ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
"ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΕΛΕΓΧΟΥ"

Αναγνώριση συστημάτων με δεδομένη συνεχή και κρουστική συμπεριφορά

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Ελευθερίου Β. Χρυσούλα

Επιβλέπων: Νικόλαος Καραμπετάκης
Καθηγητής Α.Π.Θ.

Θεσσαλονίκη, Δεκέμβριος 2014

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
"ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΕΛΕΓΧΟΥ"

Αναγνώριση συστημάτων με δεδομένη συνεχή και κρουστική συμπεριφορά

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Ελευθερίου Β. Χρυσούλα

Επιβλέπων: Νικόλαος Καραμπετάκης
Καθηγητής Α.Π.Θ.

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 11η Δεκεμβρίου 2014.

…………………………	…………………………	…………………………
Ν. Καραμπετάκης	Ε. Αντωνίου	Ο. Κοσμίδου
Καθηγητής Α.Π.Θ.	Επικ. Καθηγητής Α.Τ.Ε.Ι.Θ.	Αναπλ. Καθηγήτρια Δ.Π.Θ.

………………………………………..
Ελευθερίου Β. Χρυσούλα
Πτυχιούχος Μαθηματικός Α.Π.Θ.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Με την ολοκλήρωση της παρούσας διπλωματικής εργασίας αισθάνομαι την ανάγκη να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου κύριο Καραμπετάκη Νικόλαο για τις συμβουλές και διορθώσεις του καθώς και τα υπόλοιπα μέλη της τριμελούς εξεταστικής επιτροπής για τη βοήθεια τους.

Ιδιαίτερες ευχαριστίες απευθύνω, επίσης, στους γονείς μου και τον αδερφό μου Μαυρουδή, που όλα αυτά τα χρόνια της ακαδημαϊκής μου πορείας με στηρίζουν σε κάθε μου βήμα και απόφαση.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην παρούσα εργασία μελετάται ο χώρος λύσεων του ομογενούς συστήματος των αλγεβρικών και διαφορικών εξισώσεων της μορφής $A(\rho)\beta(t) = 0$ όπου $\rho := \frac{d}{dt}$ διαφορικός τελεστής. Ο χώρος των λύσεων κατασκευάζεται τόσο με τη βοήθεια των πεπερασμένων ζευγών Jordan παράγοντας τις λεγόμενες ομαλές λύσεις, όσο και με τη βοήθεια των απείρων ζευγών Jordan δίνοντάς μας τις λεγόμενες μη ομαλές λύσεις.

Στη συνέχεια προτείνονται δύο τρόποι επίλυσης του «αντίστροφου» προβλήματος τόσο στο χώρο ομαλών όσο και των μη ομαλών λύσεων, δηλαδή της εύρεσης των συστημάτων αλγεβρικών και διαφορικών εξισώσεων που παράγουν τους συγκεκριμένους χώρους λύσεων.

ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ

Πολυωνυμικός πίνακας, Smith μορφή στο C, πεπερασμένα ζεύγη Jordan, ομαλές λύσεις, Smith μορφή στο άπειρο, άπειρα ζεύγη Jordan, ομαλές λύσεις, μη ομαλές λύσεις.

ABSTRACT

The present paper studies the solution space of the homogenous system of algebraic and differential equations $A(\rho)\beta(t) = 0$ where $\rho := \frac{d}{dt}$ is a differential operator. The solution space could be constructed with the help of finite Jordan pairs extracting the, so called, smooth solutions or with the help of infinite Jordan pairs extracting the, so called, impulsive solutions.

Subsequently, we define two ways of approaching the ”inverse” problem, i.e. knowing the smooth or impulsive behavior of the homogenous system, we extract the algebraic and differential equations of the specific solution space.

KEY WORDS

Polynomial matrices, Smith form on C, finite Jordan pairs, smooth solutions, Smith form at infinity, infinite Jordan pairs, smooth solutions, impulsive solutions.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Χαρακτηριστικά πολυωνυμικών πινάκων

1.1 Εισαγωγή

Ένας $m \times n$ πίνακας $A = [a_{ij}]$ καλείται πολυωνυμικός πίνακας ή s-πίνακας εάν τα στοιχεία του $[a_{ij}]$ είναι πολυωνυμικές συναρτήσεις μιας μεταβλητής s. Θα συμβολίζουμε ειδικότερα $A(s) = [a_{ij}(s)]$. Εν συνεχεία έχουμε υπόψη ότι τα $a_{ij}(s)$ αποτελούν πραγματικές συναρτήσεις με συντελεστές στο R ενώ θα χρησιμοποιούμε όπως και για τους σταθερούς πίνακες τον συμβολισμό $A(s) \in R^{m,n}[s]$. Εάν λοιπόν θεωρήσουμε ότι $A_\nu = \left(a_{ij}^\nu\right)$ όπου $i = 1, 2, ..., m$ $j = 1, 2, ..., n$ και $\nu = 0, 1, ..., k$ τότε μπορούμε να πούμε ότι:

$$A(s) = A_0 + A_1 s + ... + A_{k-1} s^{k-1} + A_k s^k \tag{1.1}$$

όπου $A_k \neq 0$. Παραπάνω ο $A(s)$ έχει τη μορφή πολυωνύμου της μεταβλητής s με συντελεστές (σταθερούς) πίνακες.

Έστω ότι έχω την σχέση (7.1) με $A(s) \in R^{p \times m}[s]$ όπου $R[s]$ σύνολο πολυωνύμων με συντελεστές στο R και $A_i \in R^{p \times m}$ με $i = 0, 1, ..., k$ ενώ p, m όχι κατά ανάγκη ίσα.

Ορισμός 1.1.1. Καλούμε το k από την σχέση (1.1) **τάξη** (order) του πολυωνυμικού πίνακα $A(s)$.

Ορισμός 1.1.2. (Gantmacher 1959) Καλούμε **βαθμό** του $A(s)$, τον μεγαλύτερο βαθμό ανάμεσα σε όλους τους βαθμούς των μεγίστων τάξεων (μη μηδενικών) υποοριζουσών του $A(s)$ και τον συμβολίζουμε με $\deg\left(A(s)\right)$.

Ορισμός 1.1.3. (Vardulakis 1991) Καλούμε έναν τετραγωνικό πίνακα **κανονικό** (nonsingular ή regular) όταν η ορίζουσα του είναι διάφορη του μηδενός. Στην αντίθετη περίπτωση τον θεωρούμε **ιδιόμορφο** (singular). Στη σχέση (1.1) ο $A(s) \in R^{p\times p}\left[s\right]$ αποτελεί έναν **κανονικό** πολυωνυμικό πίνακα όταν $rank_R A_k = p$.

Ορισμός 1.1.4. (Rosenbrock 1970) Καλούμε έναν τετραγωνικό πολυωνυμικό πίνακα **δικανονικό (αντιστρέψιμο)** (unimodular) όταν η ορίζουσα του είναι ± 1. Γενικότερα, ένας τέτοιος πίνακας ,του οποίου κάθε στοιχείο ορίζεται σε ένα πολυωνυμικό χώρο, διαθέτει έναν αντίστροφο του οποίου όλα τα στοιχεία ορίζονται στον ίδιο πολυωνυμικό χώρο. Στην σχέση (1.1) εάν $A(s) \in R^{p\times p}\left[s\right]$ πολυωνυμικός πίνακας τότε υπάρχει $\widehat{A}(s) \in R^{p\times p}\left[s\right]$ τέτοιος ώστε $A(s)\widehat{A}(s) = I_p$.

Ορισμός 1.1.5. (Wolowich 1974) Καλούμε **πολυπλοκότητα γραμμών (στηλών)** (row (column) complexity) το άθροισμα του μεγίστου βαθμού των γραμμών (στηλών) των μη μηδενικών πολυωνυμικών διανυσμάτων του $A(s)$ και συμβολίζονται με $c_r\left(A\right)$ $\left(c_c\left(A\right)\right)$ αντίστοιχα.

Ορισμός 1.1.6. (Wolowich 1974) Καλούμε έναν πολυωνυμικό πίνακα $A(s) \in R^{p\times m}\left[s\right]$ με $rank A(s) = p$ **κανονικό ως προς τις γραμμές** (row proper) και με $rank A(s) = m$ **κανονικό ως προς τις στήλες** (column proper) όταν η πολυπλοκότητα των γραμμών $c_r\left(A\right)$ (στηλών) $c_c\left(A\right)$ είναι ίση με το βαθμό του πολυωνυμικού πίνακα $\deg\left(A(s)\right)$.

1.2 Πράξεις μεταξύ πολυωνυμικών πινάκων

Στον πολυωνυμικό πίνακα $A(s) \in R^{p\times m}\left[s\right]$ επιτυγχάνουμε τις εξής στοιχειώδεις πράξεις (elementary operations):

i. Μπορούμε να εργαστούμε με εναλλαγή των γραμμών ή των στηλών του $A(s)$, έχουμε την δυνατότητα να πολλαπλασιάσουμε την i-γραμμή του $A(s)$ (στήλη αντίστοιχα) με ένα μη μηδενικό στοιχείο του R (αντιστρέψιμο στοιχείο) και τέλος μπορούμε να πράξουμε έναν συνδυασμό και των δύο, δηλαδή πολλαπλασιασμό της i-γραμμής (στήλης αντίστοιχα) του $A(s)$ με ένα μη μηδενικό στοιχείο $t(s)$ του $R[s]$ και πρόσθεσή της σε οποιαδήποτε άλλη j-γραμμή (στήλη) του$A(s)$.

ii. Παρατηρούμε κάθε φορά κατά τη διάρκεια των στοιχειωδών αυτών πράξεων επί των γραμμών (στηλών) του $A(s) \in R^{p\times m}[s]$ ότι προκύπτουν από τα αριστερά (δεξιά αντίστοιχα) **δικανονικοί (αντιστρέψιμοι) πίνακες** (elementary unimodular matrices). Οι τελευταίοι δημιουργούνται από τις αντίστοιχες στοιχειώδεις πράξεις με το μοναδιαίο πίνακα $I_p\,(I_m)$.

iii. Ειδικότερα η εναλλαγή των i, j-γραμμών (στηλών) του $A(s)$ πραγματοποιείται από έναν αντιστρέψιμο πίνακα πολλαπλασιασμένο από τα αριστερά (δεξιά αντίστοιχα) της μορφής:

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ i \to & 0 & 1 & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ j \to & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

iv. Από την άλλη πολλαπλασιασμός της i-γραμμής (στήλης) με ένα μη μηδενικό αριθμό a πραγματοποιείται από έναν αντιστρέψιμο πίνακα από αριστερά (δεξιά αντίστοιχα) της μορφής:

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & 1 & \cdots & \cdots & \vdots \\ i \rightarrow & \cdots & a & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & 1 & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

v. Τέλος η πρόσθεση στην i-γραμμή του $A(s)$ της j-γραμμής πολλαπλασιασμένης με ένα πολυώνυμο $t(s)$ πραγματοποιείται από ένα αντιστρέψιμο πίνακα από αριστερά της μορφής:

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ i \rightarrow & \cdots & 1 & \cdots & t(s) & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots \\ j \rightarrow & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Ομοίως για εναλλαγές στηλών δίνει αντιστρέψιμο πίνακα από δεξιά της μορφής:

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \stackrel{\uparrow}{j} & \cdots & \stackrel{\uparrow}{i} & 1 \end{pmatrix}$$

1.3 Σχέσεις ισοδυναμίας πολυωνυμικών πινάκων

Ορισμός 1.3.1. (Gantmacher 1959) Δύο πολυωνυμικοί πίνακες $A(s), B(s) \in R^{p\times m}[s]$ θα καλούνται **(αντιστρέψιμα) ισοδύναμοι** ή unimodular equivalent εάν-ν υπάρχουν (αντιστρέψιμοι) unimodular πίνακες από αριστερά $U_L(s) \in R^{p\times p}[s]$ αλλά και από δεξιά $U_R(s) \in R^{m\times m}$ έτσι ώστε να ισχύει:

$$A(s) = U_L(s)B(s)U_R(s)$$

Ομοίως οι παραπάνω πίνακες θα καλούνται **αριστερά (αντιστρέψιμα) ισοδύναμοι** ή left unimodular equivalent εάν-ν υπάρχει $U_L(s) \in R^{p\times p}[s]$ τέτοιος ώστε:

$$A(s) = U_L(s)B(s)$$

Ενώ οι παραπάνω πίνακες θα καλούνται **δεξιά (αντιστρέψιμα) ισοδύναμοι** ή right unimodular equivalent εάν-ν υπάρχει $U_R(s) \in R^{m\times m}$ τέτοιος ώστε:

$$A(s) = B(s)U_R(s)$$

Θεώρημα 1.3.1. *Το αποτέλεσμα των παραπάνω υποδηλώνει ότι οι (αντιστρέψιμα) ισοδύναμοι πίνακες αποτελούν σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο των $p \times m$ πολυωνυμικών πινάκων.*

Απόδειξη. Θα μελετήσουμε τις ιδιότητες:

Ανακλαστική ιδιότητα Έστω $A(s) \in R^{p\times m}[s]$ τότε προφανώς ισχύει $I_P A(s) I_m = A(s)$

Συμμετρική ιδιότητα Έστω $A(s), B(s) \in R^{p\times m}[s]$ (αντιστρέψιμα) ισοδύναμοι πολυωνυμικοί πίνακες. Αυτό σημαίνει ότι θα υπάρχουν (αντιστρέψιμοι) unimodular πίνακες $U_L(s) \in R^{p\times p}[s]$ και $U_R(s) \in R^{m\times m}[s]$ έτσι ώστε:

$$U_L(s)A(s)U_R(s) = B(s) \Rightarrow U_L^{-1}(s)U_L(s)A(s)U_R(s) = U_L^{-1}(s)B(s) \Rightarrow$$
$$A(s)U_R(s) = U_L^{-1}(s)B(s) \Rightarrow A(s)U_R(s)U_R^{-1}(s) = U_L^{-1}(s)B(s)U_R^{-1}(s) \Rightarrow$$
$$A(s) = U_L^{-1}(s)B(s)U_R^{-1}(s)$$

όπου $U_L^{-1}(s) \in R^{p\times p}[s], , U_R^{-1}(s) \in R^{m\times m}[s]$ διότι είναι αντιστρέψιμοι πίνακες.

Μεταβατική ιδιότητα Έστω $A(s), B(s) \in R^{p\times m}[s]$ (αντιστρέψιμα) ισοδύναμοι πολυωνυμικοί πίνακες. Αυτό σημαίνει ότι θα υπάρχουν (αντιστρέψιμοι) unimodular πίνακες της μορφής $U_L(s) \in R^{p\times p}[s]$ και $U_R(s) \in R^{m\times m}[s]$ και έστω $B(s), C(s) \in R^{p\times m}[s]$ (αντιστρέψιμα) ισοδύναμοι πολυωνυμικοί πίνακες. Αυτό σημαίνει ότι θα υπάρχουν (αντιστρέψιμοι) unimodular πίνακες της μορφής $U'_L(s) \in R^{p\times p}[s]$ και $U'_R(s) \in R^{m\times m}[s]$ έτσι ώστε $U_L(s)A(s)U_R(s) = B(s)$ και $U'_L(s)B(s)U'_R(s) = C(s)$ από το τελευταίο προκύπτει:

$$U'_L(s)B(s)U_R(s) = C(s) \Rightarrow U'^{-1}_L(s)U_L(s)B(s)U'_R(s) = U'^{-1}_L(s)C(s)$$
$$B(s)U'_R(s)U'^{-1}_R(s) = U'^{-1}_L(s)C(s)U'^{-1}_R(s) \Rightarrow B(s) = U'^{-1}_L(s)C(s)U'^{-1}_R(s)$$

Άρα

$$U_L(s)A(s)U_R(s) = B(s) \Rightarrow U_L(s)A(s)U_R(s) = U'^{-1}_L(s)C(s)U'^{-1}_R(s) \Rightarrow$$
$$A(s) = U_L^{-1}(s)U'^{-1}_L(s)C(s)U'^{-1}_R(s)U_R^{-1}(s) \Rightarrow$$
$$A(s) = [U'_L(s)U_L(s)]^{-1}C(s)[U_R(s)U'_R(s)]^{-1}$$

όπου $[U'_L(s)U_L(s)]^{-1} \in R^{p\times p}[s]$ και $[U_R(s)U'_R(s)]^{-1} \in R^{m\times m}[s]$ καθώς $U_L(s), U'_L(s), U_R(s), U'_R(s)$ αντιστρέψιμοι πίνακες. □

Κεφάλαιο 2

Smith μορφή και πεπερασμένα ζεύγη Jordan

2.1 Smith μορφή ενός πολυωνυμικού πίνακα στο χώρο C

Θεώρημα 2.1.1. *(Gantmacher 1959) Ας θεωρήσουμε πάλι ότι έχουμε την σχέση (1.1) με* $A(s) \in R^{p\times m}[s]$ *και* $rank_{R(s)}A(s) = r$ *όπου* $r \leq \min\{p, m\}$ *τότε ο* $A(s)$ *είναι ισοδύναμος με έναν διαγώνιο πίνακα* $S^{C}_{A(s)}(s) \in R^{p\times m}[s]$ *ο οποίος έχει τη μορφή:*

$$S^{C}_{A(s)}(s) = block[diag\left\{\varepsilon_1(s), \varepsilon_2(s), \varepsilon_3(s), ..., \varepsilon_r(s), 0_{p-r}, 0_{m-r}\right\}] \tag{2.1}$$

Ο παραπάνω πολυωνυμικός πίνακας ονομάζεται **Smith μορφή** *στο* C *(Smith form) του* $A(s)$*, ενώ τα* $\varepsilon_i(s) \in R[s]$ *διαθέτουν μεγιστοβάθμιο συντελεστή την μονάδα, είναι πρώτα μεταξύ τους, δηλαδή ο μέγιστος κοινός διαιρέτης τους είναι* 1 *και κάθε* $\varepsilon_i(s)$ *διαιρεί το* $\varepsilon_{i+1}(s)$ *με* $i \in r-1$.

Απόδειξη. Αρχικά μεταξύ των στοιχείων a_{ij} του $A(s)$ επιλέγουμε εκείνο το στοιχείο ελαχίστου βαθμού και το μετακινούμε με κατάλληλη εναλλαγή γραμμών και στηλών στη θέση $a_{11}(s)$ του $A(s)$. Έπειτα βρίσκουμε τα πηλίκα των πολυωνύμων στις θέσεις $a_{i1}(s)$ και $a_{1j}(s)$ με το $a_{11}(s)$. Δηλαδή $a_{i1}(s) = a_{11}(s)q_{i1}(s) + r_{i1}(s), \alpha_{1j}(s) = a_{11}(s)q_{1j}(s) + r_{1j}(s)$ όπου $i = 1, 2, 3, ..., p$ και $j = 1, 2, 3, ..., m$

Αν έστω ένα από τα υπόλοιπα $r_{i1}(s), r_{1j}(s)$ δεν είναι ίσο με μηδέν εργαζόμαστε ως εξής: π.χ. για το $r_{1j}(s)$, αφαιρούμε από τη j-στήλη την πρώτη στήλη πολλαπλασιασμένη με $q_{1j}(s)$ με αποτέλεσμα να αντικαταστήσουμε το $a_{1j}(s)$ με το υπόλοιπο $r_{1j}(s)$ που είναι μικρότερου βαθμού από το $a_{11}(s)$.

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία μπορούμε να μειώσουμε το βαθμό του στοιχείου στην πάνω αριστερή γωνία βάζοντας στη θέση του ένα στοιχείο μικρότερου βαθμού ως προς s από τα στοιχεία που προέκυψαν.

Εάν όλα τα υπόλοιπα $r_{21}, ..., r_{2p}, r_{12}, ..., r_{1m}$ είναι ίσα με το μηδέν τότε αφαιρούμε από την i-γραμμή την πρώτη πολλαπλασιασμένη με $q_{i1}(s)$ και από την j-στήλη την πρώτη πολλαπλασιασμένη με $q_{1j}(s)$ και φέρνουμε το πολυωνυμικό πίνακα στη μορφή:

$$\begin{Vmatrix} a_{11}(s) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22}(s) & \cdots & a_{2m}(s) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{p2}(s) & \cdots & a_{pm}(s) \end{Vmatrix}$$

Στην περίπτωση που ένα από τα στοιχεία

$$a_{ij}(s), i = 2, 3, ..., p$$

και $j = 2, 3, ..., m$ δεν είναι διαιρετό χωρίς υπόλοιπο από το $a_{11}(s)$, τότε προσθέτουμε στην πρώτη στήλη εκείνη τη στήλη που έχει τέτοια στοιχεία στα οποία καταλήξαμε στην προηγούμενη διαδικασία με αποτέλεσμα να μπορούμε να αντικαταστήσουμε πάλι το στοιχείο $a_{11}(s)$ με ένα πολυώνυμο μικρότερου βαθμού.

Εφόσον λοιπόν το στοιχείο $a_{11}(s)$ έχει ένα συγκεκριμένο βαθμό η διαδικασία δεν θα συνεχιστεί απεριόριστα, θα φτάσουμε σε έναν πίνακα της μορφής:

$$\begin{Vmatrix} \varepsilon_1(s) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_{22}(s) & \cdots & b_{2m}(s) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & b_{p2}(s) & \cdots & b_{pm}(s) \end{Vmatrix}$$

όπου όλα τα στοιχεία $b_{ij}(s)$ είναι διαιρετά χωρίς υπόλοιπο με το $\varepsilon_1(s)$. Εάν υπάρχει έστω και ένα στοιχείο από τα $b_{ij}(s)$ το οποίο δεν είναι ίσο με το μηδέν τότε συνεχίζουμε την ίδια διαδικασία στον υποπίνακα που προκύπτει από τις γραμμές $i = 2, ..., p$ και $j = 2, ..., m$ και εν τέλει ανάγουμε τον πίνακα στη μορφή:

$$\begin{Vmatrix} \varepsilon_1(s) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \varepsilon_2(s) & 0 & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & c_{33}(s) & \cdots & c_{3m}(s) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & c_{p3}(s) & \cdots & c_{pm}(s) \end{Vmatrix}$$

όπου $\varepsilon_2(s)$ είναι διαιρετό χωρίς υπόλοιπο από το $\varepsilon_1(s)$ και όλα τα υπόλοιπα $c_{ij}(s), i = 3, ..., p, j = 3, ..., m$ είναι διαιρετά χωρίς υπόλοιπο με το $\varepsilon_2(s)$. Συνεχίζοντας όπως παραπάνω καταλήγουμε σε πίνακα μορφής:

$$\begin{Vmatrix} \varepsilon_1(s) & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \varepsilon_2(s) & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \varepsilon_r(s) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{Vmatrix}$$

όπου τα πολυώνυμα δεν είναι ίσα με μηδέν ($r < \min\{p, m\}$) και το κάθε ένα είναι διαιρετό με το προηγούμενο. Πολλαπλασιάζοντας μάλιστα με κατάλληλους μη μηδενικούς παράγοντες τις πρώτες r γραμμές παρατηρούμε ότι οι μεγαλύτεροι συντελεστές των πολυωνύμων είναι ίσοι με 1. □

Ορισμός 2.1.1. Ονομάζουμε τα $\varepsilon_i(s)$ **αναλλοίωτα πολυώνυμα** (invariant polynomials) του $A(s)$. Παρατηρούμε ότι είναι μοναδικά ορισμένα, ο μεγιστοβάθμιος συντελεστής τους είναι η μονάδα, ενώ έχουν την ιδιότητα κάθε $\varepsilon_i(s)$ να διαιρεί το $\varepsilon_{i+1}(s)$ με $i \in r-1$.
Επιπλέον κάθε $\varepsilon_i(s)$ μπορεί να γραφεί ως $\varepsilon_i(s) = \frac{\Delta_i(s)}{\Delta_{i-1}(s)}, i = 1, ..., r$ όπου $\Delta_0(s) = 1, \Delta_i(s) =$ ΜΚΔ{όλων των $i \times i$ ελλάσονων οριζουσών (mimors) του $A(s)$}. Τα πολυώνυμα $\Delta_i(s)$ καλούνται **διαιρέτες οριζουσών** (determinantal divisors) του $A(s)$.

Ορισμός 2.1.2. (Gantmacher 1959) Ορίζουμε ως **μηδενικά** (zeros) του $A(s)$ τις τιμές $\lambda_s \in C$ που μηδενίζονται τα αναλλοίωτα πολυώνυμα $\varepsilon_i(s)$, $i \in r$ όπως ορίστηκαν στη σχέση (2.1). Αυτές οι τιμές $\lambda_s, s = 1, ..., \nu$ στις οποίες συμβαίνει αυτό, δηλαδή τα διαφορετικά κάθε φορά μηδενικά του $A(s)$ τα πολυώνυμα $\varepsilon_i(s)$ μπορούν να γραφτούν ως:

$$\varepsilon_i(s) = \prod_{s=1}^{\nu} (s - \lambda_s)^{m_{is}}$$

όπου $(s-\lambda_s)^{m_{is}}$,$0 \leq m_{1s} \leq m_{2s} \leq ... \leq m_{rs}, s = 1, ..., \nu$ καλούνται **πεπερασμένοι στοιχειώδεις διαιρέτες** (finite elementary divisors) του πίνακα $A(s)$ που αντιστοιχούν στο μηδενικό λ_s.

Παράδειγμα 2.1.1. Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να υπολογίσουμε τη Smith μορφή του παρακάτω πίνακα:

$$A(s) = \begin{pmatrix} s+1 & s+1 \\ 0 & (s+2)^2 \end{pmatrix} \in R^{2\times 2}[s]$$

Επιλέγουμε από τα στοιχεία του $A(s)$ εκείνο που είναι ελαχίστου βαθμού και το μεταφέρουμε με εναλλαγή γραμμών στηλών στην πρώτη θέση. Σε αυτόν τον πίνακα παρατηρούμε ότι στοιχείο ελαχίστου βαθμού βρίσκεται ήδη σε αυτή τη θέση οπότε παρακάμπτω τη διαδικασία. Επομένως θεωρούμε $a_{11} = s + 1$.

Εν συνεχεία βρίσκουμε τα πηλίκα των στοιχείων στις θέσεις $a_{12}(s)$ και $a_{21}(s)$ με το $a_{11}(s)$.

$$a_{12}(s) = a_{11}(s)q_{12}(s) + 0 = (s+1) \times 1 + 0$$

Άρα αφαιρούμε από την 2-στήλη την πρώτη πολλαπλασιασμένη με το $q_{12}(s)$ με τη βοήθεια από δεξιά αντιστρέψιμου πίνακα:

$$\begin{pmatrix} s+1 & s+1 \\ 0 & (s+2)^2 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{V_1} = \begin{pmatrix} s+1 & 0 \\ 0 & (s+2)^2 \end{pmatrix}$$

Το στοιχείο στη διαγώνιο $a_{22}(s)$ δεν διαιρείται με το $a_{11}(s)$ χωρίς υπόλοιπο καθώς $(s+2)^2 = s^2 + 4s + 4 = (s+1)(s+3) + 1$. Οπότε αφαιρούμε από την 2-γραμμή την πρώτη πολλαπλασιασμένη με το $s+3$ με τη βοήθεια από αριστερά αντιστρέψιμου πίνακα:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -(s+3) & 1 \end{pmatrix}}_{U_1} \begin{pmatrix} s+1 & 0 \\ 0 & (s+2)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s+1 & 0 \\ -(s+1)(s+3) & (s+2)^2 \end{pmatrix}$$

Στη συνέχεια προσθέτουμε την 1-στήλη πολλαπλασιασμένη με το 1 στη 2-στήλη με τη βοήθεια από δεξιά αντιστρέψιμου πίνακα:

$$\begin{pmatrix} s+1 & 0 \\ -(s+1)(s+3) & (s+2)^2 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{V_2} = \begin{pmatrix} s+1 & s+1 \\ -(s+1)(s+3) & 1 \end{pmatrix}$$

Μεταφέρουμε το στοιχείο ελαχίστου βαθμού (εφόσον υπάρχει) στην πρώτη θέση. Προχωρούμε σε εναλλαγή στηλών με τη βοήθεια δεξιού αντιστρέψιμου πίνακα έτσι ώστε:

$$\begin{pmatrix} s+1 & s+1 \\ -(s+1)(s+3) & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{V_3} = \begin{pmatrix} s+1 & s+1 \\ 1 & -(s+1)(s+3) \end{pmatrix}$$

Προχωρούμε σε εναλλαγή γραμμών με τη βοήθεια αριστερά αντιστρέψιμου πίνακα έτσι ώστε:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{U_2} \begin{pmatrix} s+1 & s+1 \\ 1 & -(s+1)(s+3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -(s+1)(s+3) \\ s+1 & s+1 \end{pmatrix}$$

Έπειτα αφαιρούμε από την 2-γραμμή την πρώτη πολλαπλασιασμένη με το $s+2$ με τη βοήθεια από αριστερά αντιστρέψιμου πίνακα:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -(s+1) & 1 \end{pmatrix}}_{U_3} \begin{pmatrix} 1 & -(s+1)(s+3) \\ s+1 & s+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -(s+1)(s+3) \\ 0 & (s+1)(s+2)^2 \end{pmatrix}$$

Τέλος προσθέτουμε την 2-στήλη στην πρώτη πολλαπλασιασμένη με το $(s+1)(s+3)$ με τη βοήθεια από δεξιά αντιστρέψιμου πίνακα:

$$\begin{pmatrix} 1 & -(s+1)(s+3) \\ 0 & (s+1)(s+2)^2 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & (s+1)(s+3) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{V_4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (s+1)(s+2)^2 \end{pmatrix}$$

Έστω λοιπόν:

$$U_L(s) = U_3(s)U_2(s)U_1(s) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -(s+3) & 1 \end{pmatrix}}_{U_3} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{U_2} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -(s+1) & 1 \end{pmatrix}}_{U_1} =$$

$$= \begin{pmatrix} -(s+1) & 1 \\ (s+2)^2 & -(s+3) \end{pmatrix}$$

$$U_R(s) = V_1(s)V_2(s)V_3(s)V_4(s) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{V_1} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{V_2} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{V_3} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & (s+1)(s+3) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{V_4} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & (s+1)(s+3) \end{pmatrix}$$

Τότε:

$$S^C_{A(s)}(s) = U_L(s)A(s)U_R(s) =$$

$$= \begin{pmatrix} -(s+3) & 1 \\ (s+2)^2 & -(s+1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s+1 & s+1 \\ 0 & (s+2)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & (s+1)(s+3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (s+1)(s+2)^2 \end{pmatrix}$$

2.2 Πεπερασμένα ζεύγη Jordan (Finite Jordan pairs)

Θεώρημα 2.2.1. *(Gohberg 1972) Ας θεωρήσουμε ένα ζεύγος πινάκων* $(C_{\lambda_0} \in R^{r\times n}, J_{\lambda_0} \in R^{n\times n})$ *όπου* J_{λ_0} *αποτελεί Jordan πίνακα με τιμές, τις ιδιοτιμές* λ_0 *στις διαγωνίους του δηλαδή:*

$$J_{\lambda_0} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$$

τότε οι παρακάτω συνθήκες είναι ικανές και αναγκαίες ώστε το ζεύγος $(C_{\lambda_0}, J_{\lambda_0})$ *να αποτελεί πεπερασμένο Jordan ζεύγος του πολυωνυμικού πίνακα* $A(s)$ *της σχέσης (1.1) που αντιστοιχεί στο* λ_0.

1. *Η ορίζουσα του πίνακα* $A(s)$ *πρέπει να έχει μία ρίζα* λ_0 *(ιδιοτιμή) πολλαπλότητας* n

2. $rank \begin{pmatrix} C_{\lambda_0} \\ C_{\lambda_0} J_{\lambda_0} \\ \vdots \\ C_{\lambda_0} J_{\lambda_0}^{n-1} \end{pmatrix} = n$

3. $A_k C_{\lambda_0} J_{\lambda_0}^k + ... + A_1 C_{\lambda_0} J_{\lambda_0} + A_1 C_{\lambda_0} = 0$

Γενικότερα παίρνοντας για κάθε τιμή που μηδενίζεται (ιδιοτιμή) $\lambda_i = 1, ..., j$ και ένα ζεύγος Jordan $(C_{\lambda_i} \in R^{r \times n_i}, J_{\lambda_i} \in R^{n_i \times n_i})$ δημιουργούμε ένα νέο ζεύγος Jordan του $A(s)$ με $C = \left(C_{\lambda_1}, C_{\lambda_2}, ..., C_{\lambda_j}\right)$ και $J = blockdiag\left(J_1, J_2..., J_j\right)$ όπου $n = n_1 + n_2 + ... + n_j$ αποτελεί το πλήθος των διαφορετικών ιδιοτιμών. Σημειώνουμε ότι το ζεύγος $(C_{\lambda_0}, J_{\lambda_0})$ δεν ορίζεται μοναδικά από τον πολυωνυμικό πίνακα $A(s)$.

Παράδειγμα 2.2.1. Θεωρούμε τον πολυωνυμικό πίνακα του παραδείγματος 2.1. Ας εξετάσουμε εάν ισχύουν οι συνθήκες που μόλις περιγράψαμε.

$$A(s) = \begin{pmatrix} s+1 & s+1 \\ 0 & (s+2)^2 \end{pmatrix} \in R^{2\times 2}\left[s\right]$$

Δηλαδή:

$$A(s) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A_2} s^2 + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}}_{A_1} s + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}}_{A_0}$$

Έστω επίσης:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Βλέπουμε ότι:

1. $\det A(s) = (s+1)(s+2)^2$ άρα το -2 αποτελεί ιδιοτιμή του $A(s)$

2. $rank \begin{pmatrix} C \\ CJ^{2-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = 2$ (όσες φορές εμφανίζεται και η ιδιοτιμή -2)

3. $A_2CJ^2 + A_1CJ + A_0C = 0_{2,2}$ (γραμμικά ανεξάρτητα)

Ορισμός 2.2.1. Έστω τώρα ο πολυωνυμικός πίνακας $A(s) \in R^{r\times r}[s]$ με l διαφορετικά μηδενικά στο C, $\lambda_1, \lambda_2 ..., \lambda_l$ και ας υποθέσουμε ότι:

$$S_{A(s)}^{C}(s) = diag \left\{ \underbrace{1, 1, 1, ..., 1}_{k-1}, f_k(s), f_{k+1}(s), ..., f_r(s) \right\}$$

είναι η Smith μορφή του $A(s)$ στο C, με $1 \leq k \leq r$ και $f_i(s) \in R[s]$ τα αναλλοίωτα πολυώνυμα του $A(s)$ με $f_j(s)$ να διαιρεί το $f_{j+1}(s)$ και $j = k, k+1, ..., r-1$. Εάν κάθε αναλλοίωτο πολυώνυμο $f_k(s), ..., f_r(s)$ γράφεται ως γινόμενο πρώτων μεταξύ τους πολυωνύμων δηλαδή:

$$\begin{aligned}
&f_k(s) = (s-\lambda_1)^{\sigma_{1k}}(s-\lambda_2)^{\sigma_{2k}}...(s-\lambda_l)^{\sigma_{lk}} \\
&f_{k+1}(s) = (s-\lambda_1)^{\sigma_{1k+1}}(s-\lambda_2)^{\sigma_{2k+1}}...(s-\lambda_l)^{\sigma_{lk+1}} \\
&\vdots \\
&f_r(s) = (s-\lambda_1)^{\sigma_{1r}}(s-\lambda_2)^{\sigma_{2r}}...(s-\lambda_l)^{\sigma_{lr}}
\end{aligned}$$

όπου $0 \leq \sigma_{ik} \leq \sigma_{ik+1} \leq ... \leq \sigma_{ir}, i = 1, 2, ..., l$ μπορούμε να διατυπώσουμε $f_j(s) = (s-\lambda_i)^{\sigma_{ij}} \widehat{f}_j(s), j = k, k+1, ..., r$ με $\widehat{f}_j(s) \neq 0$.

Οι όροι $(s-\lambda_i)^{\sigma_{ij}}$ ονομάζονται **πεπερασμένοι στοιχειώδεις διαιρέτες** (finite elementary divisors) του $A(s)$ στο $s = \lambda_i$ όπως αναφέραμε στο (2.1). Ορίζουμε το άθροισμα των πεπερασμένων διαιρετών ως:

$$n := \deg \left[\prod_{j=k}^{r} f_j(s) \right] = \sum_{i=j}^{l} \sum_{j=k}^{r} \sigma_{ij}$$

Ας παραθέσουμε τον αλγόριθμο για την κατασκευή ενός πεπερασμένου ζεύγους Jordan μήκους n με την βοήθεια βέβαια των παραπάνω χαρακτηριστικών.

2.2.1 Αλγόριθμος Βαρδουλάκη (1991)

Βήμα 1 Αρχικά υπολογίζουμε τους αντιστρέψιμους πίνακες $U_L(s), U_R(s)$ έτσι ώστε:

$$U_L(s)\,A(s)\,U_R(s) = S^C_{A(s)}$$

Βήμα 2 Θεωρώ $u_j(s) \in R^{r\times 1}[s]$ όπου $j = k, k+1, ..., r$ θεωρώ τις στήλες του $U_R(s)$ και ακόμη $u^q_j(s) := \left(\frac{d^q}{ds^q}\right) u_j(s)$ που αντιστοιχούν στα $f_j(s)$ με $j = k, k+1, ..., r$. Κατασκεύαζουμε τα διανύσματα:

$$\beta^i_{jq} := \frac{1}{q!} u^{(q)}_j(\lambda_i)$$

όπου $j = k, k+1, ..., r$ και $q = 0, 1, ..., \sigma_{ij} - 1$ με $\lambda_i \in C, i \in l$ τα κάθε φορά διαφορετικά μηδενικά του $A(s)$ και $0 \leq \sigma_{ik} \leq \sigma_{ik+1} \leq ... \leq \sigma_{ir}$ οι πολλαπλότητες τους (πόσες φορές εμφανίζεται το μηδενικό). Για κάθε $i \in l$ και $j = k, k+1, ..., r$ τα διανύσματα $\beta^i_{j0}, \beta^i_{j1}, ..., \beta^i_{j\sigma_{ij}-1}$ δημιουργούν μια Jordan αλυσίδα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_i του $A(s)$ με μήκος σ_{ij} όπως φαίνεται και στο επόμενο βήμα.

Βήμα 3 Εν συνεχεία κατασκεύαζουμε τους πίνακες:

$$C_{ij} := \left(\beta^i_{j0}, \beta^i_{j1}, ..., \beta^i_{j\sigma_{ij}-2}, \beta^i_{j\sigma_{ij}-1}\right) \in R^{r\times\sigma_{ij}}$$

και

$$J_{ij} := \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}$$

όπου $i \in l$ και $j = k, k+1, ..., r$

Συγκεντρώνοντας τα αποτελέσματα των πινάκων C_{ij} και J_{ij} σε δύο νέους πίνακες οι οποίοι αποτελούνται από τα αποτελέσματα που εξάγω για την κάθε ιδιοτιμή έχω:

$$C_i := (C_{ik}, C_{ik+1}, ..., C_{ir}) \in R^{r \times m_i}$$

και

$$J_i := (J_{ik}, J_{ik+1}, ..., J_{ir}) \in R^{m_i \times m_i}$$

με $m_i := \sigma_{ik} + \sigma_{ik+1} + ... + \sigma_{ir}$

Βήμα 4 Έτσι τέλος κατασκευάζουμε το ζεύγος όπου είναι οι συγκεντρωτικοί πίνακες για όλες τις ιδιοτιμές και αποτελούν ένα πεπερασμένο ζεύγος Jordan του πολυωνυμικού πίνακα $A(s)$.

$$C := (C_1, C_2, ..., C_l) \in R^{r \times n}$$

$$J := blockdiag\left(J_1, J_2, ..., J_l\right) \in R^{n \times n}$$

όπου

$$n := m_1 + m_2 + ... + m_l = \deg \left[\prod_{j=k}^{r} f_j\left(s\right) \right] = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=k}^{r} \sigma_{ij}$$

Παράδειγμα 2.2.2. Θεωρούμε τον πολυωνυμικό πίνακα του παραδείγματος 2.1.1

$$A(s) = \begin{pmatrix} s+1 & s+1 \\ 0 & (s+2)^2 \end{pmatrix}$$

Επιθυμούμε τη κατασκευή του ζεύγους Jordan του πολυωνυμικού πίνακα $A(s)$.

Βήμα 1 Έχουμε ήδη υπολογίσει από το παράδειγμα 2.1.1 τους αντιστρέψιμους πίνακες αλλά και τη Smith μορφή του $A(s)$.

$$S_{A(s)}^{C}(s) = U_L\left(s\right) A\left(s\right) U_R\left(s\right)$$

$$\begin{pmatrix} -(s+3) & 1 \\ 1+(s+1)(s+3) & -(s+1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s+1 & s+1 \\ 0 & (s+2)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & (s+1)(s+3) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (s+1)(s+2)^2 \end{pmatrix}$$

Βήμα 2 Παρατηρούμε ότι τα μηδενικά μου είναι οι τιμές $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$ δηλαδή έχω ουσιαστικά $l = 2$ ιδιοτιμές οι οποίες βρίσκονται, αν ξεκινήσουμε το ψάξιμο από την πρώτη στήλη έως την δεύτερη του $S^C_{A(s)}(s)$, στην $k = 2$ στήλη. Επειδή αποτελεί και την τελευταία (στήλη) $k = 2 = r$. Ακόμη $j = k, k+1, ..., r$ δηλαδή το j θα λάβει μόνο τη τιμή 2. Επομένως τα σ_{ij} που θα χρησιμοποιήσουμε για τις $i \in l = 2$ ιδιοτιμές μου είναι τα σ_{12}, σ_{22} όπου με την σειρά τους είναι ίσα με όσες φορές εμφανίζεται η ιδιοτιμή σε εκείνη τη στήλη (πολλαπλότητα), άρα $\sigma_{12} = 1, \sigma_{22} = 2$. Τέλος θυμίζουμε ότι $n = 2 + 1 = 3$.

Δεδομένου του τύπου $\beta^i_{jq} := \frac{1}{q!} u^{(q)}_j (\lambda_i)$ λαμβάνουμε υπόψη ότι $q = 0, ..., \sigma_{ij-1}$ και ότι θα χρειαστούμε τον δεξιά αντιστρέψιμο πίνακα:

$$U_R(s) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & (s+1)(s+3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1(s) & u_2(s) \end{pmatrix}$$

όπου $u_1(s) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ και $u_2(s) = \begin{pmatrix} 1 \\ (s+1)(s+3) \end{pmatrix}$ οι στήλες του.

Άρα πρέπει να υπολογίσουμε τους $\beta^1_{20}, \beta^2_{20}, \beta^2_{21}$:

$$\beta^1_{20} = u_2(-1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \beta^2_{20} = u_2(-2) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \beta^2_{21} = u'_2(-2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Βήμα 3 Μαζεύουμε τα ζεύγη για κάθε ιδιοτιμή ξεχωριστά:

$$C_{12} = (\beta^1_{20}), C_{22} = (\beta^2_{20}, \beta^2_{22})$$

και δημιουργούμε τους Jordan πίνακες μήκους $\sigma_{12} = 1, \sigma_{22} = 2$ αντίστοιχα:

$$J_{12} = (-1)\,, J_{22} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Βήμα 4 Τέλος συγκεντρώνουμε τα ζεύγη δημιουργώντας το τελικό Jordan ζεύγος του πολυωνυμικού πίνακα $A(s)$:

$$C = (C_{12}, C_{22}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J = blockdiag\,(J_{12}, J_{22}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Κεφάλαιο 3

Επίλυση γραμμικών ομογενών συστημάτων αλγεβρικών διαφορικών εξισώσεων με ομαλή συμπεριφορά

3.1 Εισαγωγή

Στην παράγραφο αυτή θα μελετήσουμε την επίλυση του συστήματος αλγεβρικών-διαφορικών εξισώσεων της μορφής:

$$A(\rho)\,\beta(t) = 0, t \geq 0 \tag{3.1}$$

χρησιμοποιώντας τα πεπερασμένα ζεύγη Jordan του πολυωνυμικού πίνακα $A(\rho)$ όπου $\rho := \frac{d}{dt}$ ο διαφορικός τελεστής, $A(\rho) \in R^{r\times r}[s]$ και $\beta(t) : (0-, \infty) \to R^r$.

Θεώρημα 3.1.1. *(Vardulakis 1991) Θεωρούμε ότι το $\beta(t)$ ανήκει στον χώρο των απείρως διαφορίσιμων συναρτήσεων ώστε $\beta^{(q)}(0-) = \beta^{(q)}(0+) = \beta^{(q)}(0), q = 0, 1, 2$ ($\beta^{(q)}(t)$ η q παράγωγος του $\beta(t)$ ως προς t).*
Σύμφωνα με τα προηγούμενα κεφάλαια έστω ότι:

$$A(\rho) = A_0 + A_1\rho + ... + A_{k-1}\rho^{k-1} + A_k\rho^k$$

όπου $A_i \in R^{r\times r}, i = 0, 1, ..., k$ και $\beta(0-), \beta^{(1)}(0-), ..., \beta^{(k-1)}(0-)$ οι «αρχικές τιμές» του $\beta(t)$ και των $1, 2, ..., k-1$ παραγώγων του στο $t = 0-$. Ακόμη έστω $\lambda_0 \in C$ το πεπερασμένο μηδενικό *του $A(\rho)$, δηλαδή $|A(\rho)| = 0$.*

Τότε:

i. Αν θεωρήσουμε ότι:

$$\beta(t) = \left[\frac{t^{\mu}}{\mu!}\beta_0 + \frac{t^{\mu-1}}{(\mu-1)!}\beta_1 + ... + \frac{t}{1!}\beta_{\mu-1} + \beta_{\mu}\right] e^{\lambda_0 t} \tag{3.2}$$

όπου $\beta_i \in C, i = 0, 1, ..., \mu, \beta_0 \neq 0$ η $\beta(t)$ θα ικανοποιεί τη γραμμική ομογενή εξίσωση του (3.1) (δηλαδή θα αποτελεί λύση της) αν-ν ισχύουν οι παρακάτω εξισώσεις:

$$\begin{aligned} & A(\lambda_0)\beta_0 = 0 \\ & A^{(1)}(\lambda_0)\beta_0 + A(\lambda_0)\beta_1 = 0 \\ & \vdots \\ & \frac{1}{\mu!}A^{(\mu)}(\lambda_0)\beta_0 + \frac{1}{(\mu-1)!}A^{(\mu-1)}(\lambda_0)\beta_1 + ... + A^{(1)}(\lambda_0)\beta_{\mu-1} + A(\lambda_0)\beta_{\mu} = 0 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Ορίζουμε την αλυσίδα Jordan $\beta_0, \beta_1, ..., \beta_{\mu}$ του πίνακα $A(\rho)$ που ικανοποιεί τις παραπάνω σχέσεις (3.3), στο μηδενικό $\lambda_0 \in C$. Το διάνυσμα $\beta_0 \in R^r, \beta_0 \neq 0$ καλείται ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στο μηδενικό (ιδιοτιμή) $\lambda_0 \in C$ του πίνακα $A(\rho)$. Τα υπόλοιπα διανύσματα $\beta_1, ..., \beta_{\mu}$ ονομάζονται γενικευμένα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στο μηδενικό $\lambda_0 \in C$ του πίνακα $A(\rho)$. Έτσι το $\beta(t)$ όπως ορίζεται από τη σχέση (3.2) αποτελεί λύση της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (3.1).

ii. Είναι προφανές ότι αν για κάποια $\mu > 0$ τα διανύσματα $\beta_0, \beta_1, ..., \beta_{\mu}$ αποτελούν αλυσίδα Jordan τότε σύμφωνα με τις ικανές και αναγκαίες συνθήκες που περιγράψαμε προηγουμένως τα:

$$\begin{aligned}
&\beta_0\\
&\beta_0, \beta_1\\
&\vdots\\
&\beta_0, \beta_1, ..., \beta_{\mu-1}
\end{aligned}$$

αποτελούν Jordan αλυσίδες μήκους $1, 2, ..., \mu - 1$ η κάθε μία, αντιστοιχώντας στο μηδενικό $\lambda_0 \in C$ του πίνακα $A(\rho)$. Έτσι μπορώ να δημιουργήσω τα διανύσματα $\beta_j(t), j = 0, 1, ..., \mu$:

$$\beta_j(t) = [\rho I_r - \lambda_0 I_r]^j \beta(t) =$$
$$\left[\frac{t^{\mu-j}}{(\mu-j)!}\beta_0 + \frac{t^{\mu-j-1}}{(\mu-j-1)!}\beta_1 + ... + \frac{t}{1!}\beta_{\mu-j-1} + \beta_{\mu-j-1}\right] e^{\lambda_0 t}$$

τα οποία με τη σειρά τους αποτελούν λύσεις της (3.1), αφού πληρούν τις ικανές και αναγκαίες συνθήκες της (3.3) καθώς είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Επιπλέον παρατηρούμε ότι όλες οι αναλύσεις του $\beta_j(t)$, δηλαδή οι $\{\beta_\mu(t), \beta_{\mu-1}(t), ..., \beta_1(t), \beta_0(t)\}$, μπορούν να γραφούν με τη μορφή πινάκων:

$$[\beta_\mu(t), \beta_{\mu-1}(t), ..., \beta_1(t)\beta_0(t)] =$$
$$[\beta_0, \beta_1, ..., \beta_{\mu-1}, \beta_\mu] \begin{bmatrix} 1 & \frac{t}{1!} & \cdots & \frac{t^{\mu-1}}{(\mu-1)!} & \frac{t^\mu}{\mu!} \\ 0 & 1 & \cdots & \frac{t^{\mu-2}}{(\mu-2)!} & \frac{t^{\mu-1}}{(\mu-1)!} \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \frac{t}{1!} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} e^{\lambda_0 t} \tag{3.4}$$

Ορίζουμε με:

$$\Psi(t) := [\beta_{\mu}(t), \beta_{\mu-1}(t), ..., \beta_1(t)\, \beta_0(t)]$$

$$C := [\beta_0, \beta_1, ..., \beta_{\mu-1}, \beta_{\mu}] \in R^{r\times(\mu+1)}$$

$$J := \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \vdots & \cdots & 0 & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} \in R^{(\mu+1)\times(\mu+1)}$$

Άρα η (3.4) εύκολα γράφεται $\Psi = Ce^{Jt}$ όπου:

$$e^{Jt} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{t}{1!} & \cdots & \frac{t^{\mu-1}}{(\mu-1)!} & \frac{t^{\mu}}{\mu!} \\ 0 & 1 & \cdots & \frac{t^{\mu-2}}{(\mu-2)!} & \frac{t^{\mu-1}}{(\mu-1)!} \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 & \frac{t}{1!} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Αλγόριθμος 3.1.1. Ψάχνοντας να βρούμε τις λύσεις της (3.1), δοσμένου του πίνακα $A(s)$ και λαμβάνοντας υπόψη τα δύο προηγούμενα κεφάλαια:

Βήμα 1 Βρίσκουμε τη Smith μορφή $S^{C}_{A(s)}(s)$ του πίνακα $A(s)$

Βήμα 2 Υπολογίζουμε το ζεύγος Jordan του πίνακα $A(s)$

Βήμα 3 Καθορίζουμε τα διανύσματα τα όποια όπως περιγράψαμε σε αυτό το κεφάλαιο αποτελούν λύσεις της (3.1) και είναι της μορφής:

$$\beta_{jq}^{i} := \left[\frac{t^{\sigma_{ij}-1-q}}{(\sigma_{ij}-1-q)!}\beta_{j0}^{i} + \frac{t^{\sigma_{ij}-2-q}}{(\sigma_{ij}-2-q)!}\beta_{j1}^{i} + ... + \frac{t}{1!}\beta_{j,\sigma_{ij}-2-q}^{i} + \beta_{j,\sigma_{ij}-1-q}^{i} \right] e^{\lambda_i t}$$

όπου $i \in l, j = k, k+1, ..., r, q = 0, 1, ..., \sigma_{ij-1}$. Έστω:

$$\Psi_{ij}(t) := \left[\beta_{j,\sigma_{ij}-1}^{i}(t), \beta_{j,\sigma_{ij}-2}^{i}(t), ..., \beta_{j1}^{i}(t), \beta_{j0}^{i}(t) \right]$$
$$C_{ij} := \left[\beta_{j0}^{i}, \beta_{j1}^{i}, ..., \beta_{j,\sigma_{ij}-1}^{i} \right] \in R^{r \times \sigma_{ij}}$$

με $i \in l, j = k, k+1, ..., r$ και

$$J_{ij} := \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix} \in R^{\sigma_{ij} \times \sigma_{ij}}$$

Δουλεύοντας παρόμοια για κάθε ιδιοτιμή λ_i, ορίζουμε τους πίνακες:

$$\Psi_i(t) := [\Psi_{ik}(t), \Psi_{i,k+1}(t), ..., \Psi_{ir}(t)]$$
$$C_i := [C_{ik}, C_{i,k+1}, ..., C_{ir}] \in R^{r \times m_i}$$
$$J_i := blockdiag\,[J_{ik}, J_{i,k+1}, ..., J_{ir}] \in R^{m_i \times m_i}$$

όπου $m_i = \sigma_{ik} + \sigma_{i,k+1} + ... + \sigma_{ir}$

Έστω:

$$\Psi := [\Psi_1(t), \Psi_2(t), ..., \Psi_l(t)]$$
$$C := [C_1, C_2, ..., C_l] \in R^{r\times n}$$
$$J := blockdiag\,[J_1, J_2, ..., J_l] \in R^{n\times n}$$

όπου

$$n := m_1 + m_2 + ... + m_l = \deg \left[\prod_{j=k}^{r} f_j\,(s) \right] = \deg \left| S^{C}_{A(s)} \right| = \deg |A(s)|$$

Οι στήλες του Ψ αποτελούν βάση του χώρου λύσεων της (3.1). Ενδεικτικά ο Ψ καλείται βασικός πίνακας σε έναν X χώρο εύρεσης λύσεων ομογενών πινάκων αλγεβρικών-διαφορικών εξισώσεων ομαλής συμπεριφοράς ενώ οι λύσεις του συστήματος χαρακτηρίζονται ως οι **ομαλές λύσεις** (smooth solutions) του συστήματος.

Παράδειγμα 3.1.1. Θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση $A\,(\rho)\,\beta\,(t) = 0, t \geq 0$ με:

$$A(s) = \begin{pmatrix} s+1 & s+1 \\ 0 & (s+2)^2 \end{pmatrix} \in R^{2\times 2}\,[s]$$

τον πίνακα του παραδείγματος 2.1.1. Τα δύο πρώτα βήματα τα έχουμε υπολογίσει. Έχουμε βρει την Smith μορφή του πίνακα ,τους αντιστρέψιμους βοηθητικούς του, αλλά και από το παράδειγμα 2.2.1, 2.2.2 έχουμε υπολογίσει το πεπερασμένο ζεύγος Jordan για τις πεπερασμένες ιδιοτιμές $-1, -2$. Επομένως προχωρούμε στην εύρεση των λύσεων της διαφορικής εξίσωσης που είναι οι $\Psi = Ce^{Jt}$.

Έχουμε:

$$J = blockdiag\,(J_{12}, J_{22}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & te^{-2t} \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{pmatrix}$$

Από το παράδειγμα μας:

$$C=(C_{12},C_{22})=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-1&0\end{pmatrix}$$

Άρα:

$$\Psi=Ce^{Jt}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{-t}&0&0\\0&e^{-2t}&te^{-2t}\\0&0&e^{-2t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{-t}&e^{-2t}&te^{-2t}\\0&-e^{-2t}&-te^{-2t}\end{pmatrix}$$

Ο χώρος λύσεων της $A\left(\rho\right)\beta\left(t\right)=0, t\geq 0$ είναι ο παρακάτω:

$$B^{C}=\left\langle\begin{pmatrix}e^{-t}\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}e^{-2t}\\-e^{-2t}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}te^{-2t}\\-te^{-2t}\end{pmatrix}\right\rangle$$

Παράδειγμα 3.1.2. Θεωρούμε το σύστημα διαφορικών εξισώσεων:

$$\dot{\beta}_1\left(t\right)+\dddot{\beta}_2(t)=-\beta_1\left(t\right)$$
$$\dot{\beta}_2\left(t\right)=-\beta_2\left(t\right)$$

όπου $t\geq 0$. Θέλουμε να υπολογίσουμε τις λύσεις του $\beta\left(t\right)=\left[\beta_1\left(t\right),\beta_2\left(t\right)\right]$.

Σε μορφή πίνακα η παραπάνω εξίσωση όπου ρ διαφορικός τελεστής γίνεται:

$$\begin{pmatrix}\rho+1&\rho^3\\0&\rho+1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta_1\left(t\right)\\\beta_2\left(t\right)\end{pmatrix}=0\Rightarrow A\left(\rho\right)\beta\left(t\right)=0$$

Επομένως αρχικά βρίσκω τη $S^{C}_{A(s)}$ Smith μορφή του πολυωνυμικού πίνακα:

$$A(s)=\begin{pmatrix}s+1&s^3\\0&s+1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} s+1 & s^3 \\ 0 & s+1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -(s^2-s+1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{V_1} = \begin{pmatrix} s+1 & -1 \\ 0 & s+1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} s+1 & -1 \\ 0 & s+1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{V_2} = \begin{pmatrix} s+1 & 1 \\ 0 & -(s+1) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} s+1 & 1 \\ 0 & -(s+1) \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{V_3} = \begin{pmatrix} 1 & s+1 \\ -(s+1) & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s+1 & 1 \end{pmatrix}}_{U_1} \begin{pmatrix} 1 & s+1 \\ -(s+1) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & s+1 \\ 0 & (s+1)^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & s+1 \\ 0 & (s+1)^2 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -(s+1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{V_4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (s+1)^2 \end{pmatrix}$$

$$U_R(s) = V_1V_2V_3V_4 = \begin{pmatrix} s^2-s+1 & -s^3 \\ -1 & s+1 \end{pmatrix}$$

$$U_L(s) = U_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s+1 & 1 \end{pmatrix}$$

Άρα:

$$S^C_{A(s)}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (s+1)^2 \end{pmatrix}$$

με

$$\lambda_1 = -1, l = 1, j = k, k+1, ..., r = 2 = r$$
$$\sigma_{12} = 2, n = 2, q = 0, 1$$

Η δεύτερη στήλη του από δεξιά αντιστρέψιμου πίνακα είναι:

$$u_2\left(s\right) = \begin{pmatrix} -s^3 \\ s+1 \end{pmatrix}$$

ενώ τα διανύσματα που θέλουμε να υπολογίσουμε είναι:

$$\beta^i_{jq} = \left\{\beta^1_{20}, \beta^2_{21}\right\}$$

όπου

$$\beta^i_{jq} = \frac{1}{q!} u^{(q)}_j \left(\lambda_i\right)$$
$$\beta^1_{20} = u_2\left(-1\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \beta^1_{22} = u^{(1)}_2\left(-1\right) = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Άρα

$$C_{12} = (\beta^1_{20}, \beta^1_{22}) = C_1 = C$$
$$J_{12} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = J_1 = J$$

Οι λύσεις είναι της μορφής:

$$\Psi = Ce^{Jt} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} e^{\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} t} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} & (t-3)\, e^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$$

Δηλαδή:

$$B^C = \left\langle \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} (t-3)\, e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t}, \begin{pmatrix} (t-3) \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} \right\rangle$$

Κεφάλαιο 4

Smith μορφή στο άπειρο

Εξακολουθούμε να εργαζόμαστε με τον πολυωνυμικό πίνακα της μορφής

$$A(s) = A_0 + A_1 s + ... + A_{k-1} s^{k-1} + A_k s^k$$

όπου $A_i \in R^{r \times r}, i = 0, 1, ..., k \geq 1, A_k \neq 0$ και $rank_{R(s)} A(s) = r$. Ο πίνακας

$$A\left(s\right) = s^k A\left(\frac{1}{s}\right) = A_k + A_{k-1} s + ... + A_1 s^{k-1} + A_0 s^k \in R^{r \times r}\left[s\right] \tag{4.1}$$

ονομάζεται **δυικός πίνακας** (dual matrix).

Ορισμός 4.0.1. (Vardulakis 1991) Ορίζουμε ως Smith-McMillan $S^{\infty}_{A(s)}(s)$ μορφή του πολυωνυμικού πίνακα $A(s) \in R^{r \times r}\left[s\right]$ στο $s = \infty$ τον:

$$U_L\left(s\right) A\left(s\right) U_R\left(s\right) = S^{\infty}_{A(s)} = blockdiag\left[\overbrace{\underbrace{s^{q_1}, ..., s^{q_k}}_{k}, I_{\nu-\kappa}}^{\nu}, \underbrace{\frac{1}{s^{\hat{q}_{\nu+1}}}, ..., \frac{1}{s^{\hat{q}_r}}}_{r-\nu}\right]$$

με $1 \leq \nu \leq r, q_1 \geq q_2 \geq ... \geq q_k, 0 < \hat{q}_{\nu+1} < ... < \hat{q}_r$ και $U_L\left(s\right), U_R\left(s\right) \in R^{r \times r}\left[s\right]$ αντιστρέψιμοι πίνακες οι οποίοι δεν έχουν **πόλους** ή **μηδενικά** στο άπειρο.

Τα $q_i, (\hat{q}_i)$ καλούμε **τάξεις των πόλων** (poles), (μηδενικών (zeros)) του $A(s)$ στο $s = \infty$. Ισχύει ότι $\hat{q} := \sum_{i=\nu+1}^{r} \hat{q}_i$ υποδηλώνει το άθροισμα των τάξεων των μηδενικών στο άπειρο του $A(s)$. Όπως και στη Smith μορφή που μελετήσαμε στα προηγούμενα κεφάλαια, έτσι και στην Smith-McMillan μορφή, θα υφίστανται οι άπειροι στοιχειώδεις διαιρέτες του $A(s)$ (infinite elementary divisors (IEDs)). Οι τελευταίοι καθορίζονται μέσω της εύρεσης των πεπερασμένων στοιχειωδών διαιρετών του πίνακα $\tilde{A}(s)$ όταν $s = 0$. Επομένως για να πετύχουμε την κατασκευή των (IEDs) του $A(s)$ αρκεί να βρούμε την κατασκευή των πεπερασμένων στοιχειωδών διαιρετών του $\tilde{A}(s)$ όταν $s = 0$. Δηλαδή αρκεί να υπολογίσουμε την Smith μορφή $S^{C}_{\tilde{A}(s)}(s)$ του $\tilde{A}(s)$, έπειτα την $S^{0}_{\tilde{A}(s)}(s)$ του ίδιου για $s = 0$. Κατορθώνουμε μάλιστα μέσω των τύπων που προκύπτουν από την παραπάνω διαδικασία, όπου εκεί ευκρινείς θα είναι και οι (IEDs) να πετύχουμε την κατασκευή της $S^{\infty}_{A(s)}(s)$ για $s = \infty$.

Θεώρημα 4.0.2. *(Vardulakis 1991) Αν θεωρήσουμε λοιπόν ως:*

$$S^{0}_{\tilde{A}(s)}(s) = diag\left[s^{\mu_1}, s^{\mu_2}, ..., s^{\mu_j}\right], \mu_j > 0, j = 1, 2, ..., r$$

τον Smith πίνακα στο $s = 0$, οι $S^{0}_{\tilde{A}(s)}(s)$ και $S^{\infty}_{A(s)}(s)$ συνδέονται με τους τύπους:

$$\begin{aligned} S^{\infty}_{A(s)}(s) &= s^{q_1} S^{0}_{\tilde{A}(s)}\left(\frac{1}{s}\right), q_1 = k \\ S^{0}_{\tilde{A}(s)}\left(\frac{1}{s}\right) &= \left(\frac{1}{s}\right)^{q_1} S^{\infty}_{A(s)}(s) \end{aligned} \tag{4.2}$$

και

$$\begin{aligned} \tilde{U}_L(s) &= U_L\left(\frac{1}{s}\right) \\ \tilde{U}_R(s) &= U_R\left(\frac{1}{s}\right) \end{aligned}$$

Οι άπειροι στοιχειώδεις διαιρέτες του πολυωνυμικού πίνακα $A(s)$ δίνονται από δύο είδη:

$$s^{\mu_j}, j = 2, 3, ..., r$$

$$\mu_j := q_1 - q_j > 0, j = 2, 3, ..., k$$

$$\mu_j := q_1 + \hat{q}_j > 0, j = \nu + 1, \nu + 2, ..., r$$

Τα $q_i, i = 1, 2, ..., k$ ονομάζονται **τάξεις των πόλων** (poles) του $A(s)$ στο $s = \infty$, όπως είδαμε πριν, ενώ το πρώτο είδος των άπειρων στοιχειωδών διαιρετών (IED) $\mu_j, j = 2, 3, ..., k$ είναι αυτοί που οφείλονται στους πόλους στο $s = \infty$ και για τον λόγο αυτό καλούνται **άπειροι πόλοι** των IEDs “infinite pole IEDs” (για $j = 1 \Rightarrow \mu_j = 0$ δεν λαμβάνεται υπόψη).

Τα $\hat{q}_i, i = \nu + 1, \nu + 2, ..., r$ ονομάζονται **τάξεις των μηδενικών** (zeros) στο $s = \infty$, όπως είδαμε πριν, ενώ το δεύτερο είδος των άπειρων στοιχειωδών διαιρετών (IED) $\mu_j, j = \nu + 1, \nu + 2, ...r$ καλούνται **άπειρα μηδενικά** των IED “infinite zero IEDs”. Το είδος αυτό εμφανίζεται μόνο όταν υπάρχουν μηδενικά στο $s = \infty$ και ανταποκρίνεται τόσο στους πόλους όσο και στα μηδενικά του $A(s)$.

Παράδειγμα 4.0.3. Έστω

$$A\left(s\right) = \begin{pmatrix} s & s^2 + s + 1 \\ -1 & -s - 1 \end{pmatrix} \in R^{2\times 2}\left[s\right]$$

Θα προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε την $S^{\infty}_{A(s)}(s)$ Smith μορφή του πολυωνυμικού πίνακα $A\left(s\right)$. Σύμφωνα με την (4.1):

$$\tilde{A}\left(s\right) = s^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s} + 1 \\ -1 & -\frac{1}{s} - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s & s^2 + s + 1 \\ -s^2 & -s - s^2 \end{pmatrix}$$

Έπειτα θα αναζητήσουμε την Smith μορφή $S^{C}_{\tilde{A}(s)}(s)$ του $\tilde{A}\left(s\right)$. Άρα:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{pmatrix}}_{U_1} \underbrace{\begin{pmatrix} s & s^2+s+1 \\ -s^2 & -s-s^2 \end{pmatrix}}_{\tilde{A}(s)} = \underbrace{\begin{pmatrix} s & s^2+s+1 \\ 0 & s^3 \end{pmatrix}}_{\tilde{A}_1(s)}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} s & s^2+s+1 \\ 0 & s^3 \end{pmatrix}}_{\tilde{A}_1(s)} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -(s+1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{V_1} = \underbrace{\begin{pmatrix} s & 1 \\ 0 & s^3 \end{pmatrix}}_{\tilde{A}_2(s)}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} s & 1 \\ 0 & s^3 \end{pmatrix}}_{\tilde{A}_2(s)} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{V_2} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & s \\ s^3 & 0 \end{pmatrix}}_{\tilde{A}_3(s)}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -s^3 & 1 \end{pmatrix}}_{U_2} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & s \\ s^3 & 0 \end{pmatrix}}_{\tilde{A}_3(s)} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & -s^4 \end{pmatrix}}_{\tilde{A}_4(s)}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & -s^4 \end{pmatrix}}_{\tilde{A}_4(s)} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{V_3} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -s^4 \end{pmatrix}}_{\tilde{A}_5(s)}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -s^4 \end{pmatrix}}_{\tilde{A}_5(s)} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{V_4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s^4 \end{pmatrix} = S^C_{\tilde{A}(s)}$$

Έτσι:

$$S^C_{\tilde{A}(s)}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s^4 \end{pmatrix} \underbrace{\Rightarrow}_{s=0} S^0_{\tilde{A}(s)}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s^{2-2} & 0 \\ 0 & s^{2+2} \end{pmatrix}$$

Από την τελευταία μορφή διαπιστώνουμε ότι ο $A(s)$ έχει 1 άπειρο στοιχειώδη διαιρέτη (IED) βαθμού $\mu_2 = q_1 + \hat{q}_2 = 2 + 2 = 4$ ο οποίος ανταποκρίνεται σε ένα πόλο και σε ένα μηδενικό στο $s = \infty$. (Άλλωστε $\mu_2 = q_1 - q_1 = 2 - 2 = 0$ (δεν αποτελεί (IED)).
Άρα από τη σχέση (4.2) παίρνουμε:

$$S_{A(s)}^{\infty} = s^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s^4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s^2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s^2} \end{pmatrix}$$

όπου παρατηρώ ότι ο πολυωνυμικός πίνακας $A(s)$ έχει έναν πόλο (pole) στο $s = \infty$ με τάξη $q_1 = 2$ και αντιστοίχως ένα μηδενικό στο $s = \infty$ με τάξη $\hat{q}_2 = 2$.

$$\tilde{U}_R(s) = U_R\left(\frac{1}{s}\right)$$

$$\tilde{U}_R(s) = V_1V_2V_3V_4 = \begin{pmatrix} 1 & -(s+1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -(s+1) & -(s^2+s+1) \\ 1 & s \end{pmatrix}$$

Άρα

$$U_R(s) = \begin{pmatrix} -\left(\frac{1}{s}+1\right) & -\left(\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s}+1\right) \\ 1 & \frac{1}{s} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{s+1}{s} & -\frac{1+s+s^2}{s^2} \\ 1 & \frac{1}{s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{s+1}{s} & -\frac{1+s+s^2}{s^2} \\ 1 & \frac{1}{s} \end{pmatrix}$$

και

$$\tilde{U}_L(s) = U_L\left(\frac{1}{s}\right)$$

$$\tilde{U}_L(s) = U_1 U_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -s^3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -s^3 + s & 1 \end{pmatrix}$$

Άρα έχουμε

$$U_L(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{s^3} + \frac{1}{s} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{s^2-1}{s^3} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{s^2-1}{s^3} & 1 \end{pmatrix}$$

Κεφάλαιο 5

Άπειρα ζεύγη Jordan (Infinite Jordan pairs)

Θεώρημα 5.0.3. *(Gohberg et al. 1982) Ας θεωρήσουμε ένα ζεύγος πινάκων* $(C_\infty \in R^{r\times\mu}, J_\infty \in R^{\mu\times\mu})$ *όπου* J_∞ *αποτελεί Jordan πίνακα με τιμές, τις ιδιοτιμές* $\lambda_0 = 0$ *στις διαγωνίους του δηλαδή:*

$$J_\infty = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

τότε οι παρακάτω συνθήκες είναι ικανές και αναγκαίες ώστε το ζεύγος (C_∞, J_∞) *να αποτελεί* **άπειρο Jordan** *ζεύγος του πολυωνυμικού πίνακα* $A(s)$ *της σχέσης (1.1) που αντιστοιχεί στο* $\lambda_0 = 0$.

1. Η ορίζουσα του πίνακα $\tilde{A}(s)$ πρέπει να έχει μία ρίζα (μηδενικό) στο $\lambda_0 = 0$ (ιδιοτιμή) πολλαπλότητας μ, με $\tilde{A}(s)$ να ορίζεται από τη σχέση (4.1) ως:

$$\tilde{A}(s) = A_k + A_{k-1}s + ... + A_1 s^{k-1} + A_0 s^k \in R^{r\times r}[s]$$

2. $rank \begin{pmatrix} C_\infty \\ C_\infty J_\infty \\ \vdots \\ C_\infty J_\infty^{\mu-1} \end{pmatrix} = \mu$

3. $A_0 C_\infty J_\infty^k + ... + A_{k-1} C_\infty J_\infty + A_k C_\infty = 0_{r,\mu}$.

Γενικότερα παίρνοντας για διαφορετικές αλγεβρικές τιμές πολλαπλότητας των ιδιοτιμών $\lambda_i, i = 1, 2, ..., r$ του $\tilde{A}(s)$ και ένα πεπερασμένο ζεύγος Jordan της μορφής $(C_{\infty i} \in R^{r\times\mu_i}, J_{\infty i} \in R^{\mu_i\times\mu_i})$ δημιουργούμε ένα νέο ζεύγος Jordan του $A(s)$ το $(C_\infty \in R^{r\times\mu}, J_\infty \in R^{\mu\times\mu})$ (infinite Jordan pair) το οποίο καλείται **άπειρο ζεύγος Jordan** με:

$$C_\infty = (C_{\infty 1}, C_{\infty 2}, ..., C_{\infty r}) \in R^{r\times\mu}$$

και

$$J_\infty = blockdiag\,(J_{\infty 1}, J_{\infty 2}, ..., J_{\infty r}) \in R^{\mu\times\mu}$$

όπου $\mu = \mu_1 + \mu_2 + ... + \mu_r$ αποτελεί το άθροισμα των απείρων στοιχειωδών διαιρετών (IED) του $A(s)$ συμπεριλαμβανομένης της τάξης τους.

Άρα είναι προφανές από τα παραπάνω ότι αν θελήσω να υπολογίσω ένα άπειρο ζεύγος Jordan (C_∞, J_∞) του πολυωνυμικού πίνακα $A(s)$, πρέπει απαραίτητα να κατασκευάσω το πεπερασμένο ζεύγος Jordan του πολυωνυμικού πίνακα $\tilde{A}(s)$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_0 = 0$.

Παράδειγμα 5.0.4. Έστω ο πολυωνυμικός πίνακας:

$$A(s) = \begin{pmatrix} s & s^2+s+1 \\ -1 & -s-1 \end{pmatrix} \in R^{2\times 2}[s]$$

Έχοντας υπολογίσει τον δυικό πίνακα $\tilde{A}(s)$

$$\tilde{A}(s) = \begin{pmatrix} s & s^2+s+1 \\ -s^2 & -s-s^2 \end{pmatrix}$$

και δίνοντας μας τα παρακάτω ζεύγη ως δεδομένο θα παρατηρήσουμε αν ισχύουν οι συνθήκες ώστε να αποτελούν άπειρο ζεύγος Jordan του $A(s)$.

$$C_\infty = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, J_\infty = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Η ορίζουσα του $\tilde{A}(s)$ είναι: $\det \tilde{A}(s) = -s^2 - s^3 + s^4 + s^3 + s^2 = s^4$

   Επομένως ο $\tilde{A}(s)$ έχει ένα μηδενικό στο $\lambda_0 = 0$ πολλαπλότητας 4 .

2. $rank \begin{pmatrix} C_\infty \\ C_\infty J_\infty \\ C_\infty J_\infty^2 \\ C_\infty J_\infty^{\mu-1=3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 4$ (όσο και η πολλαπλότητα)

3. $A_0 C_\infty J_\infty^2 + A_1 C_\infty J_\infty + A_2 C_\infty = 0_{2,4}$ (είναι γραμμικά ανεξάρτητα)

Αλγόριθμος 5.0.2. (Vardulakis 1991) Μια φόρμουλα η οποία υπολογίζει τις Jordan αλυσίδες του $\tilde{A}(s)$ της σχέσης (4.1) για $s = 0$ και η οποία θα μας βοηθήσει στην κατασκευή των άπειρων Jordan ζευγών είναι η εξής:

Βήμα 1 Υπολογίζουμε την Smith μορφή $S^{C}_{\tilde{A}(s)}(s)$ του $\tilde{A}(s)$ από την οποία για $s=0$ υπολογίζω και την $S^{0}_{\tilde{A}(s)}(s)$.

Βήμα 2 Με την παραπάνω μελέτη εξάγουμε τους πίνακες $\tilde{U}_L(s), \tilde{U}_R(s)$. Έστω $\tilde{U}_R(s) = [\tilde{u}_1(s), \tilde{u}_2(s), ..., \tilde{u}_r(s)], \tilde{u}_j(s) \in R^{r\times 1}(s)$, όπως είναι προφανές και από το παράδειγμά μας έχουμε:

$$\tilde{U}_L(s)\,\tilde{A}(s)\,\tilde{U}_R(s) = S^{0}_{\tilde{A}(s)}$$

Έτσι μπορώ να γράψω $\tilde{A}(s)\,\tilde{u}_{Rj}(s) = \tilde{u}_{Lj}(s)\,s^{\mu_j}, j = \nu+1, \nu+2, ..., r$ όπου $\mu_j = q_1 + \hat{q}_j, j = \nu+1, ..., r$ και $\tilde{u}_{Lj}(s)$ η j-στήλη του αντίστροφου πίνακα $\tilde{U}_L(s)^{-1}$.

Εάν λοιπόν ορίσουμε ως $\tilde{u}_j^{(q)}(s), \tilde{A}^{(q)}(s)$ τις q παραγώγους του $\tilde{u}_j(s), \tilde{A}(s)$ αντίστοιχα, οι οποίες ανταποκρίνονται στο $s=0$ για $q = 0,1,2,...,\mu_j-1, j=\nu+1,...,r$ κατασκευάζουμε τον τύπο:

$$x_{jq} := \frac{1}{q!}\tilde{u}_j^{(q)}(0)$$

Βήμα 3 Τα διανύσματα $x_{j0}, x_{j1}, ..., x_{jr} \in R^r, j=\nu+1,...,r$ αποτελούν Jordan αλυσίδες του πολυωνυμικού πίνακα $\tilde{A}(s)$ που αντιστοιχεί στο $s=0$ ή αντιστοίχως συμπερασματικά τα $x_{j0}, x_{j1}, ..., x_{jr} \in R^r, j=\nu+1,...,r$ ικανοποιούν τις συνθήκες:

$$\begin{aligned}
&\tilde{A}(0)\,x_{j0} = 0\\
&\tilde{A}^{(1)}(0)\,x_{j0} + \tilde{A}(0)\,x_{j1} = 0\\
&\vdots\\
&\frac{1}{(\mu_j-1)!}\tilde{A}^{(\mu_j-1)}(0)\,x_{j0} + \frac{1}{(\mu_j-2)!}\tilde{A}^{(\mu_j-2)}(0)\,x_{j1} + ... + \tilde{A}(0)\,x_{j,\mu_j-1} = 0
\end{aligned} \tag{5.1}$$

Τα συγκεντρώνουμε λοιπόν ώστε να δημιουργήσουμε το άπειρο ζεύγος Jordan (C_∞, J_∞) του πολυωνυμικού πίνακα $A(s)$.

Παράδειγμα 5.0.5. Έστω ο πολυωνυμικός πίνακας:

$$A(s) = \begin{pmatrix} s & s^2+s+1 \\ -1 & -s-1 \end{pmatrix} \in R^{2\times 2}[s]$$

Ας προσπαθήσουμε να κατασκευάσουμε το άπειρο ζεύγος Jordan του $A(s)$ κατασκευάζοντας όπως προείπαμε τα πεπερασμένα ζεύγη Jordan του $\tilde{A}(s)$ για $s = 0$ σύμφωνα με τη φόρμουλα 5.0.2.

Έχουμε εξάγει από τα παραδείγματα:

$$S^C_{\tilde{A}(s)}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s^4 \end{pmatrix} \Rightarrow S^0_{\tilde{A}(s)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s^4 \end{pmatrix}$$

και

$$S^{\infty}_{A(s)}(s) = s^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s^4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s^2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s^2} \end{pmatrix}$$

με

$$\tilde{U}_R(s) = \begin{pmatrix} -(s+1) & -(s^2+s+1) \\ 1 & s \end{pmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι $q_1 = k = 2$, $j = \nu + 1, ..., r = 2$ ξεκινούμε να μετράμε τη στήλη που συναντούμε την πρώτη τάξη των μηδενικών του $A(s)$. Ενώ το q στον τύπο υπολογίζεται ως $q = 0, 1, ..., \mu_j - 1$ όπου $\mu_j = 2 + 2 = 4$ (ο βαθμός του δεύτερου είδους των απείρων στοιχειωδών διαιρετών (IEDs), ο οποίος ανταποκρίνεται σε έναν πόλο και σε ένα μηδενικό στο άπειρο). Αυτό λοιπόν το IED οδηγεί στη κατασκευή Jordan αλυσίδας x_{jq} μήκους 4 που θα ανταποκρίνεται στο μηδενικό του $s = 0$ του πίνακα $\tilde{A}(s)$.

‘Ετσι $x_{jq} = \{x_{20}, x_{21}, x_{22}, x_{23}\}$ και $x_{20} = \frac{1}{0!}\tilde{u}_2(0) = \begin{pmatrix} -(0^2+0+1) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ όπου $\tilde{u}_2(s)$ η δεύτερη στήλη του δεξιού αντιστρέψιμου πίνακα $\tilde{U}_R(s)$.

Ομοίως

$$x_{21} = \frac{1}{1!}\tilde{u}_2'(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, x_{22} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, x_{23} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Επομένως συγκεντρωτικά το άπειρο ζεύγος Jordan (C_∞, J_∞) του $A(s)$

$$C_\infty = C_{\infty 2} = (x_{20}, x_{21}, x_{22}, x_{23}) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in R^{r \times \mu_i} = R^{2\times 4}$$

και ο

$$J_\infty = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in R^{4\times 4}$$

Κεφάλαιο 6

Επίλυση γραμμικών ομογενών συστημάτων αλγεβρικών διαφορικών εξισώσεων με μη ομαλή συμπεριφορά

Θεώρημα 6.0.4. *(Vardulakis 1991) Δοθέντος του άπειρου ζεύγους Jordan του κεφαλαίου 5:*

$$C_{\infty j} = (x_{j0}, x_{j1}, ..., x_{j,\mu}) \in R^{r\times\mu}, J_{\infty j} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in R^{\mu\times\mu}$$

και παίρνοντας ως αρχικές συνθήκες τα $\beta\,(0-)\,, \beta^{(1)}\,(0-)\,, ..., \beta^{(q_1-1)}\,(0-)$ *οι οποίες έχουν επιλεγεί έτσι ώστε* $\beta\,(0-) = -x_{jq+1}, \beta^{(1)}\,(0-) = -x_{jq+2}, \beta^{(q_1-1)}\,(0-) = -x_{jq+q_1}$ *όπου* $q = 0, 1, ..., \hat{q}_j - 1, j = \nu + 1, ..., r$ *παρατηρούμε ότι μπορούμε να κατασκευάσουμε λύσεις για την διαφορική εξίσωση*

$$A\,(\rho)\,\beta\,(t) = 0, t \geq 0$$

της μορφής

$$\beta_{jq}^{\infty}\,(t) = x_{j0}\delta^{(q)}\,(t) + x_{j1}\delta^{(q-1)}\,(t) + ... + x_{jq-1}\delta^{(1)}\,(t) + x_{jq}\delta\,(t)$$

Τα x_{jq} αποτελούν το μέσο για την κατασκευή του άπειρου ζεύγους Jordan ενώ το $\delta(t)$ ορίζεται ως η Dirac μορφή η οποία ανταποκρίνεται στις $\hat{q}_r - 1$ παραγώγους που προέκυψαν από την αντίστροφη Laplace μετατροπή του $\beta(t)$. Οι λύσεις απλούστερα συνοδεύονται γραπτώς μόνο χρησιμοποιώντας την έκφραση $\delta(t)$.

Η επίλυση αυτών των μορφών διαφορικών εξισώσεων οδηγεί σε **μη ομαλή λύση** (impulsive solution) στον χώρο που εξετάζονται. Άλλωστε το γεγονός ότι έχουμε εξάγει μηδενικά $\hat{q}_r$ στο $s = \infty$, το οποίο φαίνεται από την εύρεση της $S^{\infty}_{A(s)}(s)$ και τα στοιχεία της διαγωνίου του, προειδοποιεί την επικείμενη μη ομαλή λύση της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης. Ορίζω ως B^{∞} το χώρο των μη ομαλών λύσεων του συστήματος $A(\rho)\beta(t) = 0, t \geq 0$ όπου φυσικά τα $\beta_i^{\infty}(t) \in B^{\infty}$.

Αλγόριθμος 6.0.3. (Υπολογισμός του χώρου των μη ομαλών λύσεων) Παραθέτουμε τον ακόλουθο αλγόριθμο:

Βήμα 1 Υπολογίζουμε την Smith μορφή $S^{C}_{\tilde{A}(s)}(s)$ του $\tilde{A}(s)$ από την οποία για $s = 0$ υπολογίζω και την $S^{0}_{\tilde{A}(s)}(s)$. Έπειτα κατασκευάζουμε την $S^{\infty}_{A(s)}(s)$ Smith μορφή στο άπειρο του πίνακα $A(s)$ σύμφωνα με τη μεθοδολογία του κεφαλαίου 4.

Βήμα 2 Με την παραπάνω μελέτη εξάγουμε τους πίνακες $\tilde{U}_L(s), \tilde{U}_R(s)$. Έστω

$$\tilde{U}_R(s) = [\tilde{u}_1(s), \tilde{u}_2(s), ..., \tilde{u}_r(s)], u_j(s) \in R^{r\times 1}(s)$$

όπως είναι προφανές από:

$$\tilde{U}_L(s)\tilde{A}(s)\tilde{U}_R(s) = S^{0}_{\tilde{A}(s)}(s)$$

Υπολογίζουμε από τον τύπο:

$$x_{jq} := \frac{1}{q!}\tilde{u}_j^{(q)}(0)$$

τα πεπερασμένα ζεύγη Jordan του $\tilde{A}(s)$ στο $s = 0$ τα οποία μας βοηθούν να κατασκευάσουμε το άπειρο ζεύγος Jordan (C_{∞}, J_{∞}) του πολυωνυμικού πίνακα $A(s)$. Θυμίζουμε ότι πρέπει $q = 0, 1, ..., \mu_j - 1, j = \nu + 1, ..., r$.

Βήμα 3 Από το ζεύγος (C_∞, J_∞) κατασκευάζουμε τους πίνακες:

$$\tilde{C}_{\infty j} := \left[\tilde{C}_{\infty\nu+1}, \tilde{C}_{\infty\nu+2}, ..., \tilde{C}_{\infty r}\right] \in R^{r\times\mu_j}$$
$$\tilde{J}_{\infty j} := \left[\tilde{J}_{\infty\nu+1}, \tilde{J}_{\infty\nu+2}, ..., \tilde{J}_{\infty r}\right] \in R^{\mu_j\times\mu_j}$$

όπου $j = \nu+1, ..., r$, δηλαδή δημιουργούμε καινούριους πίνακες με στοιχεία τις πρώτες $\hat{q}_j$ στήλες, της μορφής ($k \times \hat{q}_j$) και ($\hat{q}_j \times \hat{q}_j$), που αποκόβουμε από τους $(\tilde{C}_{\infty j}$,$\tilde{J}_{\infty j})$ αντιστοίχως .

Οι γεννήτορες του κρουστικού ή μη ομαλού χώρου λύσεων B^∞ θα αποτελούν τις στήλες του πίνακα:

$$\Psi_\infty = \sum_{i=0}^{\hat{q}_r-1} \tilde{C}_{\infty j}\tilde{J}_{\infty j}^{(i)}\delta^{(i)}(t)$$

Ο αριθμός των μη ομαλών λύσεων μπορεί να διαπιστωθεί και εξετάζοντας τον άπειρο Jordan πίνακα J_∞, καθώς για κάθε $\mu_j = q + \hat{q}_j, j = \nu+1, ..., r$ θα έχουμε $\hat{q}_j$ γραμμικά ανεξάρτητες μη ομαλές λύσεις. Η διάσταση του μη ομαλού χώρου λύσεων θα είναι $\dim B^\infty = \mu_j = \sum\limits_{j=\nu+1}^{r} \hat{q}_j$ όπου αποτελεί τη συνολική τάξη των άπειρων στοιχειωδών διαιρετών για $j = \nu + 1, ..., r$ ή διαφορετικά των άπειρων μηδενικών του $A(s)$.

Παράδειγμα 6.0.6. Έστω ο πολυωνυμικός πίνακας:

$$A(s) = \begin{pmatrix} s & s^2+s+1 \\ -1 & -s-1 \end{pmatrix} \in R^{2\times 2}[s]$$

Οι λύσεις του συστήματος των αλγεβρικών-διαφορικών εξισώσεων $A(\rho)\beta(t) = 0$ κρύβουν μη ομαλή συμπεριφορά καθώς όπως προείπαμε ο $A(s)$ έχει μηδενικά στο $s = \infty$. Τα πρώτα βήματα του αλγορίθμου έχουν υπολογιστεί έχοντας εργαστεί καταλλήλως στα προηγούμενα παραδείγματα, μάλιστα θυμίζουμε ότι το άπειρο ζεύγος Jordan είναι:

$$(C_\infty, J_\infty) = \left(\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \; , \; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

Έτσι από το τρίτο βήμα του αλγορίθμου θα διατυπώσουμε την μορφή των μη ομαλών λύσεων. Κατασκευάζουμε τους δύο καινούριους πίνακες οι οποίοι θα αφορούν τα στοιχεία των πρώτων $\hat{q}_j = 2$ στηλών του C_∞ και J_∞ μορφής 2×2 (καθώς $j = 2$ ο αριθμός της στήλης που συναντήσαμε τα πρώτα μηδενικά στο άπειρο).

Άρα:

$$\tilde{C}_{\infty 2} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

και

$$\tilde{J}_{\infty 2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Δηλαδή:

$$\Psi_\infty = \sum_{i=0}^{\hat{q}_r - 1} \tilde{C}_{\infty j} \tilde{J}_{\infty j}^{(i)} \delta^{(i)}(t) = \sum_{i=0}^{2-1=1} \tilde{C}_{\infty 2} \tilde{J}_{\infty 2}^{(i)} \delta^{(i)}(t) = \tilde{C}_{\infty 2} \tilde{J}_{\infty 2}^{(0)} \delta^{(0)}(t) + \tilde{C}_{\infty 2} \tilde{J}_{\infty 2}^{(1)} \delta^{(1)}(t) =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \delta(t) + \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^{(1)}(t)$$

$$= \begin{pmatrix} -\delta(t) & -\delta(t) \\ 0 & -\delta(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\delta^{(1)}(t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\delta(t) & -\delta(t) - \delta^{(1)}(t) \\ 0 & -\delta(t) \end{pmatrix}$$

όπου $\hat{q}_r$ ο βαθμός των μηδενικών στο $s = \infty$ που βρέθηκε στην r στήλη του πίνακα, εδώ είναι 2. Επομένως οι λύσεις μας είναι της μορφής:

$$B^\infty = \left\langle \begin{pmatrix} -\delta(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\delta(t) - \delta^{(1)}(t) \\ -\delta(t) \end{pmatrix} \right\rangle$$

Παράδειγμα 6.0.7. Έστω

$$A(s) = \begin{pmatrix} s+1 & s^2-1 \\ 1 & s \end{pmatrix}$$

Θα εξετάσουμε τις λύσεις στο χώρο B^∞. Παρατηρώ ότι αρχικά $k = 2$, Θυμίζουμε ακόμη ότι $-s^2+1 = s \times (-s) + 1, s = s \times 1$ και άρα

$$\tilde{A}\,(s) = s^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s^2} - 1 \\ 1 & \frac{1}{s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s+s^2 & 1-s^2 \\ s^2 & s \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} s+s^2 & 1-s^2 \\ s^2 & s \end{pmatrix}}_{\tilde{A}(s)} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{V_1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1-s^2 & s+s^2 \\ s & s^2 \end{pmatrix}}_{\tilde{A}_1(s)}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{U_1} \underbrace{\begin{pmatrix} 1-s^2 & s+s^2 \\ s & s^2 \end{pmatrix}}_{\tilde{A}_1(s)} = \underbrace{\begin{pmatrix} s & s^2 \\ 1-s^2 & s+s^2 \end{pmatrix}}_{\tilde{A}_2(s)}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{pmatrix}}_{U_2} \underbrace{\begin{pmatrix} s & s^2 \\ 1-s^2 & s+s^2 \end{pmatrix}}_{\tilde{A}_2(s)} = \underbrace{\begin{pmatrix} s & s^2 \\ 1 & s+s^2+s^3 \end{pmatrix}}_{\tilde{A}_3(s)}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} s & s^2 \\ 1 & s+s^2+s^3 \end{pmatrix}}_{\tilde{A}_3(s)} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{V_2} = \underbrace{\begin{pmatrix} s & 0 \\ 1 & s^3+s^2 \end{pmatrix}}_{\tilde{A}_4(s)}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{U_3} \underbrace{\begin{pmatrix} s & 0 \\ 1 & s^3+s^2 \end{pmatrix}}_{\tilde{A}_4(s)} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & s^3+s^2 \\ s & 0 \end{pmatrix}}_{\tilde{A}_5(s)}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -s & 1 \end{pmatrix}}_{U_4} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & s^3+s^2 \\ s & 0 \end{pmatrix}}_{\tilde{A}_5(s)} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & s^3+s^2 \\ 0 & -s^4-s^3 \end{pmatrix}}_{\tilde{A}_6(s)}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & s^3+s^2 \\ 0 & -s^4-s^3 \end{pmatrix}}_{\tilde{A}_6(s)} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -s^3-s^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{V_3} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -s^4-s^3 \end{pmatrix}}_{\tilde{A}_7(s)}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -s^4-s^3 \end{pmatrix}}_{\tilde{A}_7(s)} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{V_4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s^4+s^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s^3\left(1+s\right) \end{pmatrix} = S^C_{\tilde{A}(s)}$$

Συνεπώς

$$S^0_{\tilde{A}(s)}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s^3 \end{pmatrix} \Rightarrow S^\infty_{\tilde{A}(s)}(s) = s^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s^3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s^2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s} \end{pmatrix}$$

Από τα παραπάνω φανερό είναι ότι η $A(s)$ έχει στο $s = \infty$ έναν πόλο τάξεως $q_1 = 2$ και ένα μηδενικό τάξεως $\hat{q}_2 = 1$. Οπότε εμφανίζεται ένας άπειρος στοιχειώδης διαιρέτης που αντιστοιχεί σε ένα πόλο και σε ένα μηδενικό στο $s = \infty$ τάξεως $\mu_2 = q_1 + \hat{q}_2 = 2 + 1 = 3$. Έτσι αναδύεται μια αλυσίδα μήκους $\mu_2 = 3$ η οποία ανταποκρίνεται στο μηδενικό στο $s = \infty$ ή στο μηδενικό στο $s = 0$ του $\tilde{A}\left(s\right)$.

Δηλαδή $x_{jq} = \{x_{20}, x_{21}, x_{22}\}, q = 0, 1, ..., \mu_j - 1 = 0, 1, 2$ όπου $j = 2$ η στήλη που ξεκινούν να εμφανίζονται τα μηδενικά. Ουσιαστικά θα κατασκευάσουμε $\hat{q}_2 = 1$ γραμμικά ανεξάρτητη μη ομαλή λύση:

$$\tilde{U}_R(s) = V_1 V_2 V_3 V_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & s^3 + s^2 + s \end{pmatrix}$$

$$x_{20} = 1 \times \tilde{u}_2(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, x_{21} = \tilde{u}_2^{(1)}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, x_{22} = \frac{1}{2!}\tilde{u}_2^{(2)}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$C_\infty = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, J_\infty = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\tilde{C}_{\infty 2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in R^{2\times 1}, \tilde{J}_{\infty 2} = (1) \in R^{1\times 1}$ οι πίνακες που αποκόβουμε από το ζεύγος (C_∞, J_∞).

Επομένως οι λύσεις είναι:

$$\Psi_\infty = \sum_{i=0}^{\hat{q}_r - 1 = 1 - 1} C_{\infty j} J_{\infty j}^{(i)} \delta^{(i)}(t) = C_{\infty 2} J_{\infty 2}^{(0)} \delta(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \delta(t) = \begin{pmatrix} -\delta(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$B^\infty = \left\langle \begin{pmatrix} -\delta(t) \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Παράδειγμα 6.0.8. Δίνεται το σύνολο των διαφορικών εξισώσεων για $t \geq 0$

$$\beta_1(t) + \frac{d^3 \beta_2(t)}{dt^3} = 0$$
$$\beta_2(t) + \frac{d\beta_3(t)}{dt} = 0$$
$$\beta_3(t) = 0$$

Επιθυμούμε να εξετάσουμε το σύνολο των λύσεων στο B^{∞}. Με τη μορφή πίνακα όπου ρ, ο διαφορικός τελεστής, το παραπάνω γράφεται:

$$\begin{pmatrix} 1 & \rho^3 & 0 \\ 0 & 1 & \rho \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1(t) \\ \beta_2(t) \\ \beta_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Αρχικά $\tilde{A}(s) = s^3 A\left(\frac{1}{s}\right)$ δηλαδή $\tilde{A}(s) = s^3 \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{s^3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{s} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s^3 & 1 & 0 \\ 0 & s^3 & s^2 \\ 0 & 0 & s^3 \end{pmatrix}$

Συνεπώς

$$\underbrace{\begin{pmatrix} s^3 & 1 & 0 \\ 0 & s^3 & s^2 \\ 0 & 0 & s^3 \end{pmatrix}}_{\tilde{A}(s)} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{V_1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & s^3 & 0 \\ s^3 & 0 & s^2 \\ 0 & 0 & s^3 \end{pmatrix}}_{\tilde{A}_1(s)}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -s^3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{U_1} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & s^3 & 0 \\ s^3 & 0 & s^2 \\ 0 & 0 & s^3 \end{pmatrix}}_{\tilde{A}_1(s)} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & s^3 & 0 \\ 0 & -s^6 & s^2 \\ 0 & 0 & s^3 \end{pmatrix}}_{\tilde{A}_2(s)}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & s^3 & 0 \\ 0 & -s^6 & s^2 \\ 0 & 0 & s^3 \end{pmatrix}}_{\tilde{A}_2(s)} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -s^3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{V_2} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -s^6 & s^2 \\ 0 & 0 & s^3 \end{pmatrix}}_{\tilde{A}_3(s)}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -s^6 & s^2 \\ 0 & 0 & s^3 \end{pmatrix}}_{\tilde{A}_3(s)} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{V_3} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & s^2 & -s^6 \\ 0 & s^3 & 0 \end{pmatrix}}_{\tilde{A}_4(s)}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -s & 1 \end{pmatrix}}_{U_2} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & s^2 & -s^6 \\ 0 & s^3 & 0 \end{pmatrix}}_{\tilde{A}_4(s)} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & s^2 & -s^6 \\ 0 & 0 & s^7 \end{pmatrix}}_{\tilde{A}_5(s)}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & s^2 & -s^6 \\ 0 & 0 & s^7 \end{pmatrix}}_{\tilde{A}_5(s)} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & s^4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{V_4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & s^2 & 0 \\ 0 & 0 & s^7 \end{pmatrix} = S^C_{\tilde{A}(s)}$$

Άρα

$$S^0_{\tilde{A}(s)}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & s^2 & 0 \\ 0 & 0 & s^7 \end{pmatrix}$$

Συνεπώς

$$S^\infty_{A(s)}(s) = s^3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{s^7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s^3 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{s^4} \end{pmatrix}$$

με $k = 3$.

Από τα παραπάνω φανερό είναι ότι η $A(s)$ έχει στο $s = \infty$ δύο πόλους τάξεως $q_1 = 3, q_2 = 1$ αντιστοίχως και ένα μηδενικό τάξεως $\hat{q}_3 = 4$. Λόγου του μηδενικού στο άπειρο τάξης 4 θα έχω μια αλυσίδα Jordan μήκους $\mu_3 = q_1 + \hat{q}_j = 3 + 4 = 7$ η οποία ανταποκρίνεται στο μηδενικό για $s = 0$ του $\tilde{A}(s)$. Οπότε εμφανίζονται τρεις άπειροι στοιχειώδεις διαιρέτες (καθώς $\mu_1 = 3 - 3 = 0$) που αντιστοιχούν ο δεύτερος σε ένα πόλο βαθμού $\mu_2 = q_1 - q_2 = 3 - 1 = 2$ στο $s = \infty$ και ο τρίτος σε έναν πόλο και σε ένα μηδενικό στο $s = \infty$ τάξεως $\mu_3 = q_1 + \hat{q}_3 = 3 + 4 = 7$.

Δηλαδή $x_{jq} = \{x_{30}, x_{31}, x_{32}, x_{33}, x_{34}, x_{35}, x_{36}\}, q = 0, 1, ..., \mu_j - 1 = 0, 1, ..., 7 - 1 = 0, 1, ..., 6$ όπου $j = 3$ η στήλη που ξεκινούν να εμφανίζονται τα μηδενικά. Ουσιαστικά θα κατασκευάσουμε $\hat{q}_3 = 4$ γραμμικές ανεξάρτητες μη ομαλές λύσεις.

$$\tilde{U}_R(s) = V_1 V_2 V_3 V_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -s^3 \\ 0 & 1 & s^4 \end{pmatrix}$$

$$x_{30} = \frac{1}{0!}\tilde{u}_3(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, x_{31} = \frac{1}{1!}\tilde{u}_3^{(1)}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -3s^2 \\ 4s^3 \end{pmatrix}_{s=0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_{32} = \frac{1}{2!}\tilde{u}_3^{(2)}(0) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ -6s \\ 12s^2 \end{pmatrix}_{s=0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, x_{33} = \frac{1}{3!}\tilde{u}_3^{(3)}(0) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 24s \end{pmatrix}_{s=0} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_{34} = \frac{1}{4!}\tilde{u}_3^{(4)}(0) = \frac{1}{24}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 24 \end{pmatrix}_{s=0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, x_{35} = \frac{1}{5!}\tilde{u}_3^{(5)}(0) = \frac{1}{120}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{s=0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = x_{36}$$

Επομένως το άπειρο ζεύγος Jordan θα έχει την παρακάτω μορφή πινάκων:

$$C_\infty = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in R^{3\times 7}, J_\infty = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in R^{7\times 7}$$

$$\tilde{C}_{\infty 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tilde{J}_{\infty 3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(οι πίνακες που αποκόβουμε από το ζεύγος μορφής 3×4 και μορφής 4×4 αντιστοίχως).

Επομένως οι λύσεις είναι:

$$
\begin{aligned}
\Psi_\infty &= \sum_{i=0}^{\hat{q}_r-1=4-1} \tilde{C}_{\infty 3}\tilde{J}_{\infty 3}^{(i)}\delta^{(i)}(t) = \\
&= \tilde{C}_{\infty 3}\tilde{J}_{\infty 3}^{(0)}\delta(t) + \tilde{C}_{\infty 3}\tilde{J}_{\infty 3}^{(1)}\delta^{(1)}(t) + \tilde{C}_{\infty 3}\tilde{J}_{\infty 3}^{(2)}\delta^{(2)}(t) + \tilde{C}_{\infty 3}\tilde{J}_{\infty 3}^{(3)}\delta^{(3)}(t) = \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\delta(t) + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\delta^{(1)}(t) \\
&+ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\delta^{(2)}(t) + \\
&+ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\delta^{(3)}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\delta(t) \\
&+ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\delta^{(1)}(t) + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\delta^{(2)}(t) + \\
&+ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\delta^{(3)}(t) = \begin{pmatrix} \delta(t) & \delta^{(1)}(t) & \delta^{(2)}(t) & \delta^{(3)}(t) \\ 0 & 0 & 0 & -\delta(t) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Συνεπώς

$$B^{\infty} = \left\langle \begin{pmatrix} \delta(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \delta^{(1)}(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \delta^{(2)}(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \delta^{(3)}(t) \\ -\delta(t) \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Κεφάλαιο 7

Κατασκευή αλγεβρικών-διαφορικών εξισώσεων δεδομένης ομαλής συμπεριφοράς

7.1 Περιγραφή του προβλήματος

Στο κεφάλαιο που ακολουθεί γνωρίζοντας την **ομαλή** (smooth) συμπεριφορά ενός συστήματος θα κατασκευάσουμε εκείνο το σύστημα αλγεβρικών-διαφορικών εξισώσεων της μορφής $A(\rho)\beta\left(t\right)=0$ που παράγει το συγκεκριμένο χώρο λύσεων. Ουσιαστικά θα μελετήσουμε το **αντίστροφο** πρόβλημα γνωρίζοντας τις λύσεις του γραμμικού ομογενούς συστήματος.

Πρόβλημα: Έστω ο χώρος των ομαλών λύσεων, ο οποίος δίνεται από τα διανύσματα της μορφής:

$$B^C=\left\langle \beta^i_{jk}\left(t\right)=\sum_{k=0}^{\sigma_{ij}-1}\beta_{jk}t^k e^{\lambda_i(t)}\right\rangle$$

όπου $k=0,1,...,\sigma_{ij}-1$ και $i=1,2,...,l$ όπου i το πλήθος των ιδιοτιμών και $j=z,z+1,...,r$ η στήλη στην οποία εμφανίζεται η πρώτη ιδιοτιμή. Το πρόβλημα έγκειται στον υπολογισμό της τάξης $q\in N$ του πολυωνυμικού πίνακα $A\left(\rho\right)=A_0+A_1\rho+...+A_q\rho^q$ καθώς και των $A_i\in R^{r\times r}, i=1,2,...,q$ έτσι ώστε τα διανύσματα $\beta^i_{jk}\left(t\right)\in B^C$ να αποτελούν λύσεις της $A(\rho)\beta\left(t\right)=0$.

Κάνοντας αναδρομή στο κεφάλαιο 3 παρατηρούμε ότι για την κατασκευή των λύσεων του ομογενούς συστήματος των αλγεβρικών διαφορικών εξισώσεων κρίνεται απαραίτητη η εύρεση της αλυσίδας Jordan, δηλαδή των πινάκων:

$$C_{jk} = \begin{pmatrix} \beta^i_{j0} & \beta^i_{j1} & ... & \beta^i_{j\sigma_{ij}-1} \end{pmatrix} \in R^{r \times \sigma_{ij}}$$

$$J_{ij} = \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix} \in R^{\sigma_{ij} \times \sigma_{ij}}$$

οι οποίοι συναινούν στην εύρεση λύσεων $\beta^i_{jk}(t) \in B^C$.
Επιπλέον είδαμε ότι τα διανύσματα της μορφής:

$$\beta^i_{jk} = \begin{pmatrix} \frac{t^{\sigma_{ij}-1}}{\sigma_{ij}-1}\beta^i_{j0} + & \frac{t^{\sigma_{ij}-2}}{\sigma_{ij}-2}\beta^i_{j1} + & ... & \frac{t}{1!}\beta^i_{j\sigma_{ij}-2} + & \beta^i_{j\sigma_{ij}-1} \end{pmatrix} e^{\lambda_i t}$$

όπου $i \in l, j = z, z+1, ..., r, k = 0, 1, ..., \sigma_{ij} - 1$ θα αποτελούν λύσεις της γραμμικής ομογενούς εξίσωσης αν-ν ισχύουν οι παρακάτω εξισώσεις:

$$\begin{aligned} & A(\lambda_0)\beta^i_{j0} = 0 \\ & A^{(1)}(\lambda_0)\beta^i_{j0} + A(\lambda_0)\beta^i_{j1} = 0 \\ & \vdots \\ & \frac{1}{(\sigma_{ij}-1)!}A^{(\sigma_{ij}-1)}(\lambda_0)\beta^i_{j0} + \frac{1}{(\sigma_{ij}-2)!}A^{(\sigma_{ij}-2)}(\lambda_0)\beta^i_{j1} + ... + A^{(1)}(\lambda_0)\beta_{\sigma_{ij}-2} + A(\lambda_0)\beta_{\sigma_{ij}-1} = 0 \end{aligned} \tag{7.1}$$

Η σχέση (7.1) σε μορφή πινάκων γράφεται ως εξής:

$$\begin{pmatrix} A_q & \cdots & A_1 & A_0 \end{pmatrix} \times \underbrace{\begin{pmatrix} \binom{q}{\sigma_{ij}-1} \lambda_0^{q-(\sigma_{ij}-1)} I & \cdots & \cdots & \cdots & q(q-1)\lambda_0^{q-2} I & q\lambda_0^{q-1} I & \lambda_0^q I \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & (q-1)\lambda_0^{q-2} I & \lambda_0^{q-1} I \\ \binom{\sigma_{ij}}{\sigma_{ij}-1} \lambda_0^{q-(\sigma_{ij}-1)} I & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ I & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 2I & 2\lambda_0 I & \lambda_0^2 I \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & I & \lambda_0 I \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & I \end{pmatrix}}_{Q_i} \times$$

$$\times \underbrace{\begin{pmatrix} \beta_{j0}^i & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ \beta_{j1}^i & \beta_{j0}^i & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \beta_{j1}^i & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ \beta_{j\sigma_{ij}-2}^i & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \beta_{j0}^i & \vdots \\ \beta_{j\sigma_{ij}-1}^i & \beta_{j\sigma_{ij}-2}^i & \cdots & \cdots & \cdots & \beta_{j1}^i & \beta_{j0}^i \end{pmatrix}}_{W_i} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

7.2 Αλγόριθμος επίλυσης

Αλγόριθμος 7.2.1. Για την κατασκευή συστήματος αλγεβρικών-διαφορικών εξισώσεων με δεδομένη ομαλή συμπεριφορά ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

Βήμα 1 Θεωρούμε ότι η τάξη του $A(s)$ είναι $q = 1$.

Βήμα 2 Ανάλογα με τον αριθμό τον λύσεων που κάθε φορά μας δίνεται καθώς και τον αριθμό των ιδιοτιμών κατασκευάζουμε τους Q_i, W_i. Συγκεντρώνουμε τους Q_i, W_i σε ενιαίους πίνακες Q, W. Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων:

$$\begin{pmatrix} A_q & \cdots & A_1 & A_0 \end{pmatrix} QW = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

όπου $A_i \in R^{r\times r}, i = 0, 1, ..., q$ βρίσκοντας τον αριστερό μηδενικό χώρο του πίνακα Q_i, W_i.

Βήμα 3 Εάν δεν υπάρχει λύση στο βήμα 2, δηλαδή τα διανύσματα του αριστερού μηδενικού χώρου δεν είναι γραμμικά ανεξάρτητα δηλαδή διάφορα του r τότε δεν υπάρχει λύση και θέτουμε $q = q + 1$ συνεχίζοντας στο βήμα 2.

Παράδειγμα 7.2.1. Υποθέτουμε ότι θέλουμε να υπολογίσουμε τον πολυωνυμικό πίνακα $A(s)$ έτσι ώστε το σύστημα $A(\rho)\beta(t) = 0$ να έχει τις ακόλουθες λύσεις:

$$\beta_1(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}}_{\beta_{10}} e^{2t}$$

$$\beta_2(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}}_{\beta_{11}} e^{2t} + \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}}_{\beta_{10}} te^{2t}$$

Βήμα 1 Αρχίζουμε την αναζήτηση με την επιλογή πίνακα τάξεως $q = 1$. Δηλαδή $A(s) = A_1 s + A_0$ όπου $\lambda_0 = 2, r = 2$.

Βήμα 2 Προσπαθούμε να εντοπίσουμε τις λύσεις του ακόλουθου συστήματος:

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_0 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} I & 2I \\ 0 & I \end{pmatrix}}_{Q} \underbrace{\begin{pmatrix} \beta_{10} & 0 \\ \beta_{11} & \beta_{10} \end{pmatrix}}_{W} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$$

όπου $A_i = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} \\ a_{i3} & a_{i4} \end{pmatrix}, i = 0, 1$. Άρα

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_{10} + 2\beta_{11} & 2\beta_{10} \\ \beta_{11} & \beta_{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ουσιαστικά παρατηρώντας το παραπάνω ζητείται να υπολογιστεί ο **αριστερός μηδενικός χώρος** (left null space) του πίνακα που σχηματίστηκε από το γινόμενο των Q, W. Αν καταφέρουμε να τον υπολογίσουμε οδηγούμαστε στην εύρεση των A_1, A_0 και επομένως στον τελικό πίνακα $A(s)$. Συνεπώς συμπληρώνοντας όπου

$$\beta_{10} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \beta_{11} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

παίρνουμε

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 1 & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ο αριστερός μηδενικός χώρος ενός πίνακα είναι ο δεξιά μηδενικός χώρος του αναστρόφου του. Με χρήση Mathematica και της εντολής nullspace[transpose[c]] όπου c ο γνωστός πίνακας εξάγουμε ότι ο αριστερός μηδενικός χώρος είναι:

$$\left\{ \left\{ -\frac{1}{8}, -\frac{3}{8}, 0, 1 \right\}, \left\{ -\frac{5}{8}, \frac{1}{8}, 1, 0 \right\} \right\}$$

Τα παραπάνω διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα και άρα

$$A_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{8} & -\frac{3}{8} \\ -\frac{5}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}, A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Συνεπώς

$$A(s) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{8}s & -\frac{3}{8}s + 1 \\ -\frac{5}{8}s + 1 & \frac{1}{8}s \end{pmatrix}$$

με $\det A(s) = -\frac{1}{4}(s-2)^2 \neq 0$.

Βήμα 3 Ο αλγόριθμος σταματά επομένως $q = 1$. Εάν είχαμε μόνο ένα γραμμικά ανεξάρτητο διάνυσμα θα προχωρούσαμε στην ίδια διαδικασία υπολογισμού του αριστερού μηδενικού χώρου για $q = 2$. Το ίδιο θα συνέβαινε και αν ο πίνακας $A(s)$ είχε ορίζουσα μηδέν.

Κεφάλαιο 8

Κατασκευή αλγεβρικών-διαφορικών εξισώσεων δεδομένης μη ομαλής συμπεριφοράς

8.1 Κλασική προσέγγιση

Προηγούμενα εξετάσαμε την επίλυση γραμμικών ομογενών συστημάτων αλγεβρικών και διαφορικών εξισώσεων της μορφής $A(\rho)\,\beta(t) = 0$, $A(\rho) \in R^{r\times r}[\rho]\,, \rho = \frac{d}{dt}$ τόσο με την κατασκευή ομαλού όσο και μη ομαλού χώρου λύσεων αλγεβρικών και γραμμικών διαφορικών εξισώσεων ενός ομογενούς συστήματος. Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε το αντίστροφο πρόβλημα, δηλαδή γνωρίζοντας τη μη ομαλή (impulsive) συμπεριφορά ενός συστήματος πρέπει να εντοπίσουμε το σύστημα αλγεβρικών και διαφορικών εξισώσεων της μορφής $A(\rho)\,\beta(t) = 0$, το οποίο παράγει τον συγκεκριμένο χώρο λύσεων.

Πρόβλημα (Karampetakis 2011; Vardulakis 1991) Δεδομένου του μη ομαλού χώρου λύσεων, ο οποίος δίνεται από τα διανύσματα της μορφής:

$$B^{\infty} = \left\langle \beta_j(t) = \sum_{k=0}^{\hat{q}_{j-1}} x_{jk}\delta^{(\hat{q}_j-1-k)}(t) \right\rangle$$

όπου $x_{jk} \in C^r, 0 \leq k \leq \hat{q}_j - 1, 1 \leq j \leq l$ πρέπει να βρούμε την τάξη $q \in N$ αλλά και τον πολυωνυμικό πίνακα $A(\rho) = A_0 + A_1\rho + ... + A_q\rho^q$ με $A_i \in R^{r\times r}, i = 1, 2, q$ έτσι ώστε τα διανύσματα $\beta_j(t) \in B^{\infty}$ να αποτελούν λύσεις της $A(\rho)\beta(t) = 0$.

Το ζεύγος Jordan που έχουμε χρησιμοποιήσει για τις παραπάνω λύσεις:

$$C_{\infty j} = \left(x_{j0}, x_{j1}, ..., x_{j,q+\hat{q}_j-1}\right) \in R^{r\times q+\hat{q}_j-1}, J_{\infty j} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in R^{q+\hat{q}_j-1\times q+\hat{q}_j-1}$$

αποτελεί ένα άπειρο ζεύγος Jordan του πολυωνυμικού πίνακα $A(s) = A_q s^q + ... + A_1 s + A_0$ εάν και μόνο αν ικανοποιούνται οι παρακάτω συνθήκες:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} A_q & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ A_{q-1} & A_q & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_1 & A_2 & A_3 & \cdots & A_q & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ A_0 & A_1 & A_2 & \cdots & A_{q-1} & A_q & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_0 & A_1 & \cdots & A_{q-2} & A_{q-1} & A_q & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & A_0 & A_1 & A_2 & \cdots & \cdots & A_{q-1} & A_q \end{pmatrix}}_{r\mu_j \times r\mu_j} \underbrace{\begin{pmatrix} x_{j0} \\ x_{j1} \\ \vdots \\ x_{jq-1} \\ x_{jq} \\ x_{jq+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{j\mu_j+1} \end{pmatrix}}_{r\mu_j \times 1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{r\mu_j} \tag{8.1}$$

όπου $\mu_j = q + \hat{q}_j$

Απόδειξη. (Vardulakis 1991) Είχαμε δει στο κεφάλαιο 5 για τα ζεύγη Jordan που κατασκευάσαμε, ότι ισχύουν οι συνθήκες (5.1). Λαμβάνοντας τούτο υπόψη αλλά και από το (4.1) εξάγοντας τις παραγώγους του για $n = 0, 1, ..., q_1$ όπου q_1 ο πρώτος πόλος του πολυωνυμικού πίνακα

$A(s)$, δηλαδή στη προκειμένη περίπτωση $q = q_1$ έχουμε:

$$\tilde{A}^{(n)}(0) = n!A_{q_1-q}, n = 0, 1, 2, ..., q_1$$
$$\tilde{A}^{(n)}(0) = 0, n = q_1 + 1, q_1 + 2, ..., q_1 + \hat{q}_1 - 1 = \mu_j - 1$$

με αποτέλεσμα οι συνθήκες (5.1) να γίνουν:

$$\begin{aligned}
&\tilde{A}(0)\, x_{j0} = 0 \\
&\tilde{A}^{(1)}(0)\, x_{j0} + \tilde{A}(0)\, x_{j1} = 0 \\
&\vdots \\
&\frac{1}{q_1!}\tilde{A}^{(q_1)}(0)\, x_{j0} + \frac{1}{(q_1-1)!}\tilde{A}^{(q_1-1)}(0)\, x_{j1} + ... + \tilde{A}(0)\, x_{jq_1} = 0 \\
&\frac{1}{q_1!}\tilde{A}^{(q_1)}(0)\, x_{j1} + \frac{1}{(q_1-1)!}\tilde{A}^{(q_1-1)}(0)\, x_{j2} + ... + \tilde{A}^{(1)}(0)\, x_{jq_1} + \tilde{A}(0)\, x_{jq_1+1} = 0 \\
&\vdots \\
&\frac{1}{q_1!}\tilde{A}^{(q_1)}(0)\, x_{j\mu_j-(q_1+1)} + \frac{1}{(q_1-1)!}\tilde{A}^{(q_1-1)}(0)\, x_{j\mu_j-q_1} + ... + \tilde{A}^{(1)}(0)\, x_{j\mu_j-2} + \tilde{A}(0)\, x_{j\mu_j-1} = 0
\end{aligned}$$

όπου $j = \nu + 1, ..., r$ (ν η στήλη που εμφανίζεται το μηδενικό και έπειτα) και αντιστοίχως:

$$\begin{aligned}
&A_{q_1} x_{j0} = 0 \\
&A_{q_1 - 1} x_{j0} + A_{q_1} x_{j1} = 0 \\
&A_{q_1 - 2} x_{j0} + A_{q_1 - 1} x_{j1} + A_{q_1} x_{j2} = 0 \\
&\vdots \\
&A_0 x_{j0} + A_1 x_{j1} + ... + A_{q_1} x_{jq_1} = 0 \\
&A_0 x_{j1} + A_1 x_{j2} + ... + A_{q_1 - 1} x_{jq_1} + A_{q_1} x_{jq_1 + 1} = 0 \\
&\vdots \\
&A_0 x_{j\hat{q}_j - 1} + A_1 x_{j\hat{q}_j} + ... + A_{q_1 - 1} x_{j\mu_j - 2} + A_{q_1} x_{j\mu_j - 1} = 0
\end{aligned}$$

το οποίο τελικά το φέρνουμε στην επιθυμητή μορφή (8.1) όπου $q = q_1, \mu_j = q + \hat{q}_j$.

Η μορφή αυτή συντελεί στην ικανοποίηση του:

$$\underbrace{\begin{pmatrix}
A_q & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
A_{q-1} & A_q & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
A_1 & A_2 & A_3 & \cdots & A_q & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
A_0 & A_1 & A_2 & \cdots & A_{q-1} & A_q & 0 & \cdots & 0 \\
0 & A_0 & A_1 & \cdots & A_{q-2} & A_{q-1} & A_q & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & A_0 & A_1 & A_2 & \cdots & \cdots & A_{q-1} & A_q
\end{pmatrix}}_{r\mu_j \times r\mu_j}
\underbrace{\begin{pmatrix}
x_{j0} \\ x_{j1} \\ \vdots \\ x_{j\hat{q}_j - 1} \\ x_{j\hat{q}_j} \\ x_{j\hat{q}_j + 1} \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{jq + \hat{q}_j - 1}
\end{pmatrix}}_{r\mu_j \times 1}
=
\underbrace{\begin{pmatrix}
0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0
\end{pmatrix}}_{r\mu_j}
\tag{8.2}$$

που οδηγεί στη δημιουργία της μη ομαλής λύσης:

$$\beta_{jl}^{\infty} = x_{j0} \delta^{(l)}(t) + x_{j1} \delta^{(l-1)}(t) + ... + x_{jl-1} \delta^{(1)}(t) + x_{jl} \delta(t)\, l = 0, 1, ..., \hat{q}_j - 1$$

με αρχικές συνθήκες $\beta\,(0-) = -x_{jl+1}, \beta^{(1)}\,(0-) = -x_{jl+2}, ..., \beta^{(q-1)}\,(0-) = -x_{jl+q}$ και επομένως κάθε άπειρος Jordan πίνακας τάξης

$$\mu_j = q + \hat{q}_j$$

ανταποκρίνεται σε $\hat{q}_j$ γραμμικά ανεξάρτητες μη ομαλές λύσεις.

Παρατηρούμε ότι αντίστοιχα μπορούμε να μετατρέψουμε την (8.1) σε μια εξίσωση τέτοια ώστε αριστερά να εμφανίζεται ο άγνωστος πίνακας $\begin{pmatrix} A_q & A_{q-1} & \cdots & A_0 \end{pmatrix}$ και στη δεξιά πλευρά οι γνωστές λύσεις x_{jl}. Δηλαδή:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} A_q & A_{q-1} & \cdots & A_1 & A_0 \end{pmatrix}}_{r\times r(q+1)} \underbrace{\begin{pmatrix} x_{j0} & x_{j1} & \cdots & x_{jq-1} & x_{jq} & x_{jq+1} & \cdots & x_{j,q+\hat{q}_j-1} \\ 0 & x_{j0} & \cdots & x_{jq-2} & x_{jq-1} & x_{jq} & \cdots & x_{j,q+\hat{q}_j-2} \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots & x_{jq-2} & x_{jq-1} & \cdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots & \vdots & x_{jq-2} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \vdots & \cdots & x_{j0} & \vdots & \vdots & \cdots & x_{j\hat{q}_j} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x_{j0} & x_{j1} & \cdots & x_{j\hat{q}_j-1} \end{pmatrix}}_{r(q+1)\times\mu_j} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{r\mu_j}$$

το οποίο συντελεί στην ικανοποίηση του:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} A_q & A_{q-1} & \cdots & A_1 & A_0 \end{pmatrix}}_{r\times r(q+1)} \underbrace{\begin{pmatrix} x_{j0} & x_{j1} & \cdots & x_{j\hat{q}_j-1} & x_{j\hat{q}_j} & x_{j\hat{q}_j+1} & \cdots & x_{j,q+\hat{q}_j-1} \\ 0 & x_{j0} & \cdots & x_{j\hat{q}_j-2} & x_{j\hat{q}_j-1} & x_{j\hat{q}_j} & \cdots & x_{j,q+\hat{q}_j-2} \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots & x_{j\hat{q}_j-2} & x_{j\hat{q}_j-1} & \cdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots & \vdots & x_{j\hat{q}_j-2} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \vdots & \cdots & x_{j0} & \vdots & \vdots & \cdots & x_{j\hat{q}_j} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x_{j0} & x_{j1} & \cdots & x_{j\hat{q}_j-1} \end{pmatrix}}_{r(q+1)\times\mu_j} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{r\mu_j} \tag{8.3}$$

όπου $\hat{q}_j$ γραμμικά ανεξάρτητες μη ομαλές λύσεις και $\mu_j = q + \hat{q}_j$. □

Αλγόριθμος 8.1.1. (Karampetakis 2011; Vardulakis 1991)

Για την κατασκευή συστήματος αλγεβρικών-διαφορικών εξισώσεων με δεδομένη μη ομαλή συμπεριφορά ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

Βήμα 1 Θεωρούμε ότι η τάξη του $A(s)$ είναι $q = 1$.

Βήμα 2 Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων (8.2) με τη συμβολή των άγνωστων πινάκων A_i, όπου $A_i \in R^{r\times r}, i = 0, 1, ..., q$, τοποθετώντας ελεύθερα στις εισόδους των a_{ij}, στοιχεία ώστε η ορίζουσα του τελικού πολυωνυμικού πίνακα να είναι διάφορη του μηδενός με $\mu_j = q + \hat{q}_j, j = 1, 2, ..., l$ ενώ τα διανύσματα $x_{j\hat{q}_j}, x_{j\hat{q}_j+1}, ..., x_{j,q+\hat{q}_j-1}$, είναι αριθμού lq.

Βήμα 3 Εάν δεν υπάρχει λύση στο βήμα 2, αν δηλαδή ο πολυωνυμικός πίνακας δεν είναι ομαλός, με συνέπεια η οριζουσά του να είναι ίση με μηδέν, $\det A(s) = 0$, τότε ανεβαίνει η τάξη q του υπό εξέταση πίνακα κατα 1 δηλαδή $q = q + 1$ και υπολογίζουμε ξανά το καινούριο πίνακα σύμφωνα με το βήμα 2.

Ομοίως ο παραπάνω αλγόριθμός θα μας οδηγήσει σε παρόμοια συμπεράσματα εάν στο βήμα 2 προχωρούσαμε στον υπολογισμό των άγνωστων πινάκων A_i και κατά συνέπεια του πολυωνυμικού πίνακα $A\left(s\right)$ κάνοντας χρήση του συμπεράσματος (8.3).

Αλγόριθμος 8.1.2. Παραθέτουμε τον ακόλουθο αλγόριθμο:

Βήμα 1 Θεωρούμε ότι η τάξη του $A\left(s\right)$ είναι $q = 1$.

Βήμα 2 Λύνουμε το σύστημα εξισώσεων:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} A_q & A_{q-1} & \cdots & A_1 & A_0 \end{pmatrix}}_{r\times r(q+1)} \underbrace{\begin{pmatrix} x_{j0} & x_{j1} & \cdots & x_{j\hat{q}_j-1} & x_{j\hat{q}_j} & x_{j\hat{q}_j+1} & \cdots & x_{j,q+\hat{q}_j-1} \\ 0 & x_{j0} & \cdots & x_{j\hat{q}_j-2} & x_{j\hat{q}_j-1} & x_{j\hat{q}_j} & \cdots & x_{j,q+\hat{q}_j-2} \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots & x_{j\hat{q}_j-2} & x_{j\hat{q}_j-1} & \cdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots & \vdots & x_{j\hat{q}_j-2} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \vdots & \cdots & x_{j0} & \vdots & \vdots & \cdots & x_{j\hat{q}_j} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x_{j0} & x_{j1} & \cdots & x_{j\hat{q}_j-1} \end{pmatrix}}_{Q\in R^{r(q+1)\times\mu_j}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{r\mu_j}$$

με τη συμβολή των άγνωστων πινάκων A_i όπου $A_i \in R^{r\times r}, i = 0, 1, ..., q$. Για να εντοπίσουμε τον πίνακα των A_i όπου $A_i \in R^{r\times r}, i = 0, 1, ..., q$ πρέπει να υπολογίσουμε το αριστερό μηδενικό χώρο του πίνακα Q με τη χρήση του Mathematica.

Βήμα 3 Εάν τα διανύσματα του αριστερά μηδενικού χώρου δεν είναι γραμμικά ανεξάρτητα τότε δεν αποτελούν λύση και η τάξη του πίνακα που εξετάζουμε ανεβαίνει κατά 1 δηλαδή $q = q + 1$, έπειτα ξαναυπολογίζουμε το καινούριο πίνακα σύμφωνα με το βήμα 2.

Έτσι από τους παραπάνω δύο αλγόριθμους προκύπτουν δυο τρόποι υπολογισμού του πολυωνυμικού πίνακα $A(s)$ εφόσον γνωρίζουμε ότι το συστήμα $A\left(\rho\right)\beta\left(t\right) = 0$ έχει συγκεκριμένες λύσεις στο χώρο των μη ομαλών λύσεων. Παρακάτω κατασκεύαζουμε τον $A(s)$ και με τις δύο περιπτώσεις.

Παράδειγμα 8.1.1. Υποθέτουμε ότι θέλουμε να υπολογίσουμε τον πολυωνυμικό πίνακα $A(s)$ έτσι ώστε το σύστημα $A(\rho)\,\beta(t) = 0$ να έχει τις ακόλουθες λύσεις:

$$\beta_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \delta(t) = x_{10}\delta(t)$$

$$\beta_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \delta(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \delta^{(1)}(t) = x_{11}\delta(t) + x_{10}\delta^{(1)}(t)$$

Βήμα 1 Αρχίζουμε την αναζήτηση με την επιλογή πίνακα τάξεως $q = 1$, δηλαδή $A(s) = A_0 + A_1 s$

Βήμα 2 Προσπαθούμε να εντοπίσουμε τις λύσεις του ακόλουθου συστήματος:

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ A_0 & A_1 & 0 \\ 0 & A_0 & A_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{11} \\ x_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

με $\hat{q}_1 = 2$ τον αριθμό λύσεων, $\mu_1 = q + \hat{q}_1 = 1 + 2 = 3$ και $r = 2$ καθώς τα διανύσματα x_{ji} έχουν δύο γραμμές ενώ: $A_i = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} \\ a_{i3} & a_{i4} \end{pmatrix}, i = 0, 1$

$$x_{10} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, x_{11} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, x_{12} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Παίρνουμε $r\mu_1 = r\,(q + \hat{q}_1) = 2\,(1 + 2) = 6$ με $(q + 1)\,r^2 + lqr = (1 + 1)\,2^2 + 1 \times 1 \times$

$2 = 10$ αγνώστους. Για τις λύσεις έχουμε:

$$A_1 x_{10} = 0$$

$$A_0 x_{10} + A_1 x_{11} = 0$$

$$A_0 x_{11} + A_1 x_{12} = 0$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{13} & a_{14} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a_{11} = 0, a_{13} = 0 \tag{8.4}$$

$$\begin{pmatrix} a_{01} & a_{02} \\ a_{03} & a_{04} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{13} & a_{14} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{01} \\ a_{03} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} - a_{12} \\ a_{13} - a_{14} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} a_{01} + a_{11} - a_{12} \\ a_{03} + a_{13} - a_{14} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \underbrace{\Rightarrow}_{\text{από (8.4)}} a_{01} = a_{12}, a_{03} = a_{14} \tag{8.5}$$

$$\begin{pmatrix} a_{01} & a_{02} \\ a_{03} & a_{04} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{13} & a_{14} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \underbrace{\Rightarrow}_{\text{από (8.4)}} \begin{pmatrix} a_{01} - a_{02} + a_{12}x_2 \\ a_{03} - a_{04} + a_{14}x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \underbrace{\Rightarrow}_{\text{από ((8.5))}}$$

$$\begin{aligned} &a_{12} - a_{02} + a_{12}x_2 = 0 \\ &a_{14} - a_{04} + a_{14}x_2 = 0 \end{aligned} \tag{8.6}$$

Επίσης από την (8.6) βγάζουμε το εξής:

$$a_{02} = a_{12} + a_{12}x_2 \Rightarrow x_2 = \frac{a_{02} - a_{12}}{a_{12}}$$

$$a_{04} = a_{14} + a_{14}x_2 \Rightarrow a_{04} = a_{14} + a_{14}\frac{a_{02} - a_{12}}{a_{12}} = \frac{a_{14}a_{02}}{a_{12}}$$

Επομένως από τα συστήματα παραπάνω προκύπτουν οι πολυωνυμικοί πίνακες $A\,(s)$ σύμφωνα με τις ακόλουθες περιπτώσεις αλλά και τα δεδομένα που ανακτήσαμε: Έχοντας γνώση των σχέσεων (8.4), (8.5), (8.6) παίρνουμε:

i. Εάν $a_{12} = a_{14} = 0$, τότε $A\,(s) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

ii. Εάν $a_{12} = 0, a_{14} \neq 0$, τότε

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a_{14} \end{pmatrix}, A_0 = \begin{pmatrix} 0 & a_{02} \\ a_{14} & a_{04} \end{pmatrix} \underbrace{\Rightarrow}_{\text{από (8.5)}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_{14} & a_{04} \end{pmatrix}$$

$$A\,(s) = A_0 + A_1 s = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_{14} & a_{04} + a_{14}s \end{pmatrix}$$

iii. Εάν $a_{12} \neq 0, a_{14} = 0$, τότε

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_0 = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{02} \\ 0 & a_{04} \end{pmatrix} \underbrace{\Rightarrow}_{\text{από (8.5)}} \begin{pmatrix} a_{12} & a_{02} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A\,(s) = A_0 + A_1 s = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{02} + a_{12}s \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

iv. Εάν $a_{12} \neq 0, a_{14} \neq 0$, τότε

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & a_{14} \end{pmatrix}, A_0 = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{02} \\ a_{14} & a_{04} \end{pmatrix} \underbrace{\Rightarrow}_{\text{από (8.5)}} \begin{pmatrix} a_{12} & a_{02} \\ a_{14} & \frac{a_{02}a_{14}}{a_{12}} \end{pmatrix}$$

$$A\,(s) = A_0 + A_1 s = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{02} + a_{12}s \\ a_{14} & \frac{a_{02}a_{14}}{a_{12}} + a_{14}s \end{pmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι οι πίνακες των i), ii), iii), iv) έχουν μηδενική ορίζουσα επομένως δεν αποτελούν λύση στο πρόβλημα μας. Αντιστοιχούν σε μη τετράγωνα συστήματα που εξάγουν την συγκεκριμένη λύση, λόγω της δεξιάς μηδενικής δομής του πίνακα $A(s)$. Άλλωστε οι παραπάνω πίνακες θα είχαν λύση Smith η οποία θα ήταν της μορφής $S^{\infty}_{A(s)} = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & \frac{1}{s} \end{pmatrix}$ πράγμα αδύνατο διότι $\hat{q}_1 = 1$, εξάγουμε δηλαδή μια γραμμικά ανεξάρτητη μη ομαλή λύση ενώ από τα δεδομένα έχω 2.

Βήμα 3 Εξετάζουμε πλέον πολυωνυμικό πίνακα τάξεως $q = q + 1 = 2$ και υπολογίζουμε τις λύσεις του συστήματος:

$$\begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 & 0 \\ A_1 & A_2 & 0 & 0 \\ A_0 & A_1 & A_2 & 0 \\ 0 & A_0 & A_1 & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

με $\hat{q}_1 = 2$ ο αριθμός των λύσεων, $\mu_1 = q + \hat{q}_1 = 2 + 2 = 4$ και $r = 2$ καθώς τα διανύσματα x_{ji} έχουν δύο γραμμές ενώ:

$$A_i = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} \\ a_{i3} & a_{i4} \end{pmatrix}, i = 0, 1, 2$$

$$x_{10} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, x_{11} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, x_{12} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, x_{13} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Υπάρχουν πολλές λύσεις με det $(A_0 + A_1 s + A_2 s^2) \neq 0$. Έχουμε:

$$A_2 x_{10} = 0$$

$$A_1 x_{10} + A_2 x_{11} = 0$$

$$A_0 x_{10} + A_1 x_{11} + A_2 x_{12} = 0$$

$$A_0 x_{11} + A_1 x_{12} + A_2 x_{13} = 0$$

$$\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{23} & a_{24} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a_{21} = 0, a_{23} = 0 \tag{8.7}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{13} & a_{14} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{23} & a_{24} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} + a_{21} - a_{22} \\ a_{13} + a_{23} - a_{24} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \underbrace{\Rightarrow}_{\text{από (8.7)}}$$

$$a_{11} = a_{22}$$

$$a_{13} = a_{24} \tag{8.8}$$

$$\begin{pmatrix} a_{01} & a_{02} \\ a_{03} & a_{04} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{13} & a_{14} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{23} & a_{24} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$a_{01} + a_{11} - a_{12} + a_{21} x_1 + a_{22} x_2 = 0$$

$$a_{03} + a_{13} - a_{14} + a_{23} x_1 + a_{24} x_2 = 0$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{\text{από (8.7),(8.8)}} \quad a_{01} + a_{22} - a_{12} + a_{22} x_2 = 0, a_{03} + a_{24} - a_{14} + a_{24} x_2 = 0 \Rightarrow$$

$$x_2 = \frac{a_{12} - a_{22} - a_{01}}{a_{22}}$$

$$a_{03} - a_{14} + \frac{a_{24} a_{12}}{a_{22}} - \frac{a_{24} a_{01}}{a_{22}} = 0 \tag{8.9}$$

$$\begin{pmatrix} a_{01} & a_{02} \\ a_{03} & a_{04} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{13} & a_{14} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{23} & a_{24} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$a_{01} - a_{02} + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{21}x_3 + a_{22}x_4 = 0$$

$$a_{03} - a_{04} + a_{13}x_1 + a_{14}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = 0$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{\text{από (8.7),}} a_{01} - a_{02} + a_{22}x_1 + a_{12}x_2 + a_{22}x_4 = 0, a_{03} - a_{04} + a_{24}x_1 + a_{14}x_2 + a_{24}x_4 = 0$$

$$\begin{aligned} x_4 &= \frac{-a_{01} + a_{02} - a_{22}x_1 - a_{12}x_2}{a_{22}} \\ a_{03} - a_{04} + a_{14}x_2 - \frac{a_{24}a_{01}}{a_{22}} &+ \frac{a_{24}a_{02}}{a_{22}} + \frac{a_{24}a_{12}}{a_{22}}x_2 = 0 \end{aligned} \tag{8.10}$$

Το ίδιο θα μπορούσαμε να πράξουμε αν από τις τελευταίες λύσεις αντικαθιστούσαμε το x_4 της δεύτερης λύσης στην πρώτη.

$$\begin{aligned} x_4 &= \frac{-a_{03} + a_{04} - a_{14}x_2 - a_{24}x_1}{a_{24}} \\ a_{01} - a_{02} + a_{12}x_2 - \frac{a_{22}a_{03}}{a_{24}} &+ \frac{a_{22}a_{04}}{a_{24}} - \frac{a_{22}a_{14}x_2}{a_{24}} = 0 \end{aligned}$$

i. Εάν θεωρήσουμε $a_{22} \neq 0, a_{24} \neq 0$ και $a_{02}, a_{12}, a_{14} \neq 0$, ακόμη $a_{12} = a_{01}$ τότε από την (8.9) εξάγουμε $a_{03} = a_{14}$ και $x_2 = -1$, από την (8.10) $a_{04} = \frac{a_{02}a_{24}}{a_{22}}$ (αφού όλα τα υπόλοιπα μηδενίζονται) ενώ το $x_4 = \frac{a_{02}-a_{22}x_1}{a_{22}}$ ή $x_4 = \frac{a_{04}-a_{24}x_1}{a_{24}}$. Επομένως παίρνουμε:

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & a_{22} \\ 0 & a_{24} \end{pmatrix}, A_1 = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{12} \\ a_{24} & a_{14} \end{pmatrix}, A_0 = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{02} \\ a_{14} & \frac{a_{02}a_{24}}{a_{22}} \end{pmatrix}$$

και

$$A(s) = \begin{pmatrix} a_{12} + sa_{22} & a_{02} + sa_{12} + s^2 a_{22} \\ a_{14} + sa_{24} & \frac{a_{02}a_{24}}{a_{22}} + sa_{14} + s^2 a_{24} \end{pmatrix}$$

Ο πίνακας αποτελεί λύση στο πρόβλημα που εξετάζουμε οπότε αποτελεί πολυωνυμικό πίνακα έτοιμο να μας δώσει τις μη ομαλές λύσεις που δόθηκαν αρχικά από το πρόβλημα. Αυτό είναι φανερό από το γεγονός ότι η ορίζουσα του είναι διάφορη του μηδενός και έτσι δεν θα προχωρήσουμε στο επόμενο βήμα.

$$\det A(s) = \frac{a_{02}}{a_{22}} \left(a_{12}a_{24} - a_{22}a_{14} \right) \neq 0$$

Άρα η Smith-McMillan θα είναι της μορφής $S^{\infty}_{A(s)} = \begin{pmatrix} s^2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s^2} \end{pmatrix}$. Άλλωστε ικανοποιούνται οι αρχικές συνθήκες με αποτέλεσμα η συνάρτηση $\beta\left(t\right)$ να ικανοποιεί το ομογενές σύστημα αλγεβρικών διαφορικών εξισώσεων $A\left(\rho\right)\beta\left(t\right) = 0$. Τούτο φαίνεται με την επαλήθευση κάθε φορά του μετασχηματισμού Laplace του συστήματος $A(\rho)\beta(t) = 0$, δηλαδή:

$$A\left(\rho\right)\tilde{\beta}_1\left(s\right) = \begin{pmatrix} a_{12} + sa_{22} & s^2 a_{22} + sa_{12} + a_{02} \\ a_{14} + sa_{24} & s^2 a_{24} + sa_{14} + \frac{a_{02}a_{24}}{a_{22}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} & sa_{22} \\ a_{14} & sa_{24} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} s & 0 & 1 & 0 \\ 0 & s & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & a_{24} & 0 & 0 \\ a_{22} & a_{12} & 0 & a_{22} \\ a_{24} & a_{14} & 0 & a_{24} \end{pmatrix} \left(- \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ x_1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} sI_2 & I_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_2 & 0 \\ A_1 & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x_{11} \\ -x_{12} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} sI_2 & I_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_2 & 0 \\ A_1 & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta\left(0-\right) \\ \beta^{(1)}\left(0-\right) \end{pmatrix}$$

$$A(\rho)\,\tilde{\beta}_2(s) = \begin{pmatrix} a_{12}+sa_{22} & s^2a_{22}+sa_{12}+a_{02} \\ a_{14}+sa_{24} & s^2a_{24}+sa_{14}+\frac{a_{02}a_{24}}{a_{22}} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} s \right) =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{12}-a_{02}+sa_{22} \\ \frac{1}{a_{22}}\left(a_{22}a_{14}-a_{02}a_{24}+sa_{22}^2a_{24}\right) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} s & 0 & 1 & 0 \\ 0 & s & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & a_{24} & 0 & 0 \\ a_{22} & a_{12} & 0 & a_{22} \\ a_{24} & a_{14} & 0 & a_{24} \end{pmatrix} \left(- \begin{pmatrix} x_1 \\ -1 \\ x_3 \\ \frac{a_4-a_{24}x_1}{a_{24}} \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \begin{pmatrix} sI_2 & I_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_2 & 0 \\ A_1 & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x_{12} \\ -x_{13} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} sI_2 & I_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_2 & 0 \\ A_1 & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta(0-) \\ \beta^{(1)}(0-) \end{pmatrix}$$

ii. Εάν θεωρήσουμε $a_{22} = 0, a_{24} \neq 0$ και $a_{12}, a_{14}, a_{04} \neq 0$ και $x_2 = -1$ τότε από την (8.9) εξάγουμε $a_{01} = a_{12}$ και ακολούθως $a_{03} = a_{14}$, από την (8.10) προκύπτει $a_{02} = 0$ ενώ το $x_4 = \frac{a_{04}-a_{24}x_1}{a_{24}}$. Επομένως έχουμε:

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a_{24} \end{pmatrix}, A_1 = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{24} & a_{14} \end{pmatrix}, A_0 = \begin{pmatrix} a_{12} & 0 \\ a_{14} & a_{04} \end{pmatrix}$$

και

$$A(s) = \begin{pmatrix} a_{12} & sa_{12} \\ a_{14}+sa_{24} & a_{04}+sa_{14}+s^2a_{24} \end{pmatrix}$$

$$\det A(s) = a_{12}a_{04} \neq 0$$

Άρα η Smith-McMillan θα είναι της μορφής $S^{\infty}_{A(s)} = \begin{pmatrix} s^2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s^2} \end{pmatrix}$

iii. Εάν θεωρήσουμε $a_{22} = 0, a_{24} \neq 0$ και $a_{12}, a_{14}, a_{04} \neq 0$ και $x_2 \neq 1$ τότε από την (8.9) εξάγουμε $a_{01} = a_{12}$ και ακολούθως $x_2 = \frac{a_{14}-a_{24}-a_{03}}{a_{24}}$, από την (8.10) προκύπτει $a_{02} \neq 0$. Έπειτα από πράξεις έχουμε:

$$
\begin{aligned}
&a_{01} - a_{02} + \frac{a_{12}a_{14}}{a_{24}} - a_{12} - \frac{a_{12}a_{03}}{a_{24}} = 0 \Rightarrow \\
&\frac{a_{12}a_{03}}{a_{24}} = -a_{02} + \frac{a_{12}a_{14}}{a_{24}} \Rightarrow a_{12}a_{03} = -a_{02}a_{24} + a_{12}a_{14} \Rightarrow \\
&a_{03} = \frac{-a_{02}a_{24} + a_{12}a_{14}}{a_{12}}
\end{aligned}
$$

ενώ το $x_4 = \frac{a_{04}}{a_{24}} - \frac{a_{14}^2}{a_{24}^2} + \frac{a_{02}}{a_{12}} + \frac{a_{03}a_{14}}{a_{24}^2} - x_1$. Επομένως θα πάρουμε:

$$
A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a_{24} \end{pmatrix}, A_1 = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{24} & a_{14} \end{pmatrix}, A_0 = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{02} \\ \frac{-a_{02}a_{24}+a_{12}a_{14}}{a_{12}} & a_{04} \end{pmatrix}
$$

και

$$
A(s) = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{02} + sa_{12} \\ \frac{-a_{02}a_{24}+a_{12}a_{14}}{a_{12}} + sa_{24} & a_{04} + sa_{14} + s^2a_{24} \end{pmatrix}
$$

$$
\det A(s) = a_{12}a_{04} + \frac{a_{02}^2a_{24}}{a_{12}} - a_{02}a_{14} \neq 0
$$

Άρα η Smith-McMillan θα είναι της μορφής $S^{\infty}_{A(s)} = \begin{pmatrix} s^2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s^2} \end{pmatrix}$

iv. Ομοίως εάν θεωρήσουμε $a_{22} \neq 0, a_{24} = 0,$ και $a_{12}, a_{14}, a_{04} \neq 0$ και $x_2 = -1$ τότε από την (8.9) εξάγουμε $a_{03} = a_{14}$ και ακολούθως $a_{01} = a_{12}$, από την (8.10) προκύπτει $a_{04} = 0$, ενώ το $x_4 = \frac{a_{02}-a_{22}x_1}{a_{22}}$. Επομένως θα πάρουμε:

$$
A_2 = \begin{pmatrix} 0 & a_{22} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_1 = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{12} \\ 0 & a_{14} \end{pmatrix}, A_0 = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{02} \\ a_{14} & 0 \end{pmatrix}
$$

και

$$A\left(s\right)=\begin{pmatrix} a_{12}+sa_{22} & a_{02}+sa_{12}+s^{2}a_{22} \\ a_{14} & sa_{14} \end{pmatrix}$$

$$\det A\left(s\right)=-a_{14}a_{02}\neq 0$$

Άρα η Smith-McMillan θα είναι της μορφής $S_{A(s)}^{\infty}=\begin{pmatrix} s^{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s^{2}} \end{pmatrix}$

v. Εάν θεωρήσουμε $a_{22}\neq 0, a_{24}=0$ και $a_{12}, a_{14}, a_{02}\neq 0$ και $x_{2}\neq -1$, τότε από την (8.9) εξάγουμε $a_{03}=a_{14}$ και $a_{01}\neq 0$ ακολούθως $x_{2}=\frac{a_{12}-a_{22}-a_{01}}{a_{22}}$, από την (8.10) προκύπτει $a_{04}\neq 0$ και έπειτα από πράξεις:

$$a_{03}-a_{04}+\frac{a_{14}a_{12}}{a_{22}}-a_{14}-\frac{a_{14}a_{01}}{a_{22}}=0\Rightarrow a_{04}=\frac{a_{14}a_{12}-a_{14}a_{01}}{a_{14}}$$

ενώ το $x_{4}=-\frac{a_{01}}{a_{22}}+\frac{a_{12}^{2}}{a_{22}^{2}}+\frac{a_{02}+a_{12}}{a_{22}}+\frac{a_{02}a_{01}}{a_{22}^{2}}-x_{1}$. Επομένως θα πάρουμε:

$$A_{2}=\begin{pmatrix} 0 & a_{22} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_{1}=\begin{pmatrix} a_{22} & a_{12} \\ 0 & a_{14} \end{pmatrix}, A_{0}=\begin{pmatrix} a_{01} & a_{02} \\ a_{14} & \frac{a_{14}a_{12}-a_{14}a_{01}}{a_{14}} \end{pmatrix}$$

και

$$A\left(s\right)=\begin{pmatrix} a_{01}+sa_{22} & a_{02}+sa_{12}+s^{2}a_{22} \\ a_{14} & \frac{a_{14}a_{12}-a_{14}a_{01}}{a_{14}}+sa_{14} \end{pmatrix}$$

$$\det A\left(s\right)=-a_{14}a_{02}-\frac{a_{01}^{2}a_{14}}{a_{22}}+\frac{a_{01}a_{12}a_{14}}{a_{22}}\neq 0$$

Άρα η Smith-McMillan θα είναι της μορφής $S_{A(s)}^{\infty}=\begin{pmatrix} s^{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s^{2}} \end{pmatrix}$

vi. Εάν θεωρήσουμε $a_{22}\neq 0, a_{24}\neq 0$ και $a_{01}, a_{02}, a_{12}, a_{14}\neq 0$ από την (8.9) εξάγουμε:

$$x_2 = \frac{a_{12} - a_{22} - a_{01}}{a_{22}}$$
$$a_{03} = a_{14} - a_{24} - \frac{a_{24}a_{12}}{a_{22}} + a_{24} + \frac{a_{24}a_{01}}{a_{22}} = a_{14} - \frac{a_{24}a_{12}}{a_{22}} + \frac{a_{24}a_{01}}{a_{22}} = \frac{a_{14}a_{22} - a_{24}a_{12} + a_{24}a_{01}}{a_{22}}$$

και από την (8.10)

$$\begin{aligned} a_{04} &= \frac{a_{14}a_{12}}{a_{22}} - \frac{a_{14}a_{01}}{a_{22}} + \frac{a_{02}a_{24}}{a_{22}} - \frac{a_{12}^2 a_{24}}{a_{22}^2} + \frac{a_{12}a_{24}a_{01}}{a_{22}^2} \\ &= \frac{a_{14}a_{12}a_{22} - a_{14}a_{01}a_{22} + a_{02}a_{24}a_{22} - a_{12}^2 a_{24} + a_{12}a_{24}a_{01}}{a_{22}^2} \\ &= \frac{a_{12}a_{03}a_{22} - a_{14}a_{01}a_{22} + a_{02}a_{24}a_{22}}{a^2{}_{22}} \\ &= \frac{a_{12}a_{03} - a_{14}a_{01} + a_{02}a_{24}}{a_{22}} \end{aligned}$$

Επομένως θα πάρουμε:

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & a_{22} \\ 0 & a_{24} \end{pmatrix}, A_1 = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{12} \\ a_{24} & a_{14} \end{pmatrix}, A_0 = \begin{pmatrix} a_{01} & a_{02} \\ \frac{a_{14}a_{22} - a_{24}a_{12} + a_{24}a_{01}}{a_{22}} & \frac{a_{12}a_{03} - a_{14}a_{01} + a_{02}a_{24}}{a_{22}} \end{pmatrix}$$

και

$$A(s) = \begin{pmatrix} a_{01} + sa_{22} & a_{02} + sa_{12} + s^2 a_{22} \\ \frac{a_{14}a_{22} - a_{24}a_{12} + a_{24}a_{01}}{a_{22}} + sa_{24} & \frac{a_{12}a_{03} - a_{14}a_{01} + a_{02}a_{24}}{a_{22}} + sa_{14} + s^2 a_{24} \end{pmatrix}$$

$$\det A(s) = \frac{a_{01}a_{12}a_{03} - a_{14}a_{01}^2 - a_{02}a_{14}a_{22} + a_{14}a_{12}a_{02}}{a_{22}} \neq 0$$

Άρα η Smith-McMillan θα είναι της μορφής $S^{\infty}_{A(s)} = \begin{pmatrix} s^2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s^2} \end{pmatrix}$

Τέλος φυσικά και υπάρχουν λύσεις όπου η ορίζουσα του πολυωνυμικού πίνακα είναι μηδέν με αποτέλεσμα να απορρίπτουμε τον πολυωνυμικό πίνακα.

vii. Εάν θεωρήσουμε για παράδειγμα $a_{24} \neq 0, a_{22} = 0$ προκύπτει ο πίνακας της λύσης ii), μάλιστα αν επιπλέον υποθέσουμε ότι $a_{12} = 0$ τότε ο πολυωνυμικός πίνακας θα πάρει την μορφή:

$$A(s) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_{14} + sa_{24} & a_{04} + sa_{14} + s^2 a_{24} \end{pmatrix}$$

viii. Εάν θεωρήσουμε για παράδειγμα $a_{24} = 0, a_{22} \neq 0$, προκύπτει ο πίνακας της λύσης iv), μάλιστα αν επιπλέον υποθέσουμε ότι $a_{14} = 0$ τότε ο πολυωνυμικός πίνακας θα πάρει την μορφή:

$$A(s) = \begin{pmatrix} a_{12} + sa_{22} & a_2 + sa_{12} + s^2 a_{22} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Οι πίνακες των vii) και viii) αντιστοιχούν σε μη τετράγωνα συστήματα (λιγότερες εξισώσεις από αγνώστους) που έχουν την ίδια λύση λόγω της δεξιάς μηδενικής δομής του πίνακα. Οι παραπάνω πίνακες που εξάγουμε και αποτελούν λύσεις στο πρόβλημα, εφόσον πληρούν τον αλγόριθμο, συνδέονται μάλιστα με αντιστρέψιμες ισοδυναμίες.

Παράδειγμα 8.1.2. Ακολουθώντας τον αλγόριθμο (8.1.1).

Βήμα 1 Επιλέγουμε αρχικά $q = 1$ άρα έχουμε $\mu_1 = q + \hat{q}_1 = 1 + 2 = 3$ και $r = 2$.

Βήμα 2 Υπολογίζουμε τη λύση του συστήματος που προκύπτει από το πίνακα του (8.4) δηλαδή τον:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} A_1 & A_0 \end{pmatrix}}_{r\times r(q+1)} \underbrace{\begin{pmatrix} x_{10} & x_{11} & x_{12} \\ 0 & x_{10} & x_{11} \end{pmatrix}}_{r(q+1)\times \mu_j} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}}_{r\times \mu_j}$$

όπου $A_i = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} \\ a_{i3} & a_{i4} \end{pmatrix}, i = 0, 1$ και $x_{10} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, x_{11} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, x_{12} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ Παρατηρούμε ότι πρέπει να υπολογίσουμε το αριστερά μηδενικό χώρο του πίνακα των

$x_{ji}, i = 0,1,2$ ώστε να εξάγουμε τα $A_i, i = 0,1$. Θεωρούμε ώς $x_{12} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ επομένως με την χρήση της mathematica λαμβάνουμε ως αριστερό μηδενικό χώρο τον $\{0,1,1,0\}$ ο οποίος απορρίπτεται διότι εμείς αναζητούμε τετραγωνικό ομαλό πίνακα $r = 1$. Αν δεν είχα αυτό το δεδομένο θα λάμβανα

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}, A_0 = (1,0)$$

και επομένως

$$A(s) = \begin{pmatrix} 1 & s \end{pmatrix}$$

Βήμα 3 Συνεχίζοντας για $q = 2$, $\mu_1 = q + \hat{q}_1 = 2 + 2 = 4, r = 2$ κατασκευάζουμε τους πολυωνυμικούς πίνακες $A(s)$ σύμφωνα με τη λύση του συστήματος:

$$\begin{pmatrix} A_2 & A_1 & A_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{10} & x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ 0 & x_{10} & x_{11} & x_{12} \\ 0 & 0 & x_{10} & x_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι πρέπει να υπολογίσουμε τον αριστερά μηδενικό χώρο του πίνακα των $x_{ji}, i = 0,1,2,3$ ώστε να εξάγουμε τα $A_i, i = 0,1,2$. Επιλέγω τυχαία διανύσματα

$$x_{12} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, x_{13} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Επομένως με την χρήση της mathematica λαμβάνω ως μηδενικό χώρο τον

$$\{\{0,1,1,0,0,2\},\{0,0,0,1,1,0\}\}$$

όπου τα διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Άρα θα λάβουμε τα

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

και συνεπώς

$$A\left(s\right)=\begin{pmatrix} s & s^2+2 \\ 1 & s \end{pmatrix}$$

με $\det A\left(s\right)=-2\neq 0$

8.2 Εναλλακτική προσέγγιση

Ορισμός 8.2.1. Κάθε πίνακας $A\in R^{p\times m}$ μπορεί να έχει ένα πίνακα $A^{\dagger}\in R^{m\times p}$ ο οποίος ονομάζεται γενικευμένος αντίστροφος και ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

i. $AA^{\dagger}A=A$

ii. $A^{\dagger}AA^{\dagger}=A^{\dagger}$

iii. $\left(AA^{\dagger}\right)^T=AA^{\dagger}$

iv. $\left(A^{\dagger}A\right)^T=A^{\dagger}A$ όπου A^T ο ανάστροφος του A.

Στην ειδική μάλιστα περίπτωση όπου ο A είναι τετραγωνικός πίνακας τότε ο γενικευμένος αντίστροφος του είναι $A^{\dagger}=A^{-1}$.

Θεώρημα 8.2.1. *(Gohberg et al. 1982) Ας υποθέσουμε ότι* $\beta_j^{\infty}(t)=\sum\limits_{k=0}^{\hat{q}_j-1}x_{jk}\delta^{\hat{q}_j-1+k}(t)$ *αποτελούν λύσεις στο χώρο των μη ομαλών λύσεων όπου* $x_{jk}\in C^r$ *με* $0\leq k\leq\hat{q}_j-1, 1\leq j\leq l$, *τα διανύσματα που επιλέγουμε από το άπειρο ζεύγος Jordan ώστε να δημιουργήσουμε εκείνο το ζεύγος Jordan που αποδίδει τις* $\hat{q}_j$ *γραμμικά ανεξάρτητες μη ομαλές λύσεις.*

Κατασκευάζουμε τα $C_j=\left(x_{j0},x_{j1},...,x_{j\hat{q}_j-1},x_{j\hat{q}_j},...,x_{j,q+\hat{q}_j-2},x_{j,q+\hat{q}_j-1}\right), j=1,2,...,l$ και επομένως το άπειρο Jordan ζεύγος:

$$C = (C_1, C_2, ..., C_l) \in R^{r\times\mu}, J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_l \end{pmatrix} \in R^{\mu\times\mu}$$

$$\mu = \sum_{j=1}^{l} \mu_j, \mu_j = q + \hat{q}_j$$

με το χαρακτηριστικό οι πίνακες Jordan να έχουν ιδιοτιμή μηδέν στις διαγωνίους τους. Τέλος ορίζουμε έναν μιγαδικό αριθμό $a \neq 0$ και υπολογίζουμε τον πίνακα:

$$\tilde{A}(s) = I_r - C(J - aI_n)\left\{(s-a)V_1 + (s-a)^2 V_2 + ... + (s-a)^q V_q\right\}$$

όπου $q = ind\,(C, J)$ ένας δείκτης σταθεροποιησιμότητας, δηλαδή η ελάχιστη τιμή για την ο πίνακας $\begin{bmatrix} C \\ CJ \\ \vdots \\ CJ^{q-1} \end{bmatrix}$ έχει πλήρη τάξη στηλών και $(V_1, ..., V_q)$ ο γενικευμένος αντίστροφος του πίνακα:

$$S_{1-q} = \begin{pmatrix} C \\ C(J - aI_n)^{-1} \\ \vdots \\ C(J - aI_n)^{1-q} \end{pmatrix}$$

Τότε τα διανύσματα:

$$\tilde{\beta}_j(t) = \sum_{k=0}^{q+\hat{q}_j-1-k} x_{jk} \frac{t^{q+\hat{q}_j-1-k}}{(q+\hat{q}_j-k-1)!}$$

$j = 1, 2, ..., l$ αποτελούν λύσεις της εξίσωσης $\tilde{A}(\rho)\tilde{\beta}(t) = 0$ όπου $\tilde{A}(\rho) = \rho^q A\left(\frac{1}{\rho}\right)$.

Αλγόριθμος 8.2.1. (Karampetakis 2011)

Βήμα 1 Υπολογίζουμε το $q = ind\,(C, J)$ και κατασκευάζουμε:

$$C_j = \left(x_{j0}, x_{j1}, ..., x_{j\hat{q}_j-1}, x_{j\hat{q}_j}, ..., x_{j,q+\hat{q}_j-2}, x_{j,q+\hat{q}_j-1}\right), j = 1, 2, ..., l$$

με

$$C = (C_1, C_2, ..., C_l) \in R^{r\times\mu}, J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_l \end{pmatrix} \in R^{\mu\times\mu}$$

$$\mu = \sum_{j=1}^{l} \mu_j, \mu_j = q + \hat{q}_j$$

όπου $S_{q-1} = \begin{pmatrix} C \\ CJ \\ \vdots \\ CJ^{q-1} \end{pmatrix}$ με $rank(S_{q-1}) = n$.

Βήμα 2 Υπολογίζουμε τον πίνακα

$$V = (V_1, ..., V_q)$$

που αποτελεί τον γενικευμένο αντίστροφο του πίνακα:

$$S_{1-q} = \begin{pmatrix} C \\ C(J - aI_n)^{-1} \\ \vdots \\ C(J - aI_n)^{1-q} \end{pmatrix}$$

Βήμα 3 Βρίσκουμε τον πίνακα

$$\tilde{A}(s) = I_r - C(J - aI_n)\left\{(s-a)V_1 + (s-a)^2 V_2 + ... + (s-a)^q V_q\right\}$$

Βήμα 4 Υπολογίζουμε τον πίνακα $A(s) = s^q \tilde{A}\left(\frac{1}{s}\right)$

Παράδειγμα 8.2.1. Υποθέτουμε ότι θέλουμε να βρούμε πολυωνυμικό πίνακα $A(s)$ ώστε η εξίσωση $A(\rho)\beta(t) = 0$ να εξάγει τις παρακάτω μη ομάλες λύσεις:

$$\beta_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \delta(t) = x_{10}\delta(t)$$

$$\beta_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \delta(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \delta^{(1)}(t) = x_{11}\delta(t) + x_{10}\delta^{(1)}(t)$$

Αν θεωρήσουμε ότι $q = 1$, τότε παρατηρούμε ότι επειδή $\hat{q}_1 = 2$ θα έχουμε $\mu_1 = q + \hat{q}_1 = 1 + 2 = 3$, επομένως παίρνουμε $x_{ji} = (x_{10} \quad x_{11} \quad x_{12}), i = 0, 1, ..., 3$ και $r = 2$. Επομένως για $q = 1$ έχουμε:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & x_1 \\ 0 & -1 & x_2 \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

και $S_{q-1} = S_0 = (C) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & x_1 \\ 0 & -1 & x_2 \end{pmatrix}$. Όμως παρατηρούμε ότι ο πίνακας δεν έχει τάξη 3. Άρα απορρίπτεται το $q = 1$. Προχωρούμε την διαδικασία για $q = 2$.

Παρατηρούμε ότι επειδή $\hat{q}_1 = 2$ θα πάρουμε $\mu_1 = q + \hat{q}_1 = 2 + 2 = 4$, άρα $x_{ji} = (x_{10} \quad x_{11} \quad x_{12} \quad x_{13}), i =$

$0, ..., 4$. Επομένως για $q = 2$ έχουμε:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & x_1 & x_3 \\ 0 & -1 & x_2 & x_4 \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

και

$$S_{q-1} = S_{2-1=1} = \begin{pmatrix} C \\ CJ^{2-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C \\ CJ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & x_1 & x_3 \\ 0 & -1 & x_2 & x_4 \\ 0 & 1 & 1 & x_1 \\ 0 & 0 & -1 & x_2 \end{pmatrix}$$

όπου η ορίζουσα του παραπάνω είναι διάφορη του μηδενός.

$$\det S_{q-1} = -x_2 - x_1 - {x_2}^2 - x_4 \neq 0$$

Η τάξη του είναι ίση με $n = 4$ και

$$CJ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & x_1 & x_3 \\ 0 & -1 & x_2 & x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & x_1 \\ 0 & 0 & -1 & x_2 \end{pmatrix}$$

Άρα $q = ind\,(CJ) = 2$.

Έστω $a = 1 \neq 0$. Τότε η

$$\tilde{A}(s) = I_2 - C(J - aI_4)\left\{(s-a)V_1 + (s-a)^2 V_2\right\}$$

γίνεται

$$\tilde{A}(s) = I_2 - C(J - I_4)\left\{(s-1)V_1 + (s-1)^2 V_2\right\}$$

με $V = (V_1, V_2)$ γενικευμένο αντίστροφο του $\begin{pmatrix} C \\ C(J - I_4)^{-1} \end{pmatrix}$.

Δηλαδή $(V_1, V_2) = \begin{pmatrix} C \\ C(J-I_4)^{-1} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & x_1 & x_3 \\ 0 & -1 & x_2 & x_4 \\ -1 & -2 & -x_1-2 & -x_1-x_3-2 \\ 0 & 1 & 1-x_2 & 1-x_4-x_2 \end{pmatrix}^{-1}$

με

$$C(J-I_4)^{-1} = C\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)^{-1} =$$

$$C\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & x_1 & x_3 \\ 0 & -1 & x_2 & x_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -2 & -x_1-2 & -x_3-x_1-2 \\ 0 & 1 & 1-x_2 & 1-x_4-x_2 \end{pmatrix}$$

Επομένως έχουμε:

$$\tilde{A}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1-x_1 & x_1-x_3 \\ 0 & 1 & -1-x_2 & x_2-x_4 \end{pmatrix} \times$$

$$\times \left\{ (s-1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + (s-1)^2 \begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & x_4 \\ -x_1-2 & -x_1-x_3-2 \\ 1-x_2 & -1-x_4-x_2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{s\left(sx_2^2+x_2-s+sx_1+sx_4+1\right)}{x_2^2+x_2+x_1+x_4} & \frac{(s-1)(x_2-2s+sx_1-2sx_2+sx_4+1)}{x_2^2+x_2+x_1+x_4} \\ \frac{(s-1)s}{x_2^2+x_2+x_1+x_4} & \frac{\left(s^2x_2^2-3s-sx_2+s^2x_1+2s^2x_2+s^2x_4+2s^2+1\right)}{x_2^2+x_2+x_1+x_4} \end{pmatrix}$$

Άρα $A(s) = s^2 A\left(\frac{1}{s}\right)$ και τελικά ο πολυωνυμικός πίνακας παίρνει τη μορφή:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{x_2^2+x_2+x_1+x_4}\left(x_2^2+sx_2+s+x_1+x_4-1\right) & \frac{-(s-1)}{x_2^2+x_2+x_1+x_4}\left(-2x_2-s+x_1+x_2+x_4-2\right) \\ -\frac{s-1}{x_2^2+x_2+x_1+x_4} & \frac{1}{x_2^2+x_2+x_1+x_4}\left(s^2-sx_2-3s+x_2^2+2x_2+x_1+x_4+2\right) \end{pmatrix}$$

Βιβλιογραφία

F. R. Gantmacher. *The Theory of Matrices, vol. 1 and vol. 2*. Chelsea Publishing Company, New York, 1959.

I. Gohberg, P. Lancaster, and L. Rodman. *Matrix Polynomials Computer Science and applied Mathematics*. Academic press. New York-London, 1982.

N. Karampetakis. Computation of the generalized inverse of a polynomial matrix and applications. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 2011.

H. Rosenbrock. *Mathematics of dynamical systems (Studies in dynamical systems)*. Nelson, 1970.

A. I. G. Vardulakis. *Lineal Multivariable Control. Algebraic Analysis and Synthesis Methods*. Wiley, Chichester, 1991.

W. A. Wolowich. *Lineal Multivariable Systems*. Springer-Velag, New York, 1974.