είναι σταθεροποιήσιμο, αν και μόνο αν τα συστήματα είναι όλα σταθεροποιήσιμα, αν δηλαδή για κάθε $s_0 \in \mathbb{C}^{+}$:

$$X(s_0)D(s_0)+Y(s_0)N(s_0) \neq 0 \tag{3.21}$$

$$X(s_0)N(s_0) \neq 0$$

$$N(s_0)Y(s_0) \neq 0$$

$$Y(s_0)N(s_0) \neq 0$$

$$Y(s_0)D(s_0) \neq 0$$

Επειδή οι παραπάνω σχέσεις ισχύουν αν και μόνο αν για κάθε $s_0 \in \mathbb{C}^{+}$

$$D(s_0) \neq 0, N(s_0) \neq 0$$

$$X(s_0) \neq 0, Y(s_0) \neq 0$$

αν δηλαδή τα συστήματα $\Sigma(P)$ και $\Sigma(C)$ είναι σταθεροποιήσιμα, η υπόθεση μας παραπάνω, ότι το $\Sigma(P)$ είναι σταθεροποιήσιμο και ότι ο σταθεροποιητικός ελεγκτής $\Sigma(C)$ είναι σταθεροποιήσιμος, συνεπάγεται την σταθεροποιησιμότητα του κλειστού συστήματος $\Sigma(P,C)$.

Σύνθεση του σταθεροποιητικού ελεγκτή (stabilizing controller)

Εξετάζουμε τώρα το πρόβλημα της σύνθεσης του σταθεροποιητικού ελεγκτή $\Sigma(C)$.

Υποθέτουμε ότι το σύστημα $\Sigma(P)$ είναι σταθεροποιήσιμο έτσι ώστε, αν $G(s)$ είναι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των $D(s)$ και $N(s)$, να ισχύει $G(s_0) \neq 0$ για κάθε $s_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ και η συνάρτηση μεταφοράς $P(s)$ του $\Sigma(P)$ μετά την απλοποίηση του $G(s)$ να είναι η:

$$P(s)=\frac{\overline{N}(s)}{\overline{D}(s)}\in\mathbb{R}_{pr}(s)$$

όπου $\overline{N}(s),\overline{D}(s)$ πολυώνυμα πρώτα μεταξύ τους. Έστω

$$C(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}\in\mathbb{R}_{pr}(s)$$

η συνάρτηση μεταφοράς του σταθεροποιητικού ελεγκτή $\Sigma(C)$, όπου $Y(s),X(s)$ πολυώνυμα. Αν $U(s),Y_c(s),U_1(s),U_c(s),U_2(s),Y(s)$ είναι αντίστοιχα οι μετασχηματισμοί Laplace των $u(t)$, $y_c(t)$, $u_1(t),u_c(t),u_2(t),y(t)$ θα έχουμε

$$Y(s)=P(s)U(s) \tag{3.22}$$

$$Y_c(s)=C(s)U_c(s) \tag{3.23}$$

$$U(s)=U_1(s)+Y_c(s) \tag{3.24}$$

$$U_c(s)=U_2(s)-Y(s) \tag{3.25}$$

και άρα, υπό μορφή πινάκων, οι παραπάνω σχέσεις γράφονται:

$$\begin{bmatrix} Y(s) \\ Y_c(C) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} P(s) & 0 \\ 0 & C(s) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} U(s) \\ U_c(s) \end{bmatrix} \tag{3.26}$$

$$\begin{bmatrix} U(s) \\ U_c(s) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Y(s) \\ Y_c(s) \end{bmatrix} \tag{3.27}$$

Από τις προηγούμενες (3.26) και (3.27) παίρνουμε ότι:

$$\begin{bmatrix} Y(s) \\ Y_c(s) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} P(s) & 0 \\ 0 & C(s) \end{bmatrix}\left\{\begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Y(s) \\ Y_c(s) \end{bmatrix}\right\}$$

ή μετά από μερικές πράξεις

$$\begin{bmatrix} 1 & -P(s) \\ C(s) & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Y(s) \\ Y_c(s) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} P(s) & 0 \\ 0 & C(s) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix} \tag{3.28}$$

και αν η ορίζουσα

$$\det\begin{bmatrix} 1 & -P(s) \\ C(s) & 1 \end{bmatrix}=1+C(s)P(s)\neq 0 \tag{3.29}$$

(δεν είναι εκ ταυτότητος ίση με μηδέν), τότε ο αντίστροφος:

$$\begin{bmatrix} 1 & -P(s) \\ C(s) & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

του πίνακα υπάρχει.

Ορισμός 3.9 [13]: Αν $1+C(s)P(s)\neq 0$, τότε λέμε ότι το κλειστό σύστημα $\Sigma(P,C)$ στο λειτουργικό διάγραμμα του σχήματος 2 είναι καλώς ορισμένο. Αλλιώς λέμε ότι το κλειστό σύστημα $\Sigma(P,C)$ δεν είναι καλώς ορισμένο. □

Παράδειγμα 3.1 : Αν $P(s)=1$ και $C(s)=-1$, τότε το κλειστό σύστημα $\Sigma(P,C)$ στο λειτουργικό διάγραμμα του σχήματος 2 δεν είναι καλώς ορισμένο. □

Πρόταση 3.4 [13]: Το κλειστό σύστημα $\Sigma(P,C)$ στο λειτουργικό διάγραμμα του σχήματος 2 είναι καλώς ορισμένο, αν οι συναρτήσεις μεταφοράς $P(s)$ και $C(s)$ είναι κανονικές ρητές συναρτήσεις και μία από αυτές είναι αυστηρά κανονική ρητή συνάρτηση.

Απόδειξη. Αν $P(s)$ και $C(s)$ είναι κανονικές ρητές συναρτήσεις, τότε $|P(\infty)|<\infty$ και $|C(\infty)|<\infty$. Αν τουλάχιστον μια από τις $P(s)$ και $C(s)$ είναι αυστηρά κανονική ρητή συνάρτηση, τότε $P(\infty)=0$ ή $C(\infty)=0$, οπότε $C(\infty)P(\infty)=0$ και $1+C(\infty)P(\infty)=1$. Άρα, $1+C(s)P(s)\neq 0$. ▲

Αν το κλειστό σύστημα $\Sigma(P,C)$ στο λειτουργικό διάγραμμα του σχήματος 2 είναι καλώς ορισμένο, θα έχουμε

$$\begin{bmatrix} Y(s) \\ Y_c(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -P(s) \\ C(s) & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} P(s) & 0 \\ 0 & C(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix}$$

ή

$$\begin{bmatrix} Y(s) \\ Y_c(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{1+C(s)P(s)} & \dfrac{P(s)}{1+C(s)P(s)} \\ -\dfrac{C(s)}{1+C(s)P(s)} & \dfrac{1}{1+C(s)P(s)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P(s) & 0 \\ 0 & C(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix}$$

ή

$$\begin{bmatrix} Y(s) \\ Y_c(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{P(s)}{1+C(s)P(s)} & \dfrac{P(s)C(s)}{1+C(s)P(s)} \\ -\dfrac{C(s)P(s)}{1+C(s)P(s)} & \dfrac{C(s)}{1+C(s)P(s)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix} \tag{3.30}$$

οπότε

$$Y(s) = \frac{P(s)}{1+C(s)P(s)} U_1(s) + \frac{P(s)C(s)}{1+C(s)P(s)} U_2(s)$$

$$Y_c(s) = -\frac{C(s)P(s)}{1+C(s)P(s)} U_1(s) + \frac{C(s)}{1+C(s)P(s)} U_2(s)$$

Ορισμός 3.10 [13]: Ο πίνακας

$$H_{cl}(s) := \begin{bmatrix} \dfrac{P(s)}{1+C(s)P(s)} & \dfrac{P(s)C(s)}{1+C(s)P(s)} \\ -\dfrac{C(s)P(s)}{1+C(s)P(s)} & \dfrac{C(s)}{1+C(s)P(s)} \end{bmatrix} \tag{3.31}$$

ονομάζεται πίνακας συναρτήσεων μεταφοράς του κλειστού συστήματος $\Sigma(P,C)$

Τα στοιχεία του πίνακα συναρτήσεων μεταφοράς $H_{cl}(s)$:

$$H_{11}(s) := \frac{P(s)}{1+C(s)P(s)} = \frac{\overline{N}(s)X(s)}{X(s)\overline{D}(s)+Y(s)\overline{N}(s)}, U_1(s) \mapsto Y(s) \tag{3.32}$$

$$H_{12}(s) := \frac{P(s)C(s)}{1+C(s)P(s)} = \frac{\overline{N}(s)X(s)}{X(s)\overline{D}(s)+Y(s)\overline{N}(s)}, U_2(s) \mapsto Y(s) \tag{3.33}$$

$$H_{22}(s) := \frac{C(s)}{1+C(s)P(s)} = \frac{Y(s)\overline{D}(s)}{\overline{X}(s)D(s)+Y(s)\overline{N}(s)}, U_2(s) \mapsto Y_c(s) \tag{3.34}$$

είναι οι συναρτήσεις μεταφοράς μεταξύ των εισόδων $U_1(s), U_2(s)$ και των εξόδων $Y(s), Y_c(s)$ του κλειστού συστήματος $\Sigma(P,C)$. □

Ορισμός 3.11 [13]: Το πολυώνυμο

$$X(s)\overline{D}(s)+Y(s)\overline{N}(s) \tag{3.35}$$

ονομάζεται χαρακτηριστικό πολυώνυμο του κλειστού συστήματος $\Sigma(P,C)$. □

Θεώρημα 3.2 [13]: Το κλειστό σύστημα $\Sigma(P,C)$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές, αν και μόνο αν οι παραπάνω συναρτήσεις μεταφοράς των υποσυστημάτων είναι κανονικές και ευσταθείς ρητές συναρτήσεις, δηλαδή αν και μόνο αν

$$H_{ij}(s)\in\mathbb{R}_s(s),\ i=1,2\ \kappa\alpha\iota\ j=1,2 \tag{3.36}$$

Η παραπάνω ανάλυση αποτελεί απόδειξη του παρακάτω θεωρήματος. ▲

Θεώρημα 3.3 [13]: Έστω σταθεροποιητικό σύστημα $\Sigma(P)$ με συνάρτηση μεταφοράς $P(s)=\dfrac{\overline{N}(s)}{\overline{D}(s)}\in\mathbb{R}_{pr}(s)$, όπου $\overline{N}(s),\ \overline{D}(s)\in\mathbb{R}[s]$ πρώτα μεταξύ τους. Το σύστημα $\Sigma(C)$ με συνάρτηση μεταφοράς $C(s)=\dfrac{Y(s)}{X(s)}\in\mathbb{R}_{pr}(s)$ (όπου $Y(s),X(s)\in\mathbb{R}[s]$) είναι σταθεροποιητικός ελεγκτής, αν και μόνο αν οι παραπάνω συναρτήσεις μεταφοράς των υποσυστημάτων είναι κανονικές και ευσταθείς ρητές συναρτήσεις ή ισοδύναμα αν και μόνο αν το χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$X(s)\overline{D}(s)+Y(s)\overline{N}(s) \tag{3.37}$$

του κλειστού συστήματος $\Sigma(P,C)$ έχει όλες του τις ρίζες εντός του $\mathbb{C}^-$. ▲

3.3 Πολυωνυμικές Διοφαντικές ή Ευκλείδειες εξισώσεις

Το περιεχόμενο αυτής της παραγράφου είναι άμεση συνέπεια μιας βασικής ιδιότητας του δακτυλίου $\mathbb{R}[s]$ των πολυωνύμων μιας μιγαδικής μεταβλητής s με συντελεστές στο σώμα των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$. Η ιδιότητα αυτή είναι ότι ο δακτύλιος $\mathbb{R}[s]$ είναι ένας Ευκλείδειος δακτύλιος, δηλαδή για κάθε $\overline{N}(s)\in\mathbb{R}[s]$ και $0\neq\overline{D}(s)\in\mathbb{R}[s]$ υπάρχουν $Q_1(s),R_1(s)\in\mathbb{R}[s]$ τέτοια ώστε

$$\overline{D}(s)=Q_1(s)\overline{N}(s)+R_1(s) \tag{3.38}$$

είτε $R_1(s)=0$ ή $\deg R_1(s)<\deg \overline{N}(s)$. Η σχέση αυτή ονομάζεται Ευκλείδεια διαίρεση και δίνει λαβή στον Ευκλείδειο αλγόριθμο.

Συνέπεια του «Ευκλείδειου αλγορίθμου» είναι κατά πρώτο λόγο ο υπολογισμός του «Μέγιστου Κοινού Διαιρέτη» δύο «μη πρώτων μεταξύ τους» ακεραίων αριθμών ή εδώ συγκεκριμένα του Μέγιστου Κοινού Διαιρέτη δύο πολυωνύμων. Κατά δεύτερο λόγο ο «Ευκλείδειος αλγόριθμος» δίνει λαβή στη διατύπωση του παρακάτω Θεωρήματος για την ύπαρξη λύσης της Διοφαντικής εξίσωσης

$$X(s)\overline{D}(s)+Y(s)\overline{N}(s)=D_c(s) \tag{3.39}$$

η οποία αν και έχει επικρατήσει να ονομάζεται «**Διοφαντική**» από τα παραπάνω γίνεται φανερό ότι θα έπρεπε να ονομάζεται «**Ευκλείδεια εξίσωση**».

Στη σύγχρονη αλγεβρική γλώσσα ο Ευκλείδειος αλγόριθμος μεταφράζεται και συνοψίζεται στην

Πρόταση 3.5 [13]: Έστω $\overline{N}(s)\in\mathbb{R}[s]$ και $0\neq\overline{D}(s)\in\mathbb{R}[s]$ και έστω $G(s)\in\mathbb{R}[s]$ ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των $\overline{N}(s)$ και $\overline{D}(s)$. Τότε υπάρχουν $L_1(s),L_2(s)\in\mathbb{R}[s]$ και τέτοια ώστε

$$G(s)=L_1(s)\overline{D}(s)+L_2(s)\overline{N}(s) \tag{3.40}$$

Απόδειξη. Αν $R_1(s)=0$ τότε $\overline{D}(s)=Q_1(s)\overline{N}(s)$ και άρα το $\overline{N}(s)$ είναι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των $\overline{N}(s)$ και $\overline{D}(s)$. Αν $R_1(s)\neq 0$, τότε εφαρμόζουμε την Ευκλείδεια διαίρεση στα πολυώνυμα

$$\overline{N}(s)=Q_2(s)R_1(s)+R_2(s) \tag{3.41}$$

και είτε $R_2(s)=0$ ή $\deg R_2(s)<\deg R_1(s)$. Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο και εφόσον

$$\deg\overline{N}(s)>\deg\overline{R_1}(s)>\deg\overline{R_2}(s)>...>\deg\overline{R_k}(s)$$

είναι μία φθίνουσα ακολουθία μη αρνητικών ακεραίων, μετά από ένα πεπερασμένο αριθμό βημάτων θα φτάσουμε σε ένα υπόλοιπο $R_{k+1}(s)$ τέτοιο ώστε

$$\deg R_{k+1}(s)=0 \;\; k=0,1,2,...$$

και θα μπορούμε να γράψουμε:

$$\overline{D}(s) = Q_1(s)\overline{N}(s) + R_1(s) \tag{3.42}$$

$$\overline{N}(s) = Q_2(s)R_1(s) + R_2(s) \tag{3.43}$$

$$R_1(s) = Q_3(s)R_2(s) + R_3(s) \tag{3.44}$$

.

.

$$R_{k-2}(s) = Q_k(s)R_{k-1}(s) + R_k(s) \tag{3.45}$$

$$R_{k-1}(s) = Q_{k+1}(s)R_k(s) + 0 \tag{3.46}$$

Ισχυριζόμαστε ότι

$$R_k(s) = \text{ΜΚΔ}\left\{\overline{D}(s), \overline{N}(s)\right\} \tag{3.47}$$

Ο ισχυρισμός αληθεύει, διότι από την (3.46) προκύπτει ότι το $R_k(s)$ διαιρεί το $R_{k-1}(s)$. Από την (3.45) προκύπτει επίσης ότι

$$\begin{aligned} R_{k-2}(s) &= Q_k(s)R_{k-1}(s) + R_k(s) \\ &= Q_k(s)Q_{k+1}(s)R_k(s) + R_k(s) \\ &= \left[Q_k(s)Q_{k+1}(s) + 1\right]R_k(s) \end{aligned} \tag{3.48}$$

και άρα ότι το $R_k(s)$ διαιρεί το $R_{k-2}(s)$. Συνεχίζοντας επαγωγικά με τον ίδιο τρόπο βλέπουμε ότι το $R_k(s)$ διαιρεί το $R_{k-3}(s)$ κ.τ.λ. και τελικά ότι το $R_k(s)$ διαιρεί τα $\overline{N}(s)$ και $\overline{D}(s)$ και άρα ότι το $R_k(s)$ είναι κοινός διαιρέτης των $\overline{N}(s)$ και $\overline{D}(s)$. Ας υποθέσουμε τώρα ότι το $\Delta(s)$ είναι ένας οποιοσδήποτε κοινός διαιρέτης των $\overline{N}(s)$ και $\overline{D}(s)$. Θα δείξουμε ότι το $\Delta(s)$ διαιρεί το $R_k(s)$ και ότι η (3.47) ισχύει. Από τη (3.42) προκύπτει ότι $\Delta(s)$ διαιρεί το $R_1(s)$. Από την (3.43) προκύπτει ότι το $\Delta(s)$ διαιρεί το $R_2(s)$. Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο βλέπουμε ότι το $\Delta(s)$ διαιρεί το $R_k(s) \geq \deg\Delta(s)$. Άρα από τον ορισμό του μέγιστου κοινού διαιρέτη δύο πολυωνύμων, το $R_k(s)$ είναι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των $\overline{N}(s)$ και $\overline{D}(s)$. Για την απόδειξη της (3.40) θεωρούμε το παράδειγμα «ανθυφαίρεσης» (3.42) – (3.46) με $k = 3$:

$$\overline{D}(s) = Q_1(s)\overline{N}(s) + R_1(s) \Rightarrow R_1(s) = \overline{D}(s) - Q_1(s)\overline{N}(s) \tag{3.49}$$

$$\overline{N}(s) = Q_2(s)R_1(s) + R_2(s) \Rightarrow R_2(s) = \overline{N}(s) - Q_2(s)R_1(s) \tag{3.50}$$

$$R_1(s) = Q_3(s)R_2(s) + R_3(s) \Rightarrow R_3(s) = R_1(s) - Q_3(s)R_2(s) \tag{3.51}$$

$$R_2(s) = Q_4(s)R_3(s) + 0 \tag{3.52}$$

Έχουμε, επομένως:

$$R_3(s) = R_1(s) - Q_3(s)R_2 \overset{(3.50),(3.51)}{=}$$

$$\left[\overline{D}(s) - Q_1(s)\overline{N}(s)\right] - Q_3(s)\left[\overline{N}(s) - Q_2(s)R_1(s)\right]$$

$$\overset{(3.49)}{=} \left[\overline{D}(s) - Q_1(s)\overline{N}(s)\right] - Q_3(s)\left\{\overline{N}(s) - Q_2(s)\left[\overline{D}(s) - Q_1(s)\overline{N}(s)\right]\right\}$$

$$= \left[1 + Q_3(s)Q_2(s)\right]\overline{D}(s) + \left[-Q_1(s) - Q_3(s) - Q_3(s)Q_2(s)Q_1(s)\right]\overline{N}(s)$$

$$= L_1(s)\overline{D}(s) + L_2(s)\overline{N}(s)$$

όπου $L_1(s) := 1 + Q_3(s)Q_2(s)$ και $L_2(s) := -Q_1(s) - Q_3(s) - Q_3(s)Q_2(s)Q_1(s)$

▲

Θεωρούμε τώρα την πολυωνυμική Διοφαντική εξίσωση:

$$X(s)\overline{D}(s) + Y(s)\overline{N}(s) = D_c(s) \tag{3.53}$$

όπου $\overline{D}(s), \overline{N}(s)$ και $D_c(s)$ δεδομένα πολυώνυμα και $X(s)$ και $Y(s)$ άγνωστα πολυώνυμα. Για την ύπαρξη λύσης $X(s), Y(s)$ της (3.53) έχουμε το

Θεώρημα 3.4 [13]: Η (3.53) έχει λύση $X(s), Y(s) \in \mathbb{R}[s]$ αν και μόνο αν ο ΜΚΔ $G(s)$ των $\overline{D}(s)$ και $\overline{N}(s)$ διαιρεί το $D_c(s)$.

Απόδειξη.$(\Rightarrow)$ **(**Ο ΜΚΔ των $\overline{D}(s)$ και $\overline{N}(s)$ διαιρεί το $D_c(s) \Rightarrow$ η (3.53) έχει λύση $X(s), Y(s) \in \mathbb{R}[s]$**).** Έστω $G(s) = \text{ΜΚΔ}\left\{\overline{D}(s), \overline{N}(s)\right\}$. Τότε από τον Ευκλείδειο αλγόριθμο προκύπτει ότι υπάρχουν πολυώνυμα $L_1(s), L_2(s)$:

$$L_1(s)\overline{D}(s) + L_2(s)\overline{N}(s) = G(s) \tag{3.54}$$

Από την υπόθεση

$$\overline{D}(s) = \widetilde{D}(s)G(s),\ \overline{N}(s) = \widetilde{N}(s)G(s) \tag{3.55}$$

όπου $\widetilde{D}(s), \widetilde{N}(s)$ πολυώνυμα πρώτα μεταξύ τους και

$$D_c(s)=\widetilde{L}(s)G(s) \tag{3.56}$$

Πολλαπλασιάζοντας την (3.54) επί $\widetilde{L}(s)$, έχουμε

$$\widetilde{L}(s)L_1(s)\overline{D}(s)+\widetilde{L}(s)L_2(s)\overline{N}(s)=\widetilde{L}(s)G(s)=D_c(s)$$

και άρα $X(s):=\widetilde{L}(s)L_1(s)$, $Y(s):=\widetilde{L}(s)L_2(s)$ είναι μια λύση της (3.53)

$(\Leftarrow)$(Η (3.53) έχει λύση $X(s),Y(s)\in\mathbb{R}[s]\Rightarrow G(s)=\text{ΜΚΔ}\left\{\overline{D}(s),\overline{N}(s)\right\}$ διαιρεί το $D_c(s)$). Από τη υπόθεση, υπάρχουν $X(s)$, $Y(s)$ που ικανοποιούν την (3.53). Έστω $G(s)=\text{ΜΚΔ}\left\{\overline{D}(s),\overline{N}(s)\right\}$ έτσι ώστε για πολυώνυμα $\widetilde{D}(s),\widetilde{N}(s)$ πρώτα μεταξύ τους οι (3.55) να ισχύουν. Από τις (3.55) η (3.53) γράφεται

$$X(s)\widetilde{D}(s)G(s)+Y(s)\widetilde{N}(s)G(s)=\left[X(s)\widetilde{D}(s)+Y(s)\widetilde{N}(s)\right]G(s)=D_c(s)$$

και άρα ο ΜΚΔ $G(s)$ των $\overline{D}(s)$ και $\overline{N}(s)$ διαιρεί το $D_c(s)$. ▲

Πόρισμα 3.1 [13]: Αν τα $\overline{D}(s),\overline{N}(s)\in\mathbb{R}[s]$ είναι πρώτα μεταξύ τους, τότε για κάθε $D_c(s)\in\mathbb{R}[s]$ η (3.53) έχει πάντα λύση $X(s)$, $Y(s)\in\mathbb{R}[s]$.

Απόδειξη. Αν τα $\overline{D}(s)$, $\overline{N}(s)$ είναι πρώτα μεταξύ τους, τότε $\text{ΜΚΔ}\left\{\overline{D}(s),\overline{N}(s)\right\}=1$ που διαιρεί κάθε $D_c(s)\in\mathbb{R}[s]$. ▲

Πόρισμα 3.2 [13]: Αν τα $\overline{D}(s),\overline{N}(s)\in\mathbb{R}[s]$ είναι πρώτα μεταξύ τους και $X(s)$, $Y(s)\in\mathbb{R}[s]$ είναι μία λύση της (3.53), τότε η γενική λύση $\overline{X}(s),\overline{Y}(s)\in\mathbb{R}[s]$ της (3.53) είναι η:

$$\begin{aligned}\overline{X}(s)&=X(s)+T(s)\overline{N}(s)\\ \overline{Y}(s)&=Y(s)-T(s)\overline{D}(s)\end{aligned} \tag{3.57}$$

όπου $T(s)\in\mathbb{R}[s]$ και είναι αυθαίρετο πολυώνυμο.

Απόδειξη. Έστω $\overline{X}(s)\neq X(s),\overline{Y}(s)\neq Y(s)$ μία άλλη λύση της (3.53). έστω δηλαδή ότι

$$\overline{X}(s)\overline{D}(s)+\overline{Y}(s)\overline{N}(s)=D_c(s) \tag{3.58}$$

Αφαιρώντας την (3.58) από την (3.53), έχουμε ότι

$$X(s)\overline{D}(s)+Y(s)\overline{N}(s)-\overline{X}(s)\overline{D}(s)-\overline{Y}(s)\overline{N}(s)=0$$

ή

$$\left[X(s)-\overline{X}(s)\right]\overline{D}(s)+\left[Y(s)-\overline{Y}(s)\right]\overline{N}(s)=0$$

ή

$$\left[X(s)-\overline{X}(s)\right]\overline{D}(s)=-\left[Y(s)-\overline{Y}(s)\right]\overline{N}(s) \tag{3.59}$$

Από την (3.59) και εφόσον τα $\overline{D}(s)$ και $\overline{N}(s)$ είναι πρώτα μεταξύ τους, θα πρέπει το $\overline{D}(s)$ να διαιρεί το $Y(s)-\overline{Y}(s)$ και το $\overline{N}(s)$ να διαιρεί το $X(s)-\overline{X}(s)$ ή ισοδύναμα θα πρέπει για κάποιο $T(s)\in\mathbb{R}[s]$ να είναι

$$Y(s)-\overline{Y}(s)=T(s)\overline{D}(s)$$

ή

$$\overline{Y}(s)=Y(s)-T(s)\overline{D}(s) \tag{3.60}$$

Αντικαθιστώντας το $\overline{Y}(s)$ από την (3.60) στην (3.59), έχουμε

$$\left[X(s)-\overline{X}(s)\right]\overline{D}(s)=-\left[Y(s)-Y(s)+T(s)\overline{D}(s)\right]\overline{N}(s)$$

$$=-T(s)\overline{D}(s)\overline{N}(s)$$

ή

$$X(s)-\overline{X}(s)=-T(s)\overline{N}(s)$$

ή

$$X(s)=\overline{X}(s)+T(s)\overline{N}(s) \tag{3.61}$$

Αντίστροφα το ζεύγος $\overline{X}(s),\overline{Y}(s)$ ικανοποιεί την (3.53), διότι

$$\overline{X}(s)\overline{D}(s)+\overline{Y}(s)\overline{N}(s) \tag{3.62}$$

$$=\left[X(s)+T(s)\overline{N}(s)\right]\overline{D}(s)+\left[Y(s)-T(s)\overline{D}(s)\right]\overline{N}(s)$$

$$=X(s)\overline{D}(s)+T(s)\overline{N}(s)\overline{D}(s)+Y(s)\overline{N}(s)-T(s)\overline{D}(s)\overline{N}(s)$$

$$=X(s)\overline{D}(s)+Y(s)\overline{N}(s)=D_c(s)$$

▲

3.4 Λύση πολυωνυμικών Διοφαντικών – Ευκλείδειων εξισώσεων Υπολογισμός σταθεροποιητικού αντισταθμιστή

Εξετάζουμε τώρα το πρόβλημα εύρεσης λύσης $X(s), Y(s) \in \mathbb{R}[s]$ της πολυωνυμικής Διοφαντικής – Ευκλείδειας εξίσωσης (3.39), έτσι ώστε η συνάρτηση μεταφοράς $C(s) = \dfrac{Y(s)}{X(s)}$ του σταθεροποιητικού αντισταθμιστή $\Sigma(C)$ να είναι κανονική ρητή συνάρτηση, δηλαδή να ισχύει $\deg X(s) \geq \deg Y(s)$. Ξεκινάμε με τη διατύπωση απαραίτητων ορισμών και του θεωρήματος 3.5 που αποτελεί το βασικό εργαλείο για τη λύση του προβλήματος. Η λύση του προβλήματος διατυπώνεται μέσω Θεωρήματος 3.6, το οποίο δίνει λαβή στον αλγόριθμο κατασκευής κανονικών σταθεροποιητικών αντισταθμιστών.

Έστω

$$\overline{D}(s) = d_0 + d_1 s + \ldots + d_{n-1} s^{n-1} + d_n s^n \in \mathbb{R}[s] \tag{3.63}$$

$$\overline{N}(s) = n_0 + n_1 s + \ldots + n_{n-1} s^{n-1} \in \mathbb{R}[s]$$

$$D_c(s) = \overline{d}_0 + \overline{d}_1 s + \ldots + \overline{d}_{n+k-1} s^{n+k-1} \in \mathbb{R}[s]$$

και ας θεωρήσουμε τη Διοφαντική – Ευκλείδεια εξίσωση

$$X(s)\overline{D}(s) + Y(s)\overline{N}(s) = D_c(s) \tag{3.64}$$

η οποία, κάνοντας χρήση πολυωνυμικών ανυσμάτων, γράφεται και ως

$$\begin{bmatrix} X(s) & Y(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{D}(s) \\ \overline{N}(s) \end{bmatrix} = D_c(s) \tag{3.65}$$

Έστω $k-1$ ο βαθμός του πολυωνυμικού ανύσματος “γραμμής” $\begin{bmatrix} X(s) & Y(s) \end{bmatrix}$, έστω δηλαδή ότι

$$X(s) = x_0 + x_1 s + \ldots + x_{k-1} s^{k-1} \tag{3.66}$$

$$Y(s) = y_0 + y_1 s + \ldots + y_{k-1} s^{k-1} \tag{3.67}$$

έτσι διαδοχικά η (3.65) να γράφεται και ως

$$\underbrace{\left[x_0 + x_1 s + \ldots + x_{k-1}s^{k-1} \quad y_o + y_1 s + \ldots + y_{k-1}s^{k-1}\right]}_{1\times 2}\underbrace{\begin{bmatrix}\overline{D}(s)\\ \overline{N}(s)\end{bmatrix}}_{2\times 1} =$$

$$\left[\underset{1\times 2}{\left[x_0 \quad y_0\right]} + \underset{1\times 2}{\left[x_1 \quad y_1\right]} s + \ldots + \underset{1\times 2}{\left[x_{k-1} \quad y_{k-1}\right]} s^{k-1}\right]\underset{2\times 1}{\begin{bmatrix}\overline{D}(s)\\ \overline{N}(s)\end{bmatrix}} =$$

$$\underset{1\times 2k}{\left[x_0 \quad y_0 \quad x_1 \quad y_1 \ \ldots \ x_{k-1} \quad y_{k-1}\right]}\underset{2k\times 2}{\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ s & 0\\ \vdots & \vdots\\ s^{k-1} & 0\\ 0 & s^{k-1}\end{bmatrix}}\underset{2\times 1}{\begin{bmatrix}\overline{D}(s)\\ \overline{N}(s)\end{bmatrix}} =$$

$$\underset{1\times 2k}{\left[x_0 \quad y_0 \quad x_1 \quad y_1 \ \ldots \ x_{k-1} \quad y_{k-1}\right]}\underset{2k\times 1}{\begin{bmatrix}\overline{D}(s)\\ \overline{N}(s)\\ s\overline{D}(s)\\ s\overline{N}(s)\\ \vdots\\ s^{k-1}\overline{D}(s)\\ s^{k-1}\overline{N}(s)\end{bmatrix}}$$

$$\underset{1\times 2k}{\left[x_0 \quad y_0 \quad x_1 \quad y_1 \ \ldots \ x_{k-1} \quad y_{k-1}\right]}\times\begin{bmatrix}d_n s^n + d_{n-1}s^{n-1} + \ldots + d_1 s + d_0\\ n_{n-1}s^{n-1} + \ldots + n_1 s + n_0\\ d_n s^{n+1} + d_{n-1}s^n + \ldots + d_1 s^2 + d_0 s\\ n_{n-1}s^n + \ldots + n_1 s^2 + n_0 s\\ \vdots\\ d_n s^{n+k-1} + d_{n-1}s^{n+k-2} + \ldots + d_1 s^k + d_0 s^{k-1}\\ n_{n-1}s^{n+k-2} + \ldots + n_1 s^k + n_0 s^{k-1}\end{bmatrix} =$$

$$
\underset{1\times 2k}{\begin{bmatrix} x_0 & y_0 & x_1 & y_1 & \ldots & x_{k-1} & y_{k-1}\end{bmatrix}} \times \underset{2k\times(n+k)}{\begin{bmatrix} d_0 & d_1 & \cdots & d_{n-1} & d_n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ n_0 & n_1 & \cdots & n_{n-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_0 & d_1 & \cdots & d_{n-1} & d_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & n_0 & n_1 & \cdots & n_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & d_0 & d_1 & \cdots & d_{n-1} & d_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & n_0 & n_1 & \cdots & n_{n-1} & 0 \end{bmatrix}} \underset{(n+k)\times 1}{\begin{bmatrix} 1 \\ s \\ s^2 \\ s^3 \\ \vdots \\ s^{n+k-2} \\ s^{n+k-1} \end{bmatrix}} =
$$

$$
\underset{1\times(n+k)}{\begin{bmatrix} \overline{d}_0 & \overline{d}_1 & \overline{d}_2 & \overline{d}_3 & \cdots & \overline{d}_{k+n-2} & \overline{d}_{K+n-1} \end{bmatrix}} \underset{(n+k)\times 1}{\begin{bmatrix} 1 \\ s \\ s^2 \\ s^3 \\ \vdots \\ s^{n+k-2} \\ s^{n+k-1} \end{bmatrix}}
$$

Η τελευταία ισότητα δίνει λαβή στο σύστημα γραμμικών εξισώσεων:

$$
\begin{bmatrix} x_0 & y_0 & x_1 & y_1 & \cdots & x_{k-1} & y_{k-1}\end{bmatrix} \times
$$

$$
\underset{2k\times(n+k)}{\begin{bmatrix} d_0 & d_1 & \cdots & d_{n-1} & d_n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ n_0 & n_1 & \cdots & n_{n-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_0 & d_1 & \cdots & d_{n-1} & d_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & n_0 & n_1 & \cdots & n_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & d_0 & d_1 & \cdots & d_{n-1} & d_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & n_0 & n_1 & \cdots & n_{n-1} & 0 \end{bmatrix}}
$$

$$
= \underset{1\times(n+k)}{\begin{bmatrix} \overline{d}_0 & \overline{d}_1 & \overline{d}_2 & \overline{d}_3 & \cdots & \overline{d}_{k+n-2} & \overline{d}_{k+n-1} \end{bmatrix}} \tag{3.68}
$$

Ο $2k\times(n+k)$ πίνακας πραγματικών αριθμών

$$M_k := \underbrace{\begin{bmatrix} d_0 & d_1 & \cdots & d_{n-1} & d_n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ n_0 & n_1 & \cdots & n_{n-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_0 & d_1 & \cdots & d_{n-1} & d_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & n_0 & n_1 & \cdots & n_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & d_0 & d_1 & \cdots & d_{n-1} & d_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & n_0 & n_1 & \cdots & n_{n-1} & 0 \end{bmatrix}}_{2k\times(n+k)} \in \mathbb{R}^{2k\times(n+k)}$$

ονομάζεται **επιλύουσα του Wolovich (Wolovich resultant)** των πολυωνύμων $\overline{D}(s)$ και $\overline{N}(s)$ βαθμού k και έχουμε το

Θεώρημα 3.5 [13]: Τα πολυώνυμα $\overline{D}(s)$ και $\overline{N}(s)$ είναι πρώτα μεταξύ τους, αν και μόνο αν $k > n$ η επιλύουσα του Wolovich $M_k \in \mathbb{R}^{2k\times(n+k)}$ βαθμού k των πολυωνύμων $\overline{D}(s)$ και $\overline{N}(s)$ έχει πλήρη τάξη στηλών ίση με $n+k$ ή $\overline{D}(s)$, $\overline{N}(s)$ είναι πρώτα μεταξύ τους $\Leftrightarrow$ για $k \geq n$,

$$rankM_k = n + k \tag{3.69}$$

Απόδειξη. ($\overline{D}(s)$ και $\overline{N}(s)$ είναι πρώτα μεταξύ τους $\Rightarrow$ για $k \geq n,\ rankM_k = n+k$)

Σημειώστε κατ' αρχήν ότι $k \geq n$ συνεπάγεται ότι ο πίνακας $M_k \in \mathbb{R}^{2k\times(n+k)}$ έχει αριθμό γραμμών $2k$ που είναι μεγαλύτερος ή ίσος από τον αριθμό $n+k$ των στηλών του, δηλαδή για $k \geq n$ είναι $2k \geq n+k$ και άρα $rankM_k \leq n+k$. Ας υποθέσουμε ότι $\overline{D}(s)$ και $\overline{N}(s)$ δεν είναι πρώτα μεταξύ τους συνεπάγεται την ύπαρξη ενός μη τετριμμένου κοινού διαιρέτη $f(s) \in \mathbb{R}[s]$ των $\overline{D}(s)$, $\overline{N}(s)$ έτσι ώστε για $\overline{D}_1(s), \overline{N}_1(s) \in \mathbb{R}[s]$ να είναι $\overline{D}(s) = \overline{D}_1(s) f(s), \overline{N}(s) = \overline{N}_1(s) f(s)$. Έστω $s_0 \in \mathbb{C}$ μηδενικό του $f(s)$, έστω δηλαδή ότι $f(s_0) = 0$. Τότε, θα είναι $\begin{bmatrix} \overline{D}(s_0) \\ \overline{N}(s_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, η οποία συνεπάγεται την

$$\begin{bmatrix} I_2 \\ s_0 I_2 \\ \vdots \\ s_0^{k-1} I_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{D}(s_0) \\ \overline{N}(s_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{D}(s_0) \\ \overline{N}(s_0) \\ s_0 \overline{D}(s_0) \\ s_0 \overline{N}(s_0) \\ \vdots \\ s_0^{k-1} \overline{D}(s_0) \\ s_0^{k-1} \overline{N}(s_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.70}$$

η οποία γράφεται

$$\underbrace{\begin{bmatrix} d_0 & d_1 & \cdots & d_{n-1} & d_n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ n_0 & n_1 & \cdots & n_{n-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_0 & d_1 & \cdots & d_{n-1} & d_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & n_0 & n_1 & \cdots & n_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & d_0 & d_1 & \cdots & d_{n-1} & d_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & n_0 & n_1 & \cdots & n_{n-1} & 0 \end{bmatrix}}_{2k\times(n+k)} \begin{bmatrix} 1 \\ s_0 \\ s_0^2 \\ s_0^3 \\ \vdots \\ s_0^{n+k-2} \\ s_0^{n+k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

και η οποία συνεπάγεται ότι οι $n+k$ στήλες της επιλύουσας του Wolovich M_k βαθμού k των πολυωνύμων $\overline{D}(s)$ και $\overline{N}(s)$ είναι γραμμικά εξαρτημένες, δηλαδή $rankM_k < n+k$, που αντιβαίνει την υπόθεση ότι $rankM_k = n+k$.

$(\Leftarrow)$ (για $k \geq n,\ rankM_k = n+k \Rightarrow \overline{D}(s), \overline{N}(s)$ είναι πρώτα μεταξύ τους).

Για $k \geq n, rankM_k = n+k$ συνεπάγεται ότι $rankM_k^T = n+k$ ή ισοδύναμα ότι ο τετραγωνικός πίνακας $M_k^T M_k \in \mathbb{R}^{(n+k)\times(n+k)}$ έχει $rankM_k^T = n+k$ και άρα είναι ομαλός έτσι ώστε ο πίνακας $\left(M_k^T M_k\right)^{-1}$ να υπάρχει. Έστω

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_0 & \hat{y}_0 & \hat{x}_1 & \hat{y}_1 & \cdots & \hat{x}_{k-1} & \hat{y}_{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \left(M_k^T M_k\right)^{-1} M_k^T \in \mathbb{R}^{1\times 2k} \tag{3.71}$$

και

$$X_1(s) := \hat{x}_0 + \hat{x}_1 s + \cdots + \hat{x}_{k-1} s^{n-1} \tag{3.72}$$

$$Y_1(s) := \hat{y}_0 + \hat{y}_1 s + \cdots + \hat{y}_{k-1} s^{n-1} \tag{3.73}$$

Το πολυωνυμικό άνυσμα γραμμής $\left[X_1(s) \;\; Y_1(s)\right] \in \mathbb{R}[s]^{1\times 2}$ γράφεται

$$\left[X_1(s) \;\; Y_1(s)\right] = \left[\hat{x}_0 \;\; \hat{y}_0 \;\; \hat{x}_1 \;\; \hat{y}_1 \;\; \cdots \;\; \hat{x}_{k-1} \;\; \hat{y}_{k-1}\right] \underset{2k\times 2}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ s & 0 \\ 0 & s \\ \vdots & \vdots \\ s^{k-1} & 0 \\ 0 & s^{k-1} \end{bmatrix}}$$

και άρα

$$\left[X_1(s) \;\; Y_1(s)\right] \begin{bmatrix} \overline{D}(s) \\ \overline{N}(s) \end{bmatrix} =$$

$$\underset{1\times 2k}{\left[\hat{x}_0 \;\; \hat{y}_0 \;\; \hat{x}_1 \;\; \hat{y}_1 \;\; \cdots \;\; \hat{x}_{k-1} \;\; \hat{y}_{k-1}\right]} \underset{2k\times 2}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ s & 0 \\ 0 & s \\ \vdots & \vdots \\ s^{k-1} & 0 \\ 0 & s^{k-1} \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} \overline{D}(s) \\ \overline{N}(s) \end{bmatrix} =$$

$$\underset{1\times(n+k)}{[1 \;\; 0 \;\; \cdots \;\; 0]} \left(M_k^T M_k\right)^{-1} M_k^T \begin{bmatrix} \overline{D}(s) \\ \overline{N}(s) \\ s\overline{D}(s) \\ s\overline{N}(s) \\ \vdots \\ s^{k-1}\overline{D}(s) \\ s^{k-1}\overline{N}(s) \end{bmatrix} = \underset{1\times(n+k)}{[1 \;\; 0 \;\; \cdots \;\; 0]} \left(M_k^T M_k\right)^{-1} M_k^T \times$$

$$\begin{bmatrix} d_0 & d_1 & \cdots & d_{n-1} & d_n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ n_0 & n_1 & \cdots & n_{n-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_0 & d_1 & \cdots & d_{n-1} & d_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & n_0 & n_1 & \cdots & n_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & d_0 & d_1 & \cdots & d_{n-1} & d_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & n_0 & n_1 & \cdots & n_{n-1} & 0 \end{bmatrix}_{2k\times(n+k)} \begin{bmatrix} 1 \\ s \\ s^2 \\ s^3 \\ \vdots \\ s^{n+k-2} \\ s^{n+k-1} \end{bmatrix} = 1$$

ή
$$X_1(s)\overline{D}(s)+Y_1(s)\overline{N}(s)=1 \tag{3.74}$$

Σύμφωνα με τον Ευκλείδειο αλγόριθμο, η (3.74) συνεπάγεται ότι τα πολυώνυμα $\overline{D}(s)$ και $\overline{N}(s)$ είναι πρώτα μεταξύ τους. ▲

Το παραπάνω θεώρημα μας επιτρέπει να διατυπώσουμε το βασικό θεώρημα αυτού του κεφαλαίου:

Θεώρημα 3.6 [13]: Έστω

$$P(s)=\frac{\overline{N}(s)}{\overline{D}(s)}=\frac{n_0+n_1s+...+n_{n-1}s^{n-1}}{d_0+d_1s+...+d_{n-1}s^{n-1}+d_ns^n}\in\mathbb{R}_{pr0}(s),\ d_n\neq 0 \tag{3.75}$$

Η αυστηρά κανονική ρητή συνάρτηση μεταφοράς ενός σταθεροποιητικού συστήματος $\Sigma(P)$ με $\overline{N}(s)$, $\overline{D}(s)$ πολυώνυμα πρώτα μεταξύ τους και $n=\deg\overline{D}(s)$.

(α) Για κάθε επιθυμητό χαρακτηριστικό πολυώνυμο $D_c(s)$ του κλειστού συστήματος $\Sigma(P,C)$ βαθμού $\deg D_c(s)=n+k-1$

$$D_c(s)=\overline{d}_0+\overline{d}_1s+...+\overline{d}_{n+k-1}s^{n+k-1} \tag{3.76}$$

με $k\geq n$, κάθε λύση

$$X(s)=x_0+x_1s+...+x_{k-1}s^{k-1} \tag{3.77}$$

$$Y(s)=y_0+y_1s+...+y_{k-1}s^{k-1} \tag{3.78}$$

της πολυωνυμικής Διοφαντικής – Ευκλείδειας εξίσωσης

$$X(s)\overline{D}(s)+Y(s)\overline{N}(s)=D_c(s) \tag{3.79}$$

η οποία είναι τέτοια ώστε η συνάρτηση μεταφοράς του σταθεροποιητικού αντισταθμιστή $C(s)=\dfrac{Y(s)}{X(s)}$ είναι κανονική ρητή συνάρτηση, δίνεται από τη λύση

$$\overline{\omega}^{\mathrm{T}} := \left[\begin{bmatrix} x_0 & y_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{k-1} & y_{k-1} \end{bmatrix}\right] \in \mathbb{R}^{1\times 2k} \tag{3.80}$$

της γραμμικής εξίσωσης

$$\overline{\omega}^{\mathrm{T}} M_k = \overline{d}^T \tag{3.81}$$

όπου

$$\overline{d}^T := \begin{bmatrix} \overline{d}_0 & \overline{d}_1 & \dots & \overline{d}_{k+n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times(k+n)} \tag{3.82}$$

(β) Αν για επιθυμητό πολυώνυμο $D_c(s)$ βαθμού $\deg D_c(s) = n+k-1$ όπως στην (3.76) υπάρχουν πολυώνυμα $X(s), Y(s)$ όπως στις (3.77), (3.78) τέτοια ώστε η συνάρτηση μεταφοράς $C(s)=\dfrac{Y(s)}{X(s)}$ είναι κανονική ρητή συνάρτηση και ικανοποιούν την (3.79) , τότε $k \geq n$.

Απόδειξη: (α) (δηλαδή με $\deg D_c(s) = n+k-1$ και $k \geq n, \exists X(s), Y(s) \in \mathbb{R}[s]$ που ικανοποιούν την (3.79) $\Rightarrow C(s) := \dfrac{Y(s)}{X(s)} \in \mathbb{R}_{pr}(s)$).

Αν τα πολυώνυμα $\overline{N}(s), \overline{D}(s)$ είναι πρώτα μεταξύ τους, τότε σύμφωνα με το Θεώρημα 3.5 για κάθε $k \geq n, rankM_k = n+k$ και άρα $rankM_k^T M_k = n+k$ έτσι ώστε ο πίνακας $\left(M_k^T M_k\right)^{-1}$ να υπάρχει και

$$\left(M_k^T M_k\right)^{-1} M_k^T M_k = I_{n+k} \tag{3.83}$$

Σε αυτή την περίπτωση η (3.81) γράφεται

$$\overline{d}^T = \overline{\omega}^{\mathrm{T}} M_k = \overline{\omega}^T M_k \left(M_k^T M_k\right)^{-1} M_k^T M_k = \overline{d}^T \left(M_k^T M_k\right)^{-1} M_k^T M_k \tag{3.84}$$

από την οποία προκύπτει ότι μία μερική λύση της (3.81) είναι η

$$\overline{\omega}^{\mathrm{T}} = \overline{d}^{\mathrm{T}} \left(M_k^T M_k\right)^{-1} M_k^T \tag{3.85}$$

Αν ορίσουμε πολυώνυμα $X(s)$, $Y(s)$ μέσω του ανύσματος $\overline{\omega}^T$ στην (3.85) κάνοντας χρήση των (3.80) και (3.77), (3.78), τότε με βάση την παραπάνω ανάλυση, τα $X(s)$, $Y(s)$

θα ικανοποιούν την (3.79). Πολλαπλασιάζοντας τα δύο μέλη της (3.79) με $\frac{1}{s^{k+n-1}}$ παίρνουμε

$$\frac{X(s)}{s^{k-1}}\frac{\overline{D}(s)}{s^{n}}+\frac{Y(s)}{s^{k-1}}\frac{\overline{N}(s)}{s^{n}}=\frac{D_c(s)}{s^{k+n-1}} \tag{3.86}$$

Θεωρώντας το όριο της (3.86) για $s\to\infty$ έχουμε

$$\lim_{s\to\infty}\left(\frac{X(s)}{s^{k-1}}\frac{\overline{D}(s)}{s^{n}}\right)+\lim_{s\to\infty}\left(\frac{Y(s)}{s^{k-1}}\frac{\overline{N}(s)}{s^{n}}\right)=\lim_{s\to\infty}\left(\frac{D_c(s)}{s^{k+n-1}}\right) \tag{3.87}$$

Επειδή $\deg\overline{N}(s)\le n-1$, η ρητή συνάρτηση $\frac{\overline{N}(s)}{s^{n}}$ είναι αυστηρά κανονική και άρα $\lim_{s\to\infty}\frac{\overline{N}(s)}{s^{n}}=0$, οπότε η (3.87) γράφεται

$$\lim_{s\to\infty}\left(\frac{x_0+x_1s+\ldots+x_{k-1}s^{k-1}}{s^{k-1}}\frac{d_0+d_1s+\ldots+d_{n-1}s^{n-1}+d_ns^{n}}{s^{n}}\right)=$$
$$=\lim_{s\to\infty}\left(\frac{\overline{d}_0+\overline{d}_1s+\ldots+\overline{d}_{k+n-1}s^{k+n-1}}{s^{k+n-1}}\right)$$

ή

$$\lim_{s\to\infty}\left(\frac{x_0}{s^{k-1}}+\frac{x_1}{s^{k-2}}+\ldots+\frac{x_{k-2}}{s}+x_{k-1}\right)=\lim_{s\to\infty}\left(\frac{d_0}{s^{n}}+\frac{d_1}{s^{n-1}}+\ldots+\frac{d_{n-1}}{s}+d_n\right)=$$
$$=\lim_{s\to\infty}\left(\frac{\overline{d}_0}{s^{k+n-1}}+\frac{\overline{d}_1}{s^{k+n-2}}+\ldots+\frac{\overline{d}_{k+n-2}}{s}+\overline{d}_{k+n-1}\right)$$

η οποία συνεπάγεται την

$$x_{k-1}d_n=\overline{d}_{k+n-1}\Rightarrow x_{k-1}=\frac{\overline{d}_{k+n-1}}{d_n}\neq 0\Rightarrow \deg X(s)=k-1. \tag{3.88}$$

Επειδή από την (3.78) $\deg Y(s)\le k-1$, η (3.88) συνεπάγεται ότι η ρητή συνάρτηση $C(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}$ είναι κανονική.

(β) (δηλαδή αν για κάθε επιθυμητό πολυώνυμο $D_c(s)$ όπως στην (3.76) $\exists X(s),Y(s)\in\mathbb{R}[s]$ όπως στις (3.77), (3.78) που ικανοποιούν την (3.79) και $C(s):=\frac{Y(s)}{X(s)}\in\mathbb{R}_{pr}(s)\Rightarrow k\ge n$).

Η υπόθεση ότι για κάθε επιθυμητό πολυώνυμο $D_c(s)$ υπάρχουν $X(s), Y(s) \in \mathbb{R}[s]$ όπως στις (3.77), (3.78) που ικανοποιούν την (3.79) και $C(s) := \dfrac{Y(s)}{X(s)} \in \mathbb{R}_{pr}(s)$ δηλαδή με $x_{k-1} \neq 0$ σημαίνει ότι υπάρχει $\overline{\omega}^{\mathrm{T}} = [x_0 \ y_0 \ x_1 \ y_1 \ \dots \ x_{k-1} \ y_{k-1}] \in \mathbb{R}^{1\times 2k}$ που ικανοποιεί την (3.68) για αυθαίρετο $\overline{d}^T := \left[\overline{d}_0 \ \overline{d}_1 \ \dots \ \overline{d}_{k+n-1}\right] \in \mathbb{R}^{1\times(k+n)}$, ή ισοδύναμα ότι ο αριθμός $2k$ των γραμμών της επιλύουσας του Wolovich $M_k \in \mathbb{R}^{2k\times(n+k)}$ βαθμού k είναι μεγαλύτερος ή ίσος του αριθμού $n+k$ των στηλών της ή $2k \geq n+k \Rightarrow k \geq n$. ▲

3.5 Αλγόριθμος κατασκευής κανονικού σταθεροποιητικού αντισταθμιστή

Δεδομένης της αυστηρά κανονικής ρητής συνάρτησης μεταφοράς $P(s)$ ενός σταθεροποιήσιμου συστήματος $\Sigma(P)$ όπως στην (3.75), η σύνθεση της κανονικής ρητής συνάρτησης μεταφοράς $C(s) = \dfrac{Y(s)}{x(s)}$ ενός σταθεροποιητικού αντισταθμιστή $\Sigma(C)$, μπορεί να επιτευχθεί ακολουθώντας τον παρακάτω αλγόριθμο.

- **Βήμα 1$^{\text{o}}$:** Για $k \geq n$ επιλέγουμε ένα (συμμετρικό ως προς τον πραγματικό άξονα $\mathbb{R}$) σύνολο $n+k-1$ σημείων $\Lambda_{n+k-1} = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n+k-1}\}$ του ανοικτού αριστερού μιγαδικού ημι-επιπέδου $\mathbb{C}^- := \left[s : s = \sigma + j\omega \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(s) = \sigma < 0\right]$ και υπολογίζουμε του χαρακτηριστικό πολυώνυμο του κλειστού συστήματος $D_c(s) = \Pi_{i=1}^{n+k-1}(s-\lambda_i) = \overline{d}_0 + \overline{d}_1 s + \dots + \overline{d}_{n+k-1} s^{n+k-1}$.
- **Βήμα 2$^{\text{o}}$:** Δημιουργούμε το άνυσμα γραμμής $\overline{d}^T$ όπως στην (3.82).
- **Βήμα 3$^{\text{o}}$:** Δημιουργούμε την επιλύουσα του Wolovich M_k βαθμού k των πολυωνύμων και $\overline{N}(s)$.

- **Βήμα 4^o :** Λύνουμε το σύστημα (3.81) ως προς $\overline{\omega}^T$ και μέσω της (3.80) υπολογίζουμε τα πολυώνυμα $X(s), Y(s)$ στις (3.77), (3.78) και την κανονική ρητή συνάρτηση μεταφοράς $C(s) = \dfrac{Y(s)}{X(s)}$ του σταθεροποιητικού αντισταθμιστή $\Sigma(C)$.

Παράδειγμα 3.2:

Έστω $P(s) = \dfrac{1}{s^3}$, δηλαδή $\overline{N}(s) = 1,\ \overline{D}(s) = s^3, n = 3$.

Ας επιλέξουμε $k = n = 3$, οπότε $n + k - 1 = 5$. Έστω $\Lambda_5 = \{\lambda_i = -1, i = 1,2,3,4,5\}$ και άρα $D_c(s) := (s+1)^5 = s^5 + 5s^4 + 10s^3 + 10s^2 + 5s + 1$ το επιθυμητό χαρακτηριστικό πολυώνυμο του κλειστού συστήματος $\Sigma(P,C)$, επομένως $\overline{d}^T := \begin{bmatrix} 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times 5}$. Η επιλύουσα του Wolovich M_3 βαθμού $k = 3$ των πολυωνύμων $\overline{D}(s)$ και $\overline{N}(s)$ είναι

$$M_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6\times 6}$$

Επειδή τα $\overline{N}(s) = 1, \overline{D}(s) = s^3$ είναι πρώτα μεταξύ τους $rankM_3 = 6$, οπότε από την (3.81) έχουμε

$$\overline{\omega}^{\mathrm{T}} = \overline{d}^T M_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 10 & 1 & 5 & 5 & 1 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 & y_0 & x_1 & y_1 & x_2 & y_2 \end{bmatrix} \qquad (3.89)$$

έτσι ώστε

$$C(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{y_0+y_1s+y_2s^2}{x_0+x_1s+x_2s^2}=\frac{1+5s+10s^2}{10+5s+s^2}\in\mathbb{R}_{pr}(s) \tag{3.90}$$

Με τον παραπάνω σταθεροποιητικό αντισταθμιστή, πράγματι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του κλειστού συστήματος είναι το:

$$X(s)\overline{D}(s)+Y(s)\overline{N}(s)=\left(10+5s+s^2\right)s^3+1+5s+10s^2=\left(s+1\right)^5=D_c(s) \qquad \square$$

Παραμετροποίηση της οικογένειας των σταθεροποιητικών αντισταθμιστών

Έστω $P(s)=\dfrac{\overline{N}(s)}{\overline{D}(s)}\in\mathbb{R}_{pr}(s)$ η αυστηρά κανονική ρητή συνάρτηση μεταφοράς ενός σταθεροποίησιμου συστήματος $\Sigma(P)$ όπως στην (3.75) και θεωρούμε την επιλύουσα του Wolovich $M_k\in\mathbb{R}^{2k\times(n+k)}$ βαθμού k των πολυωνύμων $\overline{D}(s)$ και $\overline{N}(s)$ για $k>n$. Σε μια τέτοια περίπτωση ο πίνακας M_k έχει αριθμό γραμμών $2k$, που είναι μεγαλύτερος από τον αριθμό $n+k$ των στηλών του, και $rankM_k=n+k$.

Έστω $Z\in\mathbb{R}^{(k-n)\times 2k}$ πίνακας πραγματικών αριθμών με $k-n$ γραμμικά ανεξάρτητες γραμμές και $2k$ στήλες, δηλαδή με $rankZ=k-n$ τέτοιος ώστε:

$$ZM_k=0_{k-n,k+n} \tag{3.91}$$

Παρατηρούμε ότι Z πάντα υπάρχει, γιατί $rankM_k=n+k$. Έστω $\overline{\omega}^{\mathrm{T}}\neq 0\in\mathbb{R}^{1\times 2k}$ και $\overline{\omega_0}^{\mathrm{T}}\neq\overline{\omega}^{\mathrm{T}}$ δύο διαφορετικές λύσεις της γραμμικής εξίσωσης (3.81) έτσι ώστε

$$\overline{\omega}^{\mathrm{T}}M_k=\overline{d}^T \tag{3.92}$$

$$\overline{\omega_0}^{T}M_k=\overline{d}^T \tag{3.93}$$

Αφαιρώντας την (3.91) προκύπτει ότι το άνυσμα γραμμής:

$$\left(\overline{\omega}^T-\overline{\omega_0}^T\right)M_k=0 \tag{3.94}$$

Από την (3.91) προκύπτει ότι το άνυσμα γραμμής $\overline{\omega}^T-\overline{\omega_0}^T\neq 0$ στην (3.94) θα γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των γραμμών του πίνακα Z. Δηλαδή, για $\kappa^{\mathrm{T}}:=\left[\kappa_1\ \kappa_2\ ...\ \kappa_{k-n}\right]$ $\in\mathbb{R}^{1\times(k-n)}$ θα είναι:

$$\overline{\omega}^{\mathrm{T}}-\overline{\omega_0}^{\mathrm{T}}=\kappa^{\mathrm{T}}\mathrm{Z} \tag{3.95}$$

$$\overline{\omega}^{\mathrm{T}} = \overline{\omega_0}^{\mathrm{T}} + \kappa^{\mathrm{T}} \mathrm{Z} \tag{3.96}$$

Η εξίσωση (3.96) δίνει τη γενική λύση της (3.92) για $k > n$ μέσω μιας μερικής λύσης $\overline{\omega_0}^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{1\times 2k}$ και $k-n$ πραγματικών παραμέτρων $\kappa_1, \kappa_2, ..., \kappa_{k-n}$.

Παράδειγμα 3.3 :

Θεωρούμε το παράδειγμα 3.2 και ας επιλέξουμε $k = 4 > 3 = n$ έτσι ώστε $n + k - 1 = 6$ και $\Lambda_6 = \{\lambda_i = -1, i = 1,2,3,4,5,6\}$

και άρα $D_c(s) = (s+1)^6 = s^6 + 6s^5 + 15s^4 + 20s^3 + 15s^2 + 6s + 1$, οπότε

$$\overline{d}^T := [1 \;\; 6 \;\; 15 \;\; 20 \;\; 15 \;\; 6 \;\; 1] \in \mathbb{R}^{1\times 6} \tag{3.97}$$

Η επιλύουσα του Wolovich M_4 βαθμού $k = 4$ των πολυωνύμων $\overline{D}(s) = s^3$ και $\overline{N}(s) = 1$ είναι

$$M_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{8\times 7} \tag{3.98}$$

και έχει βαθμό $rankM_4 = k + n = 7$. Από την (3.85), μια μερική λύση της (3.81) είναι η:

$$\overline{\omega_0}^{\mathrm{T}} = \overline{d}^{\mathrm{T}} \left(M_k^T M_k \right)^{-1} M_k^T \tag{3.99}$$

$$= [1 \;\; 6 \;\; 15 \;\; 20 \;\; 15 \;\; 6 \;\; 1] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$=\begin{bmatrix}10 & 1 & 15 & 6 & 6 & 15 & 6 & 10\end{bmatrix} \tag{3.100}$$

$$=\begin{bmatrix}x_0 & y_0 & x_1 & y_1 & x_2 & y_2 & x_3 & y_3\end{bmatrix} \tag{3.101}$$

έτσι ώστε

$$C(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{y_0+y_1s+y_2s^2+y_3s^3}{x_0+x_1s+x_2s^2+x_3s^3}=\frac{1+6s+15s^2+10s^3}{10+15s+6s^2+s^3}\in\mathbb{R}_{pr}(s) \tag{3.102}$$

Επειδή η εξίσωση (3.91) έχει λύση την

$$Z=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{1\times 8} \tag{3.103}$$

Από την (3.96), η γενική λύση της (3.81) είναι η

$$\overline{\omega}^{\mathrm{T}}=\overline{\omega_0}^{\mathrm{T}}+\kappa Z \tag{3.104}$$

$$=\begin{bmatrix}10 & 1 & 15 & 6 & 6 & 15 & 1 & 10\end{bmatrix}+\kappa\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}10-\kappa & 1 & 15 & 6 & 6 & 15 & 1 & \kappa+10\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\overline{x}_0 & \overline{y}_0 & \overline{x}_1 & \overline{y}_1 & \overline{x}_2 & \overline{y}_2 & \overline{x}_3 & \overline{y}_3\end{bmatrix}$$

έτσι ώστε η παραμετρική εξίσωση της οικογένειας των σταθεροποιητικών αντισταθμιστών να είναι η

$$C(s,\kappa)=\frac{Y(s,\kappa)}{X(s,\kappa)}=\frac{1+6s+15s^2+(\kappa+10)s^3}{10-\kappa+15s+6s^2+s^3}\in\mathbb{R}_{pr}(s),\kappa\in\mathbb{R} \tag{3.105}$$

Με τον παραπάνω σταθεροποιητικό αντισταθμιστή το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του κλειστού συστήματος είναι το:

$$\left(10-\kappa+15\sigma+6s^2+s^2\right)s^3+1+6s+15s^2+(\kappa+10)s^3=(s+1)^6$$ □

Αν στην (3.81) επιλέξουμε $k<n$ τότε $2k<(n+k)$ και η επιλύουσα του Wolovich $M_k\in\mathbb{R}^{2k\times(n+k)}$ βαθμού k έχει λιγότερες γραμμές από στήλες. Σε αυτή την περίπτωση η γραμμική εξίσωση

$$\overline{\omega}^{T}M_k=\overline{d}^{T} \tag{3.106}$$

έχει λύση

$$\overline{\omega}^{T}:=\left[\begin{pmatrix}x_0 & y_0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1 & y_1\end{pmatrix}\ldots\begin{pmatrix}x_{k-1} & y_{k-1}\end{pmatrix}\right]\in\mathbb{R}^{1\times 2k} \tag{3.107}$$

αν και μόνο αν είναι συμβατή, δηλαδή αν και μόνο αν το άνυσμα $\overline{d}^T$ των συντελεστών του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $D_c(s)=\overline{d}_0+\overline{d}_1 s+...+\overline{d}_{n+k-1}s^{n+k-1}$ του κλειστού συστήματος $\Sigma(P,C)$

$$\overline{d}^T := \begin{bmatrix} \overline{d}_0 & \overline{d}_1 & ... & \overline{d}_{k+n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times(k+n)} \tag{3.108}$$

ανήκει στο γραμμικό ανυσματικό χώρο που παράγεται από τις $2k$ γραμμές της επιλύουσας του Wolovich $M_k \in \mathbb{R}^{2k\times(n+k)}$ ή ισοδύναμα αν και μόνο αν

$$rankM_k = rank\begin{bmatrix} \overline{d}^T \\ M_k \end{bmatrix} \tag{3.109}$$

που είναι η συνθήκη συμβατότητας της (3.106).

Παράδειγμα 3.4 :

Έστω $P(s)=\dfrac{\overline{N}(s)}{\overline{D}(s)}=\dfrac{n_0+n_1 s+n_2 s^2}{d_0+d_1 s+d_1 s^2+d_3 s^3}$, με $n_0\neq 0$, $d_3\neq 0$, δηλαδή με $n=3$ και ας επιλέξουμε $k=2<n=3$ έτσι ώστε $n+k-1=4$ και $D_c(s)=\overline{d}_0+\overline{d}_1 s+\overline{d}_2 s^2+\overline{d}_3 s^3+\overline{d}_4 s^4$.

Σε μία τέτοια περίπτωση η επιλύουσα του Wolovich βαθμού $k=2$ θα είναι $M_2\in\mathbb{R}^{4\times 5}$ και η εξίσωση (3.106) θα γράφεται:

$$\begin{bmatrix} x_0 & y_0 & x_1 & y_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d_0 & d_1 & d_2 & d_3 & 0 \\ n_0 & n_1 & n_2 & 0 & 0 \\ 0 & d_0 & d_1 & d_2 & d_3 \\ 0 & n_0 & n_1 & n_2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \overline{d}_0 & \overline{d}_1 & \overline{d}_2 & \overline{d}_3 & \overline{d}_4 \end{bmatrix} \tag{3.110}$$

Η εξίσωση (3.110) λέει ότι το άνυσμα

$$\overline{d}^T = \begin{bmatrix} \overline{d}_0 & \overline{d}_1 & \overline{d}_2 & \overline{d}_3 & \overline{d}_4 \end{bmatrix} \tag{3.111}$$

του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $D_c(s)=\overline{d}_0+\overline{d}_1 s+\overline{d}_2 s^2+\overline{d}_3 s^3+\overline{d}_4 s^4$ του κλειστού συστήματος $\Sigma(P,C)$ το οποίο μπορεί να επιτευχθεί μέσω ενός κανονικού σταθεροποιητικού αντισταθμιστή

$$C(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{y_0+y_1 s}{x_0+x_1 s} \tag{3.112}$$

με παρανομαστή $X(s)$ βαθμού $k-1=1$, δε μπορεί να είναι αυθαίρετο, αλλά θα πρέπει να ανήκει στο γραμμικό ανυσματικό χώρο των γραμμών της επιλύουσας του Wolovich βαθμού $k=2$ στην (3.110). Για $P(s)=\frac{1}{s^3}$

$$M_2=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{4\times 5} \tag{3.113}$$

και η (3.106) δείχνει ότι η συνθήκη συμβατότητας της (3.106) είναι η

$$\begin{bmatrix} \overline{d}_0 & \overline{d}_1 & \overline{d}_2 & \overline{d}_3 & \overline{d}_4 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} x_0 & y_0 & x_1 & y_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.114}$$

$$=\begin{bmatrix} y_0 & y_1 & 0 & x_0 & x_1 \end{bmatrix} \tag{3.115}$$

Δηλαδή, το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του κλειστού συστήματος $\Sigma(P,C)$ το οποίο προκύπτει από την χρήση του κανονικού σταθεροποιητικού αντισταθμιστή $C(s)$ όπως στην (3.112) είναι το

$$D_c(s)=\overline{d}_0+\overline{d}_1 s+\overline{d}_2 s^2+\overline{d}_3 s^3+\overline{d}_4 s^4=y_0+y_1 s+x_0 s^3+x_1 s^4 \tag{3.116}$$

Επειδή, σύμφωνα με το κριτήριο Routh, αναγκαία συνθήκη έτσι ώστε όλες οι ρίζες λ_i της $D_c(s)=0$ να βρίσκονται στο ανοικτό αριστερό ημι-επίπεδο είναι η

$$\overline{d}_i>0,\quad i=0,1,2,3,4 \tag{3.117}$$

και επειδή από την συνθήκη συμβατότητας της (3.106) στην (3.116) προκύπτει ότι $\overline{d}_2=0$, για το σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς την $P(s)=\frac{1}{s^3}$ δεν υπάρχει κανονικός σταθεροποιητικός αντισταθμιστής με βαθμό παρανομαστή $k-1=1$ όπως στην (3.112). □

Γεωμετρικός τόπος των ριζών

Θεωρείστε ένα σταθεροποιήσιμο σύστημα $\Sigma(P)$ με συνάρτηση μεταφοράς την αυστηρά κανονική ρητή συνάρτηση:

$$P(s)=\frac{\overline{N}(s)}{\overline{D}(s)}\in\mathbb{R}_{pr0}(s)\Leftrightarrow\left(\deg\overline{D}(s)>\deg\overline{N}(s)\right)$$

όπως στην (3.75) και θεωρείστε την επιλύουσα του Wolovich $M_k\in\mathbb{R}^{2k\times(n+k)}$ βαθμού k των πολυωνύμων $\overline{D}(s)$ και $\overline{N}(s)$ για $k=1$ έτσι ώστε η εξίσωση (3.81) να γράφεται

$$\begin{bmatrix}x_0 & y_0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}d_0 & d_1 & \dots & d_{n-1} & d_n & 0 & 0 & 0 & \dots & 0\\ n_0 & n_1 & \dots & n_{n-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0\end{bmatrix}$$

$$=\underbrace{\begin{bmatrix}\overline{d}_0 & \overline{d}_1 & \overline{d}_2 & \overline{d}_3 & \dots & \overline{d}_{n-1} & \overline{d}_n\end{bmatrix}}_{1\times(n+1)} \qquad (3.118)$$

και ο σταθεροποιητικός αντισταθμιστής (αν υπάρχει) είναι σταθερά

$$C(s)=\frac{y_0}{x_0}:=K\in\mathbb{R} \qquad (3.119)$$

Σύμφωνα με την (3.79) η χαρακτηριστική εξίσωση του κλειστού συστήματος $\Sigma(P,C)$ είναι η

$$\overline{D}(s)+K\overline{N}(s)=0 \qquad (3.120)$$

και για κάθε τιμή της σταθεράς K οι πόλοι του κλειστού συστήματος θα είναι οι ρίζες της (3.120).

Το γεωμετρικό τόπο που διαγράφουν οι ρίζες της (3.120) στο μιγαδικό επίπεδο $\mathbb{C}$ καθώς η σταθερά K μεταβάλλεται στο διάστημα $[0,+\infty)$ τον ονομάζουμε «γεωμετρικό τόπο» των ριζών του κλειστού συστήματος.

Για $K=0$ και άρα με «ανοικτό» τον βρόγχο της ανάδρασης (δηλαδή για ένα «ανοικτό σύστημα» με συνάρτηση μεταφοράς $P(s)$ και χωρίς σταθεροποιητικό αντισταθμιστή) οι ρίζες της (3.120) ταυτίζονται με τους πόλους της $P(s)$ ή ισοδύναμα με τις ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης του «ανοικτού συστήματος»:

$$\overline{D}(s)=0$$

Για $K \neq 0$, δηλαδή με «κλειστό» τον βρόγχο της ανάδρασης, καθώς το K μεταβάλλεται στο διάστημα $\left[0,+\infty\right)$ η (3.120) μπορεί να γραφεί ως

$$P(s)=\frac{\overline{N}(s)}{\overline{D}(s)}=-\frac{1}{K}$$

από την οποία προκύπτει ότι καθώς $K \to \infty$ οι «κλάδοι» του γεωμετρικού τόπου των ριζών της (3.120) τείνουν στα σημεία s_0 του «εκτεταμένου μιγαδικού επιπέδου»: $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ τα οποία είναι τέτοια ώστε $\lim_{s \to s_0} P(s)=0$ και τα οποία είναι εξ ορισμού τα «μηδενικά» στο $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ της πραγματικής ρητής συνάρτησης μεταφοράς $P(s)$ του ανοικτού συστήματος.

Με άλλα λόγια, για $K=0$ οι κλάδοι του γεωμετρικού τόπου των ριζών του κλειστού συστήματος ξεκινούν από τους πόλους της $P(s)$ και καθώς $K \to \infty$ καταλήγουν ή στο σημείο $s=\infty$ που θεωρείται «μηδενικό στο άπειρο» της $P(s)$ ή/και στα σημεία s_0 του μιγαδικού επιπέδου $\mathbb{C}$ για τα οποία

$$\overline{N}(s_0)=0$$

ή ισοδύναμα στα «πεπερασμένα μηδενικά» της συνάρτησης μεταφοράς $P(s)$ του ανοικτού συστήματος.

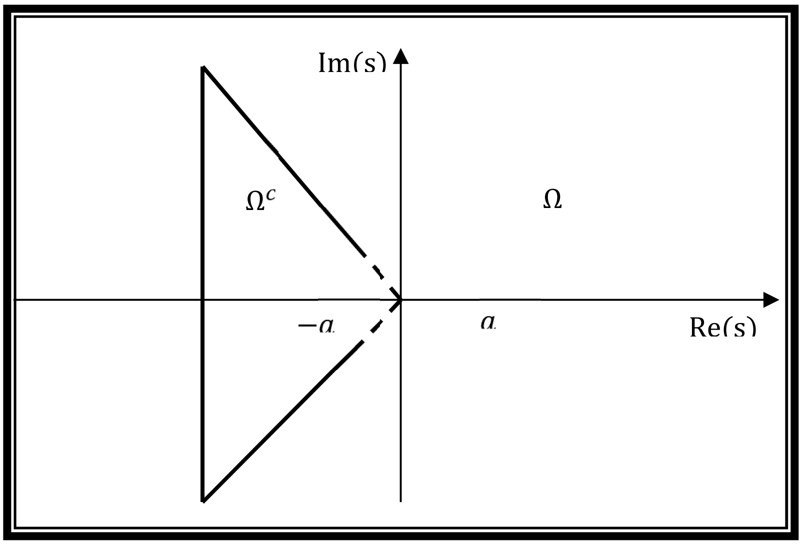
Κεφάλαιο 4^{ο} : Ρητές Συναρτήσεις και Ευκλείδειος Δακτύλιος

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με τις ρητές συναρτήσεις που έχουν ως όρους πολυώνυμα και πιο συγκεκριμένα με τις ρητές, proper και Ω - ευσταθείς συναρτήσεις. Θα δείξουμε ότι το σύνολο που περιέχει αυτές τις ρητές συναρτήσεις εφοδιάζοντάς το με τις συνήθεις πράξεις του πολλαπλασιασμού και της πρόσθεσης ρητών συναρτήσεων, είναι ένας αντιμεταθετικός δακτύλιος, με μοναδιαίο στοιχείο. Τέλος, θα δείξουμε ότι μεταξύ των στοιχείων του δακτυλίου αυτού ισχύει η Ευκλείδεια διαίρεση, οπότε ο δακτύλιος αυτός είναι ένας Ευκλείδειος δακτύλιος.

4.1 Κανονικές και Ω – ευσταθείς συναρτήσεις

Ορίζουμε ως:

- Μια συνάρτηση θα λέγεται **proper**, όταν δεν θα έχει πόλους στο $s=\infty$.
- Μια συνάρτηση $t(s)\in S$ θα λέγεται **unit** στο S, αν γι' αυτή υπάρχει $\tilde{t}(s)\in S$ τέτοια ώστε $t(s)\cdot\tilde{t}(s)=1$.
- Ω : να είναι ένα υποσύνολο του μιγαδικού επιπέδου $\mathbb{C}$, το οποίο είναι συμμετρικά ορισμένο ως προς τον πραγματικό άξονα $\mathbb{R}$, περιέχει το $\mathbb{C}^{+}$ › $\{s\epsilon\mathbb{C},\ Re(s)\geq 0\}$ δεν περιέχει τουλάχιστον 1 σημείο $-a\epsilon\mathbb{R},\ (a>0)$. Επίσης το Ω^{c} ας είναι το συμπληρωματικό του Ω ως προς το $\mathbb{C}$, δηλαδή, $\mathbb{C}=\Omega\cup\Omega^{c}$.



Έστω τώρα ρητή συνάρτηση $t(s) \in \mathbb{R}(s)$ η οποία παραγοντοποιείται ως εξής:

$$t(s) = t_{\Omega}(s)\hat{t}(s) \tag{4.1}$$

όπου $t_{\Omega}(s) = \dfrac{n_{\Omega}(s)}{d_{\Omega}(s)}$ τα οποία $n_{\Omega}(s),\ d_{\Omega}(s) \in \mathbb{R}[s]$, είναι πολυώνυμα πρώτα μεταξύ τους και όλα τα μηδενικά τους είναι εντός του Ω. Και $\hat{t}(s) = \dfrac{\hat{n}(s)}{\hat{d}(s)}$, όπου $\hat{n}(s),\ \hat{d}(s) \in \mathbb{R}[s]$, είναι πρώτα μεταξύ τους και όλα τα μηδενικά τους είναι εκτός του Ω.

Ορίζουμε, τώρα, την απεικόνιση $\delta_{\Omega} : \mathbb{R}(s) \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ τέτοια ώστε:

$$\delta_{\Omega}\left(t(s)\right) = \begin{cases} deg\, d(s) - deg\, n(s), & \alpha\nu\ t(s) \neq 0 \\ +\infty\,, & \alpha\nu\ t(s) \equiv 0 \end{cases}$$

Στη συνέχεια, θεωρούμε ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}(s)$ το οποίο να περιέχει όλες τις ρητές συναρτήσεις που ικανοποιούν τα εξής:

1. Να είναι **proper**, δηλαδή να μην έχουν πόλους στο $s = \infty$ και
2. Να μην έχουν πόλους στο Ω.

Ορισμός 4.1 [1]: Οι ρητές συναρτήσεις οι οποίες ικανοποιούν τις προηγούμενες προϋποθέσεις 1. και 2. θα ονομάζονται **proper (κανονικές)** και **Ω-ευσταθείς**. □

Θεωρούμε το σύνολο S , το οποίο περιέχει όλες τις κανονικές και Ω-ευσταθείς ρητές συναρτήσεις.

Δηλαδή,

$$S \triangleq \left\{ t(s) \in \mathbb{R}(s) \middle| t(s)\, \delta\varepsilon\nu\ \acute{\varepsilon}\chi o\upsilon\nu\, \pi\acute{o}\lambda o\upsilon\varsigma\, \sigma\tau o\, \overline{\Omega} = \Omega \cup \{\infty\} \right\}$$

Έτσι, μπορούμε εύκολα να δούμε ότι αν εφοδιάσουμε το S με τις συνήθεις πράξεις του πολλαπλασιασμού και της πρόσθεσης ρητών συναρτήσεων, το σύνολο S γίνεται αντιμεταθετικός δακτύλιος, με μοναδιαίο στοιχείο τον πραγματικό αριθμό 1. Επιπλέον σημειώνουμε ότι δεν έχει μηδενικούς διαιρέτες.

Έπειτα, παίρνουμε $0\ \mathrm{T}\ t(s) \in S$. Εφόσον η $t(s)$ δεν έχει πόλους μέσα στο Ω , μπορεί να γραφεί σύμφωνα με τη σχέση (2.1) στην ακόλουθη μορφή:

$$t(s) = n_\Omega(s)\frac{\hat{n}(s)}{\hat{d}(s)} \tag{4.2}$$

Ακόμη, εφόσον η $t(s)$ δεν έχει πόλους στο $s = \infty$ έχουμε:

$$deg(\, n_\Omega(s) \cdot \hat{n}(s)) \le deg\, \hat{d}(s) \Rightarrow deg\, n_\Omega(s) + deg\, \hat{n}(s) \le deg\, \hat{d}(s)$$

Δηλαδή,

$$deg\, \hat{n}(s) \le deg\, \hat{d}(s)$$

Επομένως, για κάθε $0\ \mathrm{T}\ t(s) \in S$ έχουμε:

$$\delta_\Omega(t(s)) \rangle \quad deg\, \hat{d}(s) - deg\, \hat{n}(s) \ge 0 \tag{4.3}$$

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε μερικές πολύ χρήσιμες προτάσεις.

Πρόταση 4.1 [1]: Κάθε $t(s) \in \mathbb{R}(s)$ μπορεί να γραφεί ως:

$$t(s) = \frac{n_\Omega(s)}{d_\Omega(s)} \cdot \frac{1}{(s+a)^q} \cdot \frac{\hat{n}(s) \cdot (s+a)^q}{\hat{d}(s)}$$

όπου $-a \in \mathbb{R}$, το οποίο θεωρούμε εκτός του Ω . ▲

Θέτουμε: $q \rangle \quad \delta_\Omega(t(s)) = deg\, \hat{d}(s) - deg\, \hat{n}(s)$.

Σημείωση 4.1 : Ο όρος $\dfrac{n_\Omega(s)}{d_\Omega(s)} \cdot \dfrac{1}{(s+a)^q}$ δίνει τους πόλους και τα μηδενικά της $t(s)$ στο $\overline{\Omega}$, (διότι τα $\hat{n}(s)$ και $\hat{d}(s)$ έχουν μηδενικά εκτός του $\overline{\Omega}$). Δηλαδή τα μηδενικά του $n_\Omega(s)$ είναι και μηδενικά της $t(s)$ στο Ω και τα μηδενικά του $d_\Omega(s)$ είναι οι πόλοι της $t(s)$ στο Ω .

Ακόμη, θέτουμε

$$q_\infty := q + deg d_\Omega(s) - deg\, n_\Omega(s) \tag{4.4}$$

- Αν $q_\infty > 0$, τότε η $t(s)$ έχει μηδενικό στο $s = \infty$, τάξεως q_∞.
- Αν $q_\infty < 0$, τότε η $t(s)$ έχει πόλο στο $s = \infty$, τάξεως $|q_\infty|$.

Πόρισμα 4.1 [1]: Κάθε $t(s) \in S$ μπορεί να παραγοντοποιηθεί ως εξής:

$$t(s) = \frac{n_\Omega(s)}{(s+a)^q} \cdot u(s) = \frac{n_\Omega(s)}{(s+a)^\nu} \cdot \frac{1}{(s+a)^{q_\infty}} \cdot u(s) \tag{4.5}$$

όπου $n_\Omega(s)$ δεν έχει μηδενικά έξω από το Ω, $\nu = deg\, n_\Omega(s)$, $-a \in \mathbb{R}$ και είναι εκτός του Ω, θέτουμε $q >\ \ \delta_S(t(s)) \geq 0$, $u(s) := \dfrac{\hat{n}(s)\cdot(s+a)^q}{\hat{d}(s)} \in S$ και είναι unit.

Απόδειξη: Από τη (4.2)$\Rightarrow t(s) = n_\Omega(s) \cdot \dfrac{\widehat{n}(s)}{\widehat{d}(s)}$. Από την πρόταση 4.1 έχουμε $t(s) = n_\Omega(s) \cdot \dfrac{1}{(s+a)^q} \cdot \dfrac{\widehat{n}(s)(s+a)^q}{\widehat{d}(s)} = \dfrac{n_\Omega(s)}{(s+a)^q} \cdot u(s)$ και από την (4.4) προκύπτει $q_\infty = q - deg\, n_\Omega(s)$ (διότι το $d_\Omega(s)$ δεν υπάρχει στην περίπτωση που μελετούμε).

Έτσι,

$$t(s) = \frac{n_\Omega(s)}{(s+a)^q} \cdot u(s) = \frac{n_\Omega(s)}{(s+a)^{deg\, n_\Omega(s) + q_\infty}} \cdot u(s) = \frac{n_\Omega(s)}{(s+a)^{deg\, n_\Omega(s)}} \cdot \frac{1}{(s)^{q_\infty}} \cdot u(s) =$$
$$\frac{n_\Omega(s)}{(s+a)^\nu} \cdot \frac{1}{(s+a)^{q_\infty}} \cdot u(s).$$

Στη συνέχεια, παραγοντοποιώντας το $n_\Omega(s)$ σε ανάγωγους παράγοντες στο $\mathbb{R}$ ως

$$n_\Omega(s) = k(s+\lambda_1)^{\nu_1} \ldots (s+\lambda_\mu)^{\nu_\mu} (s^2 + a_1 s + b_1)^{\nu_1'} \ldots (s^2 + a_\kappa s + b_\kappa)^{\nu_\kappa'}$$

όπου $k, a_j, b_j \in \mathbb{R},\ j \in \kappa, -\lambda_i \in \Omega,\ i \in \mu\ ,\ v_i\ , v_j' \in \mathbb{Z}^+$, προκύπτει ότι

$$t(s) = \left[\frac{s+\lambda_1}{s+a}\right]^{v_1} \ldots \left[\frac{s+\lambda_\mu}{s+a}\right]^{v_\mu} \left[\frac{s^2+a_1 s+b_1}{(s+a)^2}\right]^{v_1'} \ldots \left[\frac{s^2+a_\kappa s+b_\kappa}{(s+a)^2}\right]^{v_\kappa'} \cdot \left[\frac{1}{s+a}\right]^{q_\infty} \cdot u(s)$$

$$t(s) = p_1(s)^{v_1} \ldots p_\mu(s)^{v_\mu} \cdot p_1'(s)^{v_1'} \ldots p_\kappa'(s)^{v_\kappa'} \cdot p^*(s)^{q_\infty} \cdot u(s) \qquad (4.6)$$

Η μοναδικότητα της παραγοντοποίησης συνεπάγεται και τη μοναδικότητα της (4.6) ως παραγοντοποίηση της $t(s) \in S$ *modulo* a. Φυσικά το γεγονός ότι $-a \in \mathbb{R}$ και $-a \notin \Omega$ εξηγεί τον όρο *modulo α*. ▲

Πρόταση 4.2 [1]: Έστω $t(s) \in S$, $-a \in \mathbb{R}$ και $-a \notin \Omega$. Έστω $w = \dfrac{1}{s+a}$. Τότε η $t(s)$ μπορεί να εκφραστεί ως:

$$t(s) = u_a(s) \cdot \overline{t_a}(w)$$

όπου $u_a(s)$ είναι unit στο S και $\overline{t_a}(w)$ είναι πολυώνυμο στο $\mathbb{R}[w]$ τέτοιο ώστε $deg\,\overline{t_a}(w) = \delta_S(t(s))$.

Απόδειξη: Σύμφωνα με το πόρισμα 4.1, η $t(s)$ μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$t(s) = \frac{n_\Omega(s)}{(s+a)^v} \cdot \frac{1}{(s+a)^{q_\infty}} \cdot u_a(s) = \tilde{t}_a(s) \cdot u_a(s) \qquad (4.7)$$

Ακόμη έχουμε ότι: $w = \dfrac{1}{s+a} \Rightarrow s = \dfrac{1-aw}{w}$

Άρα,

$$\tilde{t}_a(s) = \tilde{t}_a\left(\frac{1-aw}{w}\right) = \frac{n_\Omega\left(\frac{1-aw}{w}\right)}{\left(\frac{1-aw}{w}+a\right)^v} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1-aw}{w}+\alpha\right)^{q_\infty}} = \frac{n_\Omega\left(\frac{1-aw}{w}\right)}{\left(\frac{1-aw+aw}{w}\right)^v} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1-aw+aw}{w}\right)^{q_\infty}}$$

$$\tilde{t}_a(s) = w^{\nu} \cdot n_{\Omega}\left(\frac{1-aw}{w}\right) \cdot w^{q_\infty} \tag{4.8}$$

Έστω $n_{\Omega}(s) = \alpha_{\nu} \cdot s^{\nu} + \alpha_{\nu-1} \cdot s^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 \cdot s + \alpha_0$, τότε

$$n_{\Omega}\left(\frac{1-aw}{w}\right) = \alpha_{\nu} \cdot \left(\frac{1-aw}{w}\right)^{\nu} + \alpha_{\nu-1} \cdot \left(\frac{1-aw}{w}\right)^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 \cdot \left(\frac{1-aw}{w}\right) + \alpha_0 =$$

$$= \frac{1}{w^{\nu}}\left[\alpha_{\nu} \cdot (1-aw)^{\nu} + \alpha_{\nu-1} \cdot (1-aw)^{\nu-1} \cdot w + \ldots + \alpha_1 \cdot (1-aw) \cdot w^{\nu-1} + \alpha_0 \cdot w^{\nu}\right] =$$

$$= \frac{1}{w^{\nu}} \cdot \tilde{n}_{\Omega}(s) \tag{4.9}$$

όπου $\tilde{n}_{\Omega}(s) \in \mathbb{R}[w]$ και $deg\, \tilde{n}_{\Omega}(s) = \nu$.

Από τις (4.7), (4.8) και (4.9) προκύπτει

$$t(s) \overset{(4.7)}{=} \tilde{t}_a(s) \cdot u_a(s) \overset{(4.8)}{=} w^{\nu} \cdot n_{\Omega}\left(\frac{1-aw}{w}\right) \cdot w^{q_\infty} \cdot u_a(s) =$$

$$\overset{(4.9)}{=} w^{\nu} \cdot \frac{1}{w^{\nu}} \cdot \tilde{n}_{\Omega}(s) \cdot w^{q_\infty} \cdot u_a(s) = \tilde{n}_{\Omega}(s) \cdot w^{q_\infty} \cdot u_a(s) =$$

$$= \overline{t_a}(w) \cdot u_a(s)$$

όπου $deg\, \overline{t_a}(w) = \nu + q_\infty = \delta_S(t(s))$. ▲

Σημείωση 4.2 : Οι *mod α* πρώτοι του S μετασχηματίζονται μέσω του μετασχηματισμού $s = \dfrac{1-aw}{w}$ σε ανάγωγα πολυώνυμα του $\mathbb{R}[w]$ με μηδενικά στο $\bar{\Omega}_w$.

Έτσι,

$$p^{*}(s) = \frac{1}{s+a} = \frac{1}{\dfrac{1-aw}{w} + a} = \frac{1}{\dfrac{1-aw+aw}{w}} = w$$

$$p(s) = \frac{s+\lambda}{s+a} = [s+\lambda] \cdot w = \left[\frac{1-aw}{w} + \lambda\right] \cdot w = 1 - aw + \lambda w = (\lambda - a) \cdot w + 1$$

$$p'(s)=\frac{s^2+a'\cdot s+b}{(s+a)^2}=\left(s^2+a'\cdot s+b\right)\cdot\frac{1}{(s+a)^2}=\left[\left(\frac{1-aw}{w}\right)^2+a'\cdot\left(\frac{1-aw}{w}\right)+b\right]\cdot w^2=$$
$$=(1-aw)^2+a'w(1-aw)+bw^2=1-2aw+a^2w^2+a'w-aa'w^2+bw^2=$$
$$=\left(a^2-aa'+b\right)w^2+\left(a'-2a\right)w+1$$

Πρόταση 4.3 [1]: Έστω $\tilde{t}(w)\in\mathbb{R}[w]$, $a>0$, $-a\notin\Omega$ και έστω $\overline{\Omega}_w$ είναι μια περιοχή του w - επιπέδου η οποία είναι η απεικόνιση του $\overline{\Omega}$ μέσω της $w=\dfrac{1}{s+a}$. Η ρητή συνάρτηση η οποία ορίζεται μέσω της $t(s):=\tilde{t}\left(\dfrac{1}{s+a}\right)$ ανήκει στο s και $\delta_S\left(t(s)\right)\le deg\,\tilde{t}(w)$. Ακόμη, η $\delta_S\left(t(s)\right)$ είναι ίση με το συνολικό αριθμό των μηδενικών της $\tilde{t}(w)$ στο $\overline{\Omega}_w$.

Απόδειξη: Έστω $\tilde{t}(w)=\alpha_\nu\cdot w^\nu+\alpha_{\nu-1}\cdot w^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1\cdot w+\alpha_0\in\mathbb{R}[w]$.

Τότε,

$$t(s)=\tilde{t}\left(\frac{1}{s+a}\right)=\alpha_\nu\cdot\left(\frac{1}{s+a}\right)^\nu+\alpha_{\nu-1}\cdot\left(\frac{1}{s+a}\right)^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1\cdot\left(\frac{1}{s+a}\right)+\alpha_0=$$
$$=\frac{1}{(s+a)^\nu}\left[\alpha_\nu+\alpha_{\nu-1}(s+a)+\ldots+\alpha_1(s+a)^{\nu-1}+\alpha_0(s+a)^\nu\right]=:\frac{n(s)}{(s+a)^\nu}\in S$$

διότι είναι ρητή συνάρτηση και δεν έχει πόλο στο $\overline{\Omega}$ ($-a\notin\Omega$).

Επίσης, ο μέγιστος αριθμός μηδενικών της $n(s)$ είναι ν. Η $n(s)$ μπορεί να έχει μηδενικά στο συμπλήρωμα του Ω. Έτσι, $\delta_S\left(t(s)\right)=\nu-\xi\le\nu$, όπου $\xi\ge 0$ είναι ο αριθμός των μηδενικών της $n(s)$ τα οποία δεν είναι στο Ω. Παραγοντοποιώντας την $t(s)$ όπως στην (4.5) δηλαδή $t(s)=\dfrac{n_\Omega(s)}{(s+a)^q}\cdot u(s)$, όπου $q=\delta_S\left(t(s)\right)$ και $n_\Omega(s)\in\mathbb{R}[s]$ το οποίο δεν έχει μηδενικά έξω από το Ω. Από την πρόταση 4.2 και τη σημείωση 4.2, η $\dfrac{n_\Omega(s)}{(s+a)^q}$ δίνει μέσω του μετασχηματισμού $s=\dfrac{1-aw}{w}\Rightarrow w=\dfrac{1}{s+a}$ ένα πολυώνυμο $\overline{t}_a(w)$ με όλα τα μηδενικά του μέσα στο $\overline{\Omega}_w$ και βαθμού $deg\,\overline{t_a}(w)=\delta_S(t(s))$. ▲

Θεώρημα 4.1 [1]: Έστω $t_1(s),\ t_2(s)\in S,\ t_2(s)\neq 0, w=\dfrac{1}{s+a}, -a\in\mathbb{R}\ ,\ -a\notin\Omega$.

Ας είναι: $t_i(s)=\overline{t}_{ia}(w)\cdot u_{ia}(s)\ , i=1,2$, όπως στην πρόταση 4.2, όπου $\overline{t}_{ia}\in\mathbb{R}[w]\ ,\ u_{ia}(s)\in S$ είναι units και $\delta_S(t_i(s))=deg\,\overline{t}_{ia}(w), i=1,2$.

Τότε

α. Υπάρχει $\overline{q}_a(w)\in\mathbb{R}[w],\ \overline{r}_a(w)\in\mathbb{R}[w]$ τέτοια ώστε

$$\overline{t}_{ia}(w)=\overline{t}_{2a}(w)\cdot\overline{q}_a(w)+\overline{r}_a(w) \tag{4.10}$$

και είτε $\overline{r}_a(w)=0$, είτε $deg\,\overline{r}_a(w)<deg\,\overline{t}_{2a}(w)$

β. Η ρητή συνάρτηση $q_a(s)\in S$ που ορίζεται ως εξής:

$$q_a(s)\triangleq\ u_{1a}(s)\cdot u_{2a}^{-1}(s)\cdot\overline{q}_a\left(\frac{1}{s+a}\right) \tag{4.11}$$

$$r_a(s)\triangleq\ u_{1a}(s)\cdot\overline{r}_a\left(\frac{1}{s+a}\right) \tag{4.12}$$

ικανοποιεί την Ευκλείδεια διαίρεση για τις $t_1(s),\ t_2(s)$ δηλαδή

$$t_1(s)=t_2(s)\cdot q_a(s)+r_a(s) \tag{4.13}$$

και είτε $r_a(s)=0$, είτε $\delta_{S(r_a(s))}<\delta_S(t_2(s))$.

Απόδειξη: Η (*mod α*) παραγοντοποίηση των $t_1(s),\ t_2(s)$ γίνεται όπως στην πρόταση 4.2 και για τα πολυώνυμα $\overline{t}_{1a}(w),\ \overline{t}_{2a}(w)$ της α. περίπτωσης του θεωρήματος είναι φανερό ότι εκφράζει την Ευκλείδεια διαίρεση στο $\mathbb{R}[w]$. Πολλαπλασιάζοντας και τα 2 μέλη της με $u_{1a}(s)$ και θέτοντας $w=\dfrac{1}{s+a}$ προκύπτει

$$t_1(s)\overset{(\pi\rho\acute{o}\tau\alpha\sigma\eta\ 4.2)}{=}u_{1a}(s)\cdot\overline{t}_{1a}(w)=u_{1a}(s)\cdot\overline{t}_{2a}(w)\cdot\overline{q}_a(w)+u_{1a}(s)\cdot\overline{r}_a(w)=$$

$$=\left[u_{1a}(s)\cdot\frac{1}{u_{2a}(s)}\cdot\overline{q}_a\left(\frac{1}{s+a}\right)\right]\cdot\left[u_{2a}(s)\cdot\overline{t}_{2a}\left(\frac{1}{s+a}\right)\right]+u_{1a}(s)\cdot\overline{r}_a\left(\frac{1}{s+a}\right)$$

η οποία από τη (4.11) και την πρόταση 4.2 προκύπτει η (4.12).

Πράγματι,

$$t_1(s)=\left[u_{1a}(s)\cdot\frac{1}{u_{2a}(s)}\cdot\overline{q}_a\left(\frac{1}{s+a}\right)\right]\cdot\left[u_{2a}(s)\cdot\overline{t}_{2a}\left(\frac{1}{s+a}\right)\right]+u_{1a}(s)\cdot\overline{r}_a\left(\frac{1}{s+a}\right)$$

$$\Rightarrow t_1(s)=t_2(s)\cdot q_a(s)+r_a(s)$$

Από τη πρόταση 4.3 τα $q_a(s), r_a(s)\in S$ και

$$\delta_S\left(r_a(s)\right)\le deg\,\overline{r}_a(w) \tag{4.14}$$

Τέλος, από το α. ερώτημα έχουμε:

$$deg\,\overline{r}_a(w)<deg\,\overline{t}_{2a}(w)=\delta_S\left(t_2(s)\right) \tag{4.15}$$

Από τις σχέσεις (4.14) και (4.15) προκύπτει το ζητούμενο:

$$\delta_S\left(r_a(s)\right)\le deg\,\overline{r}_a(w)<deg\,\overline{t}_{2a}(w)=\delta_S\left(t_2(s)\right)\Rightarrow\delta_{S(r_a(s))}<\delta_S\left(t_2(s)\right). \qquad \blacktriangle$$

Σημείωση 4.3: Το προηγούμενο θεώρημα δείχνει ότι ορίζεται (*mod α*) Ευκλείδεια διαίρεση δυο στοιχείων του δακτυλίου S των proper και Ω - ευσταθών ρητών συναρτήσεων και αποτελεί απόδειξη ότι ο δακτύλιος S είναι Ευκλείδειος δακτύλιος.

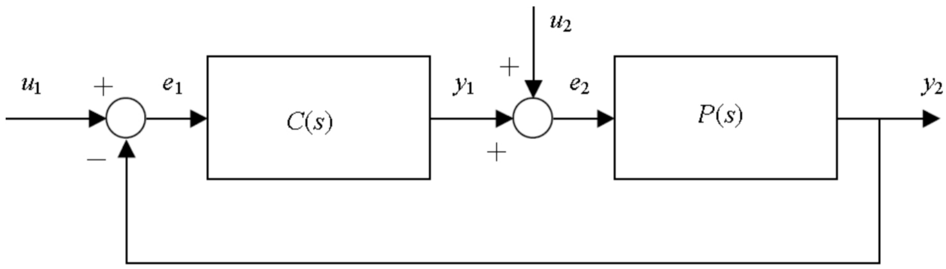
4.2 Παραγοντοποίηση Συναρτήσεων Μεταφοράς

Εύρεση Αντισταθμιστών

Στην ενότητα αυτή θα ασχοληθούμε με την υλοποίηση της τεχνικής της παραγοντοποίησης σε συστήματα μίας εισόδου-μίας εξόδου και με την αναζήτηση όλων εκείνων των αντισταθμιστών (μέσω παραμετροποίησης) που σταθεροποιούν (stabilize) μία δεδομένη διεργασία.

Γενικά Χαρακτηριστικά Τεχνικής Παραγοντοποίησης

Το βασικό λειτουργικό σχήμα που θα απασχολήσει το παρόν κεφάλαιο παρουσιάζεται στο σχήμα 1.



Σχήμα 1. Σύστημα ανάδρασης με μία διεργασία p και έναν αντισταθμιστή c

Η συσχέτιση των e_1, e_2 (ανάλογα μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι έξοδοι y_1, y_2) με τις εισόδους u_1, u_2 προκύπτει αλγεβρικά βάση των παρακάτω σχέσεων:

$$e_1 = u_1 - y_2 = u_1 - p \cdot e_2 = u_1 - p \cdot (u_2 + y_1) = u_1 - p \cdot (u_2 + c \cdot e_1)$$

$$\Rightarrow e_1 = \frac{1}{1 + p \cdot c} \cdot (u_1 - p \cdot u_2) \tag{4.16}$$

και

$$e_2 = u_2 + c \cdot e_1 = u_2 + \frac{c}{1 + p \cdot c} \cdot (u_1 - p \cdot u_2)$$

$$\Rightarrow e_2 = \frac{c}{1 + p \cdot c} \cdot u_1 + \frac{1}{1 + p \cdot c} \cdot u_2 \tag{4.17}$$

Επομένως, συνδυάζοντας τα σήματα e_1, e_2 προκύπτει η συνάρτηση Η(p,c) που για την περίπτωση του σχήματος 1 είναι:

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = H(p,c) \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \Rightarrow H(p,c) = \begin{bmatrix} \frac{1}{1+\mathrm{p}\cdot\mathrm{c}} & \frac{-p}{1+\mathrm{p}\cdot\mathrm{c}} \\ \frac{c}{1+\mathrm{p}\cdot\mathrm{c}} & \frac{1}{1+\mathrm{p}\cdot\mathrm{c}} \end{bmatrix} \tag{4.18}$$

Ο αντισταθμιστής c σταθεροποιεί το σύστημα p και γενικότερα το σύστημα (p,c) (p,c) θεωρείται ευσταθές αν και μόνον αν η $\mathrm{H}(p,c)$ ανήκει στον Ευκλείδειο Δακτύλιο που για την παρούσα ενότητα συμβολίζουμε με S. Ουσιαστικά αυτό που επιζητείται είναι η εξασφάλιση πως για κάθε φραγμένη είσοδο u_1, u_2 παράγονται φραγμένα σήματα και η BIBO - ευστάθεια του κλειστού συστήματος προκύπτει μόνο αν η $\mathrm{H}(p,c) \in S$.

Λήμμα 4.1 [1]: Έστω $p,c \in \mathbb{R}(s)$ και $p = \frac{n_p}{d_p}, c = \frac{n_c}{d_c}$ και $n_p, d_p, n_c, d_c \epsilon S$ και τα αντίστοιχα ζεύγη $(n_p, d_p) - (n_c, d_c)$ είναι πρώτα (coprime) μεταξύ τους. Ορίζουμε την συνάρτηση δ ως εξής:

$$\delta(p,c) = n_p \cdot n_c + d_p d_c \tag{4.19}$$

Τότε το ζεύγος (p,c) είναι ευσταθές αν και μόνο αν η $\delta(p,c) \in U$ δηλαδή $\frac{1}{\delta(p,c)} \in S$.

Απόδειξη: Έστω ότι ισχύει $\delta(p,c) \in U$ και αντικαθιστώντας τις ανωτέρω ρητές συναρτήσεις στην (4.18) προκύπτει:

$$H(p,c) = \frac{1}{\delta(p,c)} \cdot \begin{bmatrix} d_p \cdot d_c & -n_p \cdot d_c \\ d_p \cdot n_c & d_p \cdot d_c \end{bmatrix} \tag{4.20}$$

Υποθέτοντας πως $\mathrm{H}(p,c) \in S$ τότε το ζεύγος (p,c) είναι ευσταθές. Οπότε, θα ισχύουν

α) $1 + p \cdot c \neq 0$ και

β) $d_p \neq 0, d_c \neq 0$ αφού αποτελούν παρονομαστές κλασμάτων. Επομένως, προκύπτει πως $\delta(p,c) = d_p \cdot d_p \cdot (1+pc) \neq 0$ και η (4.20) ισχύει.

Καθώς τώρα $\mathrm{H}(p,c) \in S$, από την (4.20) προκύπτει πως:

$$\frac{d_p \cdot d_c}{\delta(p,c)} \in S, \qquad \frac{d_p \cdot n_c}{\delta(p,c)} \in S, \qquad \frac{n_p \cdot d_c}{\delta(p,c)} \in S \quad \text{και}$$

$$1 - \frac{d_p \cdot d_c}{\delta(p,c)} = \frac{n_p \cdot n_c}{\delta(p,c)} \in S \tag{4.21}$$

Έχοντας επισημάνει πως τα ζεύγη n_p, d_p και n_c, d_c είναι πρώτα μεταξύ τους, τότε υπάρχουν $x_p, y_p \in S$ και $x_c, y_c \in S$ τέτοια ώστε:

$$x_p \cdot n_p + y_p \cdot d_p = 1 \qquad \text{και } x_c \cdot n_c + y_c \cdot d_c = 1 \tag{4.22}$$

Οι συσχετίσεις της (4.21) μπορούν να συνοψισθούν στην (4.23), ενώ βάση των εξισώσεων της (4.22) προκύπτει η (4.24) που αποδεικνύει πλέον την παρουσία της $\delta(p,c)$ στον μοναδιαίο δακτύλιο U .

$$\begin{bmatrix} d_p \\ n_p \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\delta(p,c)} \cdot \begin{bmatrix} d_c & n_c \end{bmatrix} \in S \tag{4.23}$$

$$\begin{bmatrix} y_p & x_p \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d_p \\ n_p \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\delta(p,c)} \cdot \begin{bmatrix} d_c & n_c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_c \\ x_c \end{bmatrix} = \frac{1}{\delta(p,c)} \in S \tag{4.24}$$

▲

Πόρισμα 4.2 [1]: Έστω $p \in \mathbb{R}(s)$ και $p = \dfrac{n_p}{d_p}$ και $c = \dfrac{n_c}{d_c}$ που ανήκουν στο S. Ο αντισταθμιστής c σταθεροποιεί την διεργασία p αν και μόνον αν υπάρχουν τα αντίστοιχα n_c, d_c για τα οποία ισχύει:

$$n_p \cdot n_c + d_p \cdot d_c = 1 \tag{4.25}$$

Εάν η (4.25) ισχύει τότε προκύπτει πως $\delta(p,c)=1$ που αποτελεί έτσι μονάδα του δακτυλίου S και επιπλέον καταλήγει στην ευστάθεια της $H(p,c)$ σύμφωνα πάντα με το λήμμα 4.1. Θεωρώντας λοιπόν πως ο c σταθεροποιεί την διεργασία p, εκφράζεται ως $c=\frac{n_1}{d_1}$, όπου $n_1, d_1 \in S$ και είναι πρώτα μεταξύ τους. Τότε, βάση του λήμματος 4.1,

$$\delta = n_1 \cdot d_p + d_1 \cdot n_p \in U .$$

Θεωρώντας τώρα, $n_c = \frac{n_1}{\delta}$ και $d_c = \frac{d_1}{\delta}$ τότε $(n_c, d_c) \epsilon S,\ c = \frac{n_c}{d_c}$ και τα n_c, d_c ικανοποιούν την (4.25). ▲

Με βάση πλέον την ανωτέρω θεωρητική ανάλυση, καταλήγουμε στην διατύπωση ενός θεωρήματος που παρέχει την έννοια της παραμετροποίησης όλων των αντισταθμιστών c που σταθεροποιούν ένα σύστημα p.

Θεώρημα 4.2 [1]: Έστω $p \in \mathbb{R}(s)$ και $p=\frac{n_p}{d_p}$, με $n_p\ , d_p \in S$ και είναι και πρώτα μεταξύ τους. Επιλέγοντας $x, y \in S$ τέτοια ώστε:

$$n_p \cdot x + d_p \cdot y = 1 \tag{4.26}$$

τότε το σύνολο των αντισταθμιστών που σταθεροποιούν την διεργασία p ορισμένο υπό τον συμβολισμό $S(p)$ δίνεται ως:

$$S_p = \left\{ c = \frac{x + r \cdot d_p}{y - r \cdot n_p} : r \in S\ \kappa\alpha\iota\ y - r \cdot n_p \neq 0 \right\} \tag{4.27}$$

Απόδειξη: Έστω ότι ο c λαμβάνει την ανωτέρω μορφή της (4.27) και για κάποιο $r \in S$, ισχύει:

$$\left(x + r \cdot d_p\right) \cdot n_p + \left(y - r \cdot n_p\right) \cdot d_p = x' \cdot n_p + y' \cdot d_p = 1 \tag{4.28}$$

που συνεπάγεται βάση του πορίσματος 4.2 ότι ο c σταθεροποιεί την διεργασία p και δίνεται ως:

$$n_c = x + r \cdot d_p \quad \text{και} \quad d_c = y - r \cdot n_p \,. \qquad \blacktriangle$$

Επομένως, ο στόχος της εύρεσης όλων των αντισταθμιστών που σταθεροποιούν ένα σύστημα p καλύπτεται μέσω δύο βασικών σταδίων:

1) έκφραση του p ως $\frac{n_p}{d_p}$ με $n_p, d_p \in S$ και να είναι πρώτα μεταξύ τους και
2) εύρεση των x, y που ικανοποιούν τις (4.26) και (4.27).

Μία ιδιαίτερα σημαντική παρατήρηση, εμφανίζεται κατά την εφαρμογή στην (4.17) του $c = \frac{x + r \cdot d_p}{y - r \cdot n_p} = \frac{n_c}{d_c}, r \in S$ και ο πίνακας $H\left(p, c\right)$ που προκύπτει είναι ο:

$$H(p,c) = \frac{1}{\delta(p,c)} \begin{bmatrix} d_p \cdot (y - r \cdot n_p) & -n_p \cdot (y - r \cdot n_p) \\ d_p \cdot (x + r \cdot n_p) & d_p \cdot (y - r \cdot n_p) \end{bmatrix} \tag{4.29}$$

Η εφαρμογή της ανωτέρω θεωρητικής προσέγγισης παραμετροποίησης και παραγοντοποίησης εφαρμόζεται σε δύο παραδείγματα. Στο πρώτο ο δακτύλιος S περιλαμβάνει όλη η περιοχή που ικανοποιεί $S = \left\{s : Re\, s < 0\right\}$ και το δεύτερο περιλαμβάνει μέρος του παραπάνω δακτυλίου για τον οποίο ισχύει

$$S_D = \left\{s : Re\left(s\right) < a\, \kappa\alpha\iota \left|Im\left(s\right)\right| \leq Re\left(s\right)\right\}.$$

Παράδειγμα 4.1:

Έστω η παραγοντοποίηση της συνάρτησης διεργασίας p:

$$p(s) = \frac{s}{(s+1)\cdot(s-1)} = \frac{n_p}{d_p},$$

$$n_p = \frac{s}{(s+1)^2} \; \kappa\alpha\iota \; d_p = \frac{s-1}{s+1}$$

Μέσω μίας οποιασδήποτε τεχνικής εύρεσης ενός αντισταθμιστή που σταθεροποιεί την διεργασία p προκύπτει η συνάρτηση του c. Για το παράδειγμα μας έστω ότι:

$$c(s) = \frac{2(s+2)}{(s-0.5)} = \frac{n_1}{d_1}$$

$$n_1 = \frac{2(s+2)}{s+1} \quad \text{και} \quad d_1 = \frac{s-0.5}{s+1}$$

Επομένως, η συνάρτηση $\delta(p,c)$ της (4.19) λαμβάνει την εξής μορφή:

$$\delta(p,c) = n_p \cdot n_1 + d_p \cdot d_1 = \frac{s^3 + 1.5s^2 + 3s + 0.5}{(s+1)^3}$$

Όλα τα μηδενικά της $\delta(p,c)$ βρίσκονται στο αριστερό μιγαδικό επίπεδο καταλήγοντας πως η $\delta(p,c)$ είναι μονάδα του δακτυλίου S.

Με στόχο την απόδειξη του πορίσματος 4.2, ορίζονται οι συναρτήσεις x, y που ικανοποιούν την (4.26) και εν συνεχεία εφαρμόζονται στην οικογένεια των αντισταθμιστών της (4.27).

$$x(s) = \frac{n_1}{\delta(p,c)} = \frac{2(s+2)(s+1)^2}{s^3 + 1.5s^2 + 3s + 0.5}$$

$$y(s) = \frac{d_1}{\delta(p,c)} = \frac{(s-0.5)(s+1)^2}{s^3 + 1.5s^2 + 3s + 0.5}$$

$$c = \frac{x + r\cdot d_p}{y - r\cdot n_p} = \frac{2(s+2)(s+1)^4 + r(s)(s-1)(s+1)\varphi(s)}{(s-0.5)(s+1)^4 - r(s)\varphi(s)}$$

όπου η $r(s)$ αποτελεί οποιαδήποτε συνάρτηση εντός του δακτυλίου S και $\varphi(s)=$ παρονομαστής των $x(s), y(s)$.

Έχοντας ορίσει πλέον όλες τις απαραίτητες συναρτήσεις, απομένει μονάχα η αντικατάσταση τους στην (4.29) όπου και προκύπτει:

$$h_{11} = h_{22} = \frac{(s-1)}{\phi(s)} \cdot [\frac{(s-0.5)(s+1)^4 - r(s)s\phi(s)}{\phi(s)}]$$

$$h_{12} = \frac{-s}{\phi(s)(s+1)} \cdot [\frac{(s-0.5)(s+1)^4 - r(s)s\phi(s)}{\phi(s)}] \tag{4.29}$$

$$h_{21} = \frac{(s-1)}{\phi(s)} \cdot [\frac{2(s+2)(s+1)^4 + r(s)s\phi(s)}{\phi(s)}]$$

□

Παράδειγμα 4.2:

Θεωρώντας ακριβώς το ίδιο πρόβλημα με το παράδειγμα 1, αντικαθιστούμε τον δακτύλιο S με τον S_D που αποτελεί μέρος του. Επιζητείται η παραμετροποίηση όλων των αντισταθμιστών c που στοχεύουν στην ευστάθεια του $H(p,c)$ με όλους τους πόλους του εντός του δακτυλίου S_D πλέον. Πρώτο βήμα αποτελεί η εύρεση των $n_p, d_p \in S_D$ βάσει της θεωρίας που παρουσιάστηκε στην ενότητα 4.1 ως εξής:

$$n_p = \frac{s}{(s+3)^2}$$

$$d_p = \frac{(s+1)(s-1)}{(s+3)^2}$$

Για την εύρεση όμως των x, y που ικανοποιούν την (4.26) απαιτείται ένας διγραμμικός μετασχηματισμός ως προς την μεταβλητή z που οδηγεί στα νέα n_p, d_p:

$$z = \frac{s-3}{s+3} \Rightarrow s = 3\frac{1+z}{1-z}$$

$$n_p = \frac{1-z^2}{12} \text{ και } d_p = \frac{2z^2+5z+2}{9}$$

Καθώς τα n_p, d_p είναι πρώτα πολυώνυμα στο z, τότε υφίστανται x, y που μπορούν να βρεθούν μέσω του αλγόριθμου της Ευκλείδειας Διαίρεσης στα n_p, d_p, και με προς τα πίσω αντικατάσταση προκύπτουν στην εξής μορφή:

$$x = \frac{10z+17}{9} = \frac{9s-7}{3(s+3)}$$

$$y = 5z-4 = \frac{s-27}{s+3}$$

Αντικαθιστώντας, τα x, y στην συνάρτηση $c = \frac{x}{y}$ προκύπτει ο αρχικός αντισταθμιστής της διεργασίας p και μέσω της σχέσης (4.27) προκύπτει η οικογένεια των αντισταθμιστών για τους οποίους ισχύει $H(p,c) \in S_D$:

$$S_{p,D} = \left\{ c = \frac{x + r \cdot d_p}{y - r \cdot n_p} : r \in S_D \right\}$$

Με ακριβώς όμοιο τρόπο προκύπτει η συνάρτηση $H(p,c)$ όπως στο προηγούμενο παράδειγμα. □

Κεφάλαιο 5ο : Διοφαντικές Εξισώσεις Πολυωνυμικών Πινάκων

Στο κεφάλαιο αυτό μελετάμε την επέκταση των Διοφαντικών εξισώσεων στο δακτύλιο των πολυωνυμικών πινάκων καθώς η λύση τους, όπως θα δούμε, αποτελεί ένα βασικό εργαλείο για την εύρεση και τον υπολογισμό σταθεροποιητικών αντισταθμιστών ενός συστήματος αυτόματου ελέγχου πολλών εισόδων και εξόδων. (Multi input multi output case – mimo case)

5.1 Ευκλείδειος Δακτύλιος Πολυωνύμων – Πολυωνυμικοί Πίνακες

Σημειώνεται ότι ο ορισμός του δακτυλίου και του Ευκλειδείου δακτυλίου έχουν δοθεί στο 2ο Κεφάλαιο.

Ορισμός 5.1 [1]: Ένας ρητός πίνακας $T(s)$ του οποίου τα στοιχεία είναι πολυώνυμα ονομάζεται **πολυωνυμικός πίνακας**. Το σύνολο των $p\times q$ πολυωνυμικών πινάκων συμβολίζεται με $\mathbb{R}[s]^{p\times q}$. Κάθε πολυωνυμικός πίνακας γράφεται ως πολυώνυμο με συντελεστές πίνακες:

$$T(s)=T_q s^q+T_{q-1}s^{q-1}+...+T_1 s+T_0 \tag{5.1}$$

όπου $T_i\in\mathbb{R}^{p\times q}, i=0,1,...,q$ και p όχι κατ' ανάγκη ίσον με q.

Ο αριθμός q ονομάζεται **τάξη (order)** του πολυωνυμικού πίνακα. □

Σημείωση 5.1: Αν $T(s)\in\mathbb{R}[s]^{p\times p}$ και $\det T(s)\neq 0$, τότε και ο αντίστροφος του $T(s)$ δεν είναι πάντα πολυωνυμικός. Αν $|T(s)|=c\in\mathbb{R}, c\neq 0$, τότε $T(s)^{-1}=\dfrac{1}{|T(s)|}AdjT(s)\in\mathbb{R}[s]^{p\times q}$.

Ορισμός 5.2 [1]: Ένας (τετραγωνικός) πολυωνυμικός πίνακας $T(s)\in\mathbb{R}[s]^{p\times p}$ ονομάζεται $\mathbb{R}[s]-$ **αντιστρέψιμος (**$\mathbb{R}[s]-$ **unimodular)** ή απλώς **αντιστρέψιμος (unimodular)** αν υπάρχει πολυωνυμικός πίνακας $\hat{T}(s)\in\mathbb{R}[s]^{p\times p}$ τέτοιος ώστε: $T(s)\hat{T}(s)=I_p$ ή ισοδύναμα αν $|T(s)|=c\Leftrightarrow \deg T(s)=c\in\mathbb{R}, c\neq 0.$ □

Ορισμός 5.3 [1]: Ο **βαθμός (degree)** ενός πολυωνυμικού πίνακα $T(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times q}$, συμβολίζεται $\deg T(s)$ και ορίζεται ως ο μέγιστος βαθμός ανάμεσα σε όλους τους βαθμούς των μέγιστων τάξεων (μη μηδενικών) υποοριζουσών του $T(s)$. □

Πόρισμα 5.1 [1]: Αν $p = q$, αν δηλαδή ο $T(s)$ είναι **τετράγωνος (square)** $\det T(s) \neq 0$, τότε $\deg T(s) = \deg[\det T(s)]$.

Πόρισμα 5.2 [1]: $T(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times p}$ είναι **αντιστρέψιμος (unimodular)** αν και μόνο αν $\deg T(s) = 0$.

Πόρισμα 5.3 [1]: Αν $p = 1$ ή $q = 1$, αν δηλαδή ο πίνακας είναι πολυωνυμικό άνυσμα γραμμής ή στήλης τότε $t(s) = \left[t_1(s), t_2(s), ..., t_q(s) \right] \in \mathbb{R}[s]^{1 \times q}$ με $\deg t(s) = \max\limits_{i=1,2,...,q} \{t_i(s)\}$ και $t(s) = \left[t_1(s), t_2(s), ..., t_p(s) \right]^{\mathrm{T}} \mathrm{T}\, 0, t_i(s) \in \mathbb{R}[s]^p, i \in p$ με $\deg t(s) = \max\limits_{i=1,2,...,p} \{t_i(s)\}$.

Ορισμός 5.4 [1]: Έστω $\mathbb{R}$ το σώμα των πραγματικών αριθμών, $\mathbb{R}[s]$ το σύνολο των πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές και ανεξάρτητη μεταβλητή το s και $\mathbb{R}(s)$ το πεδίο των κλασμάτων πάνω στο $\mathbb{R}[s]$:

$$\mathbb{R}(s) := \left\{ t(s) \,/\, t(s) = \frac{n(s)}{d(s)}, n(s), d(s) \in \mathbb{R}[s], d(s) \,\mathrm{T}\, 0 \right\}.$$

Τότε, $\mathbb{R}(s)$ ονομάζεται το **σώμα των πραγματικών ρητών συναρτήσεων**. □

Ορισμός 5.5 [1]: Ας είναι $\mathbb{R}(s)^p, p \in \mathbb{Z}^+ := \{1, 2, ...\}$ το σύνολο των διατεταγμένων p-άδων ρητών συναρτήσεων που θεωρούνται ανύσματα στήλης, για παράδειγμα ας είναι:

$$\mathbb{R}(s)^p := \left\{ t(s) \,/\, t(s) = [t_1(s), t_2(s), ..., t_p(s)]^{\mathrm{T}}, t_i(s) \in \mathbb{R}(s), i \in p \right\}$$

όπου το σύμβολο $^{\mathrm{T}}$ δηλώνει αναστροφή.

Με πρόσθεση δύο στοιχείων:

$$t(s) = [t_1(s), ..., t_p(s)]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}(s)^p \text{ και } u(s) = [u_1(s), ..., u_p(s)]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}(s)^p$$

$$t(s) + u(s) = [t_1(s) + u_1(s), ..., t_p(s) + u_p(s)]^{\mathrm{T}}$$

και με πολλαπλασιασμό ενός στοιχείου $t(s) \in \mathbb{R}(s)^p$ με ένα στοιχείο $a(s) \in \mathbb{R}(s)$ (ρητή συνάρτηση):

$$a(s)t(s) = [a(s)t_1(s), ..., a(s)t_p(s)]^T$$

ο $\mathbb{R}(s)^p$ έχει τη δομή ενός γραμμικού ανυσματικού χώρου και ονομάζεται **πραγματικός ανυσματικός χώρος ρητών συναρτήσεων (real rational vector space)**. Τα στοιχεία $t(s) \in \mathbb{R}(s)^p$ ονομάζονται **ανύσματα πραγματικών ρητών συναρτήσεων**. □

Ένα πεπερασμένο σύνολο $t_i(s) \in \mathbb{R}(s)^p, i = 1, 2, ..., k$ είναι $\mathbb{R}(s)-$ **γραμμικώς εξαρτημένα** αν υπάρχουν k ρητές συναρτήσεις $a_i(s) \in \mathbb{R}(s)$ (με $a_i(s)$ Τ 0 για ένα τουλάχιστον $i = 1, 2, ..., k$) έτσι ώστε:

$$a_1(s)t_1(s) + ... + a_k(s)t_k(s) = 0 \in \mathbb{R}(s)^p$$

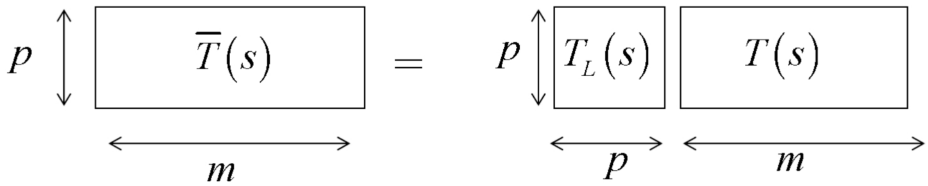
Αντιθέτως, η προηγούμενη εξίσωση συνεπάγεται ότι: $a_i(s) = 0, \forall i \in k$, τότε τα k – στοιχεία $t_i(s) \in \mathbb{R}(s)^p, i = 1, 2, ..., k$ είναι $\mathbb{R}(s)-$ **γραμμικώς ανεξάρτητα**.

Ορισμός 5.6 [1]: Με $\mathbb{R}(s)^{p \times m}$ συμβολίζουμε το σύνολο των $p \times m$ πινάκων των ρητών συναρτήσεων με στοιχεία στο $\mathbb{R}(s)$. Αν $T(s) \in \mathbb{R}(s)^{p \times m}$, τότε ο πίνακας $T(s)$ θα ονομάζεται **πίνακας πραγματικών ρητών συναρτήσεων**. □

Το **rank (βαθμός ή βαθμίδα)** ενός $T(s) \in \mathbb{R}(s)^{p \times m}$ επάνω στο σώμα $\mathbb{R}(s)$, το οποίο συμβολίζουμε με $rank_{\mathbb{R}(s)} T(s)$ είναι ο αριθμός των γραμμικώς $\mathbb{R}(s)-$ ανεξάρτητων γραμμών ή στηλών του $rank_{\mathbb{R}(s)} T_R(s) = m)$ $T(s)$.

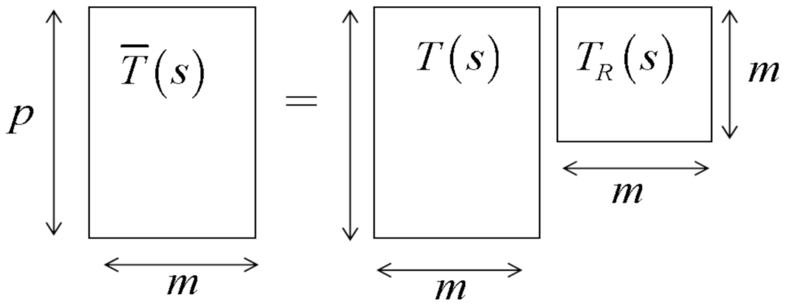
Πρόταση 5.1 [1]: Έστω $T(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}, rank_{\mathbb{R}(s)} T(s) = p$

και $T_L(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times p}, rank_{\mathbb{R}(s)} T(s) = p$ και $\overline{T}(s) := T_L(s)T(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$, τότε αν $\deg \overline{T}(s) = \deg T(s) + \deg T_L(s)$, $\deg \overline{T}(s) \geq \deg T(s)$ και $\deg \overline{T}(s) = \deg T(s)$ αν και μόνο αν $T_L(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times p}$ είναι **αντιστρέψιμος (unimodular)**.



Πρόταση 5.2 [1]: Έστω $T(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}, rank_{\mathbb{R}(s)} T(s) = m$ και

$T_R(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times p}, rank_{\mathbb{R}(s)} T(s) = m$ και $\overline{T}(s) := T_R(s) T(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$, τότε αν $\deg \overline{T}(s) = \deg T(s) + \deg T_R(s)$, $\deg \overline{T}(s) \geq \deg T(s)$ και $\deg \overline{T}(s) = \deg T(s)$ αν και μόνο αν $T_R(s) \in \mathbb{R}[s]^{m \times m}$ είναι **αντιστρέψιμος (unimodular)**.



Έστω $T(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}, rank_{\mathbb{R}(s)} T(s) = \min(p, m)$ και

$$T(s) = \begin{bmatrix} \overline{t}_1(s)^{\cdot\cdot} \\ \overline{t}_2(s)^{\cdot\cdot} \\ \vdots \\ \overline{t}_p(s)^{\cdot\cdot} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1(s) & t_2(s) & \cdots & t_m(s) \end{bmatrix}$$

όπου $\overline{t}_i(s)^{\cdot\cdot} \in \mathbb{R}[s]^{1 \times m}, i = 1, 2, ..., p$ οι γραμμές του $T(s)$ και $t_j(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times 1}, j = 1, 2, ..., m$ οι στήλες του $T(s)$.

Ορισμός 5.7 [1]: Η πολυπλοκότητα των γραμμών $c_r(T)$ (ή αντίστοιχα των στηλών $c_c(T)$) του $T(s)$ (column complexity ή αντίστοιχα row complexity) είναι το άθροισμα των βαθμών των γραμμών (ή αντίστοιχα των στηλών) του $T(s)$, δηλαδή:

$$c_r(T) = \sum_{i=1}^{p} \deg \overline{t}_i(s)^{\cdot\cdot} \quad \text{(ή αντίστοιχα } c_c(T) = \sum_{j=1}^{m} \deg t_j(s) \text{).}$$

Αν $p \le m$ (αντίστοιχα $p \ge m$), και εφόσον κάθε ορίζουσα $p-$ τάξεως (αντίστοιχα $m-$ τάξεως) είναι αλγεβρικό άθροισμα γινομένων πολυωνύμων, ένα από κάθε στήλη (γραμμή) του $T(s)$, ο μέγιστος βαθμός μεταξύ όλων των βαθμών των οριζουσών τάξης p (αντίστοιχα m) του $T(s)$, δηλαδή ο βαθμός $\deg T(s)$ του $T(s)$ δεν μπορεί να υπερβαίνει την πολυπλοκότητα των γραμμών $c_r(T)$ (ή αντίστοιχα $c_c(T)$) του $T(s)$. Δηλαδή, είναι πάντα: $c_r(T) \ge \deg T(s)$ (ή αντίστοιχα $c_c(T) \ge \deg T(s)$). □

5.1.1 Κανονικότητα γραμμών (στηλών) πολυωνυμικού πίνακα

Έστω $T(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times m}, rank_{\mathbb{R}(s)} T(s) = \min(p,m)$ και

$$T(s) = \begin{bmatrix} \bar{t}_1(s)^{\cdot\cdot} \\ \bar{t}_2(s)^{\cdot\cdot} \\ \vdots \\ \bar{t}_p(s)^{\cdot\cdot} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1(s) & t_2(s) & \cdots & t_m(s) \end{bmatrix}$$

όπου $\bar{t}_i(s)^{\cdot\cdot} \in \mathbb{R}[s]^{1\times m}, i = 1,2,...,p$ οι γραμμές του $T(s)$ και $t_j(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times 1}, j = 1,2,...,m$ οι στήλες του $T(s)$.

Έστω $r_i = \deg \bar{t}_i(s)^{\cdot\cdot}, i = 1,2,...,p$ και $q_j = \deg t_j(s), j = 1,2,...,m$ έτσι ώστε:

$$\bar{t}_i(s)^{\cdot\cdot} = \sum\nolimits_{k=0}^{r_i} \bar{t}_{ik}^{\cdot\cdot} s^k = \bar{t}_{ir_i}^{\cdot\cdot} s^{r_i} + \bar{t}_{ir_i-1}^{\cdot\cdot} s^{r_i-1} + ... + \bar{t}_{i1}^{\cdot\cdot} s + \bar{t}_{i0_i}^{\cdot\cdot}, i = 1,2,...,p \quad \text{και}$$

$$t_j(s) = \sum\nolimits_{k=0}^{q_j} t_{jk} s^k = t_{jq_j} s^{q_j} + t_{jq_j-1} s^{q_j-1} + ... + t_{j1} s + t_{j0}, j = 1,2,...,m \ , \text{όπου}$$

$\bar{t}_{ik}^{\cdot\cdot} \in \mathbb{R}^{1\times m}, i = 1,2,...,p, k = 0,1,2,...,r_i$ και $t_{jk} \in \mathbb{R}^{p\times 1}, j = 1,2,...,m, k = 0,1,2,...,q_j$ και

ο $T(s)$ γράφεται ως $T(s) = diag\begin{bmatrix} s^{r_1} & s^{r_2} & \cdots & s^{r_p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{t}_{1r_1}^{\cdot\cdot} \\ \bar{t}_{1r_2}^{\cdot\cdot} \\ \vdots \\ \bar{t}_{1r_p}^{\cdot\cdot} \end{bmatrix} + T_r(s)$

ή ως $T(s) = \begin{bmatrix} t_{1q_1} & t_{2q_2} & \cdots & t_{mq_m} \end{bmatrix} diag\begin{bmatrix} s^{q_1} & s^{q_2} & \cdots & s^{q_m} \end{bmatrix} + T_c(s)$.

Ορισμός 5.8 [1]: Ο πίνακας $\begin{bmatrix} \bar{t}_{1r_1}^{\cdot\cdot} \\ \bar{t}_{1r_2}^{\cdot\cdot} \\ \vdots \\ \bar{t}_{1r_p}^{\cdot\cdot} \end{bmatrix} := \left[T(s)\right]_r^h \in \mathbb{R}^{p\times m}$ ονομάζεται **μεγιστοβάθμιος ως προς τις γραμμές συντελεστής του** $T(s)$. **(highest row degree coefficient matrix).**

Ο πίνακας $\begin{bmatrix} t_{1q_1} & t_{2q_2} & \cdots & t_{mq_m} \end{bmatrix} =: \left[T(s)\right]_c^h \in \mathbb{R}^{p\times m}$ ονομάζεται **μεγιστοβάθμιος ως προς τις στήλες συντελεστής του** $T(s)$. **(highest column degree coefficient matrix).** □

Ορισμός 5.9 [1]: Ο πίνακας $T(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times m}$ ονομάζεται **κανονικός ως προς τις γραμμές του** (ή αντίστοιχα **κανονικός ως προς τις στήλες του**) – (**row (column) proper**) αν ισχύει:

$$rank_{\mathbb{R}} \left[T(s)\right]_r^h = \min\{p,m\} \text{ (ή αντίστοιχα } rank_{\mathbb{R}} \left[T(s)\right]_c^h = \min\{p,m\}\text{).}$$ □

Πρόταση 5.3 [1]: Έστω $T(s) \in \mathbb{R}(s)^{p\times m}, rank_{\mathbb{R}(s)} T(s) = p = (m)$. Ο $T(s)$ είναι row (column) proper αν και μόνο αν η πολυπλοκότητα γραμμών $c_r(T)$ (ή αντίστοιχα στηλών $c_c(T)$) ισούται με το βαθμό $\deg T(s)$. Δηλαδή:

$$T(s) \text{ είναι row proper } \Leftrightarrow c_r(T) = \deg T(s) \text{ ενώ } T(s) \text{ είναι column proper}$$
$$\Leftrightarrow c_c(T) = \deg T(s) \ .$$

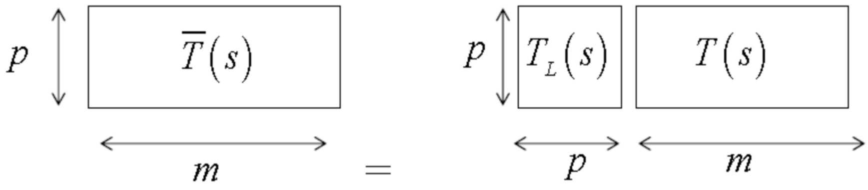
Ορισμός 5.10 [1]: Ας είναι $T(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times p}$ και ας είναι $k \in \mathbb{Z}^+$ ο μέγιστος βαθμός των πολυωνυμικών στοιχείων $t_{ij}(s)$ του $T(s)$. Τότε, ο πολυωνυμικός πίνακας $T(s) = T_k s^k + T_{k-1}s^{k-1} + \cdots + T_1 s + T_0$ όπου $T_i \in \mathbb{R}^{p\times p}, i = 0,1,2,...,k$ θα ονομάζεται **ομαλός (regular)** αν και μόνο αν $rank_{\mathbb{R}} T_k = p$. Διαφορετικά, θα λέγεται **singular.** □

Πρόταση 5.4 [1]: Ας είναι $T(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times p}$ ένας ομαλός πολυωνυμικός πίνακας. Τότε, ο $T(s)$ είναι και row και column proper.

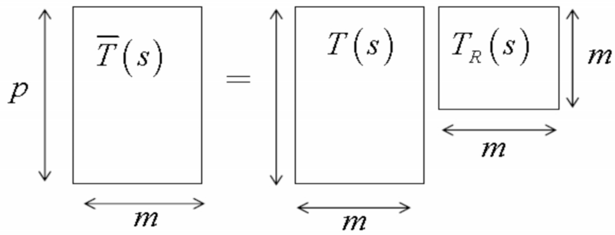
Απόδειξη: $\left[T(s)\right]_r^h = \left[T(s)\right]_c^h = T_k$ και $rank_{\mathbb{R}} T_k = p$. ▲

5.1.2 Αναγωγή πολυωνυμικού πίνακα σε row ή column proper

Πρόταση 5.5 [1]: Έστω $T(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times m}, rank_{\mathbb{R}(s)} T(s) = p(=m)$. Τότε, υπάρχει unimodular $T_L(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times p}$ (ή αντίστοιχα $T_R(s) \in \mathbb{R}[s]^{m\times m}$) τέτοιος ώστε ο πίνακας $\overline{T}(s) := T_L(s)T(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times m}$ να είναι row proper.



(ή αντίστοιχα τέτοιος ώστε ο πίνακας $\overline{T}(s) := T(s)T_R(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times m}$ να είναι column proper.)



Απόδειξη: (για την αναγωγή σε row proper) . Αν ο $T(s)$ δεν είναι row proper, τότε $c_r(T) > \deg T(s)$. Επιλέγουμε τον $T_L(s)$ έτσι ώστε η πολυπλοκότητα των γραμμών του (row complexity) $\overline{T}(s) := T_L(s)T(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times m}$ να ελαττωθεί, δηλαδή: $c_r(\overline{T}) = c_r(T_L(s)T(s)) < c_r(T)$ μέχρι να γίνει ίση με το βαθμό $\deg \overline{T}(s) = \deg T_L(s)T(s) = \deg T(s)$ (ο οποίος παραμένει αναλλοίωτος λόγω του ότι $T_L(s)$ είναι unimodular). Όταν $c_r(\overline{T}) = \deg \overline{T}(s)$, ο $\overline{T}(s)$ θα είναι row proper.

Αν ο $T(s)$ δεν είναι row proper, τότε $rank_{\mathbb{R}} \left[T(s)\right]_r^h < p$ που συνεπάγεται την ύπαρξη ενός μη μηδενικού $a^{\cdot\cdot} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_p \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times p} : a^{\cdot\cdot} \left[T(s)\right]_r^h = 0$.

Έστω $r_i = \deg t_i^{\cdot\cdot}(s), r_0 = \max\{r_i\}$, και έστω:

$$a(s)^{\cdot\cdot} := \begin{bmatrix} a_1 s^{r_0 - r_1} & a_2 s^{r_0 - r_2} & \cdots & a_{i_0} & \cdots & a_2 s^{r_0 - r_p} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}[s]^{1\times p} \Rightarrow \deg a(s)^{\cdot\cdot} < r_0 \text{. Τότε,}$$

$$\hat{t}_{i_0}(s) := a(s)^{\cdot\cdot}\, T(s) = a(s)^{\cdot\cdot} \left[diag\begin{bmatrix} s^{r_1} & \cdots & s^{r_p} \end{bmatrix} \left[T(s)\right]_r^h + T_r(s) \right] =$$

$$= \begin{bmatrix} a_1 s^{r_0 - r_1} & a_2 s^{r_0 - r_2} & \cdots & a_{i_0} & \cdots & a_2 s^{r_0 - r_p} \end{bmatrix} \left[\begin{bmatrix} s^{r_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & s^{r_p} \end{bmatrix} \right] \left[T(s)\right]_r^h + T_r(s) =$$

$$= s^{r_0} a^{\cdot\cdot} \left[T(s)\right]_r^h + a(s)^{\cdot\cdot}\, T_r(s) = a(s)^{\cdot\cdot}\, T_r(s) \text{ και } \hat{r}_0 := \deg \hat{t}_{i_0}(s) < r_0 = \deg t_{i_0}(s). \qquad \blacktriangle$$

Πολλαπλασιασμός του $a(s)^{\cdot\cdot}$ με το $T(s)$ μπορεί να γίνει με πολλαπλασιασμό του $T(s)$ από δεξιά με τον unimodular πίνακα:

$$T_{L_{i_0}}(s) := \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_1 s^{r_0 - r_1} & a_1 s^{r_0 - r_2} & \cdots & a_{i_0} & x & & a_1 s^{r_0 - r_p} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow \text{γραμμή } i_0 \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

Το αποτέλεσμα θα είναι ένας πίνακας $T_{i_0}(s) := T_{L_{i_o}}(s) T(s)$ με γραμμές ίδιες με αυτές του $T(s)$ εκτός της γραμμής i_0. Άρα, θα είναι: $c_r(T_{i_0}) < c_r(T)$ και λόγω του ότι ο $T_{L_{i_0}}(s)$ είναι αντιστρέψιμος (unimodular) θα είναι: $\deg T_{i_0}(s) = \deg T(s)$.

5.1.3 Στοιχειώδεις πράξεις επί των γραμμών (στηλών) ενός πίνακα πραγματικών ρητών συναρτήσεων

Ορίζουμε στοιχειώδεις πράξεις επί των γραμμών (στηλών) ενός πίνακα ρητών συναρτήσεων $T(s) \in \mathbb{R}(s)^{p\times m}$

1. Εναλλαγή των γραμμών (στηλών) i και j του $T(s)$
2. Πολλαπλασιασμός της γραμμής (στήλης) i του $T(s)$ με οποιοδήποτε αντιστρέψιμο στοιχείο a του $\mathbb{R}[s]$ (δηλαδή με οποιοδήποτε μη μηδενικό στοιχείο του $\mathbb{R}$)
3. Πολλαπλασιασμός της γραμμής (στήλης) i του $T(s)$ με μη μηδενικό στοιχείο $a(s)$ του $\mathbb{R}[s]$ και πρόσθεσή της σε οποιαδήποτε άλλη γραμμή (στήλη) j του $T(s)$.

Οι στοιχειώδεις πράξεις επί των γραμμών (στηλών) του $T(s)$ επιτυγχάνονται με πολλαπλασιασμό του $T(s)$ από αριστερά (δεξιά) με τους στοιχειώδεις αντιστρέψιμους πίνακες (elementary unimodular matrices) $U(s)_L \in \mathbb{R}[s]^{p\times p}$ ($U(s)_R \in \mathbb{R}[s]^{m\times m}$) οι οποίοι παράγονται εκτελώντας τις αντίστοιχες πράξεις στο μοναδιαίο πίνακα I_p (ή I_m αντίστοιχα).

Ισχύει, επίσης, ότι κάθε αντιστρέψιμος πίνακας (unimodular) μπορεί να γραφεί ως γινόμενο στοιχειωδών πινάκων.

1. Η εναλλαγή των γραμμών (στηλών) i και j του $T(s)$ επιτυγχάνεται με πολλαπλασιασμό του $T(s)$ από αριστερά (δεξιά) με τον στοιχειώδη αντιστρέψιμο πίνακα (unimodular).

$$U = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow i-\sigma\tau\eta \text{ γραμμή} \\ \\ \leftarrow j-\sigma\tau\eta \text{ γραμμή} \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \cdots & \uparrow \\ i-\text{στη} & & j-\text{στη} \\ \text{στήλη} & & \text{στήλη} \end{array} \end{array}$$

2. Ο πολλαπλασιασμός της γραμμής (στήλης) i του $T(s)$ με οποιοδήποτε αντιστρέψιμο στοιχείο a του $\mathbb{R}[s]$ επιτυγχάνεται με πολλαπλασιασμό του $T(s)$ από αριστερά (δεξιά) με τον στοιχειώδη αντιστρέψιμο πίνακα (unimodular).

$$U=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & a & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}\begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow i-\sigma\tau\eta \text{ γραμμή} \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\uparrow$$

$i-$ στη

στήλη

3. Ο πολλαπλασιασμός της γραμμής (στήλης) i του $T(s)$ με μη μηδενικό στοιχείο $a(s)$ του $\mathbb{R}[s]$ και πρόσθεσή της σε οποιαδήποτε άλλη γραμμή (στήλη) j του $T(s)$ επιτυγχάνεται με πολλαπλασιασμό του $T(s)$ από αριστερά (δεξιά) με τον στοιχειώδη αντιστρέψιμο πίνακα (unimodular).

$$U=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & a(s) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}\begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow i-\sigma\tau\eta \text{ γραμμή} \\ \\ \leftarrow j-\sigma\tau\eta \text{ γραμμή} \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\uparrow \quad \cdots \quad \uparrow$$

$i-$στη $j-$ στη

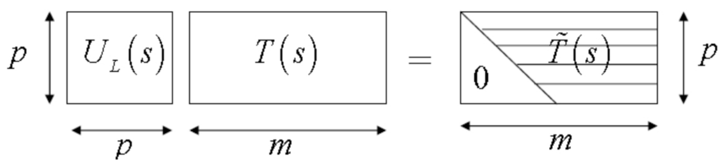
στήλη στήλη

$$U=\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & a(s) & \cdots & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow i-\sigma\tau\eta\ \text{γραμμή}\\ \\ \leftarrow j-\sigma\tau\eta\ \text{γραμμή}\\ \\ \\ \end{array}$$

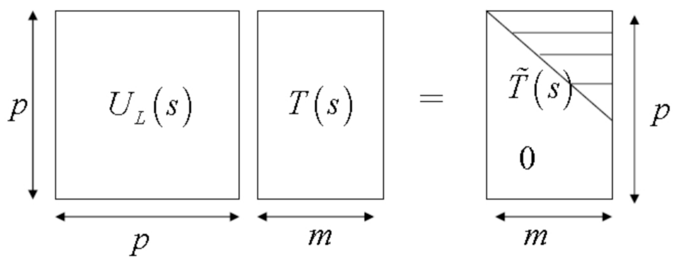
$$\begin{array}{ccc}\uparrow & \cdots & \uparrow\\ i-\text{στη} & & j-\text{στη}\\ \text{στήλη} & & \text{στήλη}\end{array}$$

Θεώρημα 5.1 [1]: Με στοιχειώδεις πράξεις επί των γραμμών (στηλών), κάθε $p\times m$ πολυωνυμικός πίνακας $T(s)\in\mathbb{R}[s]^{p\times m}, rank_{\mathbb{R}(s)}T(s)=\min\{p,m\}$ μπορεί να αναχθεί σε **πάνω (κάτω) τριγωνικό**.

$p\le m$



$p\ge m$



Απόδειξη: Στην πρώτη στήλη επιλέγουμε το στοιχείο με τον ελάχιστο βαθμό και με εναλλαγές γραμμών το φέρνουμε στη θέση (1,1).

Θεωρούμε τις διαιρέσεις των στοιχείων της πρώτης στήλης:

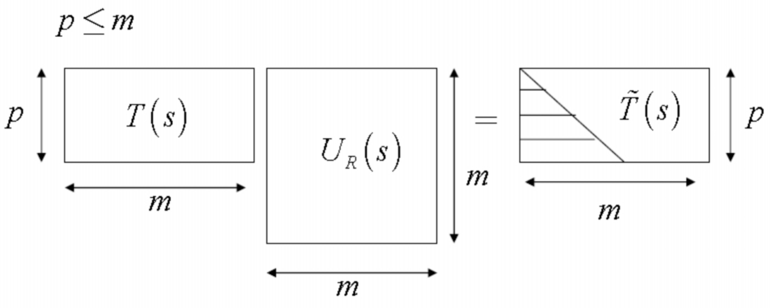
$$t_{i1}(s)=t_{11}(s)q_{i1}(s)+r_{i1}(s), \deg r_{i1}(s)<\deg t_{i1}(s), i=2,3,...,p\ .$$

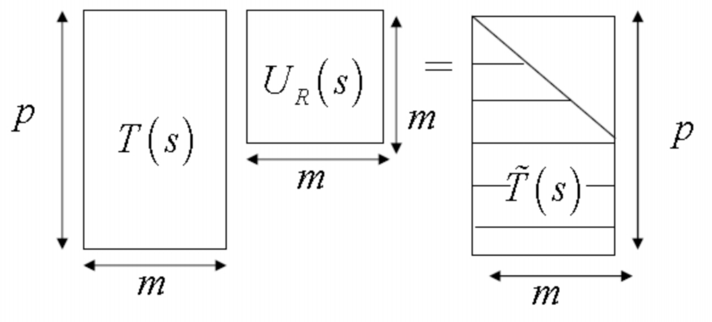
Αφαιρούμε πολλαπλάσια της πρώτης γραμμής από τις άλλες γραμμές και έτσι ελαττώνουμε το βαθμό των στοιχείων $t_{i1}(s), i = 2,3,...,p$ στις θέσεις $(2,1),(3,1),...,(p,1)$ αντικαθιστώντας τα με τα υπόλοιπα $r_{i1}(s)$ των παραπάνω διαιρέσεων.

Αν τα στοιχεία της πρώτης στήλης που θα προκύψει δεν είναι όλα ίσα με το μηδέν, τότε φέρε , με εναλλαγές γραμμών, το στοιχείο με ελάχιστο βαθμό στη θέση (1,1).

Συνεχίζουμε με τον παραπάνω τρόπο για τον $(p-1)\times(m-1)$ υπο-πίνακα που προκύπτει από τις υπόλοιπες γραμμές και στήλες του πίνακα που έχει προκύψει. ▲

Θεώρημα 5.2 [1]: Με στοιχειώδεις πράξεις επί των στηλών κάθε $p \times m$ πολυωνυμικός πίνακας $T(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times m}, rank_{\mathbb{R}(s)} T(s) = \min\{p,m\}$ μπορεί να αναχθεί σε **κάτω τριγωνικό**.





Ορισμός 5.11 [1]: Δύο πολυωνυμικοί πίνακες $T_1(s), T_2(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times m}$ ονομάζονται **αντιστρέψιμα ισοδύναμοι (unimodular equivalent)**, **αριστερά αντιστρέψιμα ισοδύναμοι (left unimodular equivalent)**, **δεξιά αντιστρέψιμα ισοδύναμοι (right unimodular equivalent)** αν και μόνο αν υπάρχουν αντιστρέψιμοι (unimodular) πίνακες $T_L(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times p}$ και $T_R(s) \in \mathbb{R}[s]^{m\times m}$ τέτοιοι ώστε να έχω αντίστοιχα:

$$T_1(s)=T_L(s)T_2(s)T_R(s), T_1(s)=T_L(s)T_2(s), T_1(s)=T_2(s)T_R(s). \quad \square$$

Θεώρημα 5.3 [1]: Η αντιστρέψιμη ισοδυναμία (unimodular equivalent) είναι μια σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο των $p\times m$ πολυωνυμικών πινάκων.

Απόδειξη:

1) Ανακλαστική Ιδιότητα

Έστω $T_1(s)\in\mathbb{R}(s)^{p\times m}$. Ισχύει: $I_pT_1(s)I_m=T_1(s)$.

2) Συμμετρική Ιδιότητα

Έστω $T_1(s),T_2(s)\in\mathbb{R}[s]^{p\times m}$ αντιστρέψιμα ισοδύναμοι (unimodular equilavent) πολυωνυμικοί πίνακες, δηλαδή υπάρχουν αντιστρέψιμοι πίνακες $T_L(s)\in\mathbb{R}[s]^{p\times p}$ και $T_R(s)\in\mathbb{R}[s]^{m\times m}$ τέτοιοι ώστε $T_L(s)T_1(s)T_R(s)=T_2(s)$, τότε θα έχουμε $T_1(s)T_R(s)=T_L^{-1}(s)T_2(s)\Leftrightarrow T_1(s)=T_L^{-1}(s)T_2(s)T_R^{-1}(s)$ όπου $T_R^{-1}(s),T_L^{-1}(s)\in\mathbb{R}[s]^{p\times p}$ γιατί είναι αντιστρέψιμοι.

3) Μεταβατική Ιδιότητα

Έστω $T_1(s),T_2(s)\in\mathbb{R}[s]^{p\times m}$ αντιστρέψιμα ισοδύναμοι (unimodular equilavent) πολυωνυμικοί πίνακες, δηλαδή υπάρχουν αντιστρέψιμοι πίνακες $T_L(s)\in\mathbb{R}[s]^{p\times p}$ και $T_R(s)\in\mathbb{R}[s]^{m\times m}$ τέτοιοι ώστε $T_L(s)T_1(s)T_R(s)=T_2(s)$ και $T_2(s),T_3(s)\in\mathbb{R}[s]^{p\times m}$ αντιστρέψιμα ισοδύναμοι, δηλαδή υπάρχουν αντιστρέψιμοι πίνακες $T_R'(s)\in\mathbb{R}[s]^{m\times m}$ και $T_L'(s)\in\mathbb{R}[s]^{m\times m}$ τέτοιοι ώστε $T_L'(s)T_2(s)T_R'(s)=T_3(s)$, τότε θα έχουμε:

$$T_2(s)T_R'(s)=T_L'^{-1}(s)T_3(s)\Leftrightarrow T_2(s)=T_L'^{-1}(s)T_3(s)T_R'^{-1}.$$

Επομένως, $T_L(s)T_1(s)T_R(s)=T_2(s)\Leftrightarrow T_L(s)T_1(s)T_R(s)=T_L'^{-1}(s)T_3(s)T_R'^{-1}\Leftrightarrow$

$$T_1(s)=T_L^{-1}(s)T_L'^{-1}(s)T_3(s)T_R'^{-1}(s)\Leftrightarrow T_1(s)=T_L^{-1}(s)T_L'^{-1}(s)T_3(s)T_R'^{-1}(s)T_R^{-1}(s)\Leftrightarrow$$

$T_1(s)\left[T_L'(s)T_L(s)\right]^{-1}T_3(s)\left[T_R(s)T_R'(s)\right]^{-1}$ όπου $\left[T_R(s)T_R'(s)\right]^{-1},\left[T_L'(s)T_L(s)\right]^{-1}\in\mathbb{R}[s]^{p\times p}$ γιατί οι πίνακες $T_L(s),T_L'(s),T_R(s),T_R'(s)$ είναι αντιστρέψιμοι. ▲

5.1.4 Smith μορφή ενός πολυωνυμικού πίνακα

Θεώρημα (Gantmacher 1959) 5.4 [1]: [Smith μορφή ενός πολυωνυμικού πίνακα]

Έστω $T(s)\in\mathbb{R}[s]^{p\times m}$ με $rank_{\mathbb{R}(s)}T(s)=r, r\le\min\{p,m\}$. Τότε, ο $T(s)$ είναι αντιστρέψιμος ισοδύναμος με ένα διαγώνιο πίνακα $S_{T(s)}^{C}\in\mathbb{R}[s]^{p\times m}$ που έχει τη μορφή:

$$S_{T(s)}^{C}(s)=diag\left[\varepsilon_1(s),\varepsilon_2(s),...,\varepsilon_r(s),0_{m-r,p-r}\right]. \qquad (5.2)$$

Ο πολυωνυμικός πίνακας $S_{T(s)}^{C}(s)$ ονομάζεται Smith μορφή (Smith form) στο $\mathbb{C}$ του $T(s)$, όπου $\varepsilon_i(s)\in\mathbb{R}[s]$, έχουν ως μεγιστοβάθμιο συντελεστή τη μονάδα, είναι πρώτα μεταξύ προς και ικανοποιούν προς σχέσεις $\varepsilon_i(s)/\varepsilon_{i+1}(s)\forall i\in r-1$.

Απόδειξη: Μεταξύ των στοιχείων $t_{ik}(s)$ του $T(s)$ που δεν είναι ίσα με το μηδέν διαλέγουμε ένα ελαχίστου βαθμού στο s και με κατάλληλες μεταθέσεις των γραμμών και των στηλών πηγαίνουμε αυτό το στοιχείο στη θέση $t_{11}(s)$. Μετά βρίσκουμε τα πηλίκα και τα υπόλοιπα των πολυωνύμων $t_{i1}(s)$ και $t_{1k}(s)$ με το $t_{11}(s)$:

$$t_{i1}(s)=t_{11}(s)q_{i1}(s)+r_{i1}(s), t_{1k}(s)=t_{11}(s)q_{1k}(s)+r_{1k}(s) \text{ για } i=2,3,...,m; k=2,3,...,n.$$

Αν έστω και ένα από τα υπόλοιπα $r_{i1}(s), r_{1k}(s)$ ($i=2,3,...,m, k=2,3,...,n$, π.χ. το $r_{1k}(s)$) δεν είναι ίσο με μηδέν, τότε με αφαίρεση από την $k-$οστή στήλη προς πρώτης στήλης πολλαπλασιασμένη με $q_{1k}(s)$ αντικαθιστούμε το $t_{1k}(s)$ με το υπόλοιπο $r_{1k}(s)$ που είναι μικρότερου βαθμού από το $t_{11}(s)$.

Μετά, ακολουθώντας την ίδια διαδικασία που περιγράψαμε παραπάνω, μπορούμε να μειώσουμε το βαθμό του στοιχείου στην πάνω αριστερή γωνία του πίνακα βάζοντας στη θέση του ένα στοιχείο μικρότερου βαθμού ως προς s.

Αλλά αν όλα τα υπόλοιπα $r_{21}(s),...,r_{m1}(s); r_{12}(s),...,r_{1n}(s)$ είναι ίσα με το μηδέν, τότε αφαιρώντας από την $i-$ οστή γραμμή την πρώτη πολλαπλασιασμένη με $q_{i1}(s)$ για

$i=2,...,m$ και από την $k-$οστή στήλη την πρώτη πολλαπλασιασμένη με $q_{1k}(s)$ για $k=2,...,n$ ανάγουμε τον πολυωνυμικό πίνακα στη μορφή:

$$\begin{Vmatrix} t_{11}(s) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & t_{22}(s) & 0 & t_{2n}(s) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & t_{m2}(s) & \cdots & t_{mn}(s) \end{Vmatrix}. \tag{5.3}$$

Αν έστω και ένα από τα στοιχεία $t_{1k}(s)$ για $i=2,3,...,m;k=2,3,...,n$ δεν είναι διαιρετό χωρίς υπόλοιπο από το $t_{11}(s)$, τότε προσθέτουμε στην πρώτη στήλη, αυτή τη στήλη η οποία περιέχει τέτοια στοιχεία στα οποία καταλήξαμε στην προηγούμενη διαδικασία και μπορούμε να αντικαταστήσουμε ξανά το στοιχείο $t_{11}(s)$ με ένα πολυώνυμο μικρότερου βαθμού.

Εφόσον το αρχικό στοιχείο $t_{11}(s)$ είχε ένα καθορισμένο βαθμό και εφόσον η διαδικασία μείωσης αυτού του βαθμού δεν μπορεί να συνεχιστεί απεριόριστα, πρέπει μετά από ένα πεπερασμένο αριθμό στοιχειωδών πράξεων να πάρουμε έναν πίνακα της μορφής:

$$\begin{Vmatrix} \varepsilon_1(s) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & u_{22}(s) & \cdots & u_{2n}(s) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & u_{m2}(s) & \cdots & u_{mm}(s) \end{Vmatrix} \tag{5.4}$$

στον οποίο όλα τα στοιχεία $u_{ik}(s)$ είναι διαιρετά, χωρίς υπόλοιπο, με το $\varepsilon_1(s)$. Αν μεταξύ αυτών των στοιχείων $u_{ik}(s)$ υπάρχει ένα που δεν είναι ίσο με το μηδέν, τότε συνεχίζουμε την ίδια διαδικασία στον υποπίνακα που προκύπτει από τις γραμμές $2,...,m$ και τις στήλες $2,...,n$ και ανάγουμε τον τελευταίο πίνακα στη μορφή:

$$\begin{Vmatrix} \varepsilon_1(s) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \varepsilon_2(s) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & v_{33}(s) & \cdots & v_{3n}(s) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & v_{m3}(s) & \cdots & v_{mn}(s) \end{Vmatrix}$$

όπου $\varepsilon_2(s)$ είναι διαιρετό, χωρίς υπόλοιπο, με το $t_1(s)$ και όλα τα πολυώνυμα $t_{ik}(s)$ όπου $i = 3,...,m, k = 3,...,n$ είναι διαιρετά χωρίς υπόλοιπο με το $\varepsilon_2(s)$.

Συνεχίζοντας τη διαδικασία, καταλήγουμε σε έναν πίνακα της μορφής:

$$\begin{Vmatrix} \varepsilon_1(s) & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \varepsilon_2(s) & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \varepsilon_s(s) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{Vmatrix} \tag{5.5}$$

όπου τα πολυώνυμα $\varepsilon_1(s), \varepsilon_2(s),...,\varepsilon_s(s)$ με ($s < \min(m,n)$) δεν είναι ίσα με μηδέν και το καθένα είναι διαιρετό με το προηγούμενο.

Πολλαπλασιάζοντας τις πρώτες s γραμμές με τους κατάλληλους μη μηδενικούς παράγοντες, μπορούμε να συμφωνήσουμε ότι οι μεγαλύτεροι συντελεστές των πολυωνύμων $\varepsilon_1(s), \varepsilon_2(s),...,\varepsilon_s(s)$ είναι ίσοι με 1. ▲

Ορισμός 5.12 [1]: Τα πολυώνυμα $\varepsilon_i(s)$ καλούνται **αναλλοίωτα πολυώνυμα (invariant polynomials)** του $T(s)$ και έχουν ως μεγιστοβάθμιο συντελεστή τη μονάδα, είναι μοναδικά ορισμένα από τον $T(s)$ και ικανοποιούν την παρακάτω ιδιότητα

$$\varepsilon_i(s) / \varepsilon_{i+1}(s) \forall i \in r - 1 .$$

Επίσης, ισχύει ότι $\varepsilon_i(s) = \dfrac{\Delta_i(s)}{\Delta_{i-1}(s)}, i = 1,...,r$ όπου $\Delta_0(s) := 1, \Delta_i(s) :=$ ο μέγιστος κοινός διαιρέτης όλων των $i \times i$ ελασσόνων οριζουσών του $T(s)$.Τα πολυώνυμα $\Delta_i(s)$ ονομάζονται **διαιρέτες οριζουσών (determinantal divisors)** του $T(s)$. □

Ορισμός (Gantmacher 1959) 5.13 [1]: Έστω $T(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$. Ορίζουμε ως μηδενικά (zeros) του πολυωνυμικού πίνακα $T(s)$ τα μηδενικά των αναλλοίωτων πολυωνύμων $\varepsilon_i(s)$, όπου $i \in r$, όπως ορίστηκαν στη σχέση (1.2). Αν $\lambda_j \in \mathbb{C}, j = 1,...,\nu$ είναι τα διαφορετικά μεταξύ τους μηδενικά του $T(s)$, τότε τα πολυώνυμα $\varepsilon_i(s)$ μπορούν να γραφούν:

$\varepsilon_i(s) = \prod_{j=1}^{\nu} \left(s-\lambda_j\right)^{m_{ij}}$ και οι όροι $\left(s-\lambda_j\right)^{m_{ij}}$ ονομάζονται **πεπερασμένοι στοιχειώδεις διαιρέτες (finite elementary divisors)** του πίνακα $T(s)$. Επίσης, οι εκθέτες έχουν την ιδιότητα $0 \le m_{1j} \le m_{2j} \le \ldots \le m_{rj}, j = 1,2,...,\nu$. □

5.1.5 Πεπερασμένα ζεύγη Jordan (Finite Jordan pairs)

Θεώρημα 5.5 [1]: Έστω ($C_{s_0} \in \mathbb{R}^{r\times n}, J_{s_0} \in \mathbb{R}^{n\times n}$) ένα ζεύγος πινάκων όπου J_{s_0} είναι ένας πίνακας Jordan με μοναδική ιδιοτιμή s_0 δηλαδή:

$$J_{s_0} = \begin{pmatrix} s_0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s_0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & s_0 & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & s_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n} \tag{5.6}$$

Τότε οι ακόλουθες συνθήκες είναι ικανές και αναγκαίες ώστε το ζεύγος $\left(C_{s_0}, J_{s_0}\right)$ να είναι ένα ζεύγος Jordan του πολυωνυμικού πίνακα $T(s) = T_0 + T_1 s + T_2 s^2 + ... + T_q s^q$ που αντιστοιχεί στο s_0:

1. Η ορίζουσα $T(s)$ να έχει μια ρίζα s_0 πολλαπλότητας n
2. $rank\begin{pmatrix} C_{s_0} \\ C_{s_0}J_{s_0} \\ \vdots \\ C_{s_0}J_{s_0}^{n-1} \end{pmatrix} = n$
3. $T_q C_{s_0} J_{s_0}^q + ... + T_1 C_{s_0} J_{s_0} + T_0 C_{s_0} = 0$

Παίρνοντας ένα ζεύγος Jordan $C_{s_i} \in \mathbb{R}^{r\times n_i}, J_{s_i} \in \mathbb{R}^{n_i\times n_i}$ για κάθε μηδενικό s_i, όπου $i = 1,2,...,k,$ του $T(s)$, ορίζουμε ένα νέο πεπερασμένο ζεύγος Jordan ($C \in \mathbb{R}^{r\times n}, J \in \mathbb{R}^{n\times n}$) του $T(s)$ όπου $C = \begin{pmatrix} C_{s_1} & C_{s_2} & \cdots & C_{s_k} \end{pmatrix}; J = blockdiag\begin{pmatrix} J_{s_1} & J_{s_2} & \cdots & J_{s_k} \end{pmatrix}$ και όπου $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$ είναι το πλήθος των διαφορετικών ιδιοτιμών του $T(s)$.

Σημειώνουμε ότι το ζεύγος $\left(C_{s_0}, J_{s_0}\right)$δεν είναι ορισμένο μοναδικά από τον πολυωνυμικό πίνακα $T(s)$.

Ας υποθέσουμε ότι ο πολυωνυμικός πίνακας $T(s)\in\mathbb{R}[s]^{r\times r}$ έχει k διαφορετικά μηδενικά στο $\mathbb{C}$, $s_1, s_2, ..., s_k$ όπου για να μην υπάρχει δυσκολία έκφρασης υποθέτουμε ότι $s_i \in \mathbb{R} - k_i$ και έστω η Smith μορφή του $T(s)$ στο $\mathbb{C}$ είναι:

$$S_{T(s)}^{\mathbb{C}} = diag\left[\underbrace{1,1,\ldots,1}_{z-1}, f_z(s), f_{z+1}(s), \ldots, f_r(s)\right] \in \mathbb{R}^{r\times r} \tag{5.7}$$

$1 \le z \le r, f_i[s]\in\mathbb{R}[s]$ τα αναλλοίωτα πολυώνυμα του $T(s)$ και $f_i(s)/f_{i+1}(s), i = z, z+1, \ldots, r-1$. Υποθέτουμε ότι κάθε αναλλοίωτο πολυώνυμο $f_z, \ldots f_r(s)$ αναλύεται ως γινόμενο πρώτων μεταξύ τους πολυωνύμων, δηλαδή

$$\begin{aligned} f_z(s) &= (s-s_1)^{\sigma_{1z}}(s-s_2)^{\sigma_{2z}}\cdots(s-s_k)^{\sigma_{kz}} \\ f_{z+1}(s) &= (s-s_1)^{\sigma_{1,z+1}}(s-s_2)^{\sigma_{2,z+1}}\cdots(s-s_k)^{\sigma_{k,z+1}} \\ &\vdots \\ f_r(s) &= (s-s_1)^{\sigma_{1,r}}(s-s_2)^{\sigma_{2,r}}\cdots(s-s_k)^{\sigma_{k,r}} \end{aligned}$$

όπου $0 \le \sigma_{i,z} \le \sigma_{i,z+1} \le \cdots \le \sigma_{i,r}$ δηλαδή $f_j(s) = (s-s_i)^{\sigma_{i,j}}\widehat{f}_j(s), j = z, z+1, \ldots, r$ με $\widehat{f}_j(s_i) \ne 0$.

Οι όροι $(s-s_i)^{\sigma_{i,j}}$ ονομάζονται **πεπερασμένοι στοιχειώδεις διαιρέτες (finite elementary divisors)** του $T(s)$ στο $s = s_i$. Ορίζουμε, επίσης, με n το άθροισμα των πεπερασμένων διαιρετών ως $n := \deg\left[\prod_{j=z}^{r} f_j(s)\right] = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=z}^{r}\sigma_{i,j}$.

5.2 Δομικοί Πίνακες στο $\mathbb{C}$ πινάκων πραγματικών ρητών συναρτήσεων

Έστω $T(s)\in\mathbb{R}(s)^{p\times m}$ με $rank_{\mathbb{R}(s)}T(s) = r \le \min\{p, m\}$ και με Smith – McMillan μορφή:

$$S_{T(s)}^{\mathbb{C}} = \begin{bmatrix} \frac{\varepsilon_1(s)}{\psi_1(s)} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{\varepsilon_2(s)}{\psi_2(s)} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{\varepsilon_r(s)}{\psi_r(s)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}(s)^{p\times m} \qquad (5.8)$$

Πρόταση 5.6 [1]: Οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες

1. Ο $T(s)$ δεν έχει μηδενικά στο $\mathbb{C}$
2. $\varepsilon_i(s)=1 \;\; i=1,2,...,r$ ή ισοδύναμα η μορφή McMillan του $T(s)$ έχει τη μορφή:

$$S_{T(s)}^{\mathbb{C}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\psi_1(s)} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\psi_2(s)} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\psi_r(s)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}(s)^{p\times m} \qquad (5.9)$$

Αν ο $T(s)\in\mathbb{R}[s]^{p\times m}, rank_{\mathbb{R}(s)}T(s)=r$, αν δηλαδή ο $T(s)$ είναι πολυωνυμικός και άρα δεν έχει πόλους στο $\mathbb{C}$ και ο $T(s)$ δεν έχει μηδενικά στο $\mathbb{C}$ τότε:

$$\text{Αν } r=p,\;\; S_{T(s)}^{\mathbb{C}} = \begin{bmatrix} I_p & 0_{p,m-p} \end{bmatrix} \text{ και αν } r=m,\;\; S_{T(s)}^{\mathbb{C}} = \begin{bmatrix} I_m \\ 0_{p-m,m} \end{bmatrix}$$

Ορισμός 5.14 [1]: Ένας πολυωνυμικός πίνακας $T(s)\in\mathbb{R}[s]^{p\times m}, rank_{\mathbb{R}(s)}T(s)=p\,(=m)$ με

$$S_{T(s)}^{\mathbb{C}}=\begin{bmatrix} I_p & 0_{p,m-p}\end{bmatrix} \qquad \left(S_{T(s)}^{\mathbb{C}}=\begin{bmatrix} I_m \\ 0_{p-m,m}\end{bmatrix}\right)$$

ονομάζεται **δεξιά (αριστερά) unimodular**. □

Έστω $T(s)\in\mathbb{R}(s)^{p\times m}, rank_{\mathbb{R}(s)}T(s)=r$ και έστω $T_L(s)\in\mathbb{R}[s]^{p\times p}, T_R(s)\in\mathbb{R}[s]^{m\times m}$ unimodular πίνακες τέτοιοι ώστε:

$$\underset{p\times m}{T(s)}=\underset{p\times p}{T_L(s)}\,\underset{p\times m}{S_{T(s)}^{\mathbb{C}}(s)}\,\underset{m\times m}{T_R(s)}$$

Διαχωρίζουμε τον $T_R(s)$

$$T_R(s)=\begin{bmatrix} T_1(s) \\ T_2(s)\end{bmatrix}\begin{matrix}\updownarrow r \\ \updownarrow m-r\end{matrix}$$

όπου $T_1(s)\in\mathbb{R}[s]^{r\times m}, T_2(s)\in\mathbb{R}[s]^{(m-r)\times m}$ και δεξιά unimodular και γράφουμε την κανονική μορφή Smith – McMillan $S_{T(s)}^{\mathbb{C}}$ του $T(s)$:

$$S_{T(s)}^{\mathbb{C}}=\begin{bmatrix} \frac{\varepsilon_1(s)}{\psi_1(s)} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{\varepsilon_2(s)}{\psi_2(s)} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{\varepsilon_r(s)}{\psi_r(s)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} D(s) & 0_{r,m-r} \\ 0_{p-r,r} & 0_{p-r,m-r}\end{bmatrix}\in\mathbb{R}(s)^{p\times m}$$

$$\text{όπου } D(s) := \begin{bmatrix} \frac{\varepsilon_1(s)}{\psi_1(s)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{\varepsilon_2(s)}{\psi_2(s)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{\varepsilon_r(s)}{\psi_r(s)} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}(s)^{r\times r}$$

Τότε, ο $T(s)$ γράφεται:

$$\underset{p\times m}{T(s)} = \underset{p\times p}{T_L(s)} \underset{p\times m}{S_{T(s)}^{\mathbb{C}}(s)} \underset{m\times m}{T_R(s)} = \underset{p\times p}{T_L(s)} \underset{p\times r}{\begin{bmatrix} D(s) \\ 0_{p-r,r} \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} I_r & 0_{r,m-r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1(s) \\ T_2(s) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \underset{p\times r}{T_{L1}(s)} & \underset{p\times(p-r)}{T_{L2}(s)} \end{bmatrix} \underset{p\times r}{\begin{bmatrix} D(s) \\ 0_{p-r,r} \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} I_r & 0_{r,m-r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1(s) \\ T_2(s) \end{bmatrix}$$

$$= T_{L1}(s) D(s) T_1(s) = \underset{p\times r}{T_L^{\mathbb{C}}(s)} \underset{r\times m}{T_1(s)}$$

όπου $\underset{p\times r}{T_L^{\mathbb{C}}(s)} = T_{L1}(s) D(s) \in \mathbb{R}(s)^{p\times r}$ και η κανονική μορφή Smith – McMillan $S_{T_L^{\mathbb{C}}}^{\mathbb{C}}(s)$ του $T_L^{\mathbb{C}}(s)$ είναι:

$$S_{T_L^{\mathbb{C}}}^{\mathbb{C}}(s) = \begin{bmatrix} \frac{\varepsilon_1(s)}{\psi_1(s)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{\varepsilon_2(s)}{\psi_2(s)} & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{\varepsilon_r(s)}{\psi_r(s)} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \qquad (5.10)$$

Πρόταση 5.7 [1]: Έστω $T(s)\in\mathbb{R}(s)^{p\times m}, rank_{\mathbb{R}(s)}T(s)=r$, τότε ο $T(s)$ παραγοντοποιείται ως εξής $\underset{p\times m}{T(s)}=\underset{p\times r}{T_L^{\mathbb{C}}(s)}\underset{r\times m}{T_1(s)}$ όπου ο $T_L^{\mathbb{C}}(s)\in\mathbb{R}(s)^{p\times r}, rank_{\mathbb{R}(s)}T_L^{\mathbb{C}}(s)=r$ έχει την ίδια δομή μηδενικών και πόλων στο $\mathbb{C}$ με τον $T(s)$ και ο $T_1(s)\in\mathbb{R}[s]^{r\times m}$ είναι δεξιά unimodular.

Πρόταση 5.8 [1]: Έστω $T(s)\in\mathbb{R}(s)^{p\times m}, rank_{\mathbb{R}(s)}T(s)=r$ τότε ο $T(s)$ παραγοντοποιείται ως εξής $\underset{p\times m}{T(s)}=\underset{p\times r}{\hat{T}_1(s)}\underset{r\times m}{T_{\mathbb{R}}^{\mathbb{C}}(s)}$ όπου ο $\underset{r\times m}{T_{\mathbb{R}}^{\mathbb{C}}(s)}\in\mathbb{R}(s)^{r\times m}, rank_{\mathbb{R}(s)}T_R^{\mathbb{C}}(s)=r$ έχει την ίδια δομή μηδενικών και πόλων στο $\mathbb{C}$ με τον $T(s)$ και ο $\hat{T}_1(s)\in\mathbb{R}[s]^{p\times r}$ είναι αριστερά unimodular.

Ορισμός 5.15 [1]: Ο πίνακας $\underset{p\times r}{T_L^{\mathbb{C}}(s)}\in\mathbb{R}(s)^{p\times r}, rank_{\mathbb{R}(s)}T_L^{\mathbb{C}}(s)=r$ ονομάζεται **αριστερός δομικός πίνακας** (left structure matrix) του $T(s)$. Ο πίνακας $\underset{r\times m}{T_R^{\mathbb{C}}(s)}\in\mathbb{R}(s)^{r\times m}, rank_{\mathbb{R}(s)}T_R^{\mathbb{C}}(s)=r$ ονομάζεται **δεξιός δομικός πίνακας** (right structure matrix) στο $\mathbb{C}$ του $T(s)$.

□

Πρόταση 5.9 [1]: Ένας αριστερός δομικός πίνακας στο $\mathbb{C}$ του $T(s)$ μπορεί να προκύψει με μόνο στοιχειώδεις πράξεις επί των στηλών του $T(s)$.

Απόδειξη: Έστω $T(s)\in\mathbb{R}(s)^{p\times m}, rank_{\mathbb{R}(s)}T(s)=r$ και έστω $T_R(s)\in\mathbb{R}[s]^{m\times m}$ unimodular πίνακας τέτοιος ώστε:

$$T(s)T_R(s)=\left[\hat{T}_L(s)\ \ 0_{p,m-r}\right]$$

όπου $\hat{T}_L(s)\in\mathbb{R}[s]^{p\times r}, rank_{\mathbb{R}(s)}\hat{T}_L(s)=r$.

Ισχύει:

$$T(s)=\left[\hat{T}_L(s)\;\; 0_{p,m-r}\right]T_R(s)^{-1}=\left[\hat{T}_L(s)\;\; 0_{p,m-r}\right]\hat{T}_L(s)=$$

$$=\underset{p\times r}{\hat{T}_L(s)}\left[I_r \quad 0_{r,m-r}\right]\begin{bmatrix}T_1(s)\\T_2(s)\end{bmatrix}=\underset{p\times r}{\hat{T}_L(s)}T_1(s) \qquad \blacktriangle$$

Πρόταση 5.10 [1]: Ένας δεξιός δομικός πίνακας στο $\mathbb{C}$ του $T(s)$ μπορεί να προκύψει με μόνο στοιχειώσεις πράξεις επί των γραμμών του $T(s)$.

5.3 Διαιρέτες και μέγιστοι κοινοί διαιρέτες πολυωνυμικών πινάκων

Δεδομένων τριών πολυωνυμικών πινάκων

$A(s)\in\mathbb{R}[s]^{p\times m},\; B(s)\in\mathbb{R}[s]^{p\times q},\;\; C(s)\in\mathbb{R}[s]^{q\times m}$

Λέμε ότι:

Ο $B(s)$ είναι **αριστερός διαιρέτης (left divisor)** του $A(s)$

Ο $C(s)$ είναι **δεξιός διαιρέτης (right divisor)** του $A(s)$

Ο $A(s)$ είναι **αριστερό πολλαπλάσιο (left multiple)** του $C(s)$

Ή ότι ο $A(s)$ είναι **δεξιό πολλαπλάσιο (right multiple)** του $B(s)$.

Θεωρούμε τώρα δύο πολυωνυμικούς πίνακες:

$T_1(s)\in\mathbb{R}[s]^{p\times 1}, T_2(s)\in\mathbb{R}[s]^{p\times t}$ με τον ίδιο αριθμό γραμμών p και έστω $T_L(s)\in\mathbb{R}[s]^{p\times p}$ ένας αριστερός διαιρέτης του $T_1(s)$ και του $T_2(s)$, έστω δηλαδή ότι $T_1(s)=T_L(s)\overline{T}_1(s)$ και $T_2(s)=T_L(s)\overline{T}_2(s)$ όπου $\overline{T}_1(s)\in\mathbb{R}[s]^{p\times 1}, \overline{T}_2(s)\in\mathbb{R}[s]^{p\times t}$.

Ορισμός 5.16 [1]: Ο $T_L(s)\in\mathbb{R}[s]^{p\times p}$ ονομάζεται **κοινός αριστερός διαιρέτης** (common left divisor) των $T_1(s)\in\mathbb{R}[s]^{p\times 1}, T_2(s)\in\mathbb{R}[s]^{p\times t}$. Αν ο $T_L(s)\in\mathbb{R}[s]^{p\times p}$ είναι **δεξιό**

πολλαπλάσιο κάθε κοινού αριστερού διαιρέτη $\overline{T}_L(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times p}$ των $T_1(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times 1}, T_2(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times t}$, αν δηλαδή $T_L(s) = \overline{T}_L(s)T_3(s)$ για κάποιο $T_3(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times p}$, τότε ο $T_L(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times p}$ ονομάζεται **μέγιστος κοινός διαιρέτης** (greatest common divisor) των $T_1(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times 1}, T_2(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times t}$. □

Θεωρούμε τώρα δύο πολυωνυμικούς πίνακες $T_1(s) \in \mathbb{R}[s]^{l\times m}, T_2(s) \in \mathbb{R}[s]^{t\times m}$ με τον ίδιο αριθμό στηλών m και έστω $T_R(s) \in \mathbb{R}[s]^{m\times m}$ ένας δεξιός διαιρέτης του $T_1(s)$ και του $T_2(s)$, έστω δηλαδή ότι $T_1(s) = \overline{T}_1(s)T_R(s)$ και $T_2(s) = \overline{T}_2(s) \in \mathbb{R}[s]^{t\times m}$.

Ορισμός 5.17 [1]: Ο $T_R(s) \in \mathbb{R}[s]^{m\times m}$ ονομάζεται **κοινός δεξιός διαιρέτης** (right common divisor) των $T_1(s) \in \mathbb{R}[s]^{l\times m}, T_2(s) \in \mathbb{R}[s]^{t\times m}$. Αν ο $T_R(s) \in \mathbb{R}[s]^{m\times m}$ είναι **αριστερό πολλαπλάσιο** κάθε κοινού δεξιού διαιρέτη $\overline{T}_R(s) \in \mathbb{R}[s]^{m\times m}$ των $T_1(s) \in \mathbb{R}[s]^{l\times m}$, $T_2(s) \in \mathbb{R}[s]^{t\times m}$, αν δηλαδή $T_R(s) = T_3(s)\overline{T}_R(s)$ για κάποιο $T_3(s) \in \mathbb{R}[s]^{m\times m}$, τότε ο $T_R(s) \in \mathbb{R}[s]^{m\times m}$ ονομάζεται **μέγιστος κοινός δεξιός διαιρέτης (greatest common right divisor)** των $T_1(s) \in \mathbb{R}[s]^{l\times m}, T_2(s) \in \mathbb{R}[s]^{t\times m}$. □

Εξαγωγή μέγιστου κοινού αριστερού ή δεξιού διαιρέτη δύο πολυωνυμικών πινάκων.

Εξαγωγή μέγιστου κοινού αριστερού διαιρέτη δύο πινάκων με τον ίδιο αριθμό γραμμών.

$$T_1(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times l}, T_2(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times t}$$

Έστω με $l + t =: m \geq p = rank_{\mathbb{R}(s)}\begin{bmatrix} T_1(s) & T_2(s) \end{bmatrix}$

Έστω $T(s) := \begin{bmatrix} T_1(s) & T_2(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times m} \end{bmatrix}$ και έστω $T_R(s) \in \mathbb{R}[s]^{m\times m}$ unimodular τέτοιος ώστε $T(s)T_R(s) = \begin{bmatrix} T_{GL}(s) & 0_{p,m-p} \end{bmatrix}$ όπου $T_{GL}(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times p}, rank_{\mathbb{R}(s)}T_{GL}(s) = p$.

Έστω:

$$T_R(s)^{-1} =: \widehat{T}(s) = \begin{bmatrix} \widehat{T}_1(s) & \widehat{T}_2(s) \\ \widehat{T}_3(s) & \widehat{T}_4(s) \end{bmatrix}$$

Από την:

$$T(s)T_R(s) = \left[T_{GL}(s) \;\; 0_{p,m-p} \right] \Rightarrow T(s) = \left[T_{GL}(s) \;\; 0_{p,m-p} \right] T_R(s)^{-1}$$

$$= T_{GL}(s)\left[I_p \qquad 0_{p,m-p} \right] \begin{bmatrix} \widehat{T}_1(s) & \widehat{T}_2(s) \\ \widehat{T}_3(s) & \widehat{T}_4(s) \end{bmatrix} = T_{GL}(s)\left[\widehat{T}_1(s) \;\; \widehat{T}_2(s) \right]$$

όπου $\left[\widehat{T}_1(s) \;\; \widehat{T}_2(s) \right] \in \mathbb{R}[s]^{p\times m}$ δεξιός unimodular.

Δηλαδή,

$$T_1(s) = T_{GL}(s)\widehat{T}_1(s), T_2(s) = T_{GL}(s)\widehat{T}_2(s)$$

και άρα ο $T_{GL}(s)$ είναι κοινός διαιρέτης των $T_1(s), T_2(s)$.

Αν χωρίσουμε τώρα τον:

$$T_R(s) = \begin{bmatrix} T_{R1}(s) & T_{R2}(s) \\ T_{R3}(s) & T_{R4}(s) \end{bmatrix}$$

Από την $T(s)T_R(s) = \left[T_{GL}(s) \;\; 0_{p,m-p} \right]$, $T(s)\begin{bmatrix} T_{R1}(s) & T_{R2}(s) \\ T_{R3}(s) & T_{R4}(s) \end{bmatrix} = \left[T_{GL}(s) \;\; 0_{p,m-p} \right]$ έχουμε:

$$T_1(s)T_{R1}(s) + T_2(s)T_{R3}(s) = T_{GL}(s) \tag{5.11}$$

Έστω τώρα $\overline{T}_L(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times p}$ ένας άλλος κοινός αριστερός διαιρέτης των $T_1(s)$ και $T_2(s)$, έστω δηλαδή:

$$T_1(s) = \overline{T}_L(s)R(s) \qquad T_2(s) = \overline{T}_L(s)G(s) \tag{5.12}$$

όπου $R(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times l}, G(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times t}$

Από την (5.11) και (5.12) έχουμε:

$$T_1(s)T_{R1}(s)+T_2(s)T_{R3}(s)=$$

$$=\overline{T}_L(s)\left[R(s)T_{R1}(s)+G(s)T_{R3}(s)\right]=T_{GL}(s) \tag{5.13}$$

η οποία σημαίνει ότι ο $T_{GL}(s)$ είναι δεξιό πολλαπλάσιο κάθε αριστερού διαιρέτη $\overline{T}_L(s)$ των $T_1(s)$ και $T_2(s)$ και άρα βάσει του ορισμού ότι ι $T_{GL}(s)$ είναι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των $T_1(s)$ και $T_2(s)$.

5.4 Πολυωνυμικοί πίνακες πρώτοι μεταξύ τους

Ορισμός 5.18 [1]: Δύο πολυώνυμα $a(s)\in\mathbb{R}[s], b(s)\in\mathbb{R}[s]$ ονομάζονται **πρώτα μεταξύ τους (coprime)** αν ο μέγιστος κοινός διαιρέτης τους είναι μία σταθερά $(c\in\mathbb{R})c\neq 0$ ή ισοδύναμα δύο πολυώνυμα $a(s)\in\mathbb{R}[s], b(s)\in\mathbb{R}[s]$ ονομάζονται πρώτα μεταξύ τους αν δεν έχουν μη τετριμμένους (δηλαδή πολυωνυμικούς) διαιρέτες.

Παράδειγμα 5.1: Τα πολυώνυμα

$$a(s)=s^2+3s+2=(s+1)(s+2)$$

$$b(s)=s^2+8s^2+19s+12=(s+1)(s+3)(s+4)$$

Δεν είναι πρώτα μεταξύ τους γιατί έχουν τον κοινό διαιρέτη το πολυώνυμο $(s+1)$. □

Ισοδύναμα, δύο πολυώνυμα $a(s)\in\mathbb{R}[s], b(s)\in\mathbb{R}[s]$ είναι πρώτα μεταξύ τους αν δεν έχουν κοινά μηδενικά, (δηλαδή οι εξισώσεις $a(s)=0,\ b(s)=0$ δεν έχουν κοινές ρίζες). □

Βάσει των μέχρι τώρα αναφερθέντων η παραπάνω ιδέα γενικεύεται στην περίπτωση πολυωνυμικών πινάκων με τον παρακάτω ορισμό.

Ορισμός 5.19 [1]: Δύο πολωνυμικοί πίνακες με τον ίδιο αριθμό γραμμών p $T_1(s)\in\mathbb{R}[s]^{p\times l}, T_2(s)\in\mathbb{R}[s]^{p\times t}$ και $l+t\geq p=rank_{\mathbb{R}(s)}\left[T_1(s)\quad T_2(s)\right]$ ονομάζονται

αριστερά πρώτοι (left coprime) αν ο μέγιστος αριστερός κοινός διαιρέτης $T_{GL}(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times p}$ των $T_1(s)$ και $T_2(s)$ είναι unimodular. □

Ορισμός 5.20 [1]: Δύο πολυωνυμικοί πίνακες με τον ίδιο αριθμό στηλών m, $T_1(s) \in \mathbb{R}[s]^{l\times m}, T_2(s) \in \mathbb{R}[s]^{t\times m}$ και $l+t \geq m = rank_{\mathbb{R}(s)} \begin{bmatrix} T_1(s) \\ T_2(s) \end{bmatrix}$ ονομάζονται **δεξιά πρώτοι (right comprime)** αν ο μέγιστος δεξιός κοινός διαιρέτης $T_{GR}(s) \in \mathbb{R}[s]^{m\times m}$ των $T_1(s)$ και $T_2(s)$ είναι unimodular.

□

Ο παραπάνω ορισμός δίνει λαβή στην παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 5.11 [1]: Έστω:

$$T_1(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times l}, T_2(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times t}, m := l+t \geq p = rank_{\mathbb{R}(s)} \begin{bmatrix} T_1(s) & T_2(s) \end{bmatrix}$$

Οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες

1. $T_1(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times l}, T_2(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times t}$ είναι αριστερά πρώτοι.

2. Ο πολυωνυμικός πίνακας $T(s) := \begin{bmatrix} T_1(s) & T_2(s) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}[s]^{p\times m}$ δεν έχει μηδενικά στο $\mathbb{C}$.

3. Υπάρχει unimodular πίνακας $\overline{T}_R(s) \in \mathbb{R}[s]^{m\times m}$ τέτοιος ώστε:

$$T(s)\overline{T}_R(s) = \begin{bmatrix} I_p & 0_{p,m-p} \end{bmatrix} = S^{\mathbb{C}}_{T(s)}$$

4. $rank_{\mathbb{C}} \begin{bmatrix} T_1(s_0) & T_2(s_0) \end{bmatrix} = p \forall s_0 \in \mathbb{C}$

5. Υπάρχουν πίνακες $X(s) \in \mathbb{R}[s]^{l\times p}, Y(s) \in \mathbb{R}[s]^{t\times p}$ τέτοιοι ώστε:

$$T_1(s)X(s) + T_2(s)Y(s) = I_p$$

6. Υπάρχουν πίνακες $T_3(s)\mathbb{R}[s]^{(m-p)\times l}$, $T_4(s)\mathbb{R}[s]^{(m-p)\times t}$ τέτοιοι ώστε ο πίνακας

$$\begin{bmatrix} T_1(s) & T_2(s) \\ T_3(s) & T_3(s) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}[s]^{m\times m} \text{ είναι unimodular.}$$

5.5 Διοφαντικές Εξισώσεις πολυωνυμικών πινάκων

Έστω η εξίσωση:

$$X(s)A(s)+Y(s)B(s)=C(s) \tag{5.14}$$

όπου οι πολυωνυμικοί πίνακες $A(s)\in\mathbb{R}[s]^{p\times m}, B(s)\in\mathbb{R}[s]^{q\times m}, C(s)\in\mathbb{R}[s]^{l\times m}$ δίνονται και άγνωστοι είναι οι πολυωνυμικοί πίνακες $X(s)\in\mathbb{R}[s]^{l\times m}, Y(s)\in\mathbb{R}[s]^{l\times m}$ που την ικανοποιούν. Η (5.14) ονομάζεται **Διοφαντική εξίσωση πολυωνυμικών πινάκων. (polynomial matrix Diophantine equation)**.

Η (5.14) γράφεται:

$$\begin{bmatrix} X(s) & Y(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A(s) \\ B(s) \end{bmatrix} = C(s)$$

και έχουμε το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα (Διόφαντος ο Αλεξανδρεύς 240 μ.Χ.) 5.6 [1]: Η εξίσωση (5.14) έχει λύση $X(s)\in\mathbb{R}[s]^{l\times p}, Y(s)\in\mathbb{R}[s]^{l\times q}$ αν και μόνο αν κάθε μέγιστος δεξιός κοινός διαιρέτης (ΜΔΚΔ) $G_L(s)\in\mathbb{R}[s]^{m\times m}$ των $A(s)\in\mathbb{R}[s]^{p\times m}, B(s)\in\mathbb{R}[s]^{q\times m}$ είναι δεξιός διαιρέτης του $C(s)\in\mathbb{R}[s]^{l\times m}$.

Απόδειξη:

($\Rightarrow$) Αν κάθε μέγιστος δεξιός κοινός διαιρέτης $G_L(s)\in\mathbb{R}[s]^{m\times m}$ των $A(s)\in\mathbb{R}[s]^{p\times m}, B(s)\in\mathbb{R}[s]^{q\times m}$ είναι δεξιός διαιρέτης του $C(s)\in\mathbb{R}[s]^{l\times m}$ τότε η (Δ) έχει λύση $X(s)\in\mathbb{R}[s]^{l\times p}, Y(s)\in\mathbb{R}[s]^{l\times q}$). Έστω $G_L(s)\in\mathbb{R}[s]^{m\times m}$ ένας ΜΔΚΔ των $A(s)\in\mathbb{R}[s]^{p\times m}, B(s)\in\mathbb{R}[s]^{q\times m}$. Τότε υπάρχει unimodular $T_L(s)\in\mathbb{R}[s]^{(p+q)\times(p+q)}$:

$$T_L(s)\begin{bmatrix} A(s) \\ B(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_R(s) \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5.15}$$

και αν χωρίσουμε τον $T_L(s)$

$$T_L(s)\begin{bmatrix} T_1(s) & T_2(s) \\ T_3(s) & T_4(s) \end{bmatrix}$$

Τότε η (5.15) δίνει:

$$\begin{bmatrix} T_1(s) & T_2(s) \\ T_3(s) & T_4(s) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A(s) \\ B(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_R(s) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$T_1(s)A(s)+T_2(s)B(s)=G_R(s)$$

$$T_3(s)A(s)+T_4(s)T_4(s)=0$$

Εξ' υποθέσεως, ο $G_L(s)\in\mathbb{R}[s]^{m\times m}$ είναι μέγιστος κοινός διαιρέτης των $A(s)\in\mathbb{R}[s]^{p\times m}, B(s)\in\mathbb{R}[s]^{q\times m}$, δηλαδή $A(s)=A_0(s)G_R(s)$ $B(s)=B_0(s)G_R(s)$ και είναι δεξιός διαιρέτης του $C(s)\in\mathbb{R}[s]^{l\times m}$, δηλαδή $C(s)=C_0(s)G_R(s)$.

Πολλαπλασιάζοντας από αριστερά την $T_1(s)A(s)+T_2(s)B(s)=G_R(s)$ επί $C_0(s)$ παίρνουμε:

$$C_0(s)T_1(s)A(s)+C_0(s)T_2(s)B(s)=C_0(s)G_R(s)=C(s)$$

και άρα $X(s):=C_0(s)T_1(s), Y(s):=C_0(s)T_2(s)$ είναι μία λύση της (5.14).

($\Leftarrow$) Δηλαδή αν η (5.14) έχει μια λύση $X(s)\in\mathbb{R}[s]^{l\times p}, Y(s)\in\mathbb{R}[s]^{l\times q}$, τότε κάθε μέγιστος δεξιός κοινός διαιρέτης $G_R(s)$ των $A(s)\in\mathbb{R}[s]^{p\times m}, B(s)\in\mathbb{R}[s]^{q\times m}$ είναι δεξιός κοινός διαιρέτης του $C(s)$.

Εξ' υποθέσεως η (5.14) ισχύει :

$$X(s)A(s)+Y(s)B(s)=C(s) \tag{5.14}$$

Έστω $G_R(s)$ μέγιστος δεξιός κοινός διαιρέτης των $A(s)\in\mathbb{R}[s]^{p\times m}, B(s)\in\mathbb{R}[s]^{q\times m}$, έστω δηλαδή: $A(s)=A_0(s)G_R(s),\ \ B(s)=B_0(s)G_R(s)$

Τότε, η (5.14) γράφεται:

$$X(s)A_0(s)G_R(s)+Y(s)B_0(s)G_R(s)=C(s)$$

ή

$$\left[X(s)A_0(s)+Y(s)B_0(s)\right]G_R(s)=C(s)$$

που σημαίνει ότι $G_R(s)$ είναι δεξιός διαιρέτης του $C(s)$. ▲

Πόρισμα 5.4 [1]: Αν οι $A(s)\in\mathbb{R}[s]^{p\times m}$, $B(s)\in\mathbb{R}[s]^{q\times m}$ είναι δεξιά πρώτοι, τότε η (5.14) έχει πάντα λύση $X(s)\in\mathbb{R}[s]^{l\times p}, Y(s)\in\mathbb{R}[s]^{l\times q}$.

Απόδειξη: Αν $A(s)$ και $B(s)$ είναι δεξιά πρώτοι τότε ο $G_R(s)$ θα είναι αντιστρέψιμος (unimodular) και ως εκ τούτου $G_R(s)^{-1}\in\mathbb{R}[s]^{m\times m}$, έτσι ώστε από την σχέση $T_1(s)A(s)+T_2(s)B(s)=G_R(s)$ θα είναι: $G_R(s)^{-1}T_1(s)A(s)+G_R(s)^{-1}T_2(s)B(s)=I_m$. Πολλαπλασιάζοντας την τελευταία σχέση με τον $C(s)$ από δεξιά καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι:

$$X(s):=C(s)G_R(s)^{-1}T_1(s)\in\mathbb{R}[s]^{l\times p}$$

$$Y(s):=C(s)G_R(s)^{-1}T_2(s)\in\mathbb{R}[s]^{l\times p}$$

▲

Πόρισμα 5.5 [1]: Αν οι $A(s)\in\mathbb{R}[s]^{p\times m}, B(s)\in\mathbb{R}[s]^{q\times m}$ είναι πρώτοι μεταξύ τους και $X(s)\in\mathbb{R}[s]^{l\times p}, Y(s)\in\mathbb{R}[s]^{l\times q}$ είναι μια λύση της (5.14), τότε η γενική λύση της (5.14) είναι η:

$$X_0(s) = X(s) - T(s)B_0(s)$$

$$Y_0(s) = Y(s) + T(s)A_0(s)$$

όπου $T(s) \in \mathbb{R}[s]^{l\times[(p+q)-\sigma]}$ και

$$\left[B_2(s) - A_2(s)\right] \in \mathbb{R}[s]^{[(p+q)-\sigma]\times(p+q)}$$

$$rank_{\mathbb{R}(s)}\left[B_2(s) - A_2(s)\right] = \left[(p+q)-\sigma\right]$$

$$\left[B_2(s) - A_2(s)\right]\begin{bmatrix} A(s) \\ B(s) \end{bmatrix} = 0$$

Άρα, αν η (5.14) έχει μια λύση τότε έχει απειρία λύσεων οι οποίες παραμετροποιούνται μέσω του αυθαίρετου πολυωνυμικού πίνακα $T(s)$.

Παραμετροποίηση των λύσεων – Γενική λύση

Εξετάζουμε τώρα τη γενική λύση μιας Διοφαντικής εξίσωσης πολυωνυμικών πινάκων. Υποθέτουμε ότι η αναγκαία και ικανή συνθήκη του παραπάνω θεωρήματος ισχύει και ας είναι $X(s), Y(s)$ μια λύση της Διοφαντικής εξίσωσης $X(s)A(s)+Y(s)B(s)=C(s)$.

Ας είναι, επίσης, $X_0(s) \neq X(s)$ και $Y_0(s) \neq Y(s)$ μια άλλη λύση της έτσι ώστε:

$$X_0(s)A(s)+Y_0(s)B(s)=C(s).$$

Από την $X(s)A(s)+Y(s)B(s)=C(s)$ και την τελευταία εξίσωση καταλήγουμε ότι:

$$\left[X(s)-X_0(s)\right]A(s)+\left[Y(s)-Y_0(s)\right]B(s)=0 \quad \text{ή}$$

$$\left[X(s)-X_0(s), Y(s)-Y_0(s)\right]\begin{bmatrix} A(s) \\ B(s) \end{bmatrix} = 0 \tag{5.15}$$

Ας είναι $rank_{\mathbb{R}(s)}\begin{bmatrix} A(s) \\ B(s) \end{bmatrix} = \sigma \leq m \leq p+q$ και ας θεωρήσουμε τον αριστερό πυρήνα του $\begin{bmatrix} A(s) \\ B(s) \end{bmatrix}$ έτσι ώστε ο ανυσματικός χώρος των $(p+q)-$ άδων των ρητών συναρτήσεων να δίνεται ανύσματα γραμμών:

$z_i(s) = [z_{i1}(s), z_{i2}(s), \dots, z_{i(p+q)}(s)], z_{ij}(s) \in \mathbb{R}(s), j = 1, 2, \dots, (p+q)$, τέτοια ώστε

$$z_i(s)\begin{bmatrix} A(s) \\ B(s) \end{bmatrix} = 0_{1,m} \tag{5.16}$$

Τώρα, ο αριθμός των γραμμικά ανεξάρτητων $z_i(s) \in \mathbb{R}(s)^{1\times(p+q)}$ που ικανοποιούν την παραπάνω εξίσωση είναι $(p+q)-\sigma$.

Ας είναι $Z(s) \in \mathbb{R}[s]^{[(p+q)-\sigma]\times[p+q]}$ ένας πολυωνυμικός πίνακας του οποίου οι $(p+q)-\sigma$ γραμμές παράγουν τον αριστερό πυρήνα του $\begin{bmatrix} A(s) \\ B(s) \end{bmatrix}$ δηλαδή,

$$Z(s)\begin{bmatrix} A(s) \\ B(s) \end{bmatrix} = 0_{[(p+q)-\sigma],m} \text{ και}$$

$$rank_{\mathbb{R}(s)} Z(s) = (p+q) - \sigma .$$

Από τη σχέση $[X(s) - X_0(s)]A(s) + [Y(s) - Y_0(s)]B(s) = 0$ και τους παραπάνω ισχυρισμούς προκύπτει απλά ότι ο πίνακας $[X(s) - X_0(s), Y(s) - Y_0(s)]$ μπορεί να γραφτεί και ως:

$$[X(s) - X_0(s), Y(s) - Y_0(s)] = T(s)Z(s) \tag{5.17}$$

για κάποιον $l \times [(p+q)-\sigma]$ πολυωνυμικό πίνακα $T(s)$.

Η $\left[X(s)-X_0(s),Y(s)-Y_0(s)\right]=T(s)Z(s)$, καθώς και η

$\left[X(s)-X_0(s)\right]A(s)+\left[Y(s)-Y_0(s)\right]B(s)=0$ δίνουν τώρα ότι:

$$T(s)Z(s)\begin{bmatrix}A(s)\\B(s)\end{bmatrix}=0_{1,m} \tag{5.18}$$

Διαμερίζοντας τον $Z(s)$ ως $Z(s)=\left[\underset{\leftarrow p\rightarrow}{B_2(s)}\quad \underset{\leftarrow q\rightarrow}{-A_2(s)}\right]\updownarrow (p+q)-\sigma$ δίνει ότι:

$$\left[X(s)-X_0(s),Y(s)-Y_0(s)\right]=T(s)\left[B_2(s),-A_2(s)\right] \tag{5.19}$$

και έτσι προκύπτει ότι η γενική λύση της (5.14) δίνεται από τις σχέσεις:

$$X_0(s)=X(s)-T(s)B_2(s) \tag{5.20}$$

$$Y_0(s)=Y(s)-T(s)A_2(s) \tag{5.21}$$

5.6 Κλασματικές περιγραφές πινάκων ρητών συναρτήσεων

Έστω $T(s)\in\mathbb{R}(s)^{p\times m}$ και έστω $U_L(s)\in\mathbb{R}[s]^{p\times p}, U_R(s)\in\mathbb{R}[s]^{m\times m}$ unimodular πίνακες τέτοιοι ώστε:

$$U_L(s)T(s)U_R(s)=S_{T(s)}^{\mathbb{C}}$$

είναι η Smith - McMillan μορφή του $T(s)$.

$$S_{T(s)}^{\mathbb{C}}=\begin{bmatrix} \frac{\varepsilon_1(s)}{\psi_1(s)} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{\varepsilon_2(s)}{\psi_2(s)} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{\varepsilon_r(s)}{\psi_r(s)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Η $S_{T(s)}^{\mathbb{C}}$ μπορεί να εκφραστεί σαν γινόμενο δύο πινάκων ρητών συναρτήσεων και κατά δύο τρόπους:

$$=\begin{bmatrix} \psi_1(s) & 0 & \cdots & 0 & 0_{1,p-r} \\ 0 & \psi_2(s) & \cdots & 0 & 0_{1,p-r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \psi_r(s) & 0_{1,p-r} \\ 0_{1,p-r} & 0_{1,p-r} & \cdots & 0_{1,p-r} & I_{p-r} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \varepsilon_1(s) & 0 & \cdots & 0 & 0_{1,m-r} \\ 0 & \varepsilon_2(s) & \cdots & 0 & 0_{1,m-r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \varepsilon_r(s) & 0_{1,m-r} \\ 0_{p-r,1} & 0_{p-r,1} & \cdots & 0_{p-r,1} & I_{p-r,m-r} \end{bmatrix}$$

$$=\underbrace{\begin{bmatrix} \Psi(s) & 0_{r,p-r} \\ 0_{p-r,r} & I_{p-r} \end{bmatrix}^{-1}}_{p\times p} \underbrace{\begin{bmatrix} E(s) & 0_{r,m-r} \\ 0_{p-r,r} & 0_{p-r,m-r} \end{bmatrix}}_{p\times m} = \underbrace{\begin{bmatrix} E(s) & 0_{r,m-r} \\ 0_{p-r,r} & 0_{p-r,m-r} \end{bmatrix}}_{p\times m} \underbrace{\begin{bmatrix} \Psi(s) & 0_{r,m-r} \\ 0_{m-r,r} & I_{m-r} \end{bmatrix}^{-1}}_{m\times m}$$

Όπου:

$$\Psi(s):=\begin{bmatrix} \psi_1(s) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \psi_2(s) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \psi_r(s) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}[s]^{r\times r}$$

$$\mathrm{E}(s):=\begin{bmatrix} \varepsilon_1(s) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \varepsilon_2(s) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \varepsilon_r(s) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}[s]^{r\times r}$$

και άρα

$$U_L(s)T(s)U_R(s)=S_{T(s)}^{\mathbb{C}}=\underbrace{\begin{bmatrix}\Psi(s) & 0_{r,p-r}\\ 0_{r,p-r} & I_{p-r}\end{bmatrix}^{-1}}_{p\times p}\underbrace{\begin{bmatrix}E(s) & 0_{r,m-r}\\ 0_{p-r,r} & 0_{p-r,m-r}\end{bmatrix}}_{p\times m}$$

$$=\underbrace{\begin{bmatrix}E(s) & 0_{r,m-r}\\ 0_{p-r,r} & 0_{p-r,m-r}\end{bmatrix}}_{p\times m}\underbrace{\begin{bmatrix}\Psi(s) & 0_{r,m-r}\\ 0_{m-r,r} & I_{m-r}\end{bmatrix}^{-1}}_{m\times m}$$

και αν

$U_L(s)^{-1}=T_L(s)\in\mathbb{R}[s]^{p\times p}, U_R(s)^{-1}=T_R(s)\in\mathbb{R}[s]^{m\times m}$ unimodular, τότε

$$T(s)=T_L(s)\underbrace{\begin{bmatrix}\Psi(s) & 0_{r,p-r}\\ 0_{p-r,r} & I_{p-r}\end{bmatrix}^{-1}}_{p\times p}\underbrace{\begin{bmatrix}E(s) & 0_{r,m-r}\\ 0_{p-r,r} & 0_{p-r,m-r}\end{bmatrix}}_{p\times m}T_R(s)$$

$$=\left\{\begin{bmatrix}\Psi(s) & 0_{r,p-r}\\ 0_{p-r,r} & I_{p-r}\end{bmatrix}T_L(s)^{-1}\right\}^{-1}\left\{\begin{bmatrix}E(s) & 0_{r,m-r}\\ 0_{p-r,r} & 0_{p-r,m-r}\end{bmatrix}T_R(s)\right\}=A_1(s)^{-1}B_1(s) \tag{5.22}$$

Επίσης,

$$T(s)=T_L(s)\underbrace{\begin{bmatrix}E(s) & 0_{r,m-r}\\ 0_{p-r,r} & 0_{p-r,m-r}\end{bmatrix}^{-1}}_{p\times m}\underbrace{\begin{bmatrix}\Psi(s) & 0_{r,m-r}\\ 0_{m-r,r} & I_{m-r}\end{bmatrix}}_{m\times m}T_R(s)$$

$$=\left\{T_L(s)\begin{bmatrix}E(s) & 0_{r,m-r}\\ 0_{p-r,r} & 0_{p-r,m-r}\end{bmatrix}\right\}\left\{T_R(s)^{-1}\begin{bmatrix}\Psi(s) & 0_{r,m-r}\\ 0_{m-r,r} & I_{m-r}\end{bmatrix}\right\}=B_2(s)A_2(s)^{-1} \tag{5.23}$$

Πρόταση 5.12 [1]: Έστω $T(s)\in\mathbb{R}(s)^{p\times m}, rank_{\mathbb{R}(s)}T(s)=r$. Τότε υπάρχουν πολυωνυμικοί πίνακες

$$A_1(s)\in\mathbb{R}[s]^{p\times p}, B_1(s)\in\mathbb{R}[s]^{p\times m}$$

και αριστερά πρώτοι, τέτοιοι ώστε:

$$T(s) = A_1(s)^{-1} B_1(s) \tag{5.24}$$

Επίσης υπάρχουν πολυωνυμικοί πίνακες $A_2(s) \in \mathbb{R}[s]^{m\times m}, B_2(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times m}$ και δεξιά πρώτοι, τέτοιοι ώστε:

$$T(s) = B_2(s) A_2(s)^{-1} \tag{5.25}$$

Ορισμός 5.21 [1]: Η περιγραφή $T(s) = A_1(s)^{-1} B_1(s)$ ονομάζεται **αριστερά πρώτη κλασματική πολυωνυμική περιγραφή** (left coprime polynomial matrix fraction description MFD) του $T(s)$ και η περιγραφή $T(s) = B_2(s) A_2(s)^{-1}$ ονομάζεται η **δεξιά πρώτη κλασματική περιγραφή** (right coprime polynomial matrix fraction description MFD του $T(s)$.

Ο $A_1(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times p}$ ονομάζεται αριστερός παρανομαστής (left denominator) του $T(s)$.

Ο $A_2(s) \in \mathbb{R}[s]^{m\times m}$ ονομάζεται δεξιός παρανομαστής (right denominator) του $T(s)$.

Ο $B_1(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times m}$ ονομάζεται αριστερός αριθμητής (left nominator) του $T(s)$.

Ο $B_2(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times m}$ ονομάζεται δεξιός αριθμητής (right nominator) του $T(s)$. □

Πόρισμα 5.6 [1]: Αν $A_1(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times p}, B_1(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times m}$ και αριστερά πρώτοι τέτοιοι ώστε

$T(s) = A_1(s)^{-1} B_1(s)$, τότε για κάθε unimodular πίνακα $U_L(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times p}$

$$\overline{A}_1(s) := U_L(s) A_1(s) \tag{5.26}$$

$$\overline{B}_1(s) := U_L(s) B_1(s) \tag{5.27}$$

$$T(s) = A_1(s)^{-1} B_1(s) = \left[U_L(s)^{-1} \overline{A}_1(s)\right]^{-1} \left[U_L(s)^{-1} \overline{B}_1(s)\right]$$

$$= \overline{A}_1(s)^{-1} U_L(s) U_L(s)^{-1} \overline{B}_1(s) = \overline{A}_1(s)^{-1} \overline{B}_1(s) \tag{5.28}$$

και η περιγραφή $T(s) = \overline{A}_1(s)^{-1} \overline{B}_1(s)$ είναι μια αριστερά πρώτη κλασματική πολυωνυμική περιγραφή του $T(s)$.

Επίσης αν $A_2(s) \in \mathbb{R}[s]^{m\times m}, B_2(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times m}$ και δεξιά πρώτοι τέτοιοι ώστε $T(s) = A_1(s)^{-1} B_1(s)$, τότε για κάθε unimodular πίνακα $U_R(s) \in \mathbb{R}[s]^{m\times m}$

$$\overline{A}_2(s) := A_2(s) U_R(s) \tag{5.29}$$

$$\overline{B}_2(s) := B_2(s) U_R(s) \tag{5.30}$$

$$T(s) = B_2(s) A_2(s)^{-1} = \left[\overline{B}_2(s) U_R(s)^{-1}\right]\left[\overline{A}_2(s) U_R(s)^{-1}\right]^{-1}$$

$$= \overline{B}_2(s) U_R(s)^{-1} U_R(s)^{-1} \overline{A}_2(s)^{-1} = \overline{B}_2(s) \overline{A}_2(s)^{-1} \tag{5.31}$$

και η περιγραφή $T(s) = \overline{B}_2(s) \overline{A}_2(s)^{-1}$ είναι μια δεξιά πρώτη κλάσματική πολυωνυμική περιγραφή του $T(s)$.

Ορισμός 5.22 [1]: Τα ζεύγη πολυωνυμικών πινάκων $\left(A_1(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times p}, B_1(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times m}\right)$ και $\left(\overline{A}_1(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times p}, \overline{B}_1(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times m}\right)$ για τα οποία ισχύουν οι σχέσεις $\overline{A}_1(s) := U_L(s) A_1(s), \overline{B}_1(s) := U_L(s) B_1(s)$ όπου $U_L(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times p}$ και unimodular ονομάζονται **αριστερά unimodular**.

Τα ζεύγη πολυωνυμικών πινάκων $\left(A_2(s) \in \mathbb{R}[s]^{m\times m}, B_2(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times m}\right)$ και $\left(\overline{A}_2(s) \in \mathbb{R}[s]^{m\times m}, \overline{B}_2(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times m}\right)$ για τα οποία ισχύουν οι σχέσεις $\overline{A}_2(s) := A_2(s) U_R(s), \overline{B}_2(s) := B_2(s) U_R(s)$ όπου $U_R(s) \in \mathbb{R}[s]^{m\times m}$ και unimodular ονομάζονται **δεξιά unimodular**.

Προφανώς οι σχέσεις:

$$\overline{A}_1(s) := U_L(s)A_1(s),\ \overline{B}_1(s) := U_L(s)B_1(s) \tag{5.32}$$

ή οι σχέσεις

$$\overline{A}_2(s) := A_2(s)U_R(s),\ \overline{B}_2(s) := B_2(s)U_R(s) \tag{5.33}$$

ορίζουν μια σχέση ισοδυναμίας πάνω στο σύνολο $A \times A$ όπου $A = \mathbb{R}[s]^{p\times p} \times \mathbb{R}[s]^{p\times m}$ $\left(A = \mathbb{R}[s]^{p\times m} \times \mathbb{R}[s]^{m\times m}\right)$ την οποία ονομάζουμε **αριστερή (δεξιά) αντιστρέψιμη σχέση ισοδυναμίας (left (right) unimodular equivalence relation).** □

Ορισμός 5.23 [1]: Κάθε σημείο $x \in A$ είναι ένα ζεύγος πολυωνυμικών πινάκων

$$A_1(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times p},\ B_1(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times m}\ \left(A_2(s) \in \mathbb{R}[s]^{m\times m}, B_2(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times m}\right)$$

$$x = \left(A_1(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times p},\ B_1(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times m}\right)\ \left(x = \left(A_2(s) \in \mathbb{R}[s]^{m\times m}, B_2(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times m}\right)\right),$$

το οποίο ταυτίζουμε με μια αριστερά (δεξιά) πρώτη κλασματική πολυωνυμική περιγραφή του πίνακα συναρτήσεων μεταφοράς $T(s)$ ενός συστήματος. □

Θεώρημα 5.7 [1]: Η δεξιά (αριστερή) unimodular equivalence αποτελεί σχέση ισοδυναμίας επάνω στο σύνολο:

$$A = \mathbb{R}[s]^{p\times p} \times \mathbb{R}[s]^{p\times m}\ \ (A = \mathbb{R}[s]^{p\times m} \times \mathbb{R}[s]^{m\times m})$$

των δεξιά (αριστερά) πρώτων κλασματικών πολυωνυμικών περιγραφών του $T(s)$.

Πόρισμα 5.7 [1]: $S^{\mathbb{C}}_{B_1(s)} = S^{\mathbb{C}}_{B_2(s)} = diag\left[\varepsilon_1(s) \quad \varepsilon_2(s) \quad \cdots \qquad \varepsilon_r(s) \quad 0_{p-r,m-r}\right]$ ή με λόγια:

τα μηδενικά στο $\mathbb{C}$ του $T(s)$ είναι ίδια με τα μηδενικά στο $\mathbb{C}$ του $B_1(s)$ ή του $B_2(s)$.

Επίσης,

$$S_{A_1(s)}^{\mathbb{C}} = diag\left[I_{p-r} \quad \psi_r(s) \;\; \psi_{r-1}(s) \;\; \cdots \quad \psi_1(s)\right] \in \mathbb{R}[s]^{p\times p} \tag{5.34}$$

$$S_{A_2(s)}^{\mathbb{C}} = diag\left[I_{m-r} \quad \psi_r(s) \;\; \psi_{r-1}(s) \;\; \cdots \quad \psi_1(s)\right] \in \mathbb{R}[s]^{m\times m} \tag{5.35}$$

ή με λόγια:

οι πόλοι στο $\mathbb{C}$ του $T(s)$ είναι οι ίδιοι με τα μηδενικά στο $\mathbb{C}$ του $A_1(s)$ ή του $A_2(s)$.

Παράδειγμα 5.2 [1]: $p = m = r = 2$

$$T(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s+2 & 0 \\ s+1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (s+1)(s+2) & 0 \\ 0 & s+3 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$B_2(s) = \begin{bmatrix} s+2 & 0 \\ s+1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}[s]^{2\times 2} \text{ είναι δεξιός αριθμητής του } T(s).$$

$$A_2(s) = \begin{bmatrix} (s+1)(s+2) & 0 \\ 0 & s+3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}[s]^{2\times 2} \text{ είναι δεξιός παρανομαστής του } T(s).$$

$B_2(s), A_2(s)$ δεξιά πρώτοι διότι,

$$rank\begin{bmatrix} B_2(s) \\ A_2(s) \end{bmatrix} = rank\begin{bmatrix} s+2 & 0 \\ s+1 & 1 \\ (s+1)(s+2) & 0 \\ 0 & (s+3) \end{bmatrix} = 2 \text{ για } s = -1, -2, -3$$

για $s = -1$

$$rank\begin{bmatrix} B_2(-1) \\ A_2(-1) \end{bmatrix} = rank\begin{bmatrix} -1+2 & 0 \\ -1+1 & 1 \\ (-1+1)(-1+2) & 0 \\ 0 & (-1+3) \end{bmatrix} = rank\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 2$$

$$rank\begin{bmatrix} B_2(-2) \\ A_2(-2) \end{bmatrix} = rank\begin{bmatrix} -2+2 & 0 \\ -2+1 & 1 \\ (-2+1)(-2+2) & 0 \\ 0 & (-2+3) \end{bmatrix} = rank\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 2$$

$$rank\begin{bmatrix} B_2(-3) \\ A_2(-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3+2 & 0 \\ -3+1 & 1 \\ (-3+1)(-3+2) & 0 \\ 0 & (-3+3) \end{bmatrix} = rank\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 2$$

□

Πρόταση 5.13 [1]: Έστω $T(s) \in \mathbb{R}(s)^{p\times m}, rank_{\mathbb{R}(s)} T(s) = r$. Τότε, υπάρχουν πολυωνυμικοί πίνακες $\overline{A}_1(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times p}, \overline{B}_1(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times m}$ και αριστερά πρώτοι τέτοιοι ώστε $T(s) = \overline{A}_1(s)^{-1}\overline{B}_1(s)$ και $\overline{A}_1(s)$ είναι κανονικός ως προς τις γραμμές του (row proper). Επίσης υπάρχουν πολυωνυμικοί πίνακες $\overline{A}_2(s) \in \mathbb{R}[s]^{m\times m}, \overline{B}_2(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times m}$ και δεξιά πρώτοι, τέτοιοι ώστε $T(s) = \overline{B}_2(s)\overline{A}_2(s)^{-1}$ και $\overline{A}_2(s)$ είναι κανονικός ως προς τις στήλες του (column proper).

Απόδειξη: Έστω $A_1(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times p}, B_1(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times m}$ και αριστερά πρώτοι τέτοιοι ώστε $T(s) = A_1(s)^{-1} B_1(s)$.

Έστω $U_L(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times p}$ και unimodular, τέτοιος ώστε $U_L(s)A_1(s) = \overline{A}_1(s)$ κανονικός ως προς τις γραμμές του (row proper) και άρα,

$$A_1(s) = U_L(s)^{-1}\overline{A}_1(s).$$

Έστω: $$\overline{B}_1(s) := U_L(s)B_1(s) \Rightarrow B_1(s) = U_L(s)^{-1}\overline{B}_1(s)$$

Τότε ,

$$T(s) = A_1(s)^{-1} B_1(s) = \left[U_L(s)^{-1}\overline{A}_1(s)\right]^{-1}\left[U_L(s)^{-1}\overline{B}_1(s)\right]$$

$$= \overline{A}_1(s)^{-1} U_L(s) U_L(s)^{-1} \overline{B}_1(s)$$

$$= \overline{A}_1(s)^{-1} \overline{B}_1(s)$$

Ομοίως αποδεικνύεται και το δεύτερο μέρος της πρότασης. ▲

Πρόταση 5.14 [1]: Έστω $T(s) \in \mathbb{R}(s)^{p\times m}, rank_{\mathbb{R}(s)} T(s) = r$.

Έστω $\overline{A}_1(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times p}, \overline{B}_1(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times m}$ και αριστερά πρώτοι τέτοιοι ώστε $T(s) = \overline{A}_1(s)^{-1} \overline{B}_1(s)$ και $\overline{A}_1(s)$ είναι κανονικός ως προς τις γραμμές του (row proper) αν

$$A_1(s) \begin{bmatrix} a_{11}^{\tau}(s) \\ a_{12}^{\tau}(s) \\ \cdots \\ a_{1p}^{\tau}(s) \end{bmatrix}, a_{1i}^{\tau}(s) \in \mathbb{R}[s]^{1\times p}, i = 1,2,...,p$$, τότε οι βαθμοί των γραμμών του $A_1(s)$

$\mu_i := \deg a_i^{\tau}(s), i = 1,2,...,p$ είναι ίδιοι για κάθε άλλο κανονικό ως προς τις γραμμές του (row proper) αριστερό παρανομαστή του $T(s)$ είναι δηλαδή, αναλλοίωτες της ρητής συνάρτησης $T(s)$.

Επίσης, αν

$$\overline{A}_2(s) \in \mathbb{R}[s]^{m\times m}, \overline{B}_2(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times m}$$

και δεξιά πρώτοι, τέτοιοι ώστε:

$$T(s) = \overline{B}_2(s) \overline{A}_2(s)^{-1}$$

και $\overline{A}_2(s)$ είναι κανονικός ως προς τις στήλες του (column proper) και γράψουμε τον $A_2(s)$ ως προς τις στήλες του, δηλαδή

$$A_2(s) = \begin{bmatrix} a_{21}(s) & a_{22}(s) & \cdots & a_{2m}(s) \end{bmatrix}$$

$$a_{2\iota}(s) \in \mathbb{R}[s]^{m\times 1}, i = 1,2,...,m$$

Τότε, οι βαθμοί των στηλών του $A_2(s)$

$$k_i := \deg a_i(s), i = 1,2,...,m$$

είναι ίδιοι για κάθε άλλο κανονικό ως προς τις στήλες του (column proper) δεξιό παρανομαστή του $T(s)$ είναι δηλαδή αναλλοίωτες της ρητής συνάρτησης $T(s)$.

Παράδειγμα 5.3 :

Έστω

$$T(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+1)^2} & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{1}{(s+1)(s+2)} & \frac{s+3}{(s+2)^2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} s+2 & 0 \\ (s+3)(s+1) & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & s+1 \\ (s+2)^2(s+1) & -(s+2) \end{bmatrix}^{-1} = B_2(s)A_2(s)^{-1}$$

Είναι μια δεξιά πρώτη κλασματική πολυωνυμική περιγραφή του $T(s)$.

$$A_2(s)_c^h = \begin{bmatrix} 0 & s+1 \\ (s+2)^2(s+1) & -9(s+2) \end{bmatrix}_c^h = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, rank \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 2$$

και άρα $A_2(s)$ είναι κανονικός ως προς τις γραμμές του (column proper) και

$$\begin{bmatrix} 0 & s+1 \\ (s+2)^2(s+1) & -(s+2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1(s) & a_2(s) \end{bmatrix}$$

$$a_{21}(s)\begin{bmatrix} 0 \\ (s+2)^2(s+1) \end{bmatrix} \qquad \deg a_1(s) = 3 = k_1$$

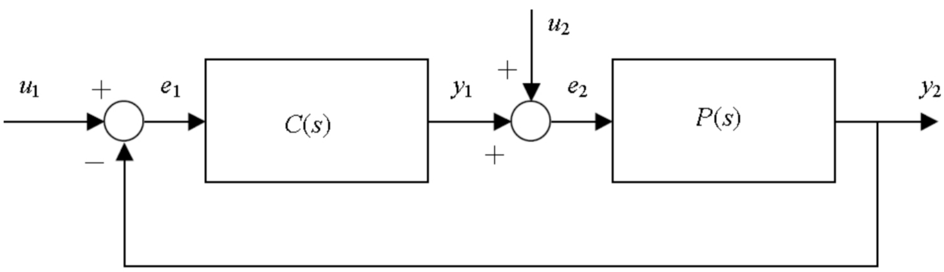
$$a_{22}(s)\begin{bmatrix} s+1 \\ -(s+2) \end{bmatrix} \qquad \deg a_2(s) = 1 = k_2$$

και $k_1 = 3,\ k_2 = 1$ είναι αναλλοίωτες της δεξιά (αριστερής) unimodular equivalence του $T(s)$. □

5.7 Λύση Διοφαντικών εξισώσεων πολυωνυμικών πινάκων

Υπολογισμός σταθεροποιητικού αντισταθμιστή

Θεωρούμε ένα γραμμικό, χρονικά αναλλοίωτα, πολυμεταβλητό σύστημα $p \times m$, όπου p ο αριθμός των εισόδων και m ο αριθμός των εξόδων, το οποίο υποτίθεται είναι ελεύθερο από ασταθείς κρυφές λειτουργίες και του οποίου η σχέση εισόδου – εξόδου περιγράφεται από την αυστηρά κανονική συνάρτηση – πίνακα μεταφοράς $P(s)$ (the plant). Περιγράφουμε και αναλύουμε έναν αριθμητικά αποδοτικό αλγόριθμο για τον υπολογισμό της κλάσης όλων των κανονικών αντισταθμιστών $C(s)$, οι οποίοι όταν συνδεθούν με το αρχικό σύστημα, όπως στο λειτουργικό διάγραμμα μοναδιαίας ανάδρασης του παρακάτω σχήματος 1, δίνουν ένα κλειστό ευσταθές σύστημα $S(P,C)$ με έναν επιθυμητό κλειστό παρονομαστή $D_C(s)$.



Σχήμα 1

Συγκεκριμένα, δοθείσας μιας δεξιάς πρώτης πολυωνυμικής περιγραφής της αυστηρά κανονικής συνάρτησης μεταφοράς $P(s) = N_R(s) D_R(s)^{-1}$ με $D_R(s)$ κανονικό ως προς τις στήλες column proper (column reduced) και έναν πολυωνυμικό πίνακα $D_C(s)$ με επιθυμητά μηδενικά, επεκτείνουμε το Wolovich resultant θεώρημα και ένα θεώρημα από τους Callier και Desoer , Callier και Kucera προκειμένου να χτίσουμε έναν αλγόριθμο για τον υπολογισμό όλων των πολυωνυμικών λύσεων $[X_L(S), Y_L(S)]$ της Διοφαντικής εξίσωσης (πολυωνυμικών πινάκων):

$$X_L(s)D_R(s)+Y_L(s)N_R(s)=D_C(s) \tag{5.36}$$

ο οποίος ορίζει την κλάση $\Phi(P,D_C)$ όλων των κανονικών αντισταθμιστών $C(s):=X_L(s)^{-1}Y_L(s)$ οι οποίοι επιδρούν στο κλειστό σύστημα $S(P,C)$ έχοντας ως $D_C(s)$ έναν επιθυμητό παρονομαστή του κλειστού συστήματος. Το θέμα της παραμετροποίησης όλων των κανονικών αντισταθμιστών $C(s)\in\Phi(P,D_C)$ και του αριθμού των ανεξάρτητων παραμέτρων στην παραμετροποίηση επιλύεται επίσης.

Αυτό επιτυγχάνεται ερευνώντας και αναλύοντας τις ιδιότητες μιας πιο γενικής μορφής της γενικευμένης επιλύουσας του Wolovich με σκοπό να αποκομίσουμε μια σειρά από χρήσιμα αποτελέσματα της αλγεβρικής της δομής.

Είναι $\mathbb{R},\mathbb{C},\mathbb{R}(s),\mathbb{R}[s],\mathbb{R}_{pr}(s),\mathbb{R}_{po}(s)$ αντίστοιχα τα πεδία των πραγματικών αριθμών, φανταστικών αριθμών, των ρητών πραγματικών συναρτήσεων, του δακτυλίου των πολυωνύμων, των κανονικών ρητών και αυστηρά κανονικών ρητών συναρτήσεων, όλα με συντελεστές στο $\mathbb{R}$ και ανεξάρτητη μεταβλητή s (όπως αυτά ορίστηκαν στο 2ο Κεφάλαιο).

Το σύνολο $F,F^{p\times m}$ συμβολίζει το σύνολο των $p\times m$ πινάκων με στοιχεία στο F. $\mathbb{N}^+$ είναι το σύνολο των θετικών ακεραίων. Αν $m\in\mathbb{N}^+$ τότε m συμβολίζει το σύνολο $\{1,2,...,m\}$. Τέλος, $s_M[.]$ συμβολίζει τον McMillan βαθμό του [.].

Ας είναι $N_R(s)\in\mathbb{R}[s]^{p\times m}, D_R(s)\in\mathbb{R}[s]^{m\times m}$ ένα ζεύγος πολυωνυμικών πινάκων με $D_R(s)$ αντιστρέψιμο για κάθε $s\in\mathbb{C}$, τότε θα ορίζουν τον $F(s):=\left[D_R^T(s),N_R^T(s)\right]^T$. Αντίστοιχα, ας είναι $D_L(s)\in\mathbb{R}[s]^{p\times p}, N_L(s)\in\mathbb{R}[s]^{p\times m}$ ένα ζεύγος πινάκων (με $D_L(s)$ αντιστρέψιμο για περίπου κάθε $s\in\mathbb{C}$) και $E(s):=\left[-N_L(s),D_L(s)\right]$ τέτοιος ώστε:

$$E(s)F(s)=0 \tag{5.37}$$

Οι πίνακες $N_R(s), D_R(s)$ (αντίστοιχα $N_L(s), D_L(s)$) θα λέγονται δεξιά (αντίστοιχα αριστερά) πρώτοι μεταξύ τους αν και μόνο αν ο $F(s)$ έχει πλήρη τάξη στηλών (full column rank), αντίστοιχα ο $E(s)$ έχει πλήρη τάξη γραμμών (full row rank) για κάθε $s \in \mathbb{C}$. Είναι γνωστό ότι αν $N_R(s), D_R(s)$ είναι δεξιά πρώτοι μεταξύ τους και $N_L(s), D_L(s)$ αριστερά πρώτοι μεταξύ τους, τότε

$$\deg|D_R(s)| = \deg|D_L(s)| \tag{5.38}$$

Ένας πολυωνυμικός πίνακας $X(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times m}$ $(m \le p)$ ονομάζεται κανονικός ως προς τις στήλες του αν και μόνο αν ο μεγιστοβάθμιος ως προς τις στήλες του πίνακας X^{hc} ο οποίος σχηματίζεται από τα στοιχεία - συντελεστές των μεγιστοβάθμιων βαθμών του s σε κάθε στήλη του $X(s)$, έχει πλήρη τάξη στηλών - full column rank. Οι βαθμοί των στηλών του $X(s)$ συνήθως συμβολίζονται με $\deg_{ci} X(s), i \in m$. Αντίστοιχα, ένας πολυωνυμικός πίνακας $Y(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times m}$ $(p \le m)$ ονομάζεται κανονικός ως προς τις γραμμές του αν και μόνο αν ο $Y^T(s)$ είναι κανονικός ως προς τις στήλες του και οι βαθμοί των γραμμών του $Y(s)$ συμβολίζονται $\deg_{ri} Y(s), i \in p$. Επιπλέον, ο τετραγωνικός πολυωνυμικός πίνακας $X(s) \in \mathbb{R}[s]^{m\times m}$ ονομάζεται row column proper με δύναμη γραμμών - row power r_i και δυνάμεις στηλών - column powers $c_i, i \in m$ αν και μόνο αν ο πίνακας $\underset{i\in m}{diag}\{s^{-r_i}\} X(s) \underset{i\in m}{diag}\{s^{-c_i}\}$ είναι δικανονικός - biproper (δηλαδή είναι κανονικός - proper και ο αντίστροφος του και είναι κανονικός - proper επίσης).

Λήμμα 5.1 [17]: Αν $X(s) \in \mathbb{R}^{p\times m}$ $(p \ge m)$ είναι κανονικός ως προς τις γραμμές του - column proper, τότε ο $X(s)$ δεν έχει μηδενικά στο άπειρο και οι βαθμοί των στοιχείων των στηλών του είναι τάξεις των πόλων του στο άπειρο, δηλαδή αν:

$$S_{X(s)}^{\infty} = \begin{bmatrix} diag\{s^{q_1}, s^{q_2}, \dots s^{q_m}\} \\ 0_{p-m,m} \end{bmatrix}$$

είναι η Smith – McMillan μορφή του $X(s)$ στο άπειρο, με $q_1 \geq q_2 \geq ... \geq q_m \geq 0$, τότε $q_i = \deg_{ci} X(s), i \in m$. Επιπρόσθετα, καθώς ο $X(s)$ (ως πολυωνυμικός πίνακας) δεν έχει πεπερασμένους πόλους και καθώς s^{q_i} έχει πιθανόν μόνο πόλους στο άπειρο θα είναι:

$$\delta_M X(s) = \sum_{i=1}^{m} \deg_{ci} X(s).$$

Προφανώς ένα παρόμοιο αποτέλεσμα προκύπτει και για κανονικούς κατά γραμμές τους - row proper πίνακες

Όταν η (5.37) ικανοποιείται και ο $E(s)$ είναι κανονικός κατά γραμμές - row proper με $D_L(s), N_L(s)$ αριστερά πρώτους μεταξύ τους, τότε ο $E(s)$ είναι και μια πολυωνυμική βάση του ανυσματικού χώρου των ρητών συναρτήσεων που παράγει τον αριστερό πυρήνα - kernel του $F(s)$ και οι βαθμοί των γραμμών $\deg_{ri} E(s) =: \mu_i, i \in p$ του $E(s)$ είναι οι αναλλοίωτοι ελάχιστοι (δυναμικοί) δείκτες γραμμών της

$$P(s) = N_R(s) D_R^{-1}(s) = D_L^{-1}(s) N_L(s) \tag{5.39}$$

Σε αυτή την περίπτωση είναι γνωστό ότι ο $E(s)$ θα έχει τις ακόλουθες ιδιότητες

1. Αν $p(s)^T \in \mathbb{R}[s]^{1\times(p+m)}$ είναι ένα πολυωνυμικό άνυσμα τέτοιο ώστε $p(s)^T F(s) = 0$ τότε υπάρχει ένα πολυωνυμικό άνυσμα $w(s)^T = [w_1(s), w_2(s), ..., w_p(s)] \in \mathbb{R}[s]^{1\times p}$ τέτοιο ώστε:

$$p(s)^T = w(s)^T E(s) \tag{5.40}$$

2. Αν $p(s) = w(s)^T E(s)$ τότε:

$$\deg p(s)^T = \max_{i\in p} \{\deg w_i(s) + \mu_i\} \tag{5.41}$$

Το επόμενο αποτέλεσμα εδραιώνει μια σχέση ανάμεσα στους McMillan βαθμούς του $P(s)$ και $E(s)$ (ή του $F(s)$).

Λήμμα 5.2 [17]: Αν ο $E(s)$ δεν έχει μηδενικά στο $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ (αντίστοιχα $D_L(s), N_L(s)$ είναι αριστερά πρώτοι μεταξύ τους στο $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$) τότε

$$\delta_M P(s) = \delta_M E(s) \tag{5.42}$$

Όταν ο $E(s)$ είναι μια ελάχιστη πολυωνυμική βάση του αριστερού πυρήνα του $F(s)$, δηλαδή ο $E(s)$ δεν έχει μηδενικά στο $\mathbb{C}$ και είναι κανονικός κατά γραμμές, τότε από το λήμμα 5.1, ο $E(s)$ δεν θα έχει μηδενικά και στο $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ και επομένως από την τελευταία έκφραση του λήμματος 5.1 θα είναι:

$$\delta_M P(s) = \delta_M E(s) = \sum_{i=1}^{p} \deg_{ri} E(s) \tag{5.43}$$

Επιπρόσθετα, αν επίσης $D_R(s), N_R(s)$ είναι δεξιά πρώτοι μεταξύ τους και ο $F(s)$ είναι κανονικός ως προς τις στήλες του τότε πάλι από το λήμμα 5.1 και το λήμμα 5.2 θα είναι:

$$\delta_M P(s) = \delta_M F(s) = \sum_{i=1}^{m} \deg_{ci} F(s) \tag{5.44}$$

Και επομένως σε μια τέτοια περίπτωση καταλήγουμε στο γνωστό αποτέλεσμα ότι:

$$\sum_{i=1}^{p} \deg_{ri} E(s) = \sum_{i=1}^{m} \deg_{ci} F(s) \tag{5.45}$$

Γενικευμένη Επιλύουσα του Wolovich (Generalized Wolovich Resultant)

Ας είναι $k_i = \deg_{ci} F(s), i \in m$ οι ελάχιστοι αναλλοίωτοι (δυναμικοί) δείκτες στηλών του $F(s)$ και ομοίως για $k \geq 1$ ας είναι ο $(m+p)k \times m$ πολυωνυμικός πίνακας $X_k(s)$ μέσω

$$X_k(s) := S_k(s)\begin{bmatrix} D_R(s) \\ N_R(s) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} I_{m+p} \\ sI_{m+p} \\ \vdots \\ s^{k-1}I_{m+p} \end{bmatrix}}_{(m+p)k\times(m+p)} \underbrace{\begin{bmatrix} D_R(s) \\ N_R(s) \end{bmatrix}}_{(m+p)\times m} = \underbrace{\begin{bmatrix} F(s) \\ sF(s) \\ \vdots \\ s^{k-1}F(s) \end{bmatrix}}_{(m+p)k\times m} \tag{5.46}$$

και παρατηρούμε ότι ο $X_k(s)$ μπορεί να γραφτεί και ως:

$$X_k(s) = M_{ek} \underbrace{\left[\underset{i \in m}{block\ diag} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ s \\ \vdots \\ s^{k_i+k-1} \end{bmatrix} \right\} \right]}_{\left(\sum_{i=1}^{m} k_i + mk\right) \times m} =: M_{ek} S_{ek}(s) \tag{5.47}$$

όπου $M_{ek} \in \mathbb{R}^{(m+p)k \times \left(mk + \sum_{i=1}^{m} k_i\right)}$.

Ένας από τους στόχους μας είναι να περιγράψουμε τον αριστερό χώρο – πυρήνα του M_{ek} ο οποίος δηλώνεται ως:

$$KerM_{ek}^T = \left\{ x^T \in \mathbb{R}^{1 \times (m+p)k} : x^T M_{ek} = 0 \right\} \tag{5.48}$$

Το ακόλουθο θεώρημα καθορίζει τη διάσταση του $KerM_{ek}^T$.

Θεώρημα 5.8 [17]: Ας είναι $N_R(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}, D_R(s) \in \mathbb{R}[s]^{m \times m}$ ένα ζεύγος πολυωνυμικών πινάκων με $rank_{\mathbb{R}(s)} \left[D_R^T(s), N_R^T(s) \right]^T = m$. Ας είναι, επίσης, $P(s) = N_R(s) D_R^{-1}(s) \in \mathbb{R}(s)^{p \times m}, \mu_i, i \in p$ οι ελάχιστοι αναλλοίωτοι (δυναμικοί) δείκτες γραμμών του $P(s)$ και $M_{ek} \in \mathbb{R}^{(m+p)k \times \left(mk + \sum_{i=1}^{m} k_i\right)}$, όπως διατυπώθηκαν στην (5.47). Τότε,

$$\dim_{\mathbb{R}} \ker M_{ek}^T = \sum_{i: \mu_i \leq k} (k - \mu_i) \tag{5.49}$$

Σημειώνουμε ότι το παραπάνω αποτέλεσμα δεν απαιτεί οι $D_R(s), N_R(s)$ να είναι δεξιά πρώτοι μεταξύ τους αλλά και ούτε ο $D_R(s)$ να είναι κανονικός ως προς τις στήλες του. Θα δώσουμε τώρα μια γενίκευση του αποτελέσματος, υπό την έννοια ότι απελευθερώνουμε την $P(s) = N_R(s) D_R^{-1}(s)$ από τις απαιτήσεις των παραπάνω ιδιοτήτων αλλά ακόμη και από την υπόθεση ότι ο $D_R(s)$ είναι κανονικός ως προς τις στήλες του.

Πόρισμα 5.8 [17]: Υπό την προϋπόθεση του θεωρήματος 5.8, έχουμε ότι:

$$rankM_{ek} = (p+m)k - \sum_{i:\mu_i \le k} (k-\mu_i) \tag{5.50}$$

Επιπρόσθετα, αν k έχει επιλεγεί έτσι ώστε $k \ge \mu$, όπου $\mu = \max_{i \in p} \{\mu_i\}$, τότε:

$$rankM_{ek} = mk + \delta_M P(s) \tag{5.51}$$

Απόδειξη: Η εξίσωση (5.50) προκύπτει απλώς από το γεγονός ότι ισχύει: $rankM_{ek} = (p+m)k - \dim_{\mathbb{R}} \ker M_{i=1}^{p}$ και από την εξίσωση (5.49). Τώρα, για $k \ge \mu$ η (5.50) γίνεται $rankM_{ek} = (p+m)k - \Sigma_{i=1}^{p}(k-\mu_i)$ ή ισοδύναμα $rankM_{ek} = mk - \Sigma_{i=1}^{p}\mu_i$ οπότε η (5.51) απορρέει από τα $\Sigma_{i=1}^{p}\mu_i = \delta_M E(s) = \delta_M P(s)$ στα λήμματα 5.1 και 5.2.

Σημειώνουμε ότι σε περίπτωση που ο $D_R(s)$ είναι κανονικός ως προς τις στήλες του - column proper και η $P(s) := N_R(s) D_R^{-1}(s)$ είναι κανονική, τότε $\delta_M P(s) = \{\#of\ \ poles\, of\ \ P(s)\ in\ \mathbb{C}\} = \deg |D_R(s)|$. ▲

Πόρισμα 5.9 [17]: Ας είναι $N_R(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times m}, D_R(s) \in \mathbb{R}[s]^{m\times m}$ ένα ζεύγος πολυωνυμικών πινάκων με $F(s) = \left[D_R^T(s), N_R^T(s)\right]^T$ κανονικός ως προς τις στήλες του με βαθμούς των στηλών του $\deg_{ci} F(s) = k_i, i \in m$. Τότε, $N_R(s), D_R(s)$ είναι δεξιά πρώτοι μεταξύ τους - right coprime στο $\mathbb{C}$ αν και μόνο αν ο M_{ek} έχει πλήρη τάξη στηλών (full column rank) για $k \ge \mu_i$, ή ισοδύναμα αν ο $F(s) = \left[D_R^T(s), N_R^T(s)\right]^T$ είναι κανονικός κατά στήλες - column proper τότε $N_R(s), D_R(s)$ είναι δεξιά πρώτοι μεταξύ τους στο $\mathbb{C}$ αν και μόνο αν για $k \ge \mu, rankM_{ek} = mk + \delta_M F(s)$.

Απόδειξη: Αρχικά παρατηρούμε ότι ο αριθμός την στηλών στον M_{ek} $mk + \sum_{i=1}^{m} k_i$. Καθώς ο $F(s)$ είναι κανονικός ως προς τις στήλες του - column proper, δεν έχει μηδενικά στο άπειρο και από το λήμμα 5.1 θα είναι: $\sum_{i=1}^{m} k_i = \delta_M F(s)$. Ως εκ τούτου, ο αριθμός των στηλών για τον M_{ek} θα είναι: $mk + \delta_M F(s)$.

$(\Rightarrow)$ Ας είναι $N_R(s), D_R(s)$ δεξιά πρώτοι μεταξύ τους - right coprime στο $\mathbb{C}$. Τότε, από το πόρισμα 4 για $k \geq \mu$, $rankM_{ek} = km + \delta_M P(s)$. Επειδή ο $F(s)$ είναι κανονικός ως προς τις στήλες του - column proper από το λήμμα 5.1 δε θα έχει μηδενικά στο άπειρο και έτσι $N_R(s), D_R(s)$ είναι δεξιά πρώτοι μεταξύ τους at $s = \infty$. Ως εκ τούτου, $N_R(s), D_R(s)$ είναι δεξιά πρώτοι μεταξύ τους - right coprime στο $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, και κατά συνέπεια από το λήμμα 5.2 θα είναι: $\delta_M P(s) = \delta_M F(s)$ και $rankM_{ek} = km + \delta_M F(s)$.

$(\Leftarrow)$ Υποθέτουμε ότι οι $N_R(s), D_R(s)$ δεν είναι πρώτοι μεταξύ τους - right coprime στο $\mathbb{C}$. Τότε, υπάρχει $0 \neq x \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ και $s_0 \in \mathbb{C}$ τέτοιο ώστε $F(s_0)x = 0$. Εν όψει της (5.47)

$$X_k(s_0)x = M_{ek} S_{ek}(s_0)x = 0$$

Ως εκ τούτου ο M_{ek} δεν έχει πλήρη τάξη στηλών - full column rank. ▲

Η ακόλουθη παρατήρηση θεσπίζει το γεγονός ότι ο M_{ek} μπορεί να έχει πλήρη τάξη στηλών μόνο για $k \geq \mu$.

Παρατήρηση 5.1 [17]: Ας είναι $D_R(s) \in \mathbb{R}[s]^{m \times m}, N_R(s) \in \mathbb{R}[s]^{m \times m}$ τέτοιοι ώστε οι $D_R(s), N_R(s)$ είναι δεξιά πρώτοι μεταξύ τους - right coprime στο $\mathbb{C}$ και ο $F(s) = \left[D_R^T(s), N_R^T(s)\right]^T$ είναι κανονικός ως προς τις στήλες του με βαθμούς στηλών $\deg_{ci} F(s) = k_i, i \in m$. Ας είναι, επίσης, $\mu_i, i \in p$ οι αριστερά ελάχιστοι δείκτες του $F(s)$ και δηλώνουμε $\mu = \max_{i \in p}\{\mu_i\}$. Τότε, για $k < \mu$

$$rankM_{ek} < mk + \sum_{i=1}^{m} k_i \tag{5.52}$$

δηλαδή M_{ek} δεν μπορεί να έχει πλήρη τάξη στηλών –full column rank για $k < \mu$.

Απόδειξη: Υποθέτουμε ότι $k<\mu$ και ας είναι a ο αριθμός των μ_i που ικανοποιούν τη σχέση $\mu_i>k$. Είναι προφανές ότι:

$$ka<\sum_{i:\mu_i>k}\mu_i \tag{5.53}$$

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $\sum_{i=1}^{p}\mu_i=\sum_{i:\mu_i>k}\mu_i+\sum_{i:\mu_i<k}\mu_i$ μπορούμε να γράψουμε την (5.53) ως $ka+\sum_{i:\mu_i\le k}\mu_i<\Sigma_{i=1}^{p}\mu_i$ ή ισοδύναμα ως

$$pk-k\left(p-a\right)+\sum_{i:\mu_i\le k}\mu_i<\sum_{i=1}^{p}\mu_i \tag{5.54}$$

Σημειώνουμε ότι ο αριθμός των όρων στο $\sum_{i:\mu_i\le k}\mu_i$ είναι ακριβώς $p-a$, και ως εκ τούτου μπορούμε να γράψουμε την (5.54) ως

$$pk-\sum_{i:\mu_i\le k}\left(k-\mu_i\right)<\sum_{i=1}^{p}\mu_i \tag{5.55}$$

Προσθέτοντας mk και στα δύο μέλη της (5.55) παίρνουμε ότι $\left(m+p\right)k-\Sigma_{i:\mu_i\le k}\left(k-\mu_i\right)<mk+\Sigma_{i=1}^{p}\mu_i$, όπου προφανώς το αριστερό μέλος είναι η $rankM_{ek}$ και $\sum_{i=1}^{p}\mu_i=\sum_{i=1}^{m}k_i$ λόγω των παραδοχών της coprimeness (των $D_R\left(s\right)$, $N_R\left(s\right)$ στο $\mathbb{C}$) και της column properness του $F\left(s\right)$. Ως εκ τούτου απορρέει η σχέση (5.52). ▲

Εφαρμογή σε Διοφαντικές Εξισώσεις πολυωνυμικών πινάκων

Θεωρούμε ένα γραμμικό και χρονικά αναλλοίωτο πολυμεταβλητό σύστημα $p\times m$ με m εισόδους και p εξόδους. Το σύστημα αυτό περιγράφεται από μια αυστηρά κανονική ρητή συνάρτηση μεταφοράς, $P\left(s\right)\in\mathbb{R}_{po}\left(s\right)^{p\times m}$ και ας είναι

$$P\left(s\right)=N_R\left(s\right)D_R\left(s\right)^{-1}=D_L\left(s\right)^{-1}N_L\left(s\right) \tag{5.56}$$

αντίστοιχα η αριστερά και δεξιά πολυωνυμική κλασματική έκφραση της $P(s)$ με $N_R(s)\in\mathbb{R}[s]^{p\times m}$ και $D_R(s)\in\mathbb{R}[s]^{m\times m}$ κανονικούς ως προς τις στήλες με βαθμούς στηλών $\deg D_{Rci}(s)= k_i, i\in m, N_L(s)\in\mathbb{R}[s]^{p\times m}$ και $D_L(s)\in\mathbb{R}[s]^{p\times p}$ κανονικούς ως προς τις γραμμές με βαθμούς γραμμών $\deg D_{L_{ri}}(s)=\mu_i, i\in p$. Είναι $\mu:=\max_{i\in p}\{\mu_i\}$ (ο δείκτης παρατηρησιμότητας της $P(s)$).

Το πρόβλημα σχεδιασμού του επιθυμητού παρονομαστή του κλειστού συστήματος και της επιλογής του κανονικού αντισταθμιστή $C(s)\in\mathbb{R}(s)^{m\times p}$, ανάγεται στη λύση της Διοφαντικής εξίσωσης πολυωνυμικών πινάκων που έχει τη μορφή:

$$X_L(s)D_R(s)+Y_L(s)N_R(s)=D_c(s) \tag{5.57}$$

όπου $D_C(s)\in\mathbb{R}[s]^{m\times m}$ είναι ο επιθυμητός πίνακας παρονομαστής του κλειστού συστήματος και $X_L(s)\in\mathbb{R}[s]^{m\times m}, Y_L(s)\in\mathbb{R}[s]^{m\times p}$ είναι η αριστερή πολυωνυμική περιγραφή του $C(s)$, έτσι ώστε

$$C(s)=X_L(s)^{-1}Y_L(s)\in\mathbb{R}(s)^{m\times p} \tag{5.58}$$

Είναι γνωστό ότι η Διοφαντική εξίσωση (5.57) έχει λύση για τον αυθαίρετο $D_c(s)$ αν και μόνο αν $D_R(s), N_R(s)$ είναι δεξιά πρώτοι μεταξύ τους. Επίσης, αν $\overline{X}_L(s), \overline{Y}_L(s)$ είναι μια ειδικότερη λύση της (5.57) τότε κάθε ζεύγος πινάκων της μορφής: $X_L(s)=\overline{X}_L(s)+T(s)N_L(s),\ Y_L(s)=\overline{Y}_L(s)-T(s)D_L(s)$ αποτελεί ακόμα μια λύση της (5.57) για κάθε αυθαίρετο – τυχαίο πολυωνυμικό πίνακα $T(s)\in\mathbb{R}[s]^{m\times p}$.

Ωστόσο, το ερώτημα που συνήθως τίθεται είναι κάτω από ποιες συνθήκες η εξίσωση (5.57) μπορεί να έχει λύσεις που δίνουν μορφή σε έναν κανονικό αντισταθμιστή $C(s)\in\mathbb{R}_{pr}(s)^{m\times p}$.

Ας είναι $X_L(s), Y_L(s)$ μια λύση της (5.57) για συγκεκριμένη επιλογή του $D_C(s)$ και ας θεωρήσουμε ότι ο $k-1$ είναι ο μέγιστος βαθμός πολυωνύμων που υπάρχει στον πίνακα $\Omega(s) := \left[X_L(s), Y_L(s)\right] \in \mathbb{R}[s]^{m\times(m+p)}$. Τότε, ο πίνακας $\Omega(s)$ μπορεί να γραφεί και ως:

$$\Omega(s) = \overline{\Omega}_k S_k(s) \tag{5.59}$$

όπου $\overline{\Omega} \in \mathbb{R}^{m\times k(p+m)}$ και $S_k(s)$ είναι ορισμένα όπως στην (5.46). Τότε η Διοφαντική εξίσωση (5.57) μπορεί να γραφτεί και ως:

$$\overline{\Omega}_k M_{ek} S_{ek}(s) = D_C(s) \tag{5.60}$$

Συγκρίνοντας τους βαθμούς του s και στα δύο μέλη της (5.60) είναι προφανές ότι: $\deg_{ci} D_C(s) \le k_i + k - 1, i \in m$ και ως εκ τούτου ο $D_C(s)$ μπορεί να πάρει τη μορφή: $D_C(s) = \overline{D}_k S_{ek}(s), \overline{D}_k \in \mathbb{R}^{m\times\left(\sum_{i=1}^{m} k_i + mk\right)}$ και έτσι η (5.60) γίνεται

$$\overline{\Omega}_k M_{ek} S_{ek}(s) = \overline{D}_k S_{ek}(s) \tag{5.61}$$

ή αντίστοιχα:

$$\overline{\Omega}_k M_{ek} = \overline{D}_k \tag{5.62}$$

οπότε η (5.61) πρέπει να ισχύει για κάθε $s \in \mathbb{C}$. Επομένως, κάθε λύση της (5.57) μπορεί να προσδιοριστεί από ένα σύνολο αριθμητικών εξισώσεων της μορφής (5.62) δοθέντος του μέγιστου βαθμού του $\Omega(s)$ και επιλέγοντας κατάλληλο k.

Λήμμα 5.3 [17]: Θεωρούμε τη Διοφαντική εξίσωση (5.57) υπό των ακολούθων υποθέσεων

1. $D_R(s)$ είναι κανονικός ως προς τις στήλες του με βαθμούς στηλών $k_i = \deg_{ci} D_R(s), i \in m$
2. $D_R(s), N_R(s)$ είναι δεξιά πρώτοι μεταξύ τους
3. $P(s) = D_R^{-1}(s) N_R(s) = N_L(s) D_L^{-1}(s)$ είναι αυστηρά κανονική

4. $N_L(s), D_L(s)$ είναι αριστερά πρώτοι μεταξύ τους

5. $D_L(s)$ είναι κανονικός κατά γραμμές με βαθμούς των γραμμών του $\mu_i = \deg_{ri} D_L(s), i \in p$ και ορίζεται $\mu = \max_{i \in p} \{\mu_i\}$.

6. $D_C(s)$ είναι κανονικός κατά γραμμές και στήλες με $\deg_{ci} D_C(s) = \deg_{ri} D_C(s) = k_i + \xi_i, i \in m$.

Αν $X_L(s), Y_L(s)$ είναι ένα ζεύγος λύσεων της (5.57) και $C(s) = X_L^{-1}(s) Y(s) \in \mathbb{R}_{pr}(s)$ τότε $X_L(s)$ είναι κανονικός κατά γραμμές με βαθμούς γραμμών $\deg_{ri} X_L(s) = \xi_i, i \in m$.

Σημειώνουμε ότι αν $X_L(s)^{-1} Y(s) \in \mathbb{R}_{pr}(s)^{m \times p}$ τότε οι βαθμοί των γραμμών του $Y_L(s)$ δεν μπορούν αν υπερβούν τα ξ_i, δηλαδή $\deg_{ri} Y_L(s) \leq \xi_i, i \in m$ και ως εκ τούτου ο μέγιστος βαθμός της i^{th} της γραμμής του $\Omega(s) = [X_L(s), Y_L(s)]$ θα είναι ξ_i. Συμβολίζουμε τις γραμμές του $\Omega(s)$ με $\omega_i^T(s) \in \mathbb{R}[s]^{1 \times (m+p)}, i \in m$ και γράφουμε:

$$\omega_i^T(s) = \sum_{j=0}^{\xi_i} \omega_{ij}^T s^j, \omega_{ij}^T \in \mathbb{R}^{1 \times (m+p)}, i \in m \tag{5.63}$$

και δηλώνουμε τα ανύσματα των γραμμών ως: $\overline{\omega}_i^T = \left[\omega_{i0}^T, \omega_{i1}^T, ..., \omega_{\xi_i}^T\right] \in \mathbb{R}^{1 \times (p+m)(\xi_i+1)}, i \in m$.

Τώρα, ας είναι $d_i^T(s), i \in m$ οι γραμμές του $D_C(s)$ και χρησιμοποιώντας την υπόθεση 6 του λήμματος 5.3 ορίζουμε τα $\overline{d}_i^T \in \mathbb{R}^{1 \times m(\xi_i+1) + \sum_{i=1}^{m} k_i}, i \in m$ από τη σχέση:

$$d_i^T(s) = \overline{d}_i^T S_{e(\xi_i+1)}(s), i \in m \tag{5.64}$$

όπου $S_{e(\xi_i+1)}$ είναι ο $\left(m(\xi_i+1) + \sum_{i=1}^{m} k_i\right) \times m$ πίνακας, όπως ορίστηκε στη σχέση (5.47)

Θεώρημα 5.9 [17]: Έστω ότι οι υποθέσεις (1 – 6) του λήμματος 5.3 ισχύουν. Τότε, κάθε ζεύγος λύσεων $X_L(s), Y_L(s)$ της (5.57) τέτοιο ώστε $C(s) = X_L(s)^{-1} Y_L(s) \in \mathbb{R}_{pr}^{m \times p}(s)$ μπορεί να ληφθεί από τις λύσεις των αριθμητικών εξισώσεων της μορφής:

$$\overline{\omega}_i^T M_{e(\xi_i+1)} = \overline{d}_i^T, i \in m \qquad (5.65)$$

και αντίστροφα, κάθε λύση $\overline{\omega}_i^T$ της (5.65) προκύπτει μέσω της (5.63) ως $\Omega(s) = \left[X_L(s), Y_L(s)\right]$, s.t. $C(s) = X_L(s)^{-1} Y_L(s) \in \mathbb{R}_{pr}^{m\times p}(s)$.

Απόδειξη: Αρχικά σημειώνουμε ότι η (5.65) έχει πάντα λύσεις για τα αυθαίρετα $\overline{d}_i^T$ εφόσον $\xi_i + 1 \geq \mu$ και ως εκ τούτου από το λήμμα 5 σε συνδυασμό με τις προϋποθέσεις 1 – 2 του λήμματος 5.3, $M_{e(\xi_i+1)}$ έχει πλήρη τάξη στηλών.

Αν $X_L(s), Y_L(s)$ είναι ένα ζεύγος λύσεων της (5.57) και $X_L^{-1}(s)Y_L(s)$ είναι κανονικός, σύμφωνα με το λήμμα 7 οι βαθμοί των γραμμών του $\Omega(s)$ θα είναι ξ_i και επομένως μπορούμε να γράφουμε $\omega_i^T(s)$ όπως στην (5.63). Είναι, άρα, εύκολο να παρατηρήσουμε ότι τα αντίστοιχα $\overline{\omega}_i^T$ θα ικανοποιούν τις εξισώσεις (5.65).

Αντιστρόφως, αν $\overline{\omega}_i^T$ ικανοποιούν τις εξισώσεις (5.65) τότε πολλαπλασιάζοντας τις (5.65) από δεξιά με $S_{e(\xi_i+1)}(s)$ δίνουν $\overline{\omega}_i^T M_{e(\xi_i+1)} S_{e(\xi_i+1)}(s) = \overline{d}_i^T S_{e(\xi_i+1)}(s), i \in m$ ή αντίστοιχα μέσω της (5.47) προκύπτει ότι:

$$\overline{\omega}_i^T S_{(\xi_i+1)}(s) \begin{bmatrix} D_R(s) \\ N_R(s) \end{bmatrix} = d_i^T(s), i \in m$$

που αντίστοιχα δίνει:

$$\overline{\omega}_i^T(s) \begin{bmatrix} D_R(s) \\ N_R(s) \end{bmatrix} = d_i^T(s), i \in m \qquad (5.66)$$

Προφανώς, $\Omega(s) = \left[\omega_1^T(s), \omega_2^T(s), ..., \omega_m^T(s)\right]^T$ ικανοποιεί την (5.57) και είναι: $\deg_{ri} \Omega(s) \leq \xi_i, i \in m$. Ως εκ τούτου, $\deg_{ri} X(s) \leq \xi_i$ και $\deg_{ri} Y(s) \leq \xi_i, i \in m$.

Τώρα, ας είναι $\Lambda_k(s)=diag\left\{s^{k_1},s^{k_2},...,s^{k_m}\right\}$, $\Lambda_\xi(s)=diag\left\{s^{\xi_1},s^{\xi_2},...,s^{\xi_m}\right\}$ και πολλαπλασιάζοντας από αριστερά και δεξιά την (5.57) αντίστοιχα με $\Lambda_\xi(s)^{-1}$ και $\Lambda_k(s)^{-1}$ παίρνουμε:

$$\Lambda_\xi(s)^{-1}X_L(s)D_R(s)\Lambda_k(s)^{-1}+\Lambda_\xi(s)^{-1}Y_L(s)N_R(s)\Lambda_k(s)^{-1}=\Lambda_\xi(s)^{-1}D_C(s)\Lambda_k(s)^{-1} \quad (5.67)$$

Εφόσον, ο $D_R(s)$ είναι κανονικός ως προς τις στήλες με βαθμούς στηλών k_i, τότε ο $D_R(s)\Lambda_k(s)^{-1}$ είναι δικανονικός. Ομοίως, εφόσον $D_C(s)$ είναι κανονικός ως προς τις γραμμές – τις στήλες του με δυνάμεις γραμμών ξ_i και δυνάμεις στηλών k_i, τότε ο $\Lambda_\xi(s)^{-1}D_C(s)^{-1}\Lambda_k(s)^{-1}$ είναι, επίσης, δικανονικός. Έτσι, εκμεταλλευόμενοι το γεγονός ότι η $P(s)$ είναι αυστηρά κανονική, θα είναι: $\deg_{ci}N_R(s)<k_i, i\in m$ και επομένως $N_R(s)\Lambda_k(s)^{-1}$ είναι αυστηρά κανονικός. Τέλος, εφόσον είναι $\deg_{ri}X(s),\xi_i$ και $\deg_{ri}Y(s)\le\xi_i, i\in m,$ οι $\Lambda_\xi(s)^{-1}X_L(s)$ και $\Lambda_\xi(s)^{-1}Y_L(s)$ είναι κανονικοί γενικά. Επομένως, παίρνοντας τα όρια για $s\to\infty$ και στα δύο μέλη της (5.67) καταλήγουμε στην εξίσωση:

$$X_L^{hr}D_R^{hc}=D_C^{hrc}$$

όπου X_L^{hr} είναι ο μέγιστος βαθμός γραμμών του πίνακα συντελεστών του $X_L(s), D_R^{hc}$ είναι ο μέγιστος βαθμός στηλών του πίνακα συντελεστών του $D_R(s)$ και D_C^{hcr} είναι η μεγαλύτερη δύναμη γραμμών – στηλών του πίνακα συντελεστών του $D_C(s)$. Προφανώς, X_L^{hr} αντιστρέψιμος εφόσον D_C^{hc}, D_C^{hcr} είναι αντιστρέψιμοι.

Ως εκ τούτου, $X_L(s)$ is row power με βαθμούς γραμμών ξ_i και επειδή $\deg_{ri}Y(s)\le\xi_i, i\in m,$ ο $X_L(s)^{-1}Y_L(s)\in\mathbb{R}_{pr}(s)$ είναι κανονικός. ▲

Πόρισμα 5.10 [17]: Έστω ότι οι προϋποθέσεις (1-6) του λήμματος 5.3 ισχύουν. Τότε, ο αριθμός των ανεξάρτητων παραμέτρων στην παραμετροποίηση όλων των παρονομαστών για την εύρεση κανονικών αντισταθμιστών είναι:

$$\upsilon = m\left(p - \delta_M P(s)\right) + p \sum_{i=1}^{m} \xi_i \tag{5.68}$$

Απόδειξη: Εκμεταλλευόμενοι το αποτέλεσμα του θεωρήματος 5.9, οι βαθμοί ελευθερίας στην επιλογή των $\omega_i^T(s)$ είναι κατ' ουσία ίσοι με τη διάσταση του αριστερού πυρήνα του $M_{e(\xi_i+1)}$. Ως εκ τούτου, ο συνολικός αριθμός των ανεξάρτητων παραμέτρων θα είναι:

$$\upsilon = \sum_{i=1}^{m} \dim_{\mathbb{R}} \ker M_{e(\xi_i+1)}.$$

Τώρα, εφόσον $\xi_i + 1 \geq \mu$, θα είναι $\dim_{\mathbb{R}} \ker M_{e(\xi_i+1)} = \sum_{j=1}^{p} \left(\xi_i + 1 - \mu_j\right)$.

Επομένως, $\upsilon = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{p} \left(\xi_i + 1 - \mu_j\right) = mp + p\sum_{i=1}^{m} \xi_i - m\sum_{i=1}^{p} \mu_i$ και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι: $\delta_M P(s) = \sum_{j=1}^{p} \mu_j$ παίρνουμε την (5.68).

Σημειώνουμε ότι στην περίπτωση που επιλέξουμε $\xi_1 = \xi_2 = ... = \xi_m := \xi$ δε χρειάζεται να λύσουμε την (5.65) ανεξάρτητα για κάθε γραμμή της, αλλά μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μια επιλύουσα, ονόματι $M_{e(\xi+1)}$ για να καθορίσουμε όλες τις γραμμές των $\omega_i^T(s)$. Σε αυτή την περίπτωση, ο αριθμός των ανεξάρτητων παραμέτρων στην παραμετροποίηση θα είναι:

$$\upsilon = m\left(p(\xi+1) - \delta_M P(s)\right). \qquad \blacktriangle$$

Παρόλο που το θεώρημα 5.9 μας παρέχει έναν τρόπο να μειώσουμε τον υπολογισμό των κανονικών αντισταθμιστών μέσω της επίλυσης ενός συνόλου αριθμητικών εξισώσεων της μορφής (5.65), μπορούμε να κάνουμε ακόμα ένα βήμα παραπέρα και να προτείνουμε μια μέθοδο που περιορίζει το πρόβλημα στην επίλυση μιας μόνο αριθμητικής εξίσωσης. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί μέσω της μεταφοράς της αναλλοίωτης μορφής της γενικευμένης επιλύουσας του και χρησιμοποιώντας την απαλοιφή κατά Gauss.

Ας είναι $i_1, i_2, ..., i_m$ δείκτες, τέτοιοι ώστε $\xi_{i_1} \leq \xi_{i_2} \leq ... \leq \xi_{i_m}$. Ας είναι, επίσης, $\xi := \xi_{i_m} = \max_{i \in m}\{\xi_i\}$. Για να λύσουμε την εξίσωση (5.65) για $i = i_1$ μπορούμε να εφαρμόσουμε την απαλοιφή κατά Gauss στις στήλες του $M_{e(\xi_{i_1}+1)}$ για να πάρουμε την ανηγμένη κλιμακωτή μορφή κατά στήλες $R_{e(\xi_{i_1}+1)}$. Εξαιτίας της μετατοπισμένης αναλλοίωτης μορφής της επιλύουσας, οι στήλες του $M_{e(\xi_{i_1}+1)}$ θα έχουν πλήρη τάξη ενώ η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή κατά στήλες $M_{e(\xi_{i_2}+1)}$ θα έχει σύνθετη (block) τριγωνική μορφή:

$$R_{e(\xi_{i_2}+1)} = \begin{bmatrix} R_{e(\xi_{i_1}+1)} & 0 \\ Q_{11} & Q_{12} \end{bmatrix}$$

Προχωρώντας επαγωγικά, είναι εύκολο να παρατηρήσεις πως ο $R_{e(\xi_{i_{j+1x}}+1)}$ θα έχει, επίσης, όμοια σύνθετη τριγωνική μορφή:

$$R_{e(\xi_{i_{j+1}}+1)} = \begin{bmatrix} R_{e(\xi_{i_j}+1)} & 0 \\ Q_{j1} & Q_{j2} \end{bmatrix}$$

για $j = 1, 2, ..., m-1$. Ως εκ τούτου, ανάγοντας τον $M_{e(\xi+1)}$ σε κλιμακωτή μορφή κατά στήλες ουσιαστικά βρίσκουμε λύση για όλες τις εξισώσεις της μορφής (5.65) εφόσον $R_{e(\xi+1)}$ αποτελείται από τμήματα που δίνουν διαδοχικά: $R_{e(\xi_{i_j}+1)}, j \in m$.

Υπό το φως της παραπάνω ανάλυσης, παρέχουμε τον ακόλουθο αλγόριθμο:

- **Βήμα 1$^{\text{ο}}$:** Βρίσκουμε μια δεξιά πρώτη πολυωνυμική περιγραφή $N_R(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times m}, D_R(s) \in \mathbb{R}[s]^{m\times m}$ της $P(s)$ με $D_R(s)$ κανονικό ως προς τις στήλες, με βαθμούς στηλών $\deg_{ci} D_R(s) = k_i, i \in m$.
- **Βήμα 2$^{\text{ο}}$:** Καθορίζουμε το ελάχιστο k μέχρις ότου η M_{ek} να έχει πλήρη τάξη στηλών. Τότε, $\mu = k$ και επιλέγουμε $\xi_i \geq \mu - 1, i \in m$.

- **Βήμα 3^{o} :** Κατασκευάζουμε τη γενικευμένη επιλύουσα Wolovich $M_{e(\xi+1)}$ όπου $\xi = \max_{i \in m} \{\xi_i\}$.
- **Βήμα 4^{o} :** Επιλέγουμε τον επιθυμητό παρονομαστή του κλειστού συστήματος $D_C(s) \in \mathbb{R}[s]^{m \times m}$ έτσι ώστε να είναι κανονικός ως προς τις γραμμές και τις στήλες του, με k_i δυνάμεις των στηλών του και ξ_i δυνάμεις των γραμμών του και στη συνέχεια κατασκευάζουμε τον $\overline{D}_{(\xi+1)}$ διαμερίζοντας τον $D_C(s) = \overline{D}_{(\xi+1)} S_{e(\xi+1)}(s)$, όπως στην εξίσωση (26).
- **Βήμα 5^{o} :** Κατασκευάζουμε τον σύνθετο πίνακα $\overline{M}_{e(\xi+1)} = \begin{bmatrix} M_{e(\xi+1)} \\ \overline{D}_{(\xi+1)} \end{bmatrix}$
- **Βήμα 6^{o} :** Ανάγουμε τον $\overline{M}_{e(\xi+1)}$ στην ανηγμένη κλιμακωτή μορφή κατά στήλες για να πάρουμε τον $\overline{R}_{e(\xi+1)} = \begin{bmatrix} R_{e(\xi+1)} \\ \Delta_{(\xi+1)} \end{bmatrix}$
- **Βήμα 7^{o} :** Υπολογίζουμε τη (γενική) λύση για κάθε γραμμή $\overline{\omega}_i^T$ για $i = 1, 2, ..., m$, χρησιμοποιώντας τις πρώτες $(\xi_i + 1)(p + m)$ γραμμές του $\overline{R}_{e(\xi+1)}$ και την i^{th} γραμμή του $Z_{(\xi+1)}$ (απορρίπτοντας τις τελευταίες $(\xi - \xi_i)m$ στήλες επειδή περιέχουν μόνο μηδενικά).
- **Βήμα 8^{o} :** Χρησιμοποιώντας την (5.63) υπολογίζουμε τα $\omega_i^T(s)$ του $\Omega(s)$ από τα $\overline{\omega}_i^T$ για $i = 1, 2, ..., m$.

Σημειώνουμε ότι η παραπάνω μέθοδος δεν απαιτεί υπολογισμό της αριστερά πρώτης πολυωνυμικής περιγραφής της $P(s)$ για την παραμετροποίηση των λύσεων ούτε τον υπολογισμό μιας Y- ελάχιστης ειδικής λύσης. Η μοναδική πληροφορία που επηρεάζει την επιλογή του παρονομαστή του κλειστού συστήματος είναι ο δείκτης παρατηρησιμότητας μ της $P(s)$ ο οποίος μπορεί να καθοριστεί χρησιμοποιώντας κριτήρια ελέγχου στην τάξη του M_{ek} για επιτυχείς επιλογές του $k = 1, 2, 3, ...,$ εφόσον σύμφωνα με την παρατήρηση 5.1, μ είναι ίσος με το ελάχιστο k για το οποίο M_{ek} έχει πλήρη τάξη στηλών.

Επαληθεύουμε την παραπάνω διαδικασία μέσω του παρακάτω παραδείγματος

Παράδειγμα 5.4 :

Έστω

$$P(s)=\begin{bmatrix} \dfrac{s+1}{s(s-2)} & 0 \\ \dfrac{1}{s(s-2)} & \dfrac{1}{s-1} \end{bmatrix}$$

με

$$D_R(s)=\begin{bmatrix} s^2-2s & 0 \\ 1 & s-1 \end{bmatrix}, N_R(s)=\begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

έτσι ώστε $k_1=2, k_2=1$ and $\delta_M P(s)=k_1+k_2=3$. Ο δείκτης παρατηρησιμότητας της $P(s)$ είναι $\mu=2$, εφόσον είναι προφανές ότι M_{e1} δεν έχει πλήρη τάξη στηλών ενώ M_{e2} έχει.

Ας είναι ο επιθυμητός παρονομαστής του κλειστού συστήματος ο παρακάτω πολυωνυμικός πίνακας:

$$D_C(s)=diag\left\{s^3+8s^2+24s+32, s^3+15s^2+62s+48\right\}$$

με $\xi_1=1, \xi_2=2, \xi=\max\{\xi_i\}=2$.

Θα πρέπει να περιμένουμε η παραμετροποίηση όλων των κανονικών αντισταθμιστών που δίνει μορφή στον $D_C(s)$, να έχει $m\left(p-\delta_M P(s)\right)+p\sum_{i=1}^{m}\xi_i=4$ ανεξάρτητες παραμέτρους.

Δημιουργούμε – Κατασκευάζουμε τη γενικευμένη επιλύουσα του Wolovich για $k=\xi+1=3$

$$M_{e3}=\begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{12\times 9}$$

Γράφουμε τον $D_c(s)$ με τους όρους των συντελεστών του ως ακολούθως:

$$D_C(s)=\overline{D}_3 S_{e3}(s)=\begin{bmatrix} 32 & 24 & 8 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 48 & 62 & 15 & 1 \end{bmatrix} S_{e3}(s)$$

Τώρα, ορίζουμε τον σύνθετο πίνακα $\overline{M}_{e3}=\begin{bmatrix} M_{e3} \\ \overline{D}_3 \end{bmatrix}$ και εφαρμόζουμε την απαλοιφή κατά Gauss στις στήλες του $\overline{M}_{e3}$ για να πάρουμε την ανηγμένη κλιμακωτή μορφή κατά στήλες που είναι η:

$$
\overline{R}_{e3}=\left[\begin{array}{ccccccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
-1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0\\
0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\
\hline
6 & 0 & 32 & 0 & 1 & 0 & 4 & 0 & 0\\
-63 & 73 & -204 & 126 & 0 & 16 & 62 & 0 & 1
\end{array}\right]=\begin{bmatrix} R_{e3}\\ \Delta_3 \end{bmatrix}
$$

όπου $R_{e3}\in\mathbb{R}^{12\times 9},\Delta_3\in\mathbb{R}^{2\times 9}$. Για να προσδιορίσουμε το $\omega_1^T(s)$ παίρνουμε τις πρώτες $(p+m)(\xi_1+1)=8$ γραμμές του $\overline{R}_{e3}$ καθώς, επίσης, και την πρώτη γραμμή του Δ_3 απορρίπτοντας τις τελευταίες δύο στήλες και στους δύο πίνακες. Αυτό αντιστοιχεί στην ανηγμένη κλιμακωτή μορφή της εξίσωσης (5.65) για $i=1$, έτσι ώστε:

$$
\overline{\omega}_1^T\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\
-1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}=
$$

$$
\begin{bmatrix} 6 & 0 & 32 & 0 & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}
$$

της οποίας η γενική λύση είναι:

$$\overline{\omega}_1^T = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 32 & 0 & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} t_1$$

όπου $t_1 \in \mathbb{R}$. Ως εκ τούτου από την (5.63) θα έχουμε:

$$\overline{\omega}_1^T(s) = \begin{bmatrix} s+6+t_1 & -t_1 & (4-t_1)s+32+2t_1 & t_1 s - t_1 \end{bmatrix}$$

Αναλόγως, για να προσδιορίσουμε το $\omega_2^T(s)$ παίρνουμε τις πρώτες $(p+m)(\xi_2+1)=12$ γραμμές του $\overline{R}_{e3}$ καθώς και τη δεύτερη γραμμή του Δ_3. Αυτό αντιστοιχεί στην ανηγμένη κλιμακωτή γραμμή της (5.65) για $i=2,$ δηλαδή:

$$\overline{\omega}_2^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -63 & 78 & -204 & 126 & 0 & 16 & 62 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

της οποίας η γενική λύση είναι:

$$\overline{\omega}_2^T = \begin{bmatrix} -63 & 78 & -204 & 126 & 0 & 16 & 62 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} t_2 & t_3 & t_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

όπου $t_2, t_3, t_4 \in \mathbb{R}$. Ως εκ τούτου, από την (5.63) θα έχουμε:

$$\omega_2^T(s) = [-63 + t_2 - t_3 - st_3 \qquad 78 - t_2 - t_4 + s(16 - t_4) + s^2$$
$$-204 + 2t_2 + 2t_4 + s(62 - t_2 - 2t_3 - t_4) + s^2 t_3 \qquad 126 - t_2 - t_4 + st_2 + s^2 t_4]$$

Επομένως, τώρα ο $\Omega(s) = \left[X_L(s), Y_L(s)\right] = \begin{bmatrix} \omega_1^T(s) \\ \omega_2^T(s) \end{bmatrix}$, και έτσι η παραμετροποίηση όλων των κανονικών αντισταθμιστών θα είναι η:

$$X_L(s) = \begin{bmatrix} s + 6 + t_1 & -t_1 \\ -63 + t_2 - t_3 - st_3 & 78 - t_2 - t_4 + s(16 - t_4) + s^2 \end{bmatrix}$$

$$Y_L(s) = \begin{bmatrix} (4 - t_1)s + 32 + 2t_1 & t_1 s - t_1 \\ -204 + 2t_2 + 2t_4 + s(62 - t_2 - 2t_3 - t_4) + s^2 t_3 & 126 - t_2 - t_4 + st_2 + s^2 t_4 \end{bmatrix}$$

για τις ελεύθερες παραμέτρους $t_1, t_2, t_3, t_4 \in \mathbb{R}$. Σημειώνουμε ότι ο αριθμός των παραμέτρων είναι ο αναμενόμενος, δηλαδή 4. Προφανώς, ο $X_L(s)$ είναι κανονικός ως προς τις γραμμές του με βαθμούς γραμμών 1, 2 ενώ οι αντίστοιχοι βαθμοί των γραμμών του $Y_L(s)$ δεν υπερβαίνουν τους 1, 2. Άρα, εν κατακλείδι $X_L^{-1}(s) Y_L(s)$ είναι κανονικός.

□

Κεφάλαιο 6$^{\text{ο}}$: Πίνακες με στοιχεία στο δακτύλιο S

6.1 Κανονικοί και Ω – ευσταθείς ρητοί πίνακες

Συμβολίζουμε με $S^{p\times m}$ το σύνολο των $p\times m$ πινάκων με στοιχεία στο S. Τους πίνακες αυτούς τους ονομάζουμε «**κανονικούς** και Ω – **ευσταθείς**» ρητούς πίνακες και εξ ορισμού δεν έχουν πόλους στο $s=\infty$, δηλαδή είναι **κανονικοί (proper)** και δεν έχουν πόλους μέσα στο Ω.

Εάν $\Omega \equiv \mathbb{C}^{+}$ τότε το $S^{p\times m}$ αναπαριστά το σύνολο των κανονικών και εκθετικών ευσταθών ρητών συναρτήσεων.

Ορισμός 6.1 [1]: Ένας πίνακας $T(s)\in S^{p\times p}$ ονομάζεται ***S*** **– αντιστρέψιμος (*S* – unimodular)** εάν υπάρχει ένας $\hat{T}(s)\in S^{p\times p}$ τέτοιος ώστε $T(s)\hat{T}(s)=I_p$. □

Ένα άμεσο συμπέρασμα από τα παραπάνω είναι ότι ο $T(s)\in S^{p\times p}$ είναι S - αντιστρέψιμος εάν δεν έχει μηδενικά στο $s=\infty$ και μη *πεπερασμένα μηδενικά* μέσα στο Ω (δηλαδή ένας S – αντιστρέψιμος πίνακας είναι τετραγωνικός και δεν έχει πόλους ή μηδενικά μέσα στο $\bar{\Omega}=\Omega\cup\{\infty\}$).

Στην περίπτωση όπου $\Omega \equiv \mathbb{C}^{+}$, ένας S – αντιστρέψιμος πίνακας είναι τετραγωνικός (square), δικανονικός (biproper), εκθετικά ευσταθής (exponentially stable) και «ελαχίστου φάσεως» (minimum phase) ρητός πίνακας.

Οι στοιχειώδεις μετασχηματισμοί στον $T(s)\in\mathbb{R}(s)^{p\times m}$ ορίζονται ως ακολούθως:

(i) Εναλλαγή δύο οποιωνδήποτε γραμμών (στηλών) του $T(s)$,

(ii) Πολλαπλασιασμός της γραμμής (στήλης) i του $T(s)$ με το μοναδιαίο $u(s)\in S$,

(iii) Πρόσθεση στη γραμμή (στήλη) i του $T(s)$ του πολλαπλασίου της γραμμής (στήλης) j με το $t(s)\in S$.

Αυτοί οι στοιχειώδεις μετασχηματισμοί μπορούν να επιτευχθούν πολλαπλασιάζοντας το δοθέντα $T(s)$ από αριστερά (αντίστοιχα από δεξιά) με «στοιχειώδεις» S – αντιστρέψιμους πίνακες που προέκυψαν εκτελώντας τον παραπάνω στοιχειώδη μετασχηματισμό στον ταυτοτικό (identity) πίνακα $I_{p(m)}$. Μπορεί, επίσης να αποδειχθεί ότι κάθε S – αντιστρέψιμος πίνακας μπορεί να αναπαρασταθεί σαν το γινόμενο ενός πεπερασμένου αριθμού στοιχειωδών S –αντιστρέψιμων πινάκων.

Ορισμός 6.2 [1]: Ας υποθέσουμε $T_i(s) \in \mathbb{R}(s)^{p\times m}, i = 1,2$. Τότε οι $T_1(s), T_2(s)$ ονομάζονται **ισοδύναμοι (equivalent)** στο $\bar{\Omega}$ εάν υπάρχουν S – αντιστρέψιμοι πίνακες $T_L(s) \in S^{p\times p}$ και $T_R(s) \in S^{m\times m}$ τέτοιοι ώστε:

$$T_L(s)T_1(s)T_R(s) = T_2(s) \tag{6.1}$$

Εάν $T_L(s) \equiv I_p \in S^{p\times p} \left(T_R(s) \equiv I_m \in S^{m\times m}\right)$ τότε οι $T_1(s)$ και $T_2(s)$ ονομάζονται **στηλο - ισοδύναμοι (αντίστοιχα γραμμο - ισοδύναμοι)** στο $\bar{\Omega}$. □

Η εξίσωση (6.1) ορίζει μια σχέση ισοδυναμίας στο $\mathbb{R}(s)^{p\times m}$, την οποία συμβολίζουμε με E^{Ω} και εάν $T_1(s), T_2(s)$ είναι ισοδύναμοι στο $\bar{\Omega}$ συμβολίζουμε $\left[T_1(s), T_2(s)\right] \in E^{\bar{\Omega}}$. Την $E^{\bar{\Omega}}$ κλάση ισοδυναμίας ή τον βαθμό του σταθερού $T_1(s) \in \mathbb{R}(s)^{p\times m}$ τον συμβολίζουμε με $\left[T(s)\right]_{\bar{\Omega}}$.

Υποθέτουμε ότι $T(s) \in \mathbb{R}(s)^{p\times m}$ με $rank_{\mathbb{R}(s)} = r$ και θεωρούμε το πηλίκο της διαίρεσης του $\mathbb{R}(s)^{p\times m}$ με το E^s, δηλαδή θεωρούμε ένα σύνολο (συμβολίζουμε με) $\mathbb{R}(s)^{p\times m} / E^{\bar{\Omega}}$ των $E^{\bar{\Omega}}$- σχέσεων ισοδυναμίας του $\left[T(s)\right]_{\bar{\Omega}}$ όταν ο $T(s)$ εμπεριέχεται στα στοιχεία του $\mathbb{R}(s)^{p\times m}$. Χαρακτηρίζουμε αυτές τις σχέσεις ισοδυναμίας, προσδιορίζοντας ολοκληρωμένα σύνολα από αναλλοίωτες και κανονικές μορφές.

Θεώρημα 6.1 [1]: (Smith – McMillan μορφή ρητού πίνακα στο $\bar{\Omega} := \Omega \cup \{\infty\}$).

Υποθέτουμε ότι ο $T(s) \in \mathbb{R}(s)^{p\times m}, rank_{\mathbb{R}(s)} T(s) = r$. Τότε ο $T(s)$ είναι ισοδύναμος στο $\bar{\Omega}$ με έναν διαγώνιο (diagonal) πίνακα $S_{T(s)}^{\bar{\Omega}}$ που έχει τη μορφή

$$S_{T(s)}^{\bar{\Omega}} = block\ diag\left[\varepsilon_1(s)/\psi_1(s),...,\varepsilon_r(s)/\psi_r(s),0_{p-r,m-r}\right] \in \mathbb{R}(s)^{p\times m} \tag{6.2}$$

όπου

$$\varepsilon_i(s) = \frac{\varepsilon_{i\Omega}(s)}{(s+a)^{p_i}} \in S \qquad \psi_i(s) = \frac{\psi_{i\Omega}(s)}{(s+a)^{p_i}} \in S \tag{6.3}$$

είναι πρώτοι στο $\bar{\Omega}, i \in r, \varepsilon_{i\Omega}(s), \psi_{i\Omega}(s) \in \mathbb{R}[s]$ είναι πρώτοι με τα μηδενικά τους όχι εκτός του Ω, $-a \in \mathbb{R}$ είναι έξω από το Ω και διαφορετικά αυθαίρετος, και

$$0 \le \delta_s(\varepsilon_i(s)) =: p_i \le p_{i+1} = \delta_s(\varepsilon_{i+1}(s)) \qquad \varepsilon_i(s) \mid \varepsilon_{i+1}(s) \qquad i \in r-1 \tag{6.4}$$

$$0 \le \delta_s(\psi_{i+1}(s)) =: l_i \le l_{i+1} = \delta_s(\psi_{i+1}(s)) \qquad \psi_{i+1}(s) \mid \psi_i(s) \qquad i \in r-1 \tag{6.5}$$

Ο πίνακας $S_{T(s)}^{\bar{\Omega}}$ μπορεί επίσης να γραφεί

$$S_{T(s)}^{\bar{\Omega}} = E^{\bar{\Omega}}(s)\Psi_T^{\bar{\Omega}}(s)^{-1} = \Psi_L^{\bar{\Omega}}(s)^{-1}E^{\bar{\Omega}}(s) \tag{6.6}$$

όπου

$$E^{\bar{\Omega}}(s) := block\ diag\left[\varepsilon_1(s),...,\varepsilon_r(s),0_{p-r,m-r}\right] \in S^{p\times m} \tag{6.7}$$

$$\Psi_R^{\bar{\Omega}}(s) := diag\left[\psi_1(s),...,\psi_r(s),I_{m-r}\right] \in S^{m\times m} \tag{6.8}$$

$$\Psi_L^{\bar{\Omega}}(s) := diag\left[\psi_1(s),...,\psi_r(s),I_{p-r}\right] \in S^{p\times p} \tag{6.9}$$

ή ως

$$S_{T(s)}^{\bar{\Omega}} = block\,diag\left[\frac{\varepsilon_{1\Omega}(s)}{\psi_{1\Omega}(s)}(s+a)^{q_1},...,\frac{\varepsilon_{r\Omega}(s)}{\psi_{r\Omega}(s)}(s+a)^{q_r},0_{p-r,m-r}\right] \tag{6.10}$$

όπου

$$q_i := p_i - l_i \tag{6.11}$$

Πόρισμα 6.1 [1]: Οι ρητές συναρτήσεις $\varepsilon_i(s)/\psi_i(s)$ σχηματίζουν ένα ολοκληρωμένο ($\bmod a$) σύνολο αναλλοίωτων για το $E^{\bar{\Omega}}$ στο $\mathbb{R}(s)^{p\times m}$ και αναφέρονται σε αυτό σαν αναλλοίωτες ρητές συναρτήσεις του $T(s)$ στο $\bar{\Omega}$. Επίσης, ο $S_{T(s)}^{\bar{\Omega}}$ είναι (unique mod a) κανονική μορφή για το $E^{\bar{\Omega}}$ στο $\mathbb{R}(s)^{p\times m}$.

Τα πεπερασμένα μηδενικά του

$$\varepsilon_i(s) = \frac{\varepsilon_{i\Omega}(s)}{(s+a)^{p_i}} \in S \tag{6.12}$$

δηλαδή τα μηδενικά του $\varepsilon_{i\Omega}(s), i \in r$, δίνουν τα μηδενικά του $T(s)$ στο Ω καθώς το $q_i^{p\infty} > 0$ όπου

$$q_i^{x\infty} := p_i - \deg \varepsilon_{i\Omega}(s) \geq 0 \tag{6.13}$$

είναι οι τάξεις των μηδενικών στο $s=\infty$ του $T(s)$. Επίσης, τα πεπερασμένα μηδενικά

$$\psi_i(s) = \frac{\psi_{i\Omega}(s)}{(s+a)^{li}} \in S \tag{6.14}$$

δηλαδή τα μηδενικά του $\psi_{i\Omega}(s), i \in r$, δίνουν τους πόλους του $T(s)$ στο Ω καθώς το $q_i^{p\infty} > 0$ όπου

$$q_i^{p\infty} := l_i - \deg \psi_{i\Omega}(s) \geq 0 \tag{6.15}$$

δίνει τις τάξεις των πόλων στο $s=\infty$ του $T(s)$.

Πόρισμα 6.2 [1]: Υποθέτουμε ότι $T(s) \in \mathbb{R}(s)^{p\times m}$. Τότε $T(s) \in \mathbb{R}_{pr}(s)$ αν και μόνο αν οι $\Psi_{\mathbb{R}}^{\bar{\Omega}}(s), \Psi_L^{\bar{\Omega}}(s)$ είναι **δικανονικοί ρητοί πίνακες (biproper rational matrices)**.

Απόδειξη: $T(s) \in \mathbb{R}_{pr}(s)^{p\times m}$. Αν και μόνο αν ο $T(s)$ δεν έχει πόλους στο $s=\infty$ το οποίο, λόγω της (6.15) είναι αληθές αν και μόνο αν $q_i^{p\infty} = 0$ ή ισοδύναμα αν και μόνο αν $l_i = \deg \psi_{i\Omega}(s), \forall i \in r$, δηλαδή αν και μόνο αν $\psi_i(s) \in S, i \in r$, είναι δικανονικοί ρητοί πίνακες. ▲

Πόρισμα 6.3. [1]: Υποθέτουμε ότι $T(s)\in\mathbb{R}(s)^{p\times m}$. Τότε $T(s)\in S^{p\times m}$ αν και μόνο αν $\Psi_{\mathbb{R}}^{\bar{\Omega}}(s)=I_m,\Psi_L^{\bar{\Omega}}(s)=I_p$ δηλαδή αν και μόνο αν οι $\Psi_{\mathbb{R}}^{\bar{\Omega}}(s)\in S^{m\times m}$, $\Psi_L^{\bar{\Omega}}(s)\in S^{p\times p}$ είναι s – αντιστρέψιμοι ρητοί πίνακες. ($T(s)\in S^{p\times m}\Leftrightarrow T(s)$ δεν έχει πόλους στο $\bar{\Omega}\Leftrightarrow\psi_i(s)=1,i\in r$)

Απόδειξη: $T(s)\in\mathbb{R}_{pr}(s)^{p\times m}$ είναι αριστερά (αντίστοιχα δεξιά) – δικανονικός αν και μόνο αν $\lim_{s\to\infty}T(s)=E\in\mathbb{R}^{p\times m}$ και $rank_{\mathbb{R}}E=m(=p)$ δηλαδή αν και μόνο αν ο $T(s)$ δεν έχει επίσης, μηδενικά στο $s=\infty$ το οποίο, λόγω της (6.13) είναι αληθές αν και μόνο αν $q_i^{x\infty}=0$ ή ισοδύναμα αν και μόνο αν $p_i=\deg\varepsilon_{i\Omega}(s)\forall i\in r$, δηλαδή αν και μόνο αν $\varepsilon_{i\Omega}(s)\in S$ είναι δικανονικές ρητές συναρτήσεις και ως εκ τούτου αν και μόνο αν $E^{\bar{\Omega}}(s)\in S^{p\times m}$ είναι αριστερά (αντίστοιχα δεξιά) – δικανονικός ρητός πίνακας. ▲

Πόρισμα 6.4. [1]: Υποθέτουμε ότι $T(s)\in\mathbb{R}(s)^{p\times m}$. Τότε $T(s)\in S^{p\times m}$ αν και μόνο αν $\psi_{\mathbb{R}}^{\bar{\Omega}}(s)=I_m$, $\psi_L^{\bar{\Omega}}(s)=I_p$, δηλαδή αν και μόνο αν ο $\psi_{\mathbb{R}}^{\bar{\Omega}}(s)^{p\times p}$ είναι S – αντιστρέψιμος ρητός πίνακας.

($T(s)\in S^{p\times m}\Leftrightarrow T(s)$ δεν έχει πόλους στο $\bar{\Omega}\Leftrightarrow\psi_i(s)=1,i\in r$)

Σημείωση 6.1 : Αν $T(s)\in S^{p\times m}$ τότε από το Πόρισμα 6.4 έχουμε

$$S_{T(s)}^{\bar{\Omega}}=block\ diag\left[\frac{\varepsilon_{i\Omega}(s)}{(s+a)^{p_1}},\ldots,\frac{\varepsilon_{i\Omega}(s)}{(s+a)^{p_r}},0_{p-r,m-r}\right]\equiv E^{\bar{\Omega}}(s)\in S^{p\times m} \tag{6.16}$$

και σε αυτήν την περίπτωση ο $S_{T(s)}^{\bar{\Omega}}$ ονομάζεται Smith μορφή του $T(s)$ στο $\bar{\Omega}$. Αλλιώς, δηλαδή εάν ο $T(s)\notin S^{p\times m}$, μερικά από τα $\psi_i(s)$ θα είναι διαφορετικά από τα 1's και τότε ο $S_{T(s)}^{\bar{\Omega}}\in\mathbb{R}(s)^{p\times m}$ ονομάζεται McMillan μορφή του $T(s)$ στο $\bar{\Omega}$.

Σημείωση 6.2 : Αν $T(s)\in S^{p\times m}$, τότε οι αναλλοίωτες ρητές συναρτήσεις του $T(s)$ στο $\bar{\Omega}:\varepsilon_i(s)=\varepsilon_{i\Omega}(s)/(s+a)^{q_i}\in S, i\in r$, μπορούν να υπολογιστούν απευθείας χρησιμοποιώντας τον τυπικό «Smith αλγόριθμο»:

$$\varepsilon_i(s):=m_i(s)m_{i-1}(s)^{-1} \qquad i\in r \tag{6.17}$$

όπου $m_i(s)\in S, i\in r$, είναι ο (mod a) Μ.Κ.Δ. (μέγιστος κοινός διαιρέτης) της i ης τάξης ελάσσονες του $T(s)$ και $m_0(s):=1$.

Σημείωση 6.3 : Αν το Ω συμπίπτει με ολόκληρο το επίπεδο $\mathbb{C}$ εκτός από ένα μοναδικό σημείο $-a\in\mathbb{R}$ τότε το $S_{T(s)}^{\bar{\Omega}}$ θα δώσει τη Smith – McMillan μορφή του $T(s)$ σε όλα, εκτός από ένα (δηλαδή εκτός του $s=-a$), σημεία του «εκτεταμένου» πολύπλοκου επιπέδου $\bar{\mathbb{C}}:=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$.

Παράδειγμα 6.1 : Υποθέτουμε $\Omega\equiv\mathbb{C}^+$. Τότε, το S είναι το σύνολο των ρητών συναρτήσεων χωρίς πόλους στο $\mathbb{C}^+\cup\{\infty\}$, δηλαδή ο Ευκλείδειος δακτύλιος των ρητών και εκθετικά σταθερών ρητών συναρτήσεων. Θεωρούμε τον «κατάλληλο και εκθετικά σταθερό» ρητό πίνακα:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{1-s}{(s+1)^2} & \dfrac{1}{2s+1} \\ 0 & \dfrac{1}{s+1} \end{bmatrix}\in S^{2\times 2} \tag{6.18}$$

και επομένως η «Smith» μορφή στο $\bar{\mathbb{C}}^+:=\mathbb{C}^+\cup\{\infty\}, \delta_s(t_{11}(s))=2,\ \delta_s(t_{12}(s))=1,$ $\delta_s(t_{21}(s))=+\infty, \delta_s(t_{22}(s))=1$.

(i) Με την εναλλαγή στήλης, μεταφέρουμε το στοιχείο (1,2), το οποίο έχει το ελάχιστο $\delta_s(.)$ στη θέση $(1,1)$:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{1-s}{(s+1)^2} & \dfrac{1}{2s+1} \\ 0 & \dfrac{1}{s+1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{2s+1} & \dfrac{1-s}{(s+1)^2} \\ \dfrac{1}{s+1} & 0 \end{bmatrix}$$

(ii) Επίσης, γράφουμε

$$\frac{1-s}{(s+1)^2}=\frac{1}{2s+1}\frac{(2s+1)(1-s)}{(s+1)^2}$$

και πολλαπλασιάζουμε τη στήλη 1 με το $-(2s+1)(1-s)/(s+1)^2\in S$ και το προσθέτουμε στη στήλη 2:

$$\begin{bmatrix}\frac{1}{2s+1} & \frac{1-s}{(s+1)^2}\\ \frac{1}{s+1} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -\frac{(2s+1)(1-s)}{(s+1)^2}\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2s+1} & 0\\ \frac{1}{s+1} & -\frac{(2s+1)(1-s)}{(s+1)^3}\end{bmatrix}$$

(iii) Γράφουμε ως:

$$\frac{1}{s+1}=\frac{1}{2s+1}\frac{2s+1}{s+1}$$

και πολλαπλασιάζουμε τη στήλη 1 με το $-(2s+1)/(s+1)\in S$ και την προσθέτουμε στη στήλη 2:

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ -\frac{2s+1}{s+1} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2s+1} & 0\\ \frac{1}{s+1} & \frac{(2s+1)(1-s)}{(s+1)^3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2s+1} & 0\\ 0 & -\frac{(2s+1)(1-s)}{(s+1)^3}\end{bmatrix}$$

(iv) Έπειτα, γράφουμε ως:

$$\frac{1}{2s+1}=\frac{1}{s+a}\frac{s+a}{2s+1},\qquad -\frac{(2s+1)(1-s)}{(s+1)^3}=\frac{1-s}{(s+a)^2}\left[-\frac{(s+a)^2(2s+1)}{(s+1)^3}\right]$$

όπου $a>0$ και πολλαπλασιάζουμε τον πίνακα που προκύπτει στο (iii) με

$$\begin{bmatrix}\frac{2s+1}{s+a} & 0\\ 0 & -\frac{(s+1)^3}{(s+a)^2(2s+1)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2s+1} & 0\\ 0 & \frac{(s+1)(1-s)}{(s+1)^3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{s+a} & 0\\ 0 & \frac{1-s}{(s+a)^2}\end{bmatrix}=S_{T(s)}^{\bar{\Omega}}$$

Έτσι, ο $T(s)$ έχει μη (πεπερασμένους) πόλους στο $\mathbb{C}^+$ και ένα (πεπερασμένο) μηδενικό στο $\mathbb{C}^+$ για $s=1$.

Επίσης, $p_1 = 1, p_2 = 2$ και έτσι ο $T(s)$ έχει $q_1^{x\infty} = p_1 - \deg \varepsilon_{1\Omega}(s) = 1 - 0 = 1$, $q_2^{x\infty} = p_2 - \deg \varepsilon_{2\Omega}(s) = 2 - 1 = 1$, δηλαδή έχει δύο μηδενικά στο $s = \infty$, κάθε ένα από τα οποία είναι τάξης $q_L^{x\infty} = 1$, $i = 1,2$. Αν δεν ενδιαφερόμαστε για τους S - αντιστρέψιμους πίνακες που ανάγουν – ελαττώνουν τον $T(s)$ σε $S_{T(s)}^{\bar{\Omega}}$, μπορούμε επίσης να το προσεγγίσουμε χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο «Smith» ως εξής:

τα (μη - μηδενικά) ελάσσονα στοιχεία του $T(s)$ τάξης 1 είναι αυτά που μπορούν να γραφούν και ως:

$$\frac{1-s}{(s+1)^2} = \frac{1-s}{(s+a)^2}\frac{(s+a)^2}{(s+1)^2} \qquad \frac{1}{2s+1} = \frac{1}{s+a}\frac{s+a}{2s+1} \qquad \frac{1}{s+1} = \frac{1}{s+a}\frac{s+a}{s+1}$$

Ως εκ τούτου ο Μ.Κ.Δ. των ελασσόνων στοιχείων τάξης 1 του $T(s)$ είναι $m_1(s) = 1/(s+a)$. Το ελάσσων στοιχείο τάξης 2 του $T(s)$ είναι η ορίζουσα του: $(1-s)/(s+1)^3$ η οποία μπορεί να γραφεί και ως:

$$\frac{1-s}{(s+1)^3} = \frac{1-s}{(s+a)^3}\frac{(s+a)^3}{(s+1)^3}$$

έτσι ώστε $m_2(s) = (1-s)/(s+a)^3$. Τελικά από την (6.17) και $m_0(s) := 1$,

$$\varepsilon_1(s) = m_1(s)m_0(s)^{-1} = \frac{1}{s+a}$$

$$\varepsilon_2(s) = m_2(s)m_1(s)^{-1} = \frac{1-s}{(s+a)^2}$$

□

Από τον ορισμό των μηδενικών ενός ρητού πίνακα $T(s) \in \mathbb{R}(s)^{p\times m}$ στο $\bar{\Omega} = \Omega \cup \{\infty\}$ μέσω της Smith – McMillan μορφής: $S_{T(s)}^{\bar{\Omega}}$ στο $\bar{\Omega}$ έχουμε την ακόλουθη Πρόταση.

Πρόταση 6.1 [1]: Υποθέτουμε ότι ο $T(s) \in \mathbb{R}(s)^{p\times m}$ με $rank_{\mathbb{R}(s)} T(s) = r$. Τότε, οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες:

(i) Ο $T(s)$ δεν έχει μηδενικά στο $\bar{\Omega} = \Omega \cup \{\infty\}$

(ii) $\varepsilon_i(s)=1, i\in r \Leftrightarrow \varepsilon_{i\Omega}(s)=1$ $\kappa\alpha\iota$ $p_i=0, i\in r$.

(iii) $S_{T(s)}^{\bar{\Omega}}=block\,diag\left[\dfrac{1}{\psi_1(s)},\ldots,\dfrac{1}{\psi_r(s)},0_{p-r,m-r}\right]$

δηλαδή ο $T(s)$ έχει πιθανότατα πόλους μόνο στο $\bar{\Omega}$.

Εάν ο $T(s)$ δεν έχει μηδενικά στο $\bar{\Omega}$ και επιπρόσθετα $T(s)\in\mathbb{R}_{pr}(s)^{p\times m}$, (δηλαδή εάν επίσης δεν έχει πόλους για $s=\infty$) και δεν έχει πόλους στο Ω τότε, $\psi_i(s)=1, i\in r \Leftrightarrow \psi_{i\Omega}(s)=1$ και $l_i=0, i\in r$. Σε αυτήν την περίπτωση:

$$S_{T(s)}^{\bar{\Omega}}=\begin{bmatrix} I_r & 0_{m-r} \\ 0_{p-r} & 0_{p-r,m-r} \end{bmatrix} \tag{6.19}$$

Τώρα, αν $r=p$ τότε,

$$S_{T(s)}^{\bar{\Omega}}=\begin{bmatrix} I_p & 0_{p,m-r} \end{bmatrix} \tag{6.20}$$

▲

Ορισμός 6.3 [1]: Ένας ρητός πίνακας $T(s)\in S^{p\times m}$ με $rank_{\mathbb{R}(s)}T(s)=r\le p$ που ικανοποιεί τη συνθήκη (6.20) **ονομάζεται S – δεξιά αντιστρέψιμος**.
Οι S – αριστερά αντιστρέψιμοι ρητοί πίνακες μπορούν να οριστούν με ανάλογο τρόπο. □

Πρόταση 6.2 [1]: Οποιοσδήποτε ρητός πίνακας $T(s)\in\mathbb{R}(s)^{p\times m}$ με $rank_{\mathbb{R}(s)}T(s)=r\le p$ μπορεί να παραγοντοποιηθεί (με έναν μη – μοναδικό τρόπο) ως:

$$T(s)=T_{\bar{\Omega}}(s)T_1(s) \tag{6.21}$$

όπου $T_1(s)\in S^{r\times m}$ είναι S – δεξιά αντιστρέψιμος και ο $T_{\bar{\Omega}}(s)\in\mathbb{R}(s)^{p\times r}$ έχει $rank_{\mathbb{R}(s)}T(s)=r$ και δομή πόλου – μηδενικού στο $\bar{\Omega}$ ταυτόσημη με αυτήν του $T(s)$.

Απόδειξη: Υποθέτουμε ότι οι $T_L(s)\in S^{p\times p}, T_{\mathbb{R}}(s)\in S^{m\times m}$, είναι S- αντιστρέψιμοι πίνακες τέτοιοι ώστε:

$$T(s)=T_L(s)S_{T(s)}^{\bar{\Omega}}T_{\mathbb{R}}(s) \tag{6.22}$$

$$S_{T(s)}^{\bar{\Omega}} = \begin{bmatrix} N(s) & 0_{r,m-r} \\ 0_{p-r,r} & 0_{p-r,m-r} \end{bmatrix} \tag{6.23}$$

$$N(s) = diag\left[\varepsilon_1(s)\psi_1(s)^{-1}, \ldots, \varepsilon_r(s)\psi_r(s)^{-1}\right] \in \mathbb{R}(s)^{r\times r} \tag{6.24}$$

Τώρα, διαμερίζοντας τον $T_R(s)$ ως:

$$T_R(s) = \begin{bmatrix} T_1(s) \\ T_2(s) \end{bmatrix} \tag{6.25}$$

όπου $T_1(s) \in S^{r\times m}, T_2(s) \in S^{(m-r)\times m}$. ▲

Ορισμός 6.4 [1]: Ο ρητός πίνακας $T_{\bar{\Omega}}(s)$ στην (6.21) ονομάζεται **αριστερά δομημένος πίνακας στο $\bar{\Omega}$ του $T(s)$.** □

Σημείωση 6.4 : Από την απόδειξη της Πρότασης 6.2 συνεπάγεται ότι εάν $T(s) \in \mathbb{R}_{pr}(s)^{p\times m}$ τότε $T_{\bar{\Omega}}(s) \in \mathbb{R}_{pr}(s)^{p\times r}$ (δηλαδή και οι δύο πίνακες $T(s)$ και $T_{\bar{\Omega}}(s)$ δεν έχουν πόλους στο $s = \infty$) και άρα και οι δύο έχουν ταυτοτική δομή πόλου στο Ω και ταυτοτική δομή μηδενικού στο $\Omega \cup \{\infty\} = \bar{\Omega}$. Επίσης, αν $T(s) \in S^{p\times m}$ τότε $T_{\bar{\Omega}}(s) \in S^{p\times r}$ (δηλαδή οι πίνακες $T(s)$ και $T_{\bar{\Omega}}(s)$ δεν έχουν πόλους στο $\bar{\Omega}$) και οι δύο έχουν ταυτοτική δομή μηδενικού στο $\bar{\Omega}$.

Σημείωση 6.5 : Ένας δεξιά δομημένος πίνακας στο $\overline{\Omega}$ ενός $T(s) \in \mathbb{R}(s)^{p\times m}$ με $rank_{\mathbb{R}(s)} T(s) = r \le m$ μπορεί να ορισθεί ανάλογα.

Παρουσιάζουμε τώρα τις έννοιες των δεξιά ή αριστερά πρώτων ρητών πινάκων με στοιχεία στο S, παραθέτοντας αρχικά κάποιους βασικούς ορισμούς.

Σημείωση 6.6 : Θεωρούμε τους ρητούς πίνακες $T(s) \in S^{p\times m}, \overline{T}(s) \in S^{p\times m}, T_L(s) \in S^{p\times p}$ που συνδέονται – σχετίζονται μέσω του

$$T(s) = T_L(s)\overline{T}(s) \tag{6.26}$$

Τότε, ο $T_L(s)$ είναι ένας **αριστερός διαιρέτης (left divisor)** στο $\overline{\Omega}$ (των στηλών) του $T(s)$. Θεωρούμε τώρα δύο (ή περισσότερους) ρητούς πίνακες $T_1(s) \in S^{p\times l}, T_2(s) \in S^{p\times t}$ και υποθέτουμε ότι ο $T_L(s) \in S^{p\times p}$ είναι αριστερός διαιρέτης στο $\overline{\Omega}$ των $T_1(s)$ και $T_2(s)$ δηλαδή υποθέτουμε ότι

$$T_1(s) = T_L(s)\overline{T}_1(s) \qquad\qquad T_2(s) = T_L(s)\overline{T}_2(s) \tag{6.27}$$

όπου $\overline{T}_1(s) \in S^{p\times l}, \overline{T}_2(s) \in S^{p\times t}$.Τότε έχουμε:

Ορισμός 6.5 [1]: Ο $T_L(s)$ ονομάζεται **αριστερός κοινός διαιρέτης (left common divisor)** στο $\overline{\Omega}$ των $T_1(s)$ και $T_2(s)$ Επιπρόσθετα, αν ο $T_L(s)$ είναι δεξιό πολλαπλάσιο κάθε αριστερού κοινού διαιρέτη στο $\overline{\Omega} : \overline{T}_L(s)S^{p\times p}$ των $T_1(s)$ και $T_2(s)$, δηλαδή αν

$$T_L(s) = \overline{T}_L(s)T_3(s) \tag{6.28}$$

για κάποια $T_3(s) \in S^{p\times p}$, τότε ο $T_L(s)$ ονομάζεται **μέγιστος κοινός αριστερός διαιρέτης (greatest common left divisor)** στο $\overline{\Omega}$ των $T_1(s)$ και $T_2(s)$.
□

Πρόταση 6.3 [1]: Υποθέτουμε ότι $T_1(s) \in S^{p\times l}, T_2(s) \in S^{p\times t}$ με $m := l + t \geq p = rank_{\mathbb{R}(s)}$ $\begin{bmatrix} T_1(s) & T_2(s) \end{bmatrix} =: T(s) \in S^{p\times m}$ και ότι ο $T_{\overline{\Omega}}(s) \in S^{p\times p}$ είναι αριστερά δομημένος πίνακας στο $\overline{\Omega}$ του $T(s)$. Τότε, ο $T_{\overline{\Omega}}(s)$ είναι ο μέγιστος κοινός αριστερός διαιρέτης στο $\overline{\Omega}$ των $T_1(s)$ και $T_2(s)$.

Παρατήρηση 6.1 : Από την παραπάνω Πρόταση 6.3 και την σημείωση 6.4 συνεπάγεται ότι εάν $T_L(s) \in S^{p\times p}$ είναι ο μέγιστος κοινός αριστερός διαιρέτης στο $\overline{\Omega}$ των $T_1(s)$ και $T_2(s)$ τότε ο $T_L(s)$ είναι ένας αριστερά δομημένος πίνακας στο $\overline{\Omega}$ των

$T(s)=\begin{bmatrix} T_1(s) & T_2(s) \end{bmatrix}$ και ως εκ τούτου ο $T_L(s)$ δεν έχει μηδενική δομή στο $\overline{\Omega}$ η οποία είναι ταυτόσημη με αυτήν του $T(s)$. Εάν ο $T_L(s) \in S^{p\times p}$ τυχαίνει να είναι S – αντιστρέψιμος, δηλαδή δεν έχει μηδενικά στο $\overline{\Omega}$, τότε ο $T(s)$ δεν έχει μηδενικά και στο $\overline{\Omega}$ και έτσι λέμε ότι οι $T_1(s)$ και $T_2(s)$ είναι αριστερά πρώτοι στο $\overline{\Omega}$. Να σημειώσουμε ότι σε μία τέτοια περίπτωση ο $T(s)$ ίσως έχει μόνο πεπερασμένα μηδενικά εκτός Ω, δηλαδή στο Ω^c.

Σημείωση 6.7 : Οι **δεξιοί διαιρέτες (right divisors)** στο $\overline{\Omega}$ (των γραμμών του) πίνακα $T(s) \in S^{p\times m}$ και οι **μέγιστοι κοινοί δεξιοί διαιρέτες (greatest common right divisors)** στο $\overline{\Omega}$ δύο (ή περισσοτέρων) πινάκων $T_1(s) \in S^{l\times m}, T_2(s) \in S^{t\times m}$ με $p := l+t \geq m = rank_{\mathbb{R}(s)} \begin{bmatrix} T_1(s) \\ T_2(s) \end{bmatrix}$ μπορούν να ορισθούν ανάλογα.

Οι παραπάνω ορισμοί και τα αποτελέσματα μπορούν να συνοψισθούν στην ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 6.4 [1]: Υποθέτουμε ότι $T_1(s) \in S^{p\times l}$, $T_2(s) \in S^{p\times t}$ με $m := l+t \geq= rank_{\mathbb{R}(s)} \begin{bmatrix} T_1(s) & T_2(s) \end{bmatrix}$. Τότε, οι επόμενες προτάσεις είναι ισοδύναμες.

(i) $T_1(s)$ και $T_2(s)$ είναι αριστερά πρώτοι (left coprime) στο $\overline{\Omega}$

(ii) $T(s) := \begin{bmatrix} T_1(s) & T_2(s) \end{bmatrix} \in S^{p\times m}$ δεν έχει μηδενικά στο $\overline{\Omega}$

(iii) Υπάρχει ένας S – αντιστρέψιμος πίνακας $T_R(s) \in S^{m\times m}$ τέτοιος ώστε:

$$T(s)T_R(s) = \begin{bmatrix} I_p & 0_{p,m-p} \end{bmatrix} \equiv S_{T(s)}^{\overline{\Omega}}$$

(iv) Υπάρχουν $X(s) \in S^{l\times p}, Y(s) \in S^{t\times p}$ τέτοιοι ώστε:

$$T_1(s)X(s) + T_2(s)Y(s) = I_p$$

(v) Υπάρχουν $T_3(s) \in S^{(m-p)\times l}, T_4(s) \in S^{(m-p)\times t}$ τέτοιοι ώστε:

$$\begin{bmatrix} T_1(s) & T_2(s) \\ T_3(s) & T_4(s) \end{bmatrix} \in S^{m\times m} \text{ είναι S – αντιστρέψιμος}$$

(vi) $rank_C \begin{bmatrix} T_1(s_0) & T_2(s_0) \end{bmatrix} = p \quad \forall s_0 \in \Omega$ και $\lim_{x\to\infty} \begin{bmatrix} T_1(s) & T_2(s) \end{bmatrix} =: E \in \mathbb{R}^{p\times m}$

$rank_{\mathbb{R}} E = p$

Σημείωση 6.8 : Οι **δεξιά πρώτοι (right coprime)** στο $\overline{\Omega}$ δύο (ή περισσοτέρων) πινάκων με τον ίδιο αριθμό στηλών όπως και ο αντίστροφος πίνακας $\begin{bmatrix} T_1(s) \\ T_2(s) \end{bmatrix}$ που έχει πλήρη βαθμό στηλών στο $\mathbb{R}(s)$ μπορούν να ορισθούν με ανάλογο τρόπο.

6.2 Πρώτες στο $\overline{\Omega}$ $S-$ κλασματικές περιγραφές πινάκων ρητών συναρτήσεων

Τώρα, γενικεύουμε τα αποτελέσματα σχετικά με την αναπαράσταση μιας ρητής συνάρτησης $t(s)$ ως πηλίκο πρώτων στο $\overline{\Omega}$ κατάλληλων και Ω – ευσταθών ρητών συναρτήσεων πινάκων.

Πρόταση 6.5 [1]: Υποθέτουμε ότι $T(s) \in \mathbb{R}(s)^{p\times m}$ με $rank_{\mathbb{R}(s)} T(s) = r$. Τότε, ο $T(s)$ μπορεί γραφεί (με ένα μη μοναδικό - τρόπο) ως:

$$T(s) = A_1(s)^{-1} B_1(s) = B_2(s) A_2(s)^{-1} \tag{6.29}$$

όπου οι $A_1(s) \in S^{p\times p}, B_1(s) \in S^{p\times m}$ είναι αριστερά πρώτοι στο $\overline{\Omega}$ και οι $A_2(s) \in S^{m\times m}, B_2(s) \in S^{p\times m}$ είναι πρώτοι στο $\overline{\Omega}$.

Απόδειξη: Υποθέτουμε ότι οι $U_L(s) \in S^{p\times p}, U_R(s) \in S^{m\times m}$ $S-$ αντιστρέψιμοι πίνακες τέτοιοι ώστε:

$$U_L(s) T(s) U_R(s) = S_{T(s)}^{\overline{\Omega}} = \Psi_{T(s)}^{\overline{\Omega}}(s)^{-1} E^{\overline{\Omega}}(s) = E^{\overline{\Omega}}(s) \Psi_R^{\overline{\Omega}}(s)^{-1} \tag{6.30}$$

τότε ορίζουμε

$$A_1(s) := \Psi_L^{\overline{\Omega}}(s) U_L(s) \qquad B_1(s) := E^{\overline{\Omega}}(s) U_R(s)^{-1} \tag{6.31}$$

$$A_2(s) := U_R(s) \Psi_R^{\overline{\Omega}}(s) \qquad B_2(s) := U_L(s)^{-1} E^{\overline{\Omega}}(s) \tag{6.32}$$

από τους οποίους έχουμε

$$\begin{bmatrix} B_1(s) & A_1(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E^{\bar{\Omega}}(s) & \Psi_L^{\bar{\Omega}}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_R(s)^{-1} & 0 \\ 0 & U_L(s) \end{bmatrix} \tag{6.33}$$

$$\begin{bmatrix} B_2(s) \\ A_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_L(s)^{-1} & 0 \\ 0 & U_R(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E^{\bar{\Omega}}(s) \\ \Psi_R^{\bar{\Omega}}(s) \end{bmatrix} \tag{6.34}$$

Και έτσι συνεπάγεται ότι οι $A_1(s)$ και $B_1(s)$ είναι αριστερά πρώτοι στο $\overline{\Omega}$ και οι $A_2(s)$ και $B_2(s)$ είναι δεξιά πρώτοι στο $\overline{\Omega}$ (καθώς $\varepsilon_i(s), \psi_i(s)$ είναι, από θεώρημα 6.1). ▲

Ορισμός 6.6 [1]: Ένα ζεύγος $A_1(s), B_1(s)\left(A_2(s), B_2(s)\right)$ που ικανοποιεί την Πρόταση 6.5 ονομάζεται αριστερά (δεξιά) πρώτη στο $\overline{\Omega}$ $S-$ **κλασματική περιγραφή του πίνακα** $T(s)$**(S – MFD of** $T(s)$**).**

□

Πρόταση 6.6 [1]: Ας είναι $T(s) \in \mathbb{R}(s)^{p \times m}$ και ας είναι επίσης

$$T(s) = B_2(s) A_2(s)^{-1} = B_2(s) \overline{A}_2(s)^{-1} \tag{6.35}$$

δύο δεξιά πρώτες στο $\overline{\Omega}$ $S-$ MFDs του $T(s)$. Τότε, υπάρχει ένας $U(s) \in S^{m \times m}$ και $S-$ αντιστρέψιμος, τέτοιος ώστε:

$$B_2(s) = \overline{B}_2(s) U(s) \qquad A_2(s) = \overline{A}_2(s) U(s) \tag{6.36}$$

δηλαδή, όλοι οι «δεξιοί αριθμητές» και όλοι οι «δεξιοί παρονομαστές» που εμφανίζονται στη δεξιά στο $\overline{\Omega}$ S – MFDs του $T(s)$ είναι ισοδύναμοι κατά στήλες στο $\overline{\Omega}$. (το ίδιο αποτέλεσμα ισχύει και για οποιεσδήποτε δύο αριστερά πρώτες στο $\overline{\Omega}$ S – MFDs του $T(s)$).

Πρόταση 6.7 [1]: Ας είναι $T(s) \in \mathbb{R}(s)^{p \times m}$ και ας είναι επίσης $T(s) = A_1(s)^{-1} B_1(s) = B_2(s) A_2(s)^{-1}$ αντίστοιχα κάθε αριστερά και δεξιά πρώτη στο $\overline{\Omega}$ S – MFDs του $T(s)$. Τότε, $T(s) \in \mathbb{R}_{pr}(s)^{p \times m}$ αν και μόνο αν οι $A_1(s) \in S^{p \times p}, A_2(s) \in S^{m \times m}$ είναι δικανονικές ρητές συναρτήσεις πινάκων.

Απόδειξη: Υποθέτουμε ότι $U_L(s)T(s)U_R(s)=S_{T(s)}^{\overline{\Omega}}$, και επίσης $\overline{A}_1(s):=\Psi_L^{\overline{\Omega}}(s)\in S^{p\times p}$ $\overline{A}_2(s):=U_R(s)\Psi_R^{\overline{\Omega}}(s)\in S^{m\times m}$, $\overline{B}_1(s):=E^{\overline{\Omega}}(s)U_R(s)^{-1}$, $\overline{B}_2(s):=U_L(s)^{-1}E^{\overline{\Omega}}(s)$ όπως στην Πρόταση 6.5. Τότε, από την Πρόταση 6.6 αν $A_1(s),B_1(s)$ και $A_2(s),B_2(s)$ είναι οποιεσδήποτε άλλες αριστερά και δεξιά πρώτες στο $\overline{\Omega}$ S – MFDs του $T(s)$, έχουμε ότι

$$A_1(s)=V(s)\overline{A}_1(s)=V(s)\Psi_L^{\overline{\Omega}}(s)U_L(s) \tag{6.37}$$

$$B_1(s)=V(s)\overline{B}_1(s)=V(s)E^{\overline{\Omega}}(s)U_R(s)^{-1} \tag{6.38}$$

$$A_2(s)=\overline{A}_2(s)U(s)=U_R(s)\Psi_R^{\overline{\Omega}}(s)U(s) \tag{6.39}$$

$$B_2(s)=\overline{B}_2(s)U(s)=U_L(s)^{-1}E^{\overline{\Omega}}(s)U(s) \tag{6.40}$$

για κάποιους S – αντιστρέψιμους πίνακες $V(s)\in S^{p\times p}$ και $U(s)\in S^{m\times m}$.

Τώρα, από το πόρισμα 5.38 έχουμε ότι $T(s)\in\mathbb{R}_{pr}(s)^{p\times m}$ αν και μόνο αν οι $\Psi_L^{\overline{\Omega}}(s),\Psi_R^{\overline{\Omega}}(s)$ είναι δικανονικοί, ή λόγω των (6.37) και (6.39) και λόγω του ότι κάθε S – αντιστρέψιμος πίνακας είναι δικανονικός, αν και μόνο αν $A_1(s),A_2(s)$ είναι δικανονικοί ρητοί πίνακες. ▲

Πόρισμα 6.5 [1]: Στις αριστερά ή δεξιά πρώτες στο $\overline{\Omega}$ - MFDs ενός ρητού πίνακα $T(s)$

(i) όλοι οι πίνακες «αριθμητές» μοιράζονται την ταυτοτική δομή μηδενικών στο $\overline{\Omega}$, η οποία είναι η μηδενική δομή στο $\overline{\Omega}$ του $T(s)$ και

(ii) όλοι πίνακες «παρανομαστές» μοιράζονται την ταυτοτική δομή μηδενικών στο $\overline{\Omega}$, η οποία είναι η δομή των πόλων στο $\overline{\Omega}$ του $T(s)$.

Απόδειξη. Συνεπάγεται από τις (6.37) – (6.40). ▲

Πρόταση 6.6 [1]: Υποθέτουμε ότι ο $T(s)\in\mathbb{R}(s)^{p\times m}$ και θεωρούμε αντίστοιχα οποιαδήποτε αριστερά η δεξιά πρώτη στο $\overline{\Omega}$ S – MFDs του $T(s)$. Τότε, $T(s)\in S^{p\times m}$ αν και μόνο αν οι $A_1(s)\in S^{p\times p},A_2(s)\in S^{m\times m}$ είναι S – αντιστρέψιμοι.

Απόδειξη: Από το Πόρισμα 5.40 ισχύει ότι $T(s) \in S^{p\times m}$ αν και μόνο αν $\Psi_L^{\overline{\Omega}}(s) = I_p, \Psi_R^{\overline{\Omega}}(s) = I_m$ και επίσης από τις (6.37) και (6.39) ισχύει ότι $A_1(s) = V(s)U_L(s)$ και $A_2(s) = U_R(s)U(s)$ είναι S – αντιστρέψιμοι πίνακες. ▲

Η επόμενη πρόταση περιγράφει έναν άμεσο τρόπο καθορισμού μιας δεξιάς πρώτης στο $\overline{\Omega}$ S – MFDs ενός κατάλληλου ρητού πίνακα $T(s)$, η οποία αποφεύγει τον υπολογισμό της Smith – McMillan μορφής $S_{T(s)}^{\overline{\Omega}}$ του $T(s)$ και το μετασχηματισμό των S – αντιστρέψιμων πινάκων $U_L(s)$ και $U_R(s)$, όπως στις (6.31) και (6.32) της Πρότασης 6.5 (η αριστερά πρώτη στο $\overline{\Omega}$ S – MFDs του $T(s)$ μπορεί να καθοριστεί με ανάλογο τρόπο).

Πρόταση 6.8 [1]: *Υ*ποθέτουμε ότι $T(s) \in \mathbb{R}_{pr}(s)^{p\times m}$ και επίσης υποθέτουμε ότι $T(s) = N(s)D(s)^{-1}, N(s) \in \mathbb{R}[s]^{p\times m}$, $D(s) \in \mathbb{R}[s]^{m\times m}$ είναι μία δεξιά πρώτη MFD του $T(s)$ με $D(s)$ κανονικό ως προς τις στήλες του. Ας είναι $D_j(s) \in \mathbb{R}[s]^{m\times 1}, j \in m$ οι στήλες του $D(s)$ και ας είναι $\deg D_j(s) = \eta_j, j \in m$ ο βαθμός των στηλών του $D(s)$. Ας είναι:

$$d_i(s) = s^{\eta_i} + a_{i,\eta_{i-1}} s^{\eta_{i-1}} + \ldots + a_{i,1}s + a_{i,0} \in \mathbb{R}[s] \quad i \in m \tag{6.41}$$

αυθαίρετα πολυώνυμα χωρίς μηδενικά μέσα στο Ω και ορίζουμε:

$$D_d(s) := diag\left[d_1(s), \ldots, d_m(s)\right] \in \mathbb{R}[s]^{m\times m} \tag{6.42}$$

$$A_2(s) := D(s)D_d(s)^{-1} \in S^{m\times m} \tag{6.43}$$

$$B_2(s) := N(s)D_d(s)^{-1} \in S^{p\times m} \tag{6.44}$$

Τότε, η $B_2(s)A_2(s)^{-1}$ είναι δεξιά πρώτη στο $\overline{\Omega}$ S – MFDs του $T(s)$.

Απόδειξη: Το γεγονός ότι $B_2(s)A_2(s)^{-1}$ $B_2(s), A_2(s)$ είναι μια S – MFD του $T(s)$ απορρέει από τις σχέσεις (6.43), (6.44) λόγω του ότι:

$$B_2(s)A_2(s)^{-1} = N(s)D_d(s)^{-1}\left[D(s)D_d(s)^{-1}\right]^{-1} = N(s)D(s)^{-1} = T(s).$$

Τώρα, δείχνουμε ότι οι $B_2(s), A_2(s)$ είναι δεξιά πρώτοι μεταξύ τους στο $\overline{\Omega} = \Omega \cup \{\infty\}$.
Ας είναι

$$\overline{T}(s) := \begin{bmatrix} A_2(s) \\ B_2(s) \end{bmatrix} \in S^{(m+p)\times m} \tag{6.45}$$

και γράφουμε

$$\begin{bmatrix} A_2(s) \\ B_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D(s) \\ N(s) \end{bmatrix} D_d(s)^{-1} \tag{6.46}$$

Τότε, καθώς οι $D(s), N(s)$ είναι πρώτοι μεταξύ τους ο «αριθμητής» $\begin{bmatrix} D(s) \\ N(s) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}[s]^{(m+p)\times m}$ δεν έχει μηδενικά στο $\mathbb{C}$, και ως εκ τούτου $rank\left[D(s)^T, N(s)^T, D_d(s)^T \right]^T = m, \forall s \in \mathbb{C}$, δηλαδή $\begin{bmatrix} D(s) \\ N(s) \end{bmatrix} D_d(s)^{-1}$ είναι μια **δεξιά πρώτη πολυωνυμική περιγραφή (right coprime polynomial MFD)** του $\overline{T}(s)$ και επομένως $\overline{T}(s)$ δεν έχει μηδενικά στο $\mathbb{C} \supset \Omega$.

Τώρα, δείχνουμε πως και ο $\overline{T}(s)$ δεν έχει επίσης μηδενικά στο $s = \infty$.
Γράφουμε:

$$A_2(s) = D(s) D_d(s)^{-1} = H_{sp}(s) + E \tag{6.47}$$

όπου $E \in \mathbb{R}^{m\times m}2$ και $H_{sp}(s)$ είναι αυστηρά κανονική. Τότε, γράφοντας τον $D(s)$ ως $D(s) = \left[D(s)\right]_c^h diag\left[s^{v_1}, s^{v_2}, \ldots, s^{v_m}\right] + D_{bc}S(s)$ προκύπτει απλά ότι: $E = \left[D(s)\right]_c^h$ που είναι non – singular λόγω του ότι ο $D(s)$ είναι κανονικός ως προς τις στήλες του. Επιπρόσθετα, από τη σχέση (6.45) $A_2(\infty) = E$ και ως εκ τούτου $\overline{T}(\infty) = \begin{bmatrix} E \\ 0 \end{bmatrix}$, δηλαδή ο $\overline{T}(s)$ δεν έχει μηδενικά στο $s = \infty$. Τα υπόλοιπα απορρέουν από την πρόταση 6.4 και τον ορισμό 6.6. ▲

Β Ι Β Λ Ι Ο Γ Ρ Α Φ Ι Α

[1] A.I.G. Vardulakis. (1991) – Linear Multivariable Control. Algebraic Analysis and Synthesis Methods.

[2] Gantmacher F.R (1959) – The Theory of Matrices, Vols. 1 and 2 Chelsea Publishing Co. New York.

[3] Wolovich W.A (1974) – Linear Multivariable Systems Springer-Velag, New York

[4] N.P. Karampetakis (1997) – Computation of the generalized inverse of a polynomial matrix and applications, Linear Algebra and its applications.

[5] Titu Andreescu, Dorin Andrica (2002) – An introduction to Diophantine Equations, Gil publishing House

[6] Bologiannidis Stauros – Συστήματα Αυτόματου Ελέγχου, θεωρία και εφαρμογές, Τ.Ε.Ι Σερρών

[7] Τσακλίδης Γεώργιος – Εφαρμοσμένη Θεωρία πινάκων, εκδόσεις Ζήτη

[8] Πουλάκης Δημήτρης – Θεωρία Αριθμών, εκδόσεις Ζήτη

[9] Αλβανός Παρασκευάς – Διδακτορική διατριβή του Μαθηματικού τμήματος του Α.Π.Θ. με θέμα: «Ρητές καμπύλες επί αλγεβρικών σωμάτων αριθμών και Διοφαντικές εξισώσεις.»

[10] Ντάλλα Γεωργία – Μεταπτυχιακή Διπλωματική εργασία του Μαθηματικού τμήματος Αθηνών: «Τα αρχαία Ινδικά μαθηματικά μέχρι τον 7^{o} μ.Χ. αιώνα».

[11] Μακρής Γιώργος – Μεταπτυχιακή Διπλωματική εργασία του Μαθηματικού τμήματος Α.Π. Θ. με θέμα: «Ανάπτυξη διαδραστικού περιβάλλοντος μέσω του Matlab για τον υπολογισμό της παραμετρικής οικογένειας των αντισταθμιστών που εξασφαλίζουν τον προσδιορισμό του επιθυμητού πίνακα παρονομαστή του προκύπτοντος μέσω ανάδρασης κλειστού συστήματος με σκοπό την σταθεροποίηση ασταθών γραμμικών πολυμεταβλητών συστημάτων».

[12] Euclides' Elements, Clay Mathematics Institute, Historical Archive
http://www.claymath.org/library/historical/euclid/
http://www.claymath.org/library/historical/euclid/

[13] Βαρδουλάκης Αντώνιος – Ιωάννης (2011) – Εισαγωγή στη θεωρία σημάτων, συστημάτων και ελέγχου, εκδόσεις Τζιόλα

[14] Σχολικό Βιβλίο οργανισμού - Μαθηματικά Κατεύθυνσης Β΄ Λυκείου

[15] Vardulakis (May, 2008): Computation, Parameterization and Tuning of proper Denominator – Assigning controllers for strictly proper plants
http://anadrasis.web.auth.gr/AIG.Vardulakis.htm

[16] Vardulakis (June 24 – 26, 2009): Linear Multivariable control. Method and philosophy of algebraic approach
http://anadrasis.web.auth.gr/AIG.Vardulakis.htm

[17] E N Antoniou and A I G Vardulakis, IMA J MATH CONTROL INF **22**(1):12-25 (2005). On the computation and parametrization of proper denominator assigning compensators for strictly proper plants.

[18] Euclides' Elements – Diophantine Equation, Wikipedia
http://en.wikipedia.org/wiki/Euclid%27s_Elements
http://en.wikipedia.org/wiki/Diophantine_equation

[19] Σταμάτης Ευάγγελος, Αθήνα, 1963 : «Διόφαντου Αριθμητικά – Μετάφραση και επεξηγήσεις από πρωτότυπο κείμενο».

[20] Γεωργίου Γιώργος, Λευκωσία, 1999: Αγγλοελληνικό Λεξικό Μαθηματικής Ορολογίας