ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΕΛΕΓΧΟΥ

Η Συμβολή της Επίλυσης του Προβλήματος του Βραχυστόχρονου στη Γέννηση του Λογισμού των Μεταβολών

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Ολυμπία Ι. Ηλιοπούλου

Επιβλέπων: Νικόλαος Καραμπετάκης
Αναπλ. Καθηγητής Α.Π.Θ.

Θεσσαλονίκη, Δεκέμβριος 2009

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΕΛΕΓΧΟΥ

Η Συμβολή της Επίλυσης του Προβλήματος του Βραχυστόχρονου στη Γέννηση του Λογισμού των Μεταβολών

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Ολυμπία Ι. Ηλιοπούλου

Επιβλέπων: Νικόλαος Καραμπετάκης
Αναπλ. Καθηγητής Α.Π.Θ.

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 23^{η} Δεκεμβρίου 2009

…………………………	…………………………	…………………………
Ν. Καραμπετάκης	Α. Βαρδουλάκης	Μ. Γουσίδου
Αν. Καθηγητής Α.Π.Θ.	Καθηγητής Α.Π.Θ.	Αν. Καθηγήτρια Α.Π.Θ.

Θεσσαλονίκη, Δεκέμβριος 2009

……………………………

Ολυμπία Ι. Ηλιοπούλου

Πτυχιούχος Μαθηματικός Α.Π.Θ.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα μελέτη πραγματεύεται τη συμβολή που είχε η επίλυση του βραχυστόχρονου προβλήματος στη γέννηση του λογισμού μεταβολών. Παρουσιάζεται η απαρχή του βραχυστόχρονου προβλήματος, το οποίο έχει τις ρίζες του στα αρχαία χρόνια, καθώς επίσης το ιστορικό πλαίσιο των μαθηματικών της μετέπειτα εποχής. Ειδικότερα, τα προβλήματα των Galileo Galilei και Fermat, αλλά και τα προβλήματα ελαχιστοποίησης αντίστασης του μεταγενέστερου Newton. αφορούσαν ένα εντελώς νέο έως τότε πεδίο, και οι τεχνικές που αναπτύχθηκαν βοήθησαν αργότερα τον Johann Bernoulli να διατυπώσει αλλά και να επιλύσει το βραχυστόχρονο πρόβλημα.

Το βραχυστόχρονο πρόβλημα εξετάζεται ως προς τον ορισμό του και αναπτύσσεται η επίλυσή του από τον Johann Bernoulli. Παρουσιάζεται επίσης ένας τρόπος λύσης που συστηματοποιεί τα παραπάνω προβλήματα ώστε να επιλύονται πιο μεθοδικά, καθώς μέχρι τότε οι αποδείξεις στηρίζονταν σε γεωμετρικές κυρίως μεθόδους. Συγκεκριμένα, οι Euler και Lagrange, αφού μελέτησαν το βραχυστόχρονο, εισήγαγαν μεθόδους ανάλυσης που αποτέλεσαν ορόσημο στη δημιουργία του λογισμού Μεταβολών.

ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ

Βραχυστόχρονο πρόβλημα, Λογισμός μεταβολών, Διαφορική εξίσωση Euler-Lagrange, Ισοπεριμετρικά προβλήματα, Αρχή Ελαχίστου Χρόνου

ABSTRACT

The present paper addresses the contribution of the resolution of the Brachystochrone problem to the origin of the calculus of variations. The paper presents the beginning of the Brachystochrone problem, which has its roots back in ancient times, as well as the historical context of the later mathematicians. In particular, a number of problems from Galileo Galilei and Fermat, along with Newton's problem of minimizing resistance of bodies constituted an entirely new field of mathematics for that time, and the techniques developed helped Johann Bernoulli later to define and solve the Brachystochrone problem.

Furthermore, the Brachystochrone problem is defined and its solution based on Johann Bernoulli is developed. A more systematic approach to solving such problems is shown, as by then the approach involved mainly geometrical methods. In particular, Euler and Lagrange, having studied the Brachystochrone, introduced analytical methods that were a landmark in creating the calculus of variations.

KEYWORDS

Brachystochrone problem, Calculus of variations, Euler-Lagrange differential equation, Isoperimetrical problems, Fermat's principle of least time

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές μου ευχαριστίες στον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Νικόλαο Καραμπετάκη για την βοήθεια, την επιστημονική του καθοδήγηση και τη συνολική επίβλεψη της εργασίας. Να σημειώσω ότι ήταν πάντα διαθέσιμος, συμβάλλοντας δημιουργικά στην ολοκλήρωση της παρούσας εργασίας.

Οφείλω ακόμη να ευχαριστήσω τα υπόλοιπα μέλη της τριμελούς επιτροπής, κ. Βαρδουλάκη Αντώνιο και κα. Γουσίδου-Κουτίτα Μαρία για τον χρόνο που αφιέρωσαν στη μελέτη και αξιολόγηση της εργασίας.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους γονείς μου για τη ψυχολογική και οικονομική υποστήριξη καθ' όλη την διάρκεια των σπουδών μου, όπως και τον Διευθυντή μου κ. Ιγνάτιο Ασικέλη για την κατανόηση που υπέδειξε σε όλη τη διάρκεια των Μεταπτυχιακών μου σπουδών.

Τέλος, ευχαριστώ ιδιαίτερα τους φίλους μου Καρακώστα Γεώργιο και Χατζηγεωργίου Αικατερίνη, η βοήθεια των οποίων υπήρξε πολύτιμη για την ολοκλήρωση αυτής της εργασίας.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΩΝ

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1. Σκοπός και πλαίσιο

Σκοπός της εργασίας είναι να παρουσιαστεί η συμβολή που είχε η επίλυση του βραχυστόχρονου προβλήματος στη γέννηση του λογισμού μεταβολών. Για το σκοπό αυτό εξετάζεται ο ορισμός του βραχυστόχρονου προβλήματος, η επίλυσή του, ο τρόπος με τον οποίο οι μαθηματικοί της εποχής οδηγήθηκαν σε αυτό και πώς αυτό τελικά συνέβαλε στο λογισμό μεταβολών.

1.2. Μεθοδολογία και ανασκόπηση βιβλιογραφίας

Η κύρια μέθοδος που χρησιμοποιήθηκε είναι η ανασκόπηση ακαδημαϊκής βιβλιογραφίας. Η προσέγγιση της μελέτης γίνεται με ιδιαίτερη έμφαση στην ιστορική αναδρομή. Παρουσιάζονται οι συνθήκες της εποχής και οι σύντομες βιογραφίες των μαθηματικών που συνέβαλαν με τον τρόπο τους ο καθένας στο λογισμό μεταβολών. Ταυτόχρονα, αναλύονται τα σχετικά προβλήματα που τους απασχόλησαν και πώς η επίλυση αυτών συνδέεται με το βραχυστόχρονο. Ο λόγος που δίνεται ιδιαίτερη έμφαση σε αυτή την προσέγγιση είναι περισσότερο για να παρουσιαστεί ο τρόπος με τον οποίο διαμορφώθηκε η μαθηματική σκέψη γύρω από το λογισμό. Επιπλέον, με την ίδια προσέγγιση, αναλύεται φυσικά το βραχυστόχρονο πρόβλημα, οι επιστήμονες που ασχολήθηκαν τότε με αυτό και οι λύσεις που πρότειναν. Μέσα από τη σύνθεση των ανωτέρω παρουσιάζεται η συμβολή του στο λογισμό μεταβολών, κυρίως μέσα από την επιρροή που άσκησε στο έργο των Euler και Lagrange.

Όσον αφορά τη βιβλιογραφία, οι κύριες πηγές περιλαμβάνουν την: Καραμπετάκης, Ν. (2009) *Βέλτιστος Έλεγχος Συστημάτων* και Bryson, A. (1996) *Optimal Control – 1950 to 1985* για τη συνεισφορά στη δομή και το πλαίσιο της παρούσας μελέτης. Χρησιμοποιήθηκαν ιδιαίτερα και συνδυάστηκαν οι: Babb, J., Currie, J. (2008) *The Brachistochrone Problem: Mathematics for a broad audience via a large context problem*, Goldstine, H. H. (1977) *A History of the Calculus of*

Variations from the 17th through the 19th Century, Tikhomirov, V. M. (1990) *Stories about Maxima and Minima*, η πρωτότυπη εργασία του Newton, I. (1687) *Principia*, και βιογραφίες του University of St. Andrews για ότι αφορά τα πρώτα προβλήματα βελτιστοποίησης.

Επιπλέον από τις παραπάνω, οι πηγές: Sussmann, H. J., Willems, J. C. (1997) *300 Years of Optimal Control: From the Brachystochrone to the Maximum Principle*, Babb, J., Currie, J. (2008) *The Brachistochrone Problem: Mathematics for a broad audience via a large context problem*, Kreyszig, E. (1994) *On the Calculus of Variations and Its Major Influences on the Mathematics of the First Half of Our Century* και Roscoe, D. (2006) *The Calculus of Variations* χρησιμοποιήθηκαν ιδιαίτερα για την ενότητα του βραχυστόχρονου προβλήματος.

1.3. Δομή

Η εργασία χωρίζεται σε τέσσερις ενότητες. Η παρούσα εισαγωγική αποτελεί την πρώτη εξ αυτών. Στη δεύτερη ενότητα δίδεται έμφαση στα προβλήματα που προηγήθηκαν του βραχυστόχρονου, τις επιλύσεις αυτών, τις βιογραφίες των σχετικών μαθηματικών και στο πώς αυτά συνέβαλαν στο λογισμό. Στην τρίτη ενότητα αντίθετα αναλύεται το βραχυστόχρονο πρόβλημα, οι λύσεις που δόθηκαν και πως αυτές συνέβαλλαν στην ανάπτυξη του λογισμού μεταβολών. Τέλος, η τέταρτη ενότητα συνοψίζει τα συμπεράσματα της μελέτης.

2. ΤΑ ΠΡΩΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

2.1. Το Ισοπεριμετρικό πρόβλημα ή πρόβλημα της Διδούς

Πολύ πριν το 1696, οπότε και έθεσε ο Johann Bernoulli το βραχυστόχρονο πρόβλημα στο τεύχος του Ιουνίου του Acta Eruditorum, η ανθρωπότητα είχε πολλές φορές ασχοληθεί με παρόμοια προβλήματα βελτιστοποίησης.

Το αρχαιότερο από όλα είναι αυτό βάση του οποίου καθορίζεται το συντομότερο μονοπάτι που ενώνει δυο τυχαία σημεία. Η λύση ήταν γνωστή από αρχαιοτάτων χρόνων και δεν είναι άλλη από το ευθύγραμμο τμήμα. Έπειτα ακολούθησε το ισοπεριμετρικό πρόβλημα, η εύρεση δηλαδή της καμπύλης δεδομένου μήκους που περικλείει τη μεγαλύτερη δυνατή επιφάνεια.

Το ισοπεριμετρικό πρόβλημα είναι επίσης γνωστό και ως πρόβλημα της Διδούς, πιθανότατα από τη μυθική ιστορία την οποία ο Βιργίλιος (70 – 19 π.Χ.) περιγράφει στην Αινειάδα σχετικά με την ίδρυση της Καρχηδόνας (περί το 850 π.Χ.). Εκεί αναφέρεται ότι η Διδώ είχε κληρονομήσει το θρόνο της Τυρού από τον πατέρα της Μύττο μαζί με το σύζυγο της Σιχαίο. Ο νεότερος όμως αδερφός της δολοφόνησε το σύζυγο της και κατέλαβε το θρόνο. Τότε η Διδώ μαζί με αφοσιωμένους Τύριους υπηκόους και δούλους της κατέπλευσε προς αναζήτηση ασύλου στις ακτές της Λιβύης, στο κράτος της Γετουλίας. Εκεί προσέφερε πλούσια δώρα στους ντόπιους και στον βασιλιά τους Ιάρβα ως αντάλλαγμα για να της επιτρέψουν να χτίσει στην ακτή μια πόλη σε έκταση τόση όση μπορούσε να «κυκλώσει με τη δώρα ενός ταύρου». Ο βασιλιάς Ιάρβας δέχτηκε και τότε η πανέξυπνη Διδώ έκοψε το τομάρι σε πολύ λεπτές λωρίδες και ενώνοντας τη μια με την άλλη «κύκλωσε» τόσο χώρο που της έφτασε να χτίσει την Καρχηδόνα και την ακρόπολη της τη Βύρσα (βυρσός = δέρμα, τομάρι). Στη λέξη «κύκλωσε» (circumdare) που αναφέρει ο Βιργίλιος περιέχεται η λέξη κύκλος από όπου συμπεραίνουμε ότι η Διδώ κατάφερε να λύσει σωστά το ισοπεριμετρικό πρόβλημα.

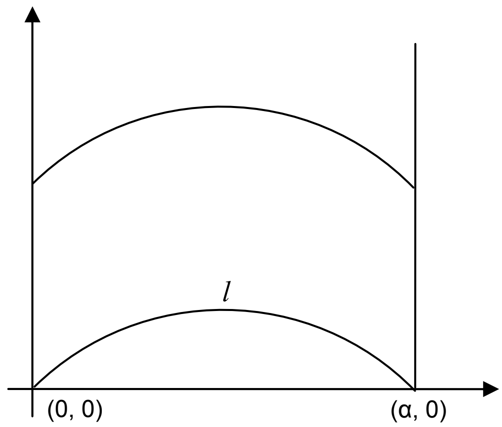
Εικόνα 1. *Χειρόγραφο της 'Αινειάδας' με εικονογράφηση του θανάτου της Διδώς.*

Μια διατύπωση του ισοπεριμετρικού προβλήματος μπορεί να είναι και η παρακάτω :

Πρόβλημα 1. *Βρείτε το βέλτιστο σχήμα μιας απλής καμπύλης η οποία για δοσμένο μήκος l της περιμέτρου του, να περικλείει το μέγιστο δυνατό εμβαδό.*

ή αλλιώς στην περίπτωση της Διδούς όπου η πόλη που έχτισε βρισκόταν στα παράλια, θα μπορούσε να διατυπωθεί ως εξής:

Πρόβλημα 2. *Ανάμεσα στα τόξα μήκους l για τα οποία ισχύει $0 \leq x \leq \alpha$, $y \geq 0$ με άκρα $(0,0)$ και $(\alpha,0)$, βρείτε αυτό το οποίο υπό τις συνθήκες $y = 0$, $0 \leq x \leq \alpha$ να περικλείει τμήμα με το μεγαλύτερο δυνατό εμβαδό.*



Διάγραμμα 1. *Το ισοπεριμετρικό πρόβλημα*

Ουσιαστικά αναζητούμε τη μεγιστοποίηση της ποσότητας $\int_0^a y(x)$, όπου $\int_0^a \sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx = l$. Η λύση του παραπάνω προβλήματος αν και αποδείχθηκε μόλις το 19^{ο} αιώνα με τις σύγχρονες μαθηματικές μεθόδους ότι είναι ο κύκλος, ήταν γνωστή ήδη από τους Αρχαίους Έλληνες.

Με το ισοπεριμετρικό πρόβλημα ασχολήθηκε και ο τελευταίος μεγάλος γεωμέτρης της Αρχαίας Ελλάδος, ο Πάππος ο Αλεξανδρεύς, ο οποίος άκμασε στην Αλεξάνδρεια περί το 320 μ.Χ. Το σπουδαιότερο έργο του, το οποίο σώζεται σήμερα στο μεγαλύτερο του βαθμό, ονομάζεται *Συναγωγή* και περιέχει πλούσιο υλικό από παλαιότερα μαθηματικά συγγράμματα σε οχτώ βιβλία.

Στη Συναγωγή περιέχεται σημαντική έκθεση των σπουδαιότερων μαθηματικών πραγματειών της Αρχαίας Ελλάδας. Περιλαμβάνει μεταξύ άλλων ιστορικά σχόλια και παραλλαγές θεωρημάτων τα οποία είχαν διατυπωθεί πολύ πριν από τον Πάππο από άλλους πολύ σπουδαίους Αρχαίους Έλληνες συγγραφείς όπως οι Απολλώνιος, Ευκλείδης (365 π.Χ. – 300 π.Χ.), Αρχιμήδης (287 π.Χ), Ζηνόδωρος (200 π.Χ. – 140 π.Χ.), Ερατοσθένης, Αρίσταρχος, Θεοδόσιος (160 π.Χ. – 90 π.Χ.)

Συγκεκριμένα στο πέμπτο βιβλίο της Συναγωγής, ο Πάππος μελέτησε σχήματα με ίσα μήκη (ή επιφάνειες) για να δει ποιο από αυτά περικλείει τη μεγαλύτερη επιφάνεια (ή χώρο). Με άλλα λόγια στο πέμπτο βιβλίο του μελετά τα λεγόμενα «ισοπεριμετρικά» προβλήματα.

2.2. Ήρων ο Αλεξανδρεύς

Ο Ήρων από την Αλεξάνδρεια ήταν ο πρώτος που ασχολήθηκε ουσιαστικά με προβλήματα βελτιστοποίησης. Ήταν ένας από τους μεγαλύτερους μαθηματικούς, φυσικούς και μηχανικούς της αρχαιότητας για τον οποίο δυστυχώς δε γνωρίζουμε πότε ακριβώς έζησε. Σίγουρα μεταγενέστερος του Αρχιμήδη, υπολογίζεται ότι έζησε και έδρασε γύρω στον δεύτερο με πρώτο π.Χ. αιώνα στην Αλεξάνδρεια της Αιγύπτου όπου διεύθυνε και την Ανωτάτη Τεχνική Ελληνική Σχολή ή όπως θα λέγαμε σήμερα, το Ελληνικό Πολυτεχνείο.

Εικόνα 2. *Ήρων ο Αλεξανδρεύς*

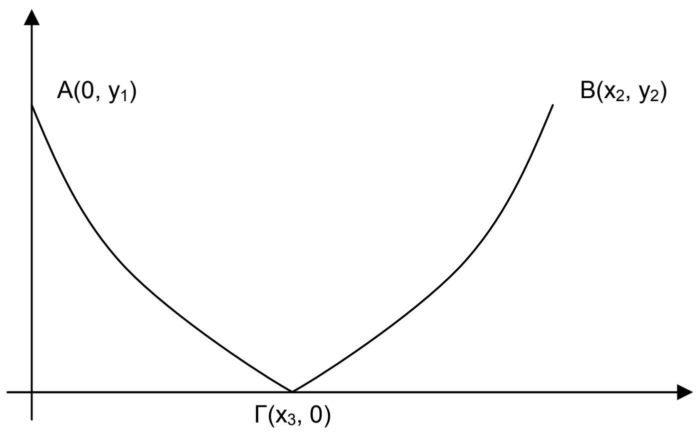
Σε ένα από τα έργα του Ήρωνα, τα Κατοπτρικά, υπάρχει η θεωρία της ανάκλασης του φωτός. Απέδειξε ότι η γωνιά πρόσπτωσης ισούται με τη γωνία ανάκλασης καθώς και ότι η διαδρομή που ακολουθεί το φως, όταν αντανακλάται από έναν καθρέφτη, από το αντικείμενο ως τα μάτια του παρατηρητή είναι η συντομότερη δυνατή. Την απόδειξη των παραπάνω ο Ήρων τη βασίζει στην αρχή της ευθύγραμμης διάδοσης του φωτός, δηλαδή της ελάχιστης διαδρομής που ακολουθεί το φως. Αυτό γιατί σύμφωνα με τον Ήρωνα η έννοια του συντομότερου ταυτίζεται με αυτή του γρηγορότερου μιας και θεωρεί ότι το μέσο όπου διαδίδεται το φως είναι ένα, άρα και η ταχύτητα της διάδοσης σταθερή.

Αιώνες όμως αργότερα ο Fermat (1601 – 1665 μ.Χ.) διατύπωσε τη γενική αρχή ότι το φως διαδίδεται σε διαφορετικά μέσα ακολουθώντας πάντα τη γρηγορότερη διαδρομή η οποία δεν είναι και η συντομότερη όσον αφορά την απόσταση. Αυτή ακριβώς η θεωρία που διατύπωσε ο Fermat έμελε να διαδραματίσει αργότερα καθοριστικό ρόλο στην επίλυση του βραχυστόχρονου προβλήματος από τον James Bernoulli.

Γι' αυτόν ακριβώς το λόγο το έργο του Ήρωνα θεωρείται πρόδρομος της γενικής αρχής της ελάχιστης δράσης που τόσο σημαντικό ρόλο διαδραμάτισε στη γέννηση του λογισμού μεταβολών. Με τη σύγχρονη μαθηματική ορολογία το πρόβλημα του Ήρωνα θα μπορούσε να διατυπωθεί ως εξής:

Πρόβλημα 3. *Αν θεωρούσαμε το αντικείμενο που εκπέμπει φως ως ένα σημείο* $A(0, y_1)$ *και τα «μάτια του παρατηρητή» ως το σημείο* $B(x_2, y_2)$, *τότε ψάχνουμε το σημείο εκείνο* $\Gamma(x_3, 0)$ *όπου το φως αντανακλάται στον καθρέφτη και η διαδρομή ΑΓΒ που συνδέει τα σημεία* $A(0, y_1)$ *και* $B(x_2, y_2)$ *είναι η συντομότερη δυνατή.*

Σχηματικά αυτό θα μπορούσαμε να το παραστήσουμε ως εξής :

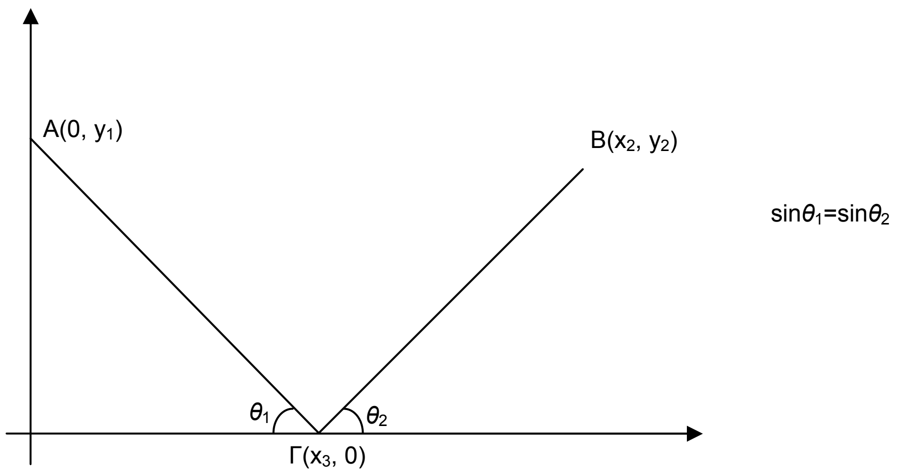


Διάγραμμα 2. *Αναπαράσταση του προβλήματος του Ήρωνα.*

όπου τα σημεία $A(0, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ βρίσκονται στο ίδιο μέρος με το τμήμα $y(x) = 0$, όπου $0 \leq x \leq x_2$.

Άρα ουσιαστικά ψάχνουμε να μεγιστοποιήσουμε την ποσότητα $\int_0^{x_2} (\sqrt{1+(y'(x))^2}dx$, με τις προϋποθέσεις $y(0) = y_1$, $y(x_2) = y_2$ και $y(x_3) = 0$, όπου στο $x = x_3$ η $y(x)$ μπορεί να μην έχει συνεχή παράγωγο.

Αυτό που τελικά έδειξε ο Ήρων και που θα δείξουμε και στη συνέχεια είναι ότι η συντομότερη από πλευράς απόστασης διαδρομή είναι τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ και ΓΒ καθώς κι ότι η γωνία πρόσπτωσης θ_1 είναι ίση με τη γωνία ανάκλασης θ_2.



Διάγραμμα 3. *Η γωνία πρόσπτωσης ισούται με τη γωνία ανάκλασης.*

2.3. O Galileo Galilei και η εισαγωγή του Βραχυστόχρονου προβλήματος

2.3.1 Ιστορικό πλαίσιο

Κατά το Μεσαίωνα σημειώθηκε πολύ μικρή πρόοδος ενώ από τους Άραβες κυρίως αναπτύχθηκαν και επανεξετάσθηκαν παλιά προβλήματα με τις ήδη υπάρχουσες όμως μεθόδους. Αυτό βοήθησε στο να αναπτυχθούν κυρίως οι αλγεβρικές και γεωμετρικές μέθοδοι ακόμα και σε περιπτώσεις που η χρήση τους δεν ήταν η πιο ενδεδειγμένη.

Ήταν όμως το δέκατο έβδομο αιώνα που στη Δυτική Ευρώπη δημιουργήθηκε ο λεγόμενος «Νέος Κόσμος της Επιστήμης». Η επιστημονική επανάσταση που ξεκίνησε τότε απέρριψε μια σειρά ιδεών και δογμάτων που καθιερωθήκαν και επικρατούσαν για αιώνες ξεκινώντας από την Αρχαία Ελλάδα μέχρι και το Μεσαίωνα. Αυτές οι νέες ιδέες που εισήχθησαν στη φυσική, την αστρονομία, τη βιολογία, τη χημεία και σε άλλες επιστήμες οδήγησαν στη δημιουργία της σύγχρονης επιστήμης. Ο φόβος και οι προκαταλήψεις, κυρίως θρησκευτικές, που ως τότε επικρατούσαν αντικαταστάθηκαν από τη λογική και τη γνώση και παρά τις εναντιώσεις της Ρωμαιοκαθολικής Εκκλησιάς πολλοί επιστήμονες όπως οι Kepler, Newton και Galileo έμειναν σταθεροί στις απόψεις τους κα οδήγησαν τις επιστήμες σε ένα νέο επίπεδο.

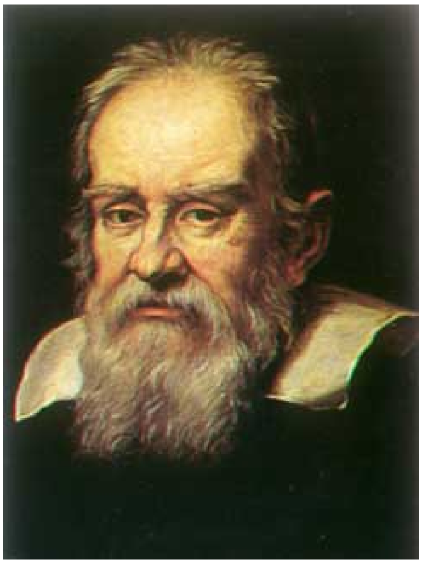
Οι τρεις καμπύλες που εκείνη την περίοδο απασχολούσαν περισσότερο τους μαθηματικούς ήταν η *κυκλοειδής*, η *ισόχρονη* και η *βραχυστόχρονη*. Ήταν καμπύλες που χαρακτηρίζονταν εξαιτίας της κίνησης και αυτό ήταν επαναστατικό για την εποχή εκείνη. Η *κυκλοειδής* δημιουργείται από ένα σημείο της περιφέρειας του κύκλου καθώς αυτός κυλά κατά μήκος μιας ευθείας γραμμής χωρίς να παρεκκλίνει της πορείας του.

Η *βραχυστόχρονη* που ξεκινά από ένα σημείο Α και καταλήγει σε ένα σημείο Β, είναι αυτή πάνω στην οποία ένα σώμα που αφήνεται ελεύθερο να κυλήσει από το σημείο Α, υπό την επίδραση μόνο της βαρύτητάς του και χωρίς τριβή, θα φτάσει στο σημείο Β στο συντομότερο χρόνο, σε σχέση με οποιαδήποτε άλλη καμπύλη ΑΒ.

Τέλος, *ισόχρονη* ή *ταυτόχρονη* είναι η καμπύλη που ξεκινά από ένα σημείο Α και καταλήγει σε ένα σημείο Β, για την οποία ο χρόνος που απαιτείται από ένα σώμα που αφήνεται ελεύθερο να κυλήσει προς το χαμηλότερο σημείο Β της καμπύλης, υπό την επίδραση μόνο της βαρύτητάς του και χωρίς τριβή, είναι ανεξάρτητος της θέσης του σημείου εκκίνησης Α (βλ. Διάγραμμα 5). Το εκπληκτικό όμως τελικά ήταν ότι ουσιαστικά όλες αυτές οι καμπύλες δεν ήταν παρά μια ίδια.

2.3.2 Βιογραφία

Ίσως ο πρώτος που προσπάθησε να βρει το μονοπάτι που θα ακολουθήσει ένα σώμα όταν αφεθεί ελεύθερο να κυλήσει από ένα σημείο Α σε ένα σημείο Β λόγω της βαρύτητας του ήταν ο Galileo (1564 – 1642 μ.Χ.).



Εικόνα 3. *Galileo Galilei*

Ο Galileo di Vincenzo Bonaiuti de Galilei, όπως ήταν το πλήρες όνομα του γεννήθηκε στις 15 Φεβρουαρίου του 1564 στην Πίζα της Ιταλίας. Ήταν ένας σπουδαίος φυσικός, μαθηματικός, αστρονόμος και φιλόσοφος που διαδραμάτισε καθοριστικό ρόλο στην Επιστημονική Επανάσταση. Σήμερα ο Galileo αποκαλείται «Πατέρας της Αστρονομίας», «Πατέρας της Σύγχρονης Φυσικής», «Πατέρας των Επιστημών» και «Πατέρας της Σύγχρονης Επιστήμης». Μάλιστα, σύμφωνα με τον Stephen Hawking, «ο Galileo ίσως περισσότερο από κάθε άλλο πρόσωπο ευθύνεται για τη γέννηση της Σύγχρονης Επιστήμης».

Ο Galileo όταν ήταν νέος σκεφτότανε πολύ σοβαρά να ακολουθήσει την ασκητική ζωή, όμως σύντομα εγκατέλειψε αυτή την ιδέα και το 1581 γράφτηκε στην Ιατρική Σχολή του Πανεπιστημίου της Πίζα, έπειτα από πίεση που του άσκησε ο πατέρας του. Ο Galileo όμως δεν έδειξε ποτέ πραγματικό ενδιαφέρον για την Ιατρική καθώς σε όλη την διάρκεια των σπουδών του επέλεγε μαθήματα σχετικά με τα μαθηματικά και τη φιλοσοφία με αποτέλεσμα το 1585 να εγκαταλείψει τις σπουδές του. Τότε ξεκίνησε να διδάσκει μαθηματικά και το 1589 διορίστηκε καθηγητής στο Πανεπιστήμιο της Πίζα. Μετά το θάνατο του πατέρα του το 1591 ο Galileo ξεκίνησε να διδάσκει στο Πανεπιστήμιο της Πάντοβα όπου και έμεινε ως το 1610. Τα χρόνια αυτά τα περιγράφει ως πολύ δημιουργικά και ευτυχισμένα.

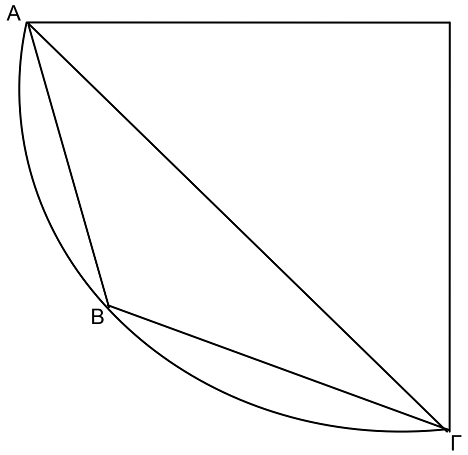
Την περίοδο αυτή ξεκίνησε να κατασκευάζει μια σειρά από τηλεσκόπια καταφέρνοντας τελικά να δημιουργήσει ένα το οποίο μεγέθυνε τα αντικείμενα εννέα φορές. Με το τηλεσκόπιο του παρατήρησε την ύπαρξη τεσσάρων δορυφόρων του πλανήτη Δία, τις φάσεις του πλανήτη Αφροδίτη που μοιάζουν με αυτές του φεγγαριού, όμως το κυριότερο ήταν ότι επιβεβαίωσε την Ηλιοκεντρική θεωρία του Κοπέρνικου απορρίπτοντας την έως τότε Γεωκεντρική θεωρία του Πτολεμαίου. Όλες του τις παρατηρήσεις ο Galileo τις εξέδωσε και τις δημοσιοποιούσε κατά καιρούς με αποτέλεσμα η στήριξη του στη θεωρία του Κοπέρνικου να προκαλέσει τη Ρωμαιοκαθολική Εκκλησία. Το 1616 μάλιστα καταδίκασε τη διδασκαλία του ενώ του απαγορεύτηκε να στηρίζει το Ηλιοκεντρικό Σύστημα του Κοπέρνικου. Το 1630 ολοκλήρωσε το πολύ γνωστό του έργο «Dialogue Concerning Two Chief Systems of the World: Ptolemaic and Copernican» (Διάλογος σχετικά με δύο κύρια Συστήματα του Κόσμου : του Πτολεμαίου και του Κοπέρνικου) και τελικά κατάφερε να το εκδώσει στη Φλωρεντία το 1632. Οι αντιδράσεις που προκάλεσε όμως το περιεχόμενο του οδήγησαν στην απαγόρευση της κυκλοφορίας του βιβλίου και τον Galileo μπροστά στην Ιερά Εξέταση. Καταδικάστηκε σε κατ' οίκον περιορισμό με την κατηγορία ότι ήταν αιρετικός. Εκεί, μετά και το θάνατο της κόρης του έγραψε το περίφημο « Discorsi e dimonstrazioni matematiche, intorno a due nuovo scienze» (Ομιλίες και μαθηματικές επιδείξεις που αφορούν δυο νέες επιστήμες) το οποίο βγήκε κρυφά εκτός Ιταλίας και εκδόθηκε στην Ολλανδία. Τελικά στις 8 Ιανουαρίου του 1642 με πολύ βεβαρημένη την υγεία του ο Galileo πέθανε.

2.3.3 Πρώιμη διατύπωση του βραχυστόχρονου προβλήματος

Στο τελευταίο του λοιπόν βιβλίο, μελέτησε δύο προβλήματα που αφορούν το λογισμό μεταβολών. Το πρώτο είχε σχέση με το βραχυστόχρονο πρόβλημα και το έθεσε αρχικά ως εξής :

Πρόβλημα 4. *Το μονοπάτι που ακολουθεί ένα σώμα για να κυλήσει από ένα σημείο σε ένα άλλο δεν είναι το πιο σύντομο σε απόσταση, δηλαδή το ευθύγραμμο τμήμα, αλλά το κυκλικό τόξο.*

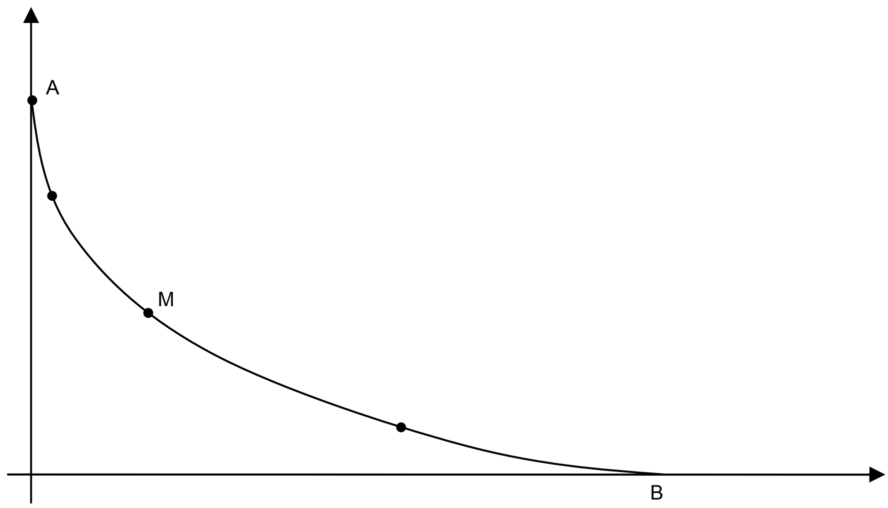
Συγκεκριμένα ο ισχυρισμός του Galileo βασιζόταν στο ότι ο χρόνος που θα έκανε ένα σώμα αν κυλούσε από ένα σημείο Α στο Γ λόγω της βαρύτητας του θα είναι μικρότερος εάν το σώμα κυλήσει σε δυο διαδοχικές χορδές ΑΒ, ΒΓ απ' ότι στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΓ που ενώνει τα σημεία αυτά. Μάλιστα αν το σώμα κινούταν σε πολλά μικρά διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα θα έφτανε ακόμα πιο γρήγορα από το σημείο Α στο σημείο Γ. Ο Galileo έπειτα ισχυρίστηκε ότι το κυκλικό τόξο είναι πιο σύντομη διαδρομή από την αντίστοιχη χορδή που ενώνει τα άκρα του τόξου. Λανθασμένα όμως γενίκευσε το αποτέλεσμα του ισχυριζόμενος ότι το κυκλικό τόξο είναι η πιο σύντομη διαδρομή που θα ακολουθήσει ένα σώμα όταν αφεθεί ελεύθερο να κυλήσει λόγω της βαρύτητας του από το σημείο Α στο Γ.



Διάγραμμα 4. *Το κυκλικό τόξο του Galileo.*

Όπως θα αποδειχθεί αργότερα η λύση για το βραχυστόχρονο πρόβλημα δεν είναι το κυκλικό τόξο αλλά ένα τμήμα ανεστραμμένου κυκλοειδούς. Το κυκλοειδές αρχικά ανακαλύφθηκε στις αρχές του 16ου αιώνα από τον μαθηματικό Charles Bouvelles και το 1659 ο Huygens ανακάλυψε ότι αυτό είναι η λύση του ισόχρονου (ή ταυτόχρονου) προβλήματος το οποίο αναφέρεται ως εξής:

Πρόβλημα 5. *Δοσμένων δύο σημείων Α και Β σε κάθετο επίπεδο, υπολογίστε την καμπύλη με την ιδιότητα, κάθε σημείο Μ που κινείται στη διαδρομή ΑΜΒ, υπό την επίδραση του βάρους του και χωρίς τριβές, να φτάνει στο σημείο Β στον ίδιο πάντα χρόνο.*



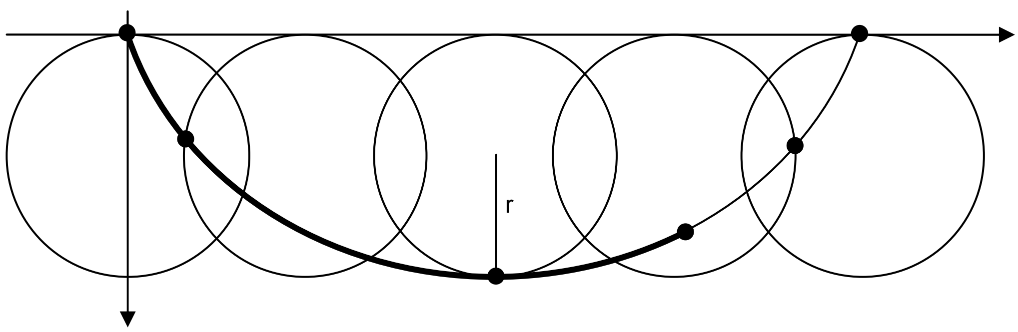
Διάγραμμα 5. *Το ταυτόχρονο πρόβλημα*

Ο Huygens, λοιπόν, έδειξε ότι όταν ένα σώμα γλιστρήσει πάνω σε μια κυκλική καμπύλη, θα παρουσίαζε απλή αρμονική κίνηση με περίοδο ανεξάρτητα από το σημείο εκκίνησης.

Η παραμετρική εξίσωση της κυκλοειδούς καμπύλης δίνεται από τον τύπο :

$$x(t) = r(t - \sin(t))$$
$$y(t) = r(1 - \cos(t))$$

και απεικονίζεται ως εξής:

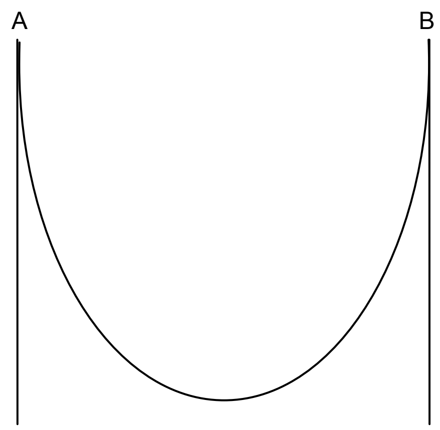


Διάγραμμα 6. *Κυκλοειδής καμπύλη*

Η λύση του προβλήματος αυτού χρησιμοποιήθηκε χρόνια αργότερα στην επίλυση του βραχυστόχρονου προβλήματος, ενώ άλλες λύσεις για το ισόχρονο πρόβλημα δόθηκαν και από άλλους μαθηματικούς όπως οι Jacob Bernoulli, Joseph Louis Lagrange και Leonard Euler.

Το δεύτερο πρόβλημα με το οποίο ασχολήθηκε ο Galileo αφορούσε την εύρεση της καμπύλης που θα πρέπει να είναι μια αλυσίδα που κρέμεται από δυο σημεία. Σύμφωνα με το Galileo, η καμπύλη αυτή πρέπει να είναι η παραβολή κάτι που όμως αργότερα ο J. Jungius (1587-1657) απέδειξε ότι δεν ισχύει.

Το 1691 τον Ιούνιο, στο περιοδικό Acta Eruditorum, δημοσιεύονται τρεις λύσεις του παραπάνω προβλήματος από τους Huygens, Leibniz και Johann Bernoulli. Η καμπύλη που τελικά αποτελεί την λύση του προβλήματος είναι η αλυσοειδής καμπύλη, όπως ονομάστηκε από τον Huygens για πρώτη φορά. Αυτή είναι η $y(x) = (e^{ax} + e^{-ax}) / 2a$ όπου το α εξαρτάται από τη θέση των σημείων από τα οποία κρέμεται η αλυσίδα καθώς και από το μήκος της.



Διάγραμμα 7. *Αλυσοειδής καμπύλη*

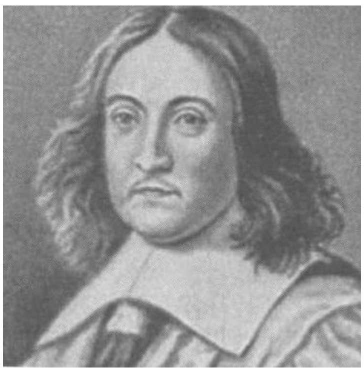
2.4. Ο Pierre de Fermat και η Αρχή Ελαχίστου Χρόνου

2.4.1 Βιογραφία

Η γέννηση όμως του λογισμού μεταβολών σχετίζεται άμεσα με συγκεκριμένες αρχές ελαχιστοποίησης, όπως η αρχή ελάχιστης απόστασης, η αρχή ελάχιστου χρόνου και η αρχή ελαχίστης δράσης. Μάλιστα ο Pierre de Fermat (1601-1665), διατύπωσε την αρχή ελαχίστου χρόνου, σύμφωνα με την οποία το φως ακολουθεί πάντα το γρηγορότερο μονοπάτι και όχι κατ' ανάγκη το συντομότερο σε απόσταση.

Ο Pierre de Fermat γεννήθηκε στις 17 Αυγούστου 1601 στην πόλη Beaumont de Lomagne της Γαλλίας. Αν και ήταν δικηγόρος , ασχολούταν ερασιτεχνικά με τα μαθηματικά. Οι ανακαλύψεις του βοήθησαν σημαντικά σε κλάδους των μαθηματικών όπως ο λογισμός μεταβολών, η θεωρία αριθμών, η αναλυτική γεωμετρία, ενώ έγινε ευρέως γνωστός από το θεώρημα του που αναφέρεται ως Τελευταίο Θεώρημα του Fermat.

Τη σχολική του μόρφωση την έλαβε σε ένα μοναστήρι Φραγκισκανών και αργότερα φοίτησε στο Πανεπιστήμιο της Toulouse. Περί το 1625-1630 μετακόμισε στη Bordeaux όπου και ξεκίνησε να ασχολείται πιο εντατικά με τη μαθηματική έρευνα, ενώ εκεί επηρεάστηκε και από το έργο του Vieta. Έπειτα μετακόμισε στην Orleans όπου σπούδασε νομικά και το 1631 ήταν ήδη δικηγόρος και κυβερνητικό στέλεχος καθώς έλαβε τον τίτλο του συμβούλου στο Ανώτατο Δικαστήριο των Δικαστών στην Toulouse. Έπειτα από διαδοχικές όμως προαγωγές, τελικά, το 1652 κατάφερε να βρίσκεται στην υψηλότερη βαθμίδα στο ποινικό δικαστήριο.



Εικόνα 4. *Pierre de Fermat*

Αντίθετα με τις φήμες που τον ήθελαν να έχει πεθάνει το 1653 από το λοιμό που έπληξε την περιοχή, ο Fermat όχι μόνο ανερχόταν επαγγελματικά, αλλά ασχολούταν όλο και περισσότερο με τα μαθηματικά. Μαζί με το δικηγόρο συνάδελφό του Carcavi μοιράστηκαν τις γνώσεις τους και το ενδιαφέρον τους για τα μαθηματικά, ενώ μέσω αυτού γνώρισε αργότερα τον Mersenne, με τον οποίο ξεκίνησε αλληλογραφία σχετικά με την εργασία του στα σπειροειδή, καθώς και για λάθη τα οποία ο Fermat είχε εντοπίσει στη διατύπωση της ελεύθερης πτώσης από το Γαλιλαίο. Το πρώτο γράμμα του Fermat προς τον Mersenne περιείχε και δύο προβλήματα σχετικά με τη μεγιστοποίηση. Το γράμμα αυτό το διάβασε σε Γάλλους μαθηματικούς, ενώ αργότερα ο ίδιος ο Fermat έστειλε μέρος της δουλειάς του στη Γαλλική μαθηματική κοινότητα. Καθώς δεν ήθελε να εκδώσει τα έργα του, αυτή ήταν και η μέθοδος με την οποία δημοσιοποιούσε τη δουλειά του, κάτι το οποίο δεν έτυχε όμως ευρείας αποδοχής. Δημιούργησε πολλές αντιπαλότητες, με κυριότερη αυτή με τον Descartes, ο οποίος ενοχλήθηκε από τα σχόλια του Fermat σχετικά με τον τρόπο με τον οποίο απέδειξε το νόμο της διάθλασης. Παράλληλα, θεώρησε ότι το έργο του Fermat σχετικά με τις μεθόδους μεγιστοποίησης, ελαχιστοποίησης και εύρεσης εφαπτομένων μείωναν τη σπουδαιότητα του σημαντικότερου δικού του έργου, «La Géométrie».

Κατά την περίοδο από το 1643 έως το 1654 πολλοί λόγοι ανάγκασαν το Fermat να διακόψει την αλληλογραφία του με τους συναδέλφους του στο Παρίσι. Η εργασία του που τον απασχολούσε πολλές ώρες, ο εμφύλιος πόλεμος από τον οποίο επηρεάστηκε πολύ άσχημα η Toulouse περί το 1648, αλλά κυρίως ο λοιμός που το 1651 έπληξε την περιοχή, οδήγησαν στην απομόνωση του Fermat. Την περίοδο αυτή ασχολήθηκε κυρίως με τη θεωρία αριθμών. Μάλιστα, οι περισσότεροι τον γνωρίζουν για τη συμβολή του στον τομέα αυτό, και κυρίως για το λεγόμενο Τελευταίο Θεώρημα του Fermat. Σύμφωνα με αυτό, η εξίσωση $x^n + y^n = z^n$ δεν έχει μη μηδενικές ακέραιες λύσεις όταν $n > 2$. Τη λύση του προβλήματος αυτού που ταλαιπώρησε τη μαθηματική κοινότητα για πάνω από 300 χρόνια και τελικά λύθηκε μόλις το 1994 από το Βρετανό μαθηματικό Andrew Wiles, ο Fermat ισχυριζόταν ότι τη γνώριζε. Σε μία μετάφραση από τον Bache της «Αριθμητικής» του Διόφαντου, την οποία εξέδωσε ο γιος του Fermat το 1670 με σημειώσεις του πατέρα του, αναφέρεται στο περιθώριο από τον ίδιο το Fermat ότι

> *«Ανακάλυψα μία πολύ ενδιαφέρουσα λύση για το παραπάνω πρόβλημα, όμως δυστυχώς το περιθώριο είναι πολύ μικρό για να την περιγράψω» (O'Connor, J. J., Robertson, E. F., 1996).*

Σήμερα πάντως επικρατεί η άποψη ότι η λύση αυτή του Fermat ήταν πιθανότατα λανθασμένη. Το 1654 ο Fermat άρχισε ξανά την αλληλογραφία με συναδέλφους του και συγκεκριμένα με τον υιό του Etienne Pascal, Blaise Pascal. Μαζί κατάφεραν και έθεσαν τις βάσεις της θεωρίας πιθανοτήτων. Έπειτα, συνέχισε θέτοντας διάφορα προβλήματα σε συναδέλφους του, προκαλώντας τους να τα επιλύσουν. Για παράδειγμα, ότι υπάρχουν μόνο δύο ακέραιες λύσεις της εξίσωσης $x^2+4=y^3$ και ότι η $x^2+2=y^3$ έχει μόνο μία ακέραια λύση. Στα προβλήματα αυτά δε δόθηκε όμως το ανάλογο ενδιαφέρον, καθώς κανείς δεν αντιλήφθηκε ότι ο Fermat προσπαθούσε να οδηγηθεί μέσω αυτών στη μετέπειτα απόδειξη βαθύτερων και ουσιαστικότερων θεωρητικών προτάσεων.

Περίπου εκείνη την εποχή άρχισε να ασχολείται ξανά με τις σημειώσεις που πριν 20 χρόνια είχε κάνει σχετικά με το έργο του Descartes στα οπτικά. Μέσα από αυτές κατέληξε σε μία απόδειξη του νόμου της διάθλασης βάσει της Αρχής Ελαχίστου Χρόνου. Η αρχή αυτή του Fermat, βάση της οποίας το φως πάντα ακολουθεί τα πιο σύντομα μονοπάτια σε απόσταση, αποτελεί σήμερα μία από τις θεμελιώδεις ιδιότητες στα οπτικά. Περί το 1656 ανέπτυξε στενή αλληλογραφία με τον Huygens, με τον οποίο πραγματεύτηκαν θέματα πιθανοτήτων αλλά και θεωρίας αριθμών, και στον οποίο ο Fermat εμπιστεύτηκε τις μεθόδους του περισσότερο από οποιοδήποτε άλλον.

Τελικά πέθανε το 1665 σε ηλικία 63 ετών. Μαζί με τον Descartes, αποτέλεσαν τους σημαντικότερους ίσως μαθηματικούς του πρώτου μισού του 17^{ου} αιώνα. Μάλιστα ο ίδιος ο Newton αναφέρει ότι ήταν ο τρόπος με τον οποίο ο Fermat σχεδίαζε τις εφαπτομένες που τον οδήγησε στις πρώτες ιδέες του σχετικά με τη δημιουργία του λογισμού μεταβολών.

2.4.2 Αρχή του Ελαχίστου Χρόνου

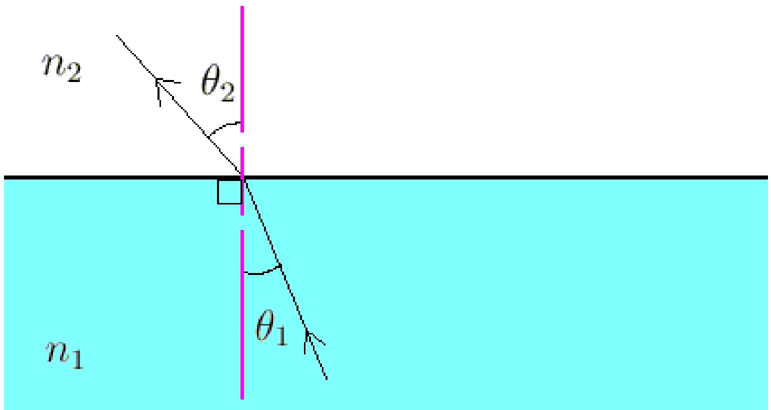
Βάση των όσων αναφέρθηκαν παραπάνω καταλήγουμε στο ότι ο Fermat ήταν ο πρώτος που διατύπωσε την αρχή ότι η φύση λειτουργεί με τον πιο «οικονομικό» τρόπο. Δηλαδή, όπως αναφέρει σε αλληλογραφία που είχε με το συνάδελφο του Marin Cureau de la Chambre to 1662,

> *«Η φύση λειτουργεί με τον ευκολότερο και γρηγορότερο τρόπο» (Giaquinda, M., Hildebrandt, S., 1996; Jurdjevic, V., 1997).*

Έπειτα αναφέρει το παράδειγμα του Galileo για να δείξει ότι τα σώματα, όταν αφήνονται να κινούνται εξαιτίας της βαρύτητας τους, ακολουθούν μονοπάτια τα οποία θα διανύσουν στο συντομότερο χρόνο. Τέλος, βασιζόμενος στην Αρχή Ελαχίστου

Χρόνου που αυτός διατύπωσε, αποδεικνύει το Νόμο της Διάθλασης του Snell (1580-1626 μ.Χ.). Το νόμο αυτό ανακάλυψε εμπειρικά ο Δανός φυσικός Willebrord Von Roijen Snell περί το 1621 και έμεινε γνωστός ως νόμος του Snell.

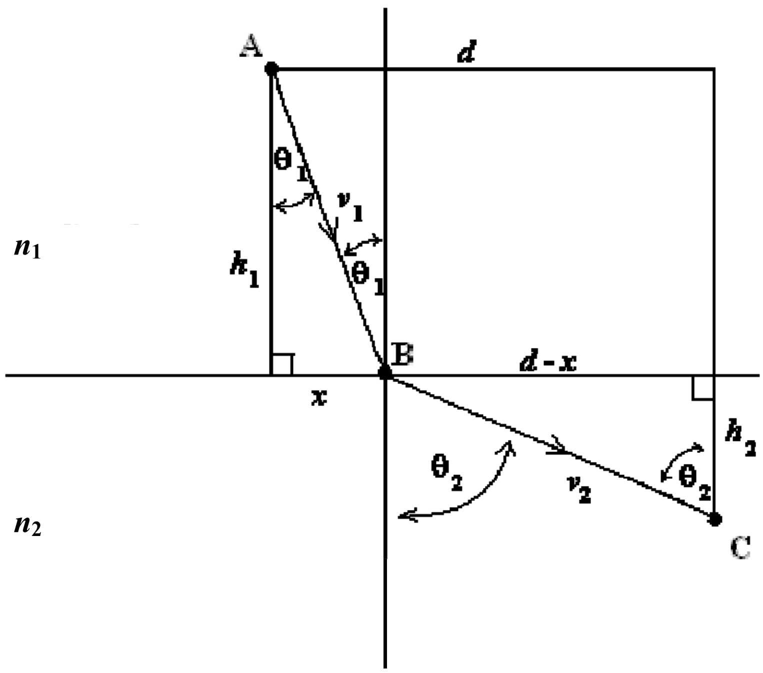
Σύμφωνα με το Νόμο της Διάθλασης, όταν μία ακτίνα φωτός περνάει από ένα μέσο διάδοσης n_1 σε ένα άλλο n_2, αλλάζει η πορεία της με τέτοιο τρόπο ώστε να ισχύει η σχέση $\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = k$, όπου θ_1 η γωνία πρόσπτωσης, θ_2 η γωνία ανάκλασης και k σταθερά εξαρτώμενη από τη φύση των δύο μέσων διάδοσης. Μάλιστα, αν το δεύτερο μέσο είναι πυκνότερο, τότε $k > 1$.



Διάγραμμα 8. *Νόμος του Snell*

Ο Fermat έδειξε ότι ο Νόμος της Διάθλασης του Snell βασίζεται στην Αρχή Ελαχίστου Χρόνου. Μάλιστα, αν t είναι ο συνολικός χρόνος μετάβασης μιας ακτίνας φωτός που ταξιδεύει από ένα μέσο σε ένα άλλο, όπως περιγράφεται και στο παρακάτω σχήμα, τότε

$$t = \frac{AB}{v_1} + \frac{BC}{v_2}$$



Διάγραμμα 9. *Επίλυση του Νόμου του Snell*

Άρα: $t = \dfrac{AB}{v_1} + \dfrac{BC}{v_2} = \dfrac{\sqrt{h_1^2 + x^2}}{v_1} + \dfrac{\sqrt{(d-x)^2 + h_2^2}}{v_2}$

Ουσιαστικά πρέπει να βρεθεί το x για το οποίο ο χρόνος ελαχιστοποιείται. Άρα η ποσότητα $\dfrac{dt}{dx}$ να ισούται με μηδέν. Δηλαδή:

$$
\begin{aligned}
&\frac{dt}{dx} = 0 \Rightarrow \\
&\frac{x}{v_1\sqrt{h_1^2 + x^2}} - \frac{(d-x)}{v_2\sqrt{(d-x)^2 + h_2^2}} = 0 \Rightarrow \\
&\frac{\sin\theta_1}{v_1} - \frac{\sin\theta_2}{v_2} = 0 \Rightarrow \\
&\frac{\sin\theta_1}{v_1} = \frac{\sin\theta_2}{v_2} \Rightarrow \\
&\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{v_1}{v_2}
\end{aligned}
$$

Επομένως η σταθερά k του Νόμου του Snell είναι ουσιαστικά $k = \dfrac{v_1}{v_2}$

Αξίζει να σημειωθεί ότι την περίοδο εκείνη ο Fermat είχε ήδη αναπτύξει έναν αλγόριθμο ελαχιστοποίησης συναρτήσεων, θεωρώντας τις παραγώγους του ίσες με το μηδέν. Όμως, παρόλη την ευκολία που προσέφερε η μέθοδος αυτή, ο Fermat χρησιμοποίησε έναν πιο πολύπλοκο τρόπο επειδή δεν ήξερε πώς να εφαρμόσει τη μέθοδό του σε μαθηματικές εκφράσεις με ρίζες. Για το λόγο αυτό ο Νόμος του Snell αποδείχθηκε με τη χρήση παραγώγων πρώτη φορά από τον Leibniz.

2.5. Ο Sir Isaac Newton και το πρώτο πρόβλημα λογισμού μεταβολών

2.5.1 Βιογραφία

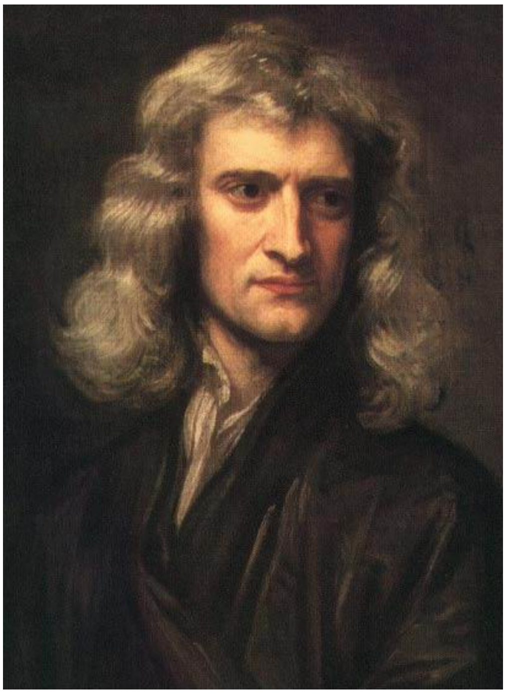
Παρά το γεγονός ότι ο Leibniz και ο Fermat έθεσαν τις πρώτες αρχές ελαχιστοποίησης, ο Newton ήταν αυτός που διατύπωσε και έλυσε σωστά το πρώτο πρόβλημα από το οποίο γεννήθηκε ο λογισμός μεταβολών.

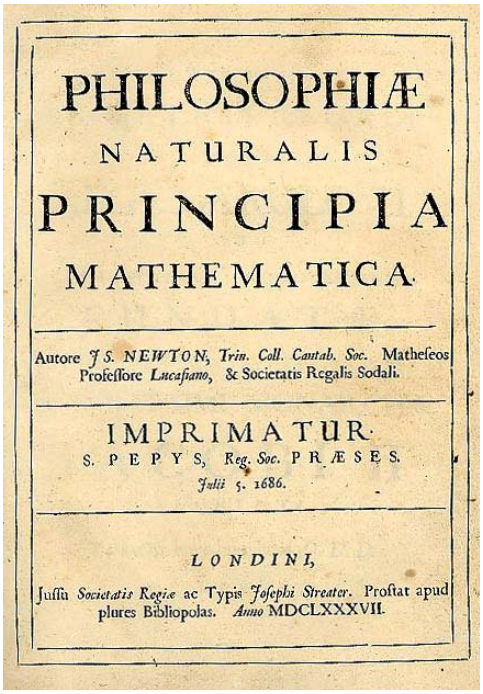
Ο Sir Isaac Newton ήταν ένας Άγγλος φυσικός, μαθηματικός, φιλόσοφος και θεολόγος που θεωρείται από τους ανθρώπους με τη μεγαλύτερη επιρροή στην ιστορία. Μάλιστα το έργο του «Philosophiae Naturalis Principia Mathematica» θεωρείται από τα σπουδαιότερα όλων των εποχών. Γεννήθηκε στις 4 Ιανουαρίου του 1643 στο Woolsthorpe, κοντά στο Grantham του Lincolnshire. Ο πατέρας του πέθανε τρεις μήνες πριν από τη γέννησή του και η μητέρα του δυο χρόνια αργότερα ξαναπαντρεύτηκε και μετακόμισε σε ένα διπλανό χωριό με το νέο της σύζυγο, αφήνοντας τον Newton να μεγαλώσει με τη γιαγιά του.

Από τα 12 του έτη ξεκίνησε να φοιτά στο δημόσιο δημοτικό σχολείο του Grantham χωρίς όμως να επιδεικνύει ιδιαίτερο ζήλο για τη σχολική μόρφωση. Αυτός ήταν και ένας από τους λόγους που η μητέρα του, έπειτα από το θάνατο του δεύτερου συζύγου της, σταμάτησε τον Newton από το σχολείο τον Οκτώβριο του 1659, τέσσερα χρόνια μετά, προκειμένου να διαχειρίζεται τα κτήματα της οικογένειας. Ο Newton όμως απεχθανόταν τη δουλειά του αγρότη, και τελικά έπεισε τη μητέρα του να επιστρέψει στο σχολείο, όπου και ολοκλήρωσε τις σπουδές του, όντας πια από τους κορυφαίους μαθητές.

Τον Ιούνιο του 1661 ξεκίνησε τις σπουδές του στο Trinity College του Πανεπιστημίου του Cambridge με σκοπό την απόκτηση πτυχίου στη νομική, ενώ παράλληλα με τις σπουδές του, προσέφερε εργασία στο πανεπιστήμιο. Την εποχή εκείνη οι διδασκαλίες βασίζονταν κυρίως στη διδασκαλία του Αριστοτέλη, όμως ο Newton επέλεξε πιο μοντέρνες διδασκαλίες, όπως του Descartes, του Copernicus, του Galileo και του Kepler. Ο Newton επηρεάστηκε από πολλά σημαντικά έργα, με πρώτο τα «Στοιχεία» του Ευκλείδη, ενώ μετέπειτα και από το «La Géométrie» του Descartes. Κατά τη διάρκεια των σπουδών του δεν υπήρξε κάτι αξιοσημείωτο στην πρόοδό του, και τελικά τον Απρίλιο του 1665 πήρε το πτυχίο του.

Το καλοκαίρι του 1665 το πανεπιστήμιο έκλεισε για προληπτικούς λόγους λόγω του λοιμού που έπληξε την περιοχή. Ο Newton τότε επέστρεψε στο σπίτι του στο Lincolnshire για περίπου δύο χρόνια, όπου απομονωμένος ξεκίνησε πολλές καινοτόμες εργασίες στα μαθηματικά, τη φυσική, την αστρονομία και τα οπτικά. Τότε έθεσε και τις βάσεις του διαφορικού και του ολοκληρωτικού λογισμού.





PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.

Autore *JS. NEWTON*, *Trin. Coll. Cantab. Soc.* Matheseos Professore *Lucasiano*, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR.
S. PEPYS, *Reg. Soc.* PRÆSES.
Julii 5. 1686.

LONDINI,
Jussu *Societatis Regiæ* ac Typis *Josephi Streater*. Prostat apud plures Bibliopolas. *Anno* MDCLXXXVII.

Εικόνα 5. *Ο Sir Isaac Newton και το εξώφυλλο του «Philosophiae Naturalis Principia Mathematica»*

Το 1667 το πανεπιστήμιο επαναλειτούργησε και ο Newton επέστρεψε ξεκινώντας τότε μία σπουδαία περίοδο για την ακαδημαϊκή του καριέρα. Μάλιστα το 1669 και σε ηλικία μόλις 27 ετών προτάθηκε να αναλάβει τη Λουκασιανή έδρα. Αρχικά, ξεκίνησε να διδάσκει το Φεβρουάριο του 1670 πάνω στα οπτικά. Αν και οι ως τότε επιστήμονες πίστευαν ότι το φως ήταν μία μοναδική ενότητα, ο Newton κατέληξε στο συμπέρασμα πως αποτελεί ένα μείγμα πολλών διαφορετικών ακτινών. Το 1672 εκλέχθηκε μέλος της Royal Society και έπειτα εξέδωσε την πρώτη του επιστημονική εργασία σχετικά με το φως και το χρώμα. Πιο αναλυτικά όμως τα αποτελέσματά του σχετικά με τη θεωρία του φωτός και των χρωμάτων την ανέλυσε στο έργο του «Optics» που εκδόθηκε το 1704.

Όμως η δουλειά του στη φυσική και μηχανική των ουράνιων σωμάτων ήταν το σημαντικότερο επίτευγμά του. Υποστήριξε την πολύ πρωτοποριακή για την εποχή του ιδέα ότι η βαρύτητα της Γης επηρεάζει τη Σελήνη. Μάλιστα ήδη από το 1666 είχε παραλλαγές των νόμων της κίνησης. Στις 5 Ιουλίου του 1687 εκδόθηκε το έργο του «Philosophiae Naturalis Principia Mathematica» ή όπως είναι γνωστό Principia. Σε αυτό θέτει τους τρεις νόμους της κίνησης γνωστούς ως Νόμους του Newton, που για 200 περίπου χρόνια έμεναν όπως αρχικά είχαν διατυπωθεί. Εισήγαγε τη λατινική λέξη gravitas ώστε να περιγράψει το φαινόμενο της βαρύτητας και έπειτα να διατυπώσει τον Νόμο της Βαρύτητας. Επιπλέον διατύπωσε ότι οι πλανήτες έλκονταν προς τον Ήλιο από μία δύναμη αντιστρόφως ανάλογη του τετραγώνου της απόστασής τους, κάτι που γενίκευσε και για όλα τα ουράνια σώματα. Αυτό το έργο έκανε διάσημο τον Newton και τον καθιέρωσε ως πρωτοπόρο στην τότε επιστημονική κοινότητα. Αν και πολλοί συνάδελφοί του τότε τον αμφισβήτησαν, ο ίδιος είχε κερδίσει την αποδοχή και το θαυμασμό του κόσμου.

Όμως μετά το 1693, οπότε και υπέστη έναν δεύτερο νευρικό κλονισμό με σοβαρές επιπτώσεις στην ψυχική του υγεία, αποφάσισε να εγκαταλείψει το Cambridge και το 1696 ανέλαβε στο Λονδίνο κυβερνητικά καθήκοντα στο Βασιλικό Νομισματοκοπείο. Το 1701 παραιτήθηκε τελικά από τη Λουκασιανή έδρα, ενώ το 1703 εκλέχθηκε πρόεδρος της Royal Society, θέση στην οποία επανεκλεγόταν έως το θάνατό του. Μάλιστα η Βασίλισσα Άννα το 1705 τον έχρισε ιππότη, τιμώντας τον για το έργο του. Τα τελευταία χρόνια της ζωής του ενεπλάκη σε μία έντονη διαμάχη με τον Leibniz σχετικά με το ποιος ανακάλυψε το λογισμό μεταβολών. Πέθανε στο Λονδίνο στις 31 Μαρτίου του 1727.

Όπως αναφέρθηκε στην εργασία του Principia, ο Newton περί το 1685 διατυπώνει και λύνει σωστά το πρώτο γνήσιο πρόβλημα λογισμού μεταβολών. Στην εργασία αυτή μελετά το σχήμα που πρέπει να έχει ένα στερεό εκ περιστροφής, ώστε να έχει την ελάχιστη αντίσταση όταν κινείται σε ένα μέσο κατά τη διεύθυνση του άξονα περιστροφής του. Οι λόγοι για τους οποίους θεωρήθηκε αυτό το πρόβλημα τόσο σημαντικό είναι πολλοί. Κατά πρώτον, οι τεχνικές που εισήγαγε χρησιμοποιήθηκαν αργότερα τόσο από τον ίδιο όσο και από τον James Bernoulli στην επίλυση του βραχυστόχρονου προβλήματος και συστηματοποιήθηκαν αργότερα από τον Euler, ενώ επικράτησαν ως το 1755 που ο Lagrange εισήγαγε τις ανώτερες μεθόδους ολοκλήρωσης. Ο δεύτερος λόγος που καθιστά τόσο σημαντικό το παραπάνω πρόβλημα, είναι ότι ενώ μπορεί να έχει λύσει μία καμπύλη με γωνίες, δηλαδή μη συνεχείς παραγώγους, εάν λυθεί παραμετρικά μπορεί να μην οδηγήσει σε λύση. Η παραπάνω εργασία που περιλάμβανε το πρόβλημα αυτό εκδόθηκε το 1694, όμως δεν εκτιμήθηκε καθώς δεν έγινε κατανοητό από τους τότε επιστήμονες.

2.5.2 Πρόβλημα κόλουρου κώνου

Ο Newton στην πρόταση XXXIV αποδεικνύει ότι:

Πρόβλημα 6. *Σε ένα αραιό μέσο, που αποτελείται από ίσα μόρια που κινούνται ελεύθερα σε ίσες αποστάσεις μεταξύ τους, μία σφαίρα και ένας κύλινδρος έχουν ίσες διαμέτρους και κινούνται με ίσες ταχύτητες κατά τη κατεύθυνση του άξονα του κυλίνδρου. Η αντίσταση στην οποία υπόκειται η σφαίρα είναι η μισή ως προς την αντίσταση του κυλίνδρου (Newton, I., 1687).*

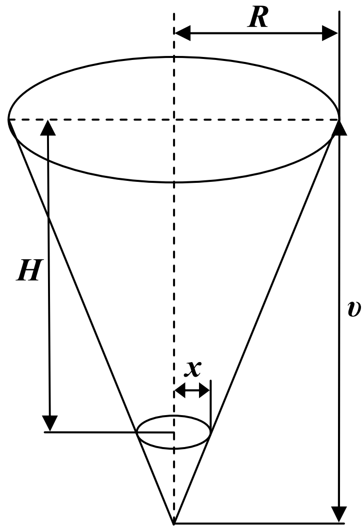
Έπειτα, στο σχολιασμό του παραπάνω προβλήματος, ο Newton θεωρεί ότι με την ίδια μέθοδο μπορούν να συγκριθούν και άλλα σώματα ως προς τις αντιστάσεις τις οποίες δέχονται. Προσπάθησε να βρει τις διαστάσεις ενός στερεού εκ περιστροφής, δεδομένης της βάσης και του ύψους του, ώστε όταν κινείται σε ένα αραιό μέσο να συναντά τη μικρότερη αντίσταση. Υπέθεσε ότι το στερεό αυτό είναι συμμετρικό ως προς το επίπεδο που διαπερνά το κέντρο του άξονα περιστροφής και είναι κάθετο σε αυτόν. Άρα το μήκος του στερεού είναι το μήκος μετρημένο κατά μήκος του άξονα και το πλάτος είναι η ακτίνα του κεντρικού του τμήματος. Δηλαδή μπορούμε να εξετάσουμε το μισό στερεό.

Επίσης, ο Newton υποθέτει ότι το στερεό κινείται με σταθερή ταχύτητα v, ενώ το μέσο στο οποίο κινείται αποτελείται από ελεύθερα μόρια σε ίσες αποστάσεις με καθορισμένη μάζα m και τέλεια ελαστικότητα. Όμως θεώρησε ότι και το ίδιο το στερεό είναι ελαστικό, δηλαδή ότι κατά τη σύγκρουση των μορίων με το κινούμενο στερεό αυτά προσκρούουν και ανακλώνται βάσει του κανόνα ότι η γωνία πρόσπτωσης ισούται με τη γωνία ανάκλασης.

Τέλος, από τη στιγμή που η δράση ενός μέσου επάνω σε ένα σώμα είναι ίδια, ανεξάρτητα από το αν το σώμα κινείται στο αδρανές μέσο, ή τα μόρια του μέσου προσκρούουν με ίση ταχύτητα πάνω στο αδρανές σώμα, θεωρούμε το σώμα αδρανές και τα μόρια του μέσου να προσκρούουν επάνω του.

Προσπαθώντας να φτάσουμε στη λύση του γενικού προβλήματος, θέτουμε μία σειρά προβλημάτων, μέσω των οποίων οδηγούμαστε σε αυτή.

Πρόβλημα 7. *Να βρεθούν οι διαστάσεις ενός κόλουρου κώνου, του οποίου η βάση και το ύψος να είναι γνωστά, ώστε να υπόκειται στη μικρότερη αντίσταση όταν κινείται σε αραιό μέσο.*



Διάγραμμα 10. *Πρώτο πρόβλημα ελαχιστοποίησης αντίστασης κόλουρου κώνου*

Απόδειξη

Έστω H το ύψος του κόλουρου κώνου και R η ακτίνα της βάσης του. Υποθέτουμε ότι ο κώνος βρίσκεται σε αδράνεια και ότι το μέσο διάδοσης συγκρούεται με αυτόν με ταχύτητα v. Επομένως, το μέρος του κώνου που συγκρούεται με τα μόρια του μέσου και δέχεται αντίσταση είναι η κάτω βάση και οι πλευρές του. Άρα θα υπολογίσουμε τις αντιστάσεις αυτών. Τα μόρια που προσκρούουν στην κάτω βάση του κώνου είναι ίδια με αυτά που προσκρούουν στη βάση ενός κυλίνδρου με την ίδια ακτίνα βάσης *x* και ύψος υ. Ο όγκος του κυλίνδρου αυτού είναι $V_0 = \pi x^2 \upsilon$. Συμβολίζοντας με ρ την πυκνότητα του μέσου, *m* τη μάζα κάθε μορίου και V_p τον όγκο κάθε μορίου, τότε ο αριθμός των μορίων που προσκρούουν στη βάση του κώνου στη μονάδα του χρόνου είναι:

$$N_0 = \frac{V_0}{V_p} = \frac{\rho}{m} V_0 = \frac{\rho}{m} \pi x^2 \upsilon$$

Καθώς τα μόρια προσκρούουν στην κάτω βάση του κώνου, διατηρώντας την ταχύτητά τους, η ορμή τους αυξάνεται κατά $2mv$ ενώ η ορμή του κώνου αυξάνεται προς την αντίθετη κατεύθυνση σύμφωνα με τον τρίτο νόμο του Newton. Επομένως, εφόσον N_0 είναι ο αριθμός των μορίων που προσκρούουν στον κώνο, η ορμή που αποκτά είναι:

$$P = N_0 2mv = 2\pi\rho x^2 \upsilon^2$$

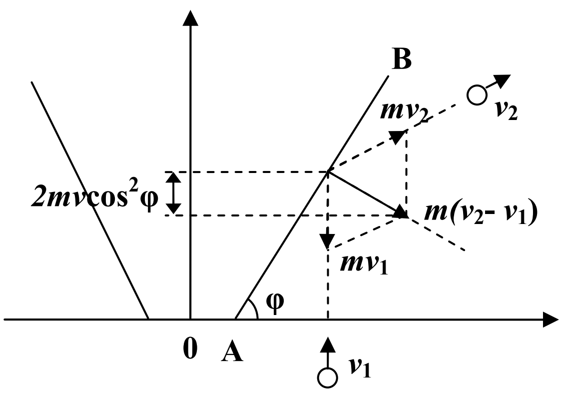
Με ανάλογο τρόπο βρίσκουμε ότι ο αριθμός των σωματιδίων που προσκρούουν στην πλευρά του κόλουρου κώνου είναι ίσος με τον αριθμό των σωματιδίων που προσκρούουν σε έναν κενό κύλινδρο με όγκο:

$$V_1 = \pi(R^2 - x^2)\upsilon$$

Επομένως, ο αριθμός των σωματιδίων είναι:

$$N_0 = \frac{\rho}{m} \pi(R^2 - x^2)\upsilon$$

Όσον αφορά την ορμή τους, αυτή αυξάνεται κατά $m(v_2 - v_1)$.



Διάγραμμα 11. *Πρόσκρουση μορίων στον κόλουρο κώνο*

Η προβολή του διανύσματος $m(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$ στον άξονα y είναι $2mv\cos^2\phi$, ενώ η συνολική αύξηση στην ορμή είναι:

$$\Delta P = N_1 2mv\cos^2\phi = 2\pi\rho(R^2 - x^2)\upsilon^2\cos^2\phi$$

Θεωρώντας ένα ευθύγραμμο τμήμα AB που περιστρέφεται γύρω από τον άξονα y δημιουργώντας έναν κόλουρο κώνο, τότε η συνολική αντίσταση την οποία δέχεται η πλευρά του κώνου είναι:

$$F = k(b^2 - a^2)\cos^2\phi$$

όπου $k = 2\pi\rho\upsilon^2$ και *α, b* εντετμημένες των άκρων του AB. Η παραπάνω σχέση γράφεται:

$$F(x) = k[x^2 + (R^2 - x^2)\cos^2\phi],$$

όπου $\cos\phi = \dfrac{R-x}{\sqrt{(R-x)^2 + H^2}}$.

Δηλαδή,

$$F(x) = k\left\{x^2 + \left(R^2 - x^2\right)\left[\frac{R-x}{\sqrt{(R-x)^2 + H^2}}\right]^2\right\}$$

Για να υπολογίσουμε το ελάχιστο της αντίστασης αυτής αγνοούμε το *k*, καθώς αυτό είναι σταθερό. Από το Διάγραμμα 10 τα τρίγωνα SOC και SDF είναι όμοια, επομένως:

$$\frac{DF}{OC} = \frac{SD}{OS} \Leftrightarrow \frac{x}{R} = \frac{z-H}{z}$$

όπου με *z* συμβολίζουμε το τμήμα OS. Από την παραπάνω σχέση έχουμε:

$$R - x = \frac{RH}{z} \text{ και } x = \frac{R(z-H)}{z},$$

ενώ η συνολική αντίσταση:

$$F(x) = k\left[x^2 + \left(R^2 - x^2\right)\frac{(R-x)^2}{(R-x)^2 + H^2}\right]$$

μπορεί να γραφεί και ως

$$J(z)=\frac{R^2(z-H)^2}{z^2}+\left(R^2-\frac{R^2(z-H)^2}{z^2}\right)\frac{\frac{R^2H^2}{z^2}}{\frac{R^2H^2}{z^2}+H^2}\Rightarrow$$

$$J(z)=\frac{R^2(z-H)^2}{z^2}+\left(\frac{R^2(z-H)^2}{z^2}\right)\frac{\frac{R^2H^2}{z^2}}{\frac{R^2H^2}{z^2}+H^2}\Rightarrow$$

$$J(z)=\frac{R^2(z-H)^2}{z^2}+\frac{z^2R^2-z^2R^2-R^2H^2+2R^2zH}{z^2}\cdot\frac{R^2H^2}{z^2\,\frac{R^2H^2+z^2H^2}{z^2}}\Rightarrow$$

$$J(z)=\frac{R^2(z-H)^2}{z^2}+\frac{-\left(2R^2zH-R^2H^2\right)R^2H^2}{z^2H^2\left(R^2+z^2\right)}\Rightarrow$$

$$J(z)=\frac{R^2(z-H)^2\left(R^2+z^2\right)+2zHR^2-H^2R^2}{z^2\left(R^2+z^2\right)}\Rightarrow$$

$$J(z)=\frac{R^2\left[R^2(z-H)^2+z^2(z-H)^2+2zH-H^2R^2\right]}{z^2\left(R^2+z^2\right)}\Rightarrow$$

$$J(z)=\frac{R^2\left[z^2R^2+R^2H^2-2R^2zH-z^2(z-H)^2-R^2H^2+2R^2zH\right]}{z^2\left(R^2+z^2\right)}\Rightarrow$$

$$J(z)=\frac{R^2z^2\left[R^2+(z-H)^2\right]}{z^2\left(R^2+z^2\right)}\Rightarrow$$

$$J(z)=R^2\,\frac{R^2+(z-H)^2}{R^2+z^2}$$

Επειδή το R^2 είναι σταθερό το αγνοούμε. Άρα αρκεί να ελαχιστοποιήσουμε την

$$J(z)=\frac{R^2+(z-H)^2}{R^2+z^2}\text{, όπου } z\geq H$$

Αν q η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $J(z)$, τότε $J(z)\geq q$ για κάθε $z\geq H$, ενώ

$$q\leq J(H)=\frac{R^2}{R^2+H^2}<1.$$

Επομένως προκύπτουν οι παρακάτω ισοδυναμίες,

$J(z) \geq q$, για κάθε $z \geq H$

$$\Leftrightarrow \frac{(z-H)^2 + R^2}{R^2 + z^2} \geq q, \text{ για κάθε } z \geq H$$

$$\Leftrightarrow z^2 + H^2 - 2zH + R^2 - qz^2 - qR^2 \geq 0, \text{ για κάθε } z \geq H$$

$$\Leftrightarrow z^2(1-q) - 2zH + H^2 + R^2(1-q) \geq 0, \text{ για κάθε } z \geq H$$

Για την παραπάνω ανίσωση υπάρχει προφανώς ένα μοναδικό $z' \geq H$ για το οποίο γίνεται ισότητα, δηλαδή,

$$z'^2(1-q) - 2z'H + H^2 + R^2(1-q) \geq 0, \text{ με } \Delta=0$$

$$\Leftrightarrow (-2H)^2 - 4(1-q)[H^2 + R^2(1-q)] = 0$$

$$\Leftrightarrow 4H^2 - 4\left(H^2 + R^2 - qR^2 - qH^2 - qR^2 + q^2R^2\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow q^2R^2 - (2R + H^2)q + R^2 = 0 .$$

Λύνοντας την παραπάνω δευτεροβάθμια εξίσωση προς q, βρίσκουμε ότι

$$q_1 = \frac{2R^2 + H^2 + H\sqrt{H^2 + 4R^2}}{2R^2}$$

και

$$q_2 = \frac{2R^2 + H^2 - H\sqrt{H^2 + 4R^2}}{2R^2},$$

η οποία όμως απορρίπτεται καθώς q<1. Επομένως, η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $z'^2(1-q) - 2z'H + H^2 + R^2(1-q) \geq 0$, είναι η

$$z' = \frac{-b}{2a} = \frac{H}{1-q} = \frac{H}{1 - \dfrac{2R^2 + H^2 + H\sqrt{H^2 + 4R^2}}{2R^2}} \Rightarrow$$

$$z' = \frac{H \cdot 2R^2}{2R^2 - 2R^2 - H^2 + H\sqrt{\left(\dfrac{H}{2}\right)^2 + R^2}} = \frac{R^2\left[\dfrac{H}{2} + \sqrt{\left(\dfrac{H}{2}\right)^2 + R^2}\right]}{-\left[\left(\dfrac{H}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{H}{2}\right)^2 - R^2\right]} \Rightarrow$$

$$z' = \frac{H}{2} + \sqrt{\left(\frac{H}{2}\right)^2 + R^2}$$

Βρίσκοντας τα q και z' καταφέραμε να ελαχιστοποιήσουμε τη συνάρτηση $J(z) = R^2 \dfrac{R^2 + (z-H)^2}{R^2 + z^2}$, άρα και την $F(x) = k\left[x^2 + \left(R^2 - x^2\right)\dfrac{R-x}{\sqrt{(R-x)^2 + H^2}}\right]$.

▲

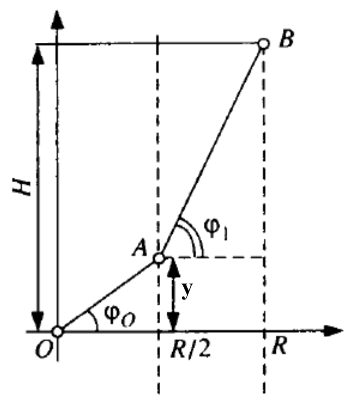
2.5.3 <u>*Πρόβλημα τεθλασμένης τριών κορυφών*</u>

Προχωρώντας περισσότερο προς τη γενίκευση του προβλήματος, αναπτύσσονται τεχνικές που θα χρησιμοποιηθούν αργότερα στο βραχυστόχρονο και στη θεωρία του λογισμού μεταβολών. Βασιζόμενοι στη μέθοδο του Leibniz επιχειρούμε να υπολογίσουμε την αντίσταση στην οποία υπόκειται ένα στερεό εκ περιστροφής.

Πρόβλημα 8. *Αναζητείται η κορυφή Α της τεθλασμένης ΟΑΒ από την οποία διέρχεται η ευθεία* $x = \dfrac{R}{2}$*, ώστε περιστρέφοντας το τμήμα αυτό γύρω από τον κατακόρυφο άξονα να δημιουργείται μια επιφάνεια που να δέχεται την ελάχιστη δυνατή αντίσταση από το αραιό μέσο μέσα στο οποίο κινείται.*

Απόδειξη

Ας είναι $A\left(\dfrac{R}{2}, y\right)$ και $B(R, H)$ οι συντεταγμένες των σημείων Α και Β, φ_0 η γωνία που σχηματίζει το τμήμα ΟΑ με τον οριζόντιο άξονα και φ_1 η αντίστοιχη γωνία του ΑΒ με τον οριζόντιο άξονα.



Διάγραμμα 12. *Σχηματισμός επιφάνειας σε τεθλασμένη τριών κορυφών*

Βάσει των όσων αναλύθηκαν παραπάνω, η δύναμη που ασκείται με τη μορφή της αντίστασης στο στερεό εκ περιστροφής είναι:

$$F = k\left\{\left(\frac{R}{2}\right)^2 \cos^2\phi_0 + \left[R^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2\right]\cos^2\phi_1\right\} \Rightarrow$$

$$F = k\left[\left(\frac{R}{2}\right)^2 \cos^2\phi_0 + 3\left(\frac{R}{2}\right)^2 \cos^2\phi_1\right]$$

όπου $\cos\phi_0 = \dfrac{R}{2\sqrt{y^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2}}$ και $\cos\phi_1 = \dfrac{R}{2\sqrt{(H-y)^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2}}$. Άρα:

$$F(y) = k\left\{\left(\frac{R}{2}\right)^2 \frac{R^2}{4\left[y^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2\right]} + 3\left(\frac{R}{2}\right)^2 \frac{R^2}{4\left[(H-y)^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2\right]}\right\} \Rightarrow$$

$$F(y) = k\left(\frac{R}{2}\right)^4 \left[\frac{1}{y^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2} + \frac{3}{(H-y)^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2}\right]$$

Εύκολα διαπιστώνεται ότι η παραπάνω συνάρτηση ελαχιστοποιείται όσο αυξάνεται η τιμή του y, τείνοντας στο μηδέν. Όμως το y, δηλαδή η τεταγμένη του A, δεν μπορεί να ξεπερνά σε τιμή το H, δηλαδή την τεταγμένη του B. Άρα το y κυμαίνεται στο διάστημα [0, *H*]. Επειδή το γινόμενο $k\left(\frac{R}{2}\right)^4$ είναι σταθερό, αρκεί να ελαχιστοποιήσουμε την:

$$f(y) = \frac{1}{y^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2} + \frac{3}{(H-y)^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2},$$

όπου $0 \le y \le H$. Επομένως θεωρούμε $\delta > 0$, τέτοιο ώστε $0 \le \mathrm{H} \le \delta$. Τότε, όπως είναι φανερό, η συνάρτηση $f(y)$ έχει ελάχιστο στο μηδέν το:

$$f(0) = \frac{4\left[\left(R^2 + 4H^2\right) + 3\right]}{R^2\left(R^2 + 4H^2\right)}$$

Αντίθετα, αν $H > \delta$, όπου $0 \le y \le H$, τότε η $f(y)$ ελαχιστοποιείται για κάποια τυχαία εσωτερική τιμή του διαστήματος [0, *H*]. Επίσης, ισχύει η σχέση:

$$\frac{R}{4}\tan\phi_0 \cos^4\phi_0 = 3\frac{R}{4}\tan\phi_1 \cos^4\phi_1$$

▲

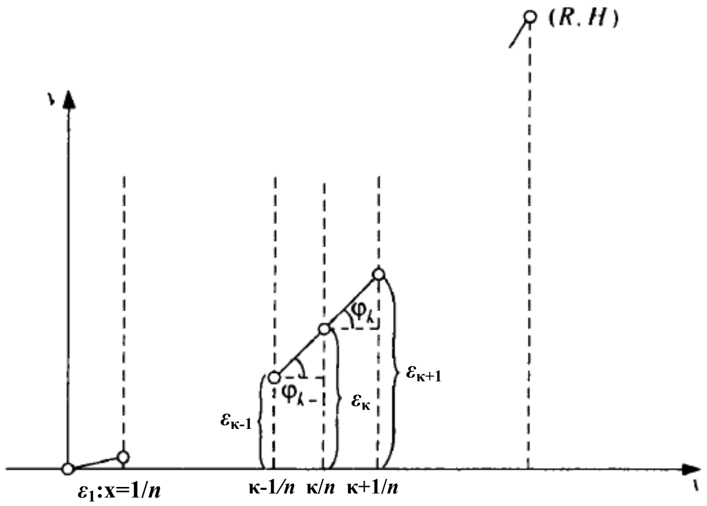
2.5.4 Πρόβλημα τεθλασμένης n κορυφών

Στη συνέχεια παρατίθεται ένα τελευταίο πρόβλημα το οποίο θα βοηθήσει ώστε να γίνει πιο κατανοητή η λύση του προβλήματος του Newton που ακολουθεί.

Πρόβλημα 9. *Αναζητούμε την τεθλασμένη γραμμή n κορυφών, η οποία κατά την περιστροφή της γύρω από τον y-άξονα δημιουργεί στερεό το οποίο υπόκειται στην ελάχιστη δυνατή αντίσταση μέσα σε ένα αραιό μέσο.*

Απόδειξη

Θεωρούνται οι κάθετες ευθείες με εξισώσεις $x = \frac{1}{n}, x = \frac{2}{n}, x = \frac{3}{n}, \ldots$ τις οποίες συμβολίζουμε $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots$ αντίστοιχα, καθώς και την ευθεία $x = R$. Επίσης θεωρούμε μία μονότονα αύξουσα τεθλασμένη γραμμή που τέμνει τις κάθετες ευθείες ε_κ στα σημεία $(0,0), \left(\frac{1}{n}, y_1\right), \left(\frac{2}{n}, y_2\right), \ldots, (R, H)$, όπου $y_1, \ldots, y_\kappa$ είναι οι τεταγμένες των κορυφών στις ευθείες ε_κ, σχηματίζοντας ευθύγραμμα τμήματα με άκρα στις ευθείες ε_κ. Με ϕ_κ συμβολίζουμε τη γωνία που σχηματίζουν τα τμήματα της τεθλασμένης γραμμής με τον οριζόντιο άξονα. Θεωρούμε την ευθεία $\varepsilon_\kappa : x = \dfrac{\kappa}{n} \neq R$.



Διάγραμμα 13. *Το πρόβλημα του Newton για μια τεθλασμένη γραμμή με n σημεία*

Συνάδοντας τα προηγούμενα, αν περιστραφεί η τεθλασμένη γραμμή γύρω από τον κατακόρυφο άξονα, στο στερεό εκ περιστροφής που δημιουργείται ασκείται πίεση, καθώς κινείται μέσα σε αραιό μέσο ίση σε αυτή την περίπτωση με:

$$F = k\left\{\frac{1}{n^2}\cos^2\phi_0 + \left[\left(\frac{2}{n}\right)^2 - \left(\frac{1}{n}\right)^2\right]\cos^2\phi_1 + \ldots + \left[\left(\frac{N}{n}\right)^2 - \left(\frac{N-1}{n}\right)^2\right]\cos^2\phi_{N-1}\right\} \Rightarrow$$

$$F = \frac{k}{n^2}\left[\cos^2\phi_0 + 3\cos^2\phi_1 + \ldots + (2N-1)\cos^2\phi_{N-1}\right] \tag{2.1}$$

όπου και σε αυτό το σημείο $k = 2\pi\rho\upsilon^2$: σταθερό, $R = \dfrac{N}{n}$ και

$$\cos\phi_\kappa = \frac{1}{n\sqrt{\dfrac{1}{n^2} + \left(y_{\kappa+1} - y_\kappa\right)^2}}, \tag{2.2}$$

Για να ελαχιστοποιήσουμε σε αυτή την περίπτωση τη δύναμη F, αρκεί να ελαχιστοποιηθεί για όλα τα πιθανά $(y_1, y_2, ..., y_{N-1})$ που δημιουργούνται, όπου $0 \le y_1 \le y_2 \le ... \le y_{N-1} \le H$.

Έστω ότι $(y'_1, ..., y'_{N-1})$ είναι οι τεταγμένες των κορυφών της τεθλασμένης αυτής για την οποία η αντίσταση F ελαχιστοποιείται. Θεωρούμε την παρακάτω συνάρτηση, που δημιουργείται από τους (*κ-1*) και *κ* όρους της συνάρτησης F, όπου υποθέτουμε ότι όλες οι κορυφές είναι σταθερές εκτός της *κ,* ενώ με *y* συμβολίζεται η τεταγμένη της κορυφής της.

$$h_\kappa(y) = k\left\{\left[\left(\frac{\kappa}{n}\right)^2 - \left(\frac{\kappa-1}{n}\right)^2\right]\cos^2\phi_{\kappa-1} + \left[\left(\frac{\kappa+1}{n}\right)^2 - \left(\frac{\kappa}{n}\right)^2\right]\cos^2\phi_\kappa\right\} \Rightarrow$$

$$h_\kappa(y) = k\left(\frac{2\kappa-1}{n^2}\cos^2\phi_{\kappa-1} + \frac{2\kappa+1}{n^2}\cos^2\phi_\kappa\right) \Rightarrow$$

$$H_\kappa(y) = \frac{1}{4}\left[\frac{2\kappa-1}{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(y - y'_{\kappa-1}\right)^2} + \frac{2\kappa+1}{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(y'_{\kappa+1} - y\right)^2}\right],$$

όπου $y'_{\kappa-1} \le y \le y'_{\kappa+1}$

Με τον ίδιο τρόπο, όπως και στο προηγούμενο απλούστερο πρόβλημα ελαχιστοποίησης, προσπαθώντας να ελαχιστοποιήσουμε την παραπάνω συνάρτηση θεωρούμε έναν αριθμό $\delta_\kappa > 0$, τέτοιον ώστε αν $y'_{\kappa+1} - y'_{\kappa-1} \le \delta_\kappa$, τότε το ελάχιστο επιτυγχάνεται στο $y'_{\kappa.}$ Αντίθετα, αν $y'_{\kappa+1} - y'_{\kappa-1} > \delta_\kappa$, τότε ισχύει η ισότητα,

$$\left(\kappa - \frac{1}{2}\right)\tan\phi_{k-1}\cos\phi^4{}_{\kappa-1} = \left(\kappa + \frac{1}{2}\right)\tan\phi_\kappa\cos\phi^4{}_\kappa$$

Από όσα αναλύθηκαν προηγουμένως συμπεραίνουμε τα εξής. Ενώ αρχικά η γραμμή, η οποία ενώνει τις $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, ...$ στα σημεία $(0,0), \left(\frac{1}{n}, y'_1\right), \left(\frac{2}{n}, y'_2\right), ..., (R, H)$, συμπίπτει με τον οριζόντιο άξονα καθώς $y'_1 = y'_2 = ... = y'_m = 0$ για *m* σημεία. Έπειτα ανέρχεται ακολουθώντας την παραπάνω σχέση. Μάλιστα, η τιμή της γωνίας ϕ_{m+1}

βρίσκεται από την ισότητα $\left(m-\frac{1}{2}\right)\tan\phi_m \cos\phi^4{}_m = \left(m+\frac{1}{2}\right)\tan\phi_{m+1}\cos\phi^4{}_{m+1}$, η τιμή της γωνίας ϕ_{m+2}, από την $\left(m+\frac{1}{2}\right)\tan\phi_{m+1}\cos\phi^4{}_{m+1} = \left(m+\frac{2}{3}\right)\tan\phi_{m+2}\cos\phi^4{}_{m+2}$ και ομοίως των υπολοίπων.

▲

2.5.5 Διατύπωση ως πρόβλημα λογισμού μεταβολών

Η συνολική δύναμη F που ασκείται στο στερεό με τη μορφή αντίστασης, όπως περιγράφεται στην (2.1) μπορεί να γραφεί ως:

$$F = 2k\left[\sum_{\kappa=1}^{N-1}\frac{\kappa-\frac{1}{2}}{n}\frac{1}{1+\left(\frac{\Delta y_\kappa}{\Delta x}\right)^2}\Delta x\right],$$

όπου $k = 2\pi\rho\upsilon^2$, $\Delta x = \frac{1}{n}$ και $\Delta y_\kappa = y_{\kappa+1} - y_\kappa$

Όμως ως γνωστό, $\frac{\Delta y_\kappa}{\Delta x} \approx f'(x_\kappa)$, και καθώς το N τείνει στο άπειρο, το παραπάνω άθροισμα είναι ουσιαστικά το ολοκλήρωμα:

$$F = 2k\int_0^R \frac{x}{1+\left(f'(x)\right)^2}dx$$

Όσο το N μεγαλώνει, τόσο η τεθλασμένη γραμμή που ενώνει τις ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots$ στα σημεία $(0,0), \left(\frac{1}{n}, y_1\right), \left(\frac{2}{n}, y_2\right), \ldots, (R, H)$ τείνει στην ελάχιστη καμπύλη που αποτελεί τη λύση στο πρόβλημα του Newton.

2.6. Συμπέρασμα

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάστηκε η απαρχή του βραχυστόχρονου προβλήματος, το οποίο έχει τις ρίζες του στα αρχαία χρόνια. Περιγράφηκε το ιστορικό πλαίσιο των μαθηματικών της μετέπειτα εποχής. Ειδικότερα παρουσιάστηκαν τα προβλήματα των Galileo Galilei και Fermat, αλλά και αναπτύχθηκαν τα προβλήματα ελαχιστοποίησης αντίστασης του μεταγενέστερου Newton.

Το πιο σημαντικό που συνάδει από τα προβλήματα που αναπτύξαμε παραπάνω ήταν ότι προέκυψε μία σειρά προβλημάτων που αφορούσαν ένα εντελώς νέο έως τότε πεδίο. Οι τεχνικές που αναπτύχθηκαν βοήθησαν αργότερα τον Johann Bernoulli να διατυπώσει αλλά και να επιλύσει το βραχυστόχρονο πρόβλημα, το οποίο και έθεσε τις βάσεις για την ανάπτυξη των ανώτερων θεωριών του Lagrange που λίγο ως πολύ ισχύουν και σήμερα.

3. ΤΟ ΒΡΑΧΥΣΤΟΧΡΟΝΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ

3.1. Ορισμός

Το βραχυστόχρονο πρόβλημα είναι το πρόβλημα εύρεσης της καμπύλης η οποία ενώνει δύο σημεία σε κατακόρυφο επίπεδο, κατά μήκος της οποίας αφήνεται να κυλά ένα σώμα χωρίς τριβές υπό την επίδραση της βαρύτητάς του στο μικρότερο δυνατό χρόνο.

Το βραχυστόχρονο πρόβλημα τέθηκε πρώτη φορά από τον Galileo το 1638. Όμως το συμπέρασμά του ότι η καμπύλη αυτή είναι το κυκλικό τόξο, αποδείχτηκε αργότερα ότι ήταν λανθασμένη. Αν και δε βασιζόταν σε μεθόδους του λογισμού μεταβολών, ενέπνευσε πολλούς αργότερα να ασχοληθούν με τον τομέα αυτό.

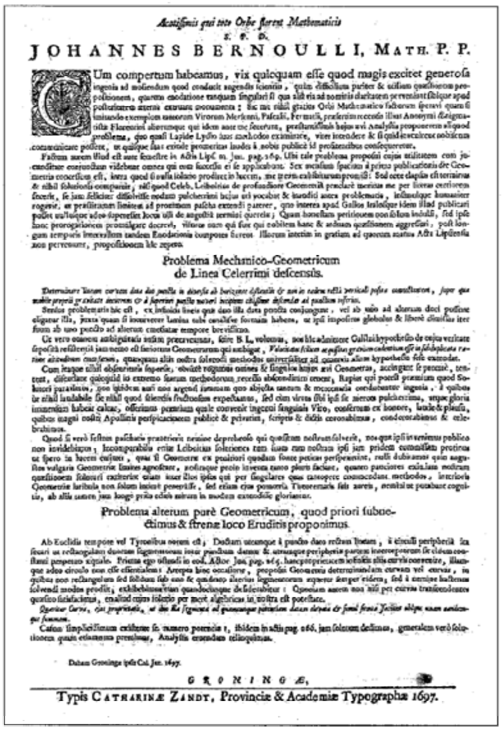
3.2. Ο Johann Bernoulli και το πρόβλημα

3.2.1 <u>Δημοσίευση</u>

Η μεγαλύτερη ίσως επιρροή του φαίνεται στο γνωστό ως βραχυστόχρονο πρόβλημα που ο Johann Bernoulli δημοσίευσε τον Ιούνιο του 1696 στο επιστημονικό περιοδικό Acta Eruditorum. Μάλιστα έθεσε το πρόβλημα ως πρόκληση για τους τότε μαθηματικούς ως εξής.

«Πρόσκληση σε όλους τους μαθηματικούς να λύσουν ένα νέο πρόβλημα: Εάν σε ένα κάθετο επίπεδο δίδονται δύο σημεία Α και Β, προσδιορίστε την τροχιά ΑΓΒ που θα ακολουθήσει ένα κινούμενο σημείο Γ, το οποίο ξεκινώντας από το σημείο Α και κινούμενο από την επίδραση της βαρύτητάς του φτάνει στο σημείο Β στο συντομότερο δυνατό χρόνο. Για όσους ενδιαφέρονται για τέτοια θέματα και δέχονται αυτή την πρόσκληση, είναι καλό να γνωρίζουν ότι το παραπάνω πρόβλημα δεν είναι μόνο καθαρά θεωρητικό, αλλά έχει και πρακτική χρησιμότητα. Μάλιστα, αν και ίσως είναι δύσκολο να το πιστέψουμε, είναι ιδιαίτερα χρήσιμο και σε άλλα επιστημονικά πεδία πέραν

της μηχανικής. Προς αποφυγήν παρερμηνειών, τονίζεται ότι η ευθεία γραμμή είναι φυσικά η γραμμή της μικρότερης απόστασης από το Α στο Β, όμως δεν είναι και αυτή που διανύεται στο συντομότερο χρόνο. Παρόλα αυτά, η καμπύλη ΑΓΒ, την οποία θα σας παρουσιάσω ως το τέλος του χρόνου αν κανείς ως τότε δεν έχει βρει τη λύση, είναι πολύ γνωστή ανάμεσα στους γεωμέτρες» (Sussmann, H. J., Willems, J. C., 1997).



Acutissimis qui toto Orbe florent Mathematicis
S. P. D.
JOHANNES BERNOULLI, MATH. P. P.

Cum compertum habeamus, vix quicquam esse quod magis excitet generosa

Problema Mechanico-Geometricum de Linea Celerrimi descensus.

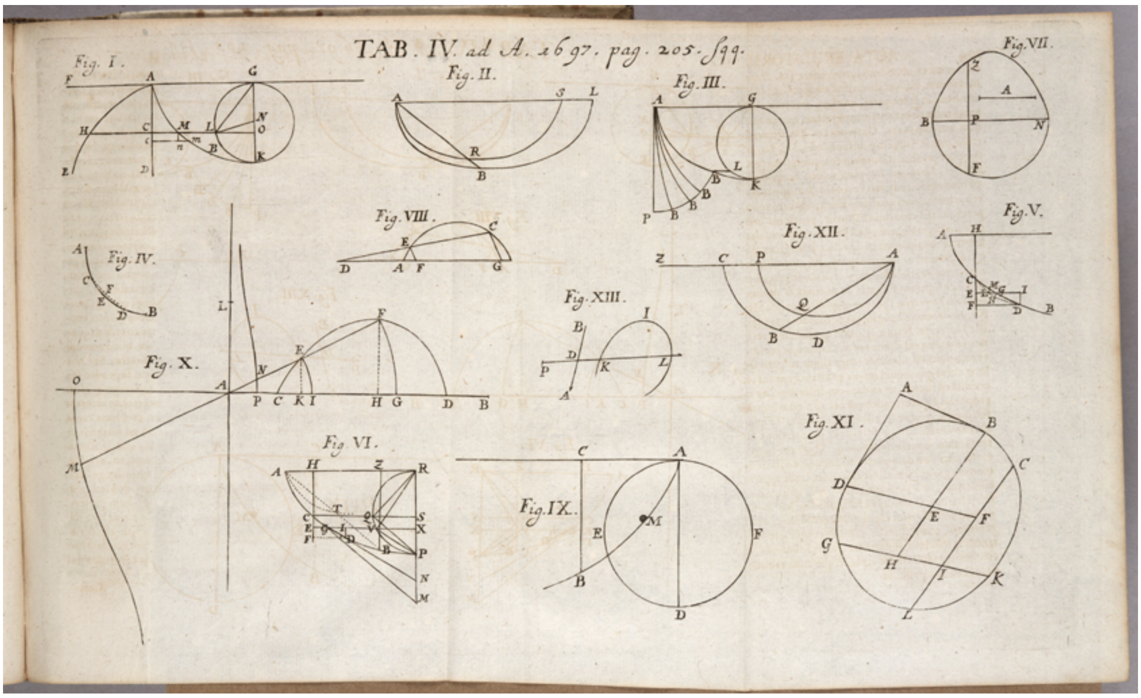
Problema alterum purè Geometricum, quod priori subnectimus & strenæ loco Eruditis proponimus.

GRONINGÆ,
Typis CATHARINÆ ZANDT, Provinciæ & Academiæ Typographæ 1697.

Εικόνα 6. *Ο Johann Bernoulli και η ανακοίνωσή του στο Acta Eruditorum*

Ως το τέλος του 1696 που ήταν η αρχική προθεσμία, αλλά και ως τον Ιανουάριο του επομένου έτους δεν είχε εμφανιστεί κάποια λύση. Τότε ο Johann Bernoulli έδωσε παράταση αλλά και κάποιες διευκρινίσεις σχετικές με το πρόβλημα. Η νέα προθεσμία που έθεσε ήταν για το Πάσχα του 1697, αναφέροντας ότι αν και πάλι κανείς δεν έλυνε το πρόβλημα, θα παρουσίαζε τόσο τη δική του όσο και τη λύση που του είχε στείλει ο Leibniz. Όπως έγινε γνωστό, ο Johann Bernoulli γνωστοποίησε το πρόβλημα στον Leibniz στις 9 Ιουνίου του 1696 και έλαβε τη λύση από τον τελευταίο στις 16 Ιουνίου της ίδιας χρονιάς. Μάλιστα, ο Leibniz ήταν αυτός που πρότεινε να δοθεί παράταση ώστε και άλλοι μαθηματικοί εκτός Γερμανίας, που δεν είχαν τόσο εύκολα πρόσβαση στο Acta Eruditorum να προλάβουν να ασχοληθούν με τη λύση του. Ταυτόχρονα, του πρότεινε την ονομασία «ταχυστόπτωτο», όμως ο Bernoulli προτίμησε να διατηρήσει την ονομασία «βραχυστόχρονο».

Πέραν του Leibniz, τελικά πολλοί μαθηματικοί ανταποκρίθηκαν στην πρόσκληση του Bernoulli. Στο Acta Eruditorum του 1697 δημοσιεύτηκε μαζί με τη λύση του Johann Bernoulli αυτή του αδερφού του Jacob, καθώς και μέρος της λύσης του Leibniz με σχόλιο βάση του οποίου ο Leibniz δεν ήθελε να παρουσιάσει ολόκληρη τη λύση του καθώς ήταν παρόμοια με αυτές των αδερφών Bernoulli. Επίσης, στις 24 Φεβρουαρίου 1697 παρουσιάστηκε στη Royal Society μία ανώνυμη λύση, της οποίας όμως το συγγραφέα αντιλήφθηκε ο Bernoulli στο πρόσωπο του Newton. Μάλιστα, χρησιμοποίησε τη φράση «μπορείς να ξεχωρίσεις το λιοντάρι από τα νύχια του».



Εικόνα 7. *Ο Πίνακας 4 από την πρωτότυπη δημοσίευση του Bernoulli στο Acta Eruditorium 1697*

Στην παραπάνω εικόνα παρουσιάζονται τα σχήματα από την πρωτότυπη δημοσίευση. Σε αυτήν, τα διαγράμματα I «Cycloidem», II «Brachystochrona» και III «Quœritur in plano verticali - Curve Synchrona PB.» αφορούν τη λύση από τον Johann Bernoulli. Τα διαγράμματα IV, V, VI «isochronam illam Hugenianm», VII «Funiculariam» και VIII «Tschirnbausium» αφορούν τη λύση του Jacob Bernoulli. Τα διαγράμματα IX και X αφορούν τη λύση του De L' Hospital. Το διάγραμμα XI έχει τίτλο «Descartes Curvarum» υπό μία ενότητα με γενικά θεωρήματα «Universalia Theoremata Eruendi». Τέλος τα διαγράμματα XII και XIII αφορούν την ανώνυμη λύση που δόθηκε στο πρόβλημα από τον Newton.

3.2.2 Βιογραφία

Ο Johann Bernoulli γεννήθηκε στη Βασιλεία της Ελβετίας στις 27 Ιουλίου του 1667. Ήταν το δέκατο παιδί της οικογένειας Bernoulli, που όπως και τα περισσότερα μέλη της έτσι και αυτός ασχολήθηκε με τα Μαθηματικά. Στην οικογένεια υπήρχαν σε τρεις διαδοχικές γενιές άλλοι οκτώ μαθηματικοί, ενώ τη μεγαλύτερη επιρροή στον Johann άσκησε ο μεγαλύτερος αδερφός του Jacob, με τον οποίο και συνεργάστηκε για πολλά χρόνια αργότερα στο Πανεπιστήμιο της Βασιλείας. Ο Johann Bernoulli είναι κυρίως γνωστός για τη συμβολή του στο Λογισμό Μεταβολών, ενώ υπήρξε και καθηγητής του μεγάλου μαθηματικού Leonhard Euler.

Η οικογένεια του ήταν προτεστάντες, και για αυτό το λόγο εγκατέλειψαν το 1583 τον τόπο καταγωγής τους, το Antwerp του Βελγίου, ώστε να αποφύγουν τις θρησκευτικές διώξεις. Κατέληξαν στη Βασιλεία στις αρχές του 17^{ου} αιώνα. Εκεί, το 1683, παρά τις αντιρρήσεις του πατέρα του που ήθελε τον Johann να αναλάβει την οικογενειακή επιχείρηση, ξεκίνησε να σπουδάζει ιατρική στο Πανεπιστήμιο της Βασιλείας. Με τον καιρό όμως άρχισε να δείχνει την έντονη προτίμησή του στα Μαθηματικά και σιγά-σιγά περνούσε τον περισσότερο χρόνο του μελετώντας μαζί με τον αδερφό του Jacob. Τα δύο αδέρφια επικέντρωσαν μάλιστα τις μελέτες τους στο νέο τότε πεδίο του λογισμού μεταβολών. Υπήρξαν οι πρώτοι ιστορικά μαθηματικοί που κατανόησαν το λογισμό και τον εφάρμοσαν στην επίλυση πολλών προβλημάτων.

Το 1691 ο Johann Bernoulli πήγε στη Γενεύη, όπου δίδαξε διαφορικό λογισμό, ενώ αργότερα επισκέφθηκε το Παρίσι όπου μεταξύ άλλων μαθηματικών γνώρισε και τον de L’ Hospital, με τον οποίο ξεκίνησε μία σειρά μαθημάτων διδάσκοντας του το λογισμό έναντι αδράς αμοιβής. Η διδασκαλία αυτή συνεχίστηκε δι’ αλληλογραφίας και όταν ο Bernoulli επέστρεψε στη Βασιλεία. Εικάζεται μάλιστα ότι υπήρξε μεταξύ τους κάποιου είδους συμφωνία, βάση της οποίας όλα τα προβλήματα και συμπεράσματα στα οποία κατέληγαν κατά τη διάρκεια αυτών των μαθημάτων χρεώνονταν ως προσωπικές ανακαλύψεις του de L’ Hospital. Αυτό έγινε ιδιαίτερα αντιληπτό όταν το 1696 δημοσιεύτηκε το πρώτο βιβλίο λογισμού από τον L’ Hospital με τίτλο «Analyse des infiniment petits pour l' intelligence des lignes courbes» το οποίο περιείχε κυρίως αποτελέσματα από τα μαθήματα με τον Johann Bernoulli, γεγονός που τον ενόχλησε ιδιαίτερα. Όπως αποδείχτηκε το 1922 έπειτα από εξέταση των πρωτοτύπων σημειώσεων, ακόμα και γνωστοί κανόνες του de L' Hospital μπορούν να αποδοθούν στον Bernoulli.

Όσο ήταν στο Παρίσι γνωρίστηκε επίσης με τον Leibniz, με τον οποίο αλληλογράφησαν έκτοτε για χρόνια. Αυτή ήταν και η σημαντικότερη ίσως συνεργασία του Bernoulli. Στο μεταξύ ανάμεσα στα δυο αδέρφια που συνεργάζονταν για χρόνια στο πανεπιστήμιο υπήρχαν ενδείξεις αντιζηλίας.

Ο Johann Bernoulli το 1691 κατάφερε να λύσει το πρόβλημα της αλυσοειδούς καμπύλης (catenary), πρόβλημα που έθεσε ο αδερφός του Jacob. Λίγο αργότερα, το 1694, ασχολήθηκε πρώτος με τη συνάρτηση $y = x^x$, ενώ ταυτόχρονα ασχολήθηκε με τις σειρές, χρησιμοποιώντας την ολοκλήρωση κατά μέρη. Η αναγνώριση δεν άργησε να έρθει, καθώς το 1695 του προτάθηκε να αναλάβει δύο πανεπιστημιακές έδρες. Μάλιστα, η μία από αυτές, η θέση του καθηγητή Μαθηματικών του Πανεπιστημίου του Groningen, του προτάθηκε έπειτα από εισήγηση του Huygens, και την οποία τελικά ο Bernoulli δέχτηκε.

Εκεί, πέρα από τις μαθηματικές ανακαλύψεις, ενεπλάκη σε πολλές διαμάχες. Ήταν ήδη γνωστός για το δύστροπο χαρακτήρα του και πολύ συχνά εξέφραζε τις εκκεντρικές για την εποχή απόψεις του. Αυτό του δημιούργησε προβλήματα με την τοπική κοινότητα των προτεσταντών. Το 1705 η οικογένειά του Johann Bernoulli, μετά από πιέσεις της οικογένειας της συζύγου του, επέστρεψαν πίσω στη Βασιλεία. Εκεί ο Bernoulli σκόπευε να αναλάβει την έδρα του καθηγητή Ελληνικών στο πανεπιστήμιο, καθώς την έδρα του καθηγητή Μαθηματικών κατείχε ο αδερφός του Jacob. Όμως κατά τη διάρκεια του ταξιδιού επιστροφής πληροφορήθηκαν το θάνατο του από φυματίωση. Έτσι, ο Johann Bernoulli ανέλαβε την έδρα των Μαθηματικών στο Πανεπιστήμιο της Βασιλείας, απορρίπτοντας έδρες από άλλα πανεπιστήμια. Το γεγονός του θανάτου του αδερφού του τον οδήγησε να καταβάλει μεγάλη προσπάθεια ώστε να φανεί αντάξιος του στη θέση αυτή.

Παράλληλα, η στενή και χρόνια αλληλογραφία που είχε ο Bernoulli με τον Leibniz τον επηρέασε βαθύτατα, με αποτέλεσμα στη διαμάχη του Leibniz με τον

Newton να υποστηρίξει θερμά τις ιδέες του πρώτου. Μάλιστα, λόγω του πολύ ιδιότροπου χαρακτήρα του προσπάθησε μέσα από τη δουλειά του να υποτιμήσει και να μειώσει την αξία του Newton σε κάθε ευκαιρία. Συγκεκριμένα, έχοντας τις γνώσεις περί λογισμού μεταβολών και χρησιμοποιώντας τες, έλυσε μία σειρά προβλημάτων στα οποία ο Newton είχε αποτύχει να δώσει μέχρι τότε λύση. Τόσο δεν αναγνώριζε την αξία του Newton, που προτίμησε τη θεωρία της περιστροφής των σωμάτων του Descartes έναντι της θεωρίας της βαρύτητας του Newton που τελικά επικράτησε.

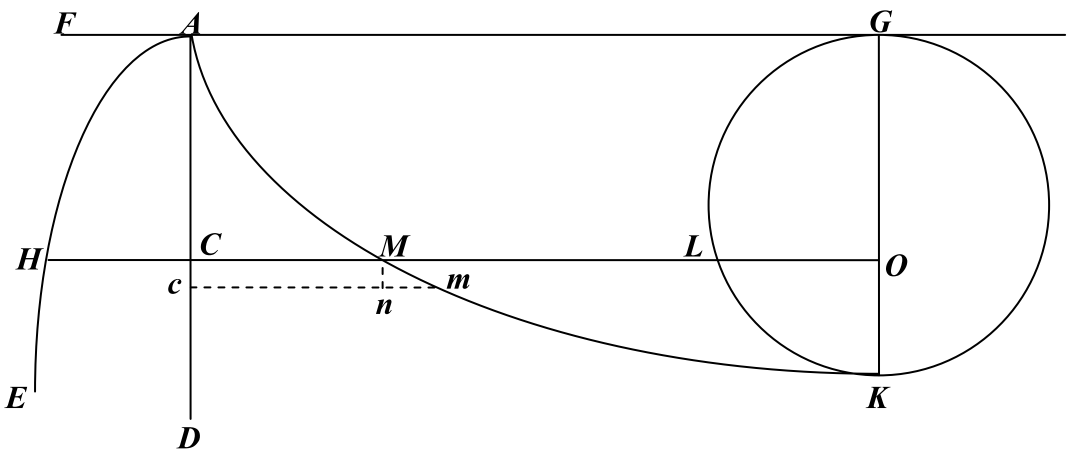
Ο Bernoulli εκτός από τα μαθηματικά ασχολήθηκε και με επιστημονικά πεδία άλλων επιστημών όπως τη μηχανική, και πιο συγκεκριμένα την κινητική ενέργεια την οποία και αναλύει στο έργο του «Hydraulica». Για ακόμα μια φορά όμως αυτό που έκανε ιδιαίτερη αίσθηση ήταν ο ανταγωνιστικός του χαρακτήρας, καθώς εσφαλμένα δήλωσε ως ημερομηνία συγγραφής του έργου αυτού το 1732 με σκοπό να προλάβει τον υιό του Daniel, ο οποίος το 1734 ολοκλήρωσε τη σημαντική και γνωστή εργασία του με τίτλο «Hyrdodynamica», την οποία και εξέδωσε τελικά το 1738.

Ο Johann Bernoulli πέθανε την $1^{η}$ Ιανουαρίου 1748 στη Βασιλεία. Κατά τη διάρκεια της ζωής του έτυχε μεγάλης αναγνώρισης από την επιστημονική κοινότητα της εποχής. Εκλέχθηκε μέλος των ακαδημιών του Παρισιού, του Βερολίνου, του Λονδίνου, της Αγ. Πετρούπολης και της Μπολόνια. Ήταν γνωστός με τον τίτλο «ο Αρχιμήδης της εποχής του».

3.2.3 Η λύση του Bernoulli

Όπως γίνεται αντιληπτό από τα παραπάνω, η περίοδος 1696-1697, οπότε τέθηκε και επιλύθηκε το βραχυστόχρονο πρόβλημα, ήταν καθοριστικής σημασίας, διαδραματίζοντας πολύ σπουδαίο ρόλο στη γέννηση του λογισμού μεταβολών. Στην προσπάθεια του να επιλύσει το βραχυστόχρονο πρόβλημα, ο Johann Bernoulli βασίστηκε στην Αρχή Ελαχίστου Χρόνου του Fermat. Η ονομασία και μόνο του προβλήματος με τη λέξη «βραχυστόχρονο» χαρακτηρίζει τη σπουδαιότητα που απέδιδε ο Bernoulli στην Αρχή αυτή. Αξίζει όμως να σημειωθεί ότι οι μέθοδοι επίλυσης του είναι εντελώς διαφορετικές από αυτές του Newton. Για την ακρίβεια ο Bernoulli αντιμετωπίζει το πρόβλημα τόσο ως πρόβλημα μηχανικής όσο και πρόβλημα που αφορά τα οπτικά.

Σύμφωνα με το Fermat, μια ακτίνα φωτός που κινείται σε διαδοχικά μέσα με διαφορετικούς δείκτες διάθλασης, φτάνει στο σύνορο κάθε μέσου ακολουθώντας πάντα τη διαδρομή ελαχίστου χρόνου. Ακολουθώντας αυτή την τακτική, ο Bernoulli χωρίζει την καμπύλη του βραχυστόχρονου με οριζόντιες γραμμές δημιουργώντας τα διαδοχικά μέσα διάδοσης και εφαρμόζοντας το νόμο του Snell μπορεί να υπολογίζει πόσο θα έχει διαθλασθεί η ακτίνα φωτός. Στο παρακάτω σχήμα η τεταγμένη $CH = t$ της καμπύλης AHE μετρά την ταχύτητα του σώματος που κυλά. Θεωρεί την καμπύλη AMB ως την καμπύλη ελαχίστου χρόνου, $AC = x$, $CM = y$ ενώ παίρνει ένα σημείο c πάνω στην κατακόρυφη *AC*, τέτοιο ώστε $Cc = dx$. Επίσης, ονομάζει *m* το σημείο τομής της οριζόντιας που διέρχεται από το *c* με την καμπύλη AMB και *n* την προβολή του M πάνω στο *cm*. Επομένως, $Mn = Cc = dx$ και $Mm = dz$.



Διάγραμμα 14. *Cycloidem*

Όπως είχε δείξει ο Fermat, τα ημίτονα των γωνιών πρόσπτωσης είναι ανάλογα των ταχυτήτων διάδοσης. Όπως φαίνεται και από το σχήμα το ημίτονο της γωνίας διάθλασης στο M είναι

$$\frac{dy}{dz} = \frac{mn}{Mm}$$

που είναι ανάλογο της ταχύτητας διάδοσης του φωτός σε αυτό το σημείο, δηλαδή ως προς την $CH = t$. Με άλλα λόγια μπορεί να γραφτεί,

$$\frac{dy}{dz} = \frac{t}{a}$$, όπου α ο συντελεστής αναλογίας.

Επειδή, $dz^2 = dx^2 + dy^2$ η παραπάνω σχέση γράφεται $\frac{dy}{dx} = \frac{t}{\sqrt{a^2 - t^2}}$ από την οποία αρκεί να βρεθεί η σχέση ώστε να αντικατασταθεί το t με x.

Στο σημείο αυτό ο Bernoulli αναφέρει:

«Με μια μόνο προσπάθεια κατάφερα να επιλύσω δυο ουσιώδη προβλήματα, ένα μηχανικό και ένα οπτικό και κατάφερα πολύ περισσότερα από όσα θα μπορούσα να ζητήσω από άλλους: Έδειξα ότι τα δύο αυτά προβλήματα, που προκύπτουν από δύο εντελώς διαφορετικά πεδία των μαθηματικών, έχουν, παρ' όλα αυτά, την ίδια φύση. Τώρα θεωρούμε μια ιδιαίτερη περίπτωση, πάνω στη συνήθη υπόθεση, που για πρώτη φορά τέθηκε από το Galileo, σύμφωνα με την οποία οι ταχύτητες βαρέων σωμάτων σε πτώση είναι μεταξύ τους ίσες με τις τετραγωνικές ρίζες των υψών που έχουν διανυθεί. Υπό την υπόθεση αυτή, η καμπύλη AHE είναι η παραβολή $t \cdot t = a \cdot x$ *και* $t = (a \cdot x)^{1/2}$. *Αντικαθιστώντας το τελευταίο στη γενική εξίσωση καταλήγουμε στην* $dy = dx\sqrt{\frac{x}{a-x}}$ *από την οποία συμπεραίνω ότι το βραχυστόχρονο δεν είναι παρά το γνωστό κυκλοειδές. Πράγματι, αν ο κύκλος GLK διαμέτρου α, κυλήσει κατά μήκος της AG ξεκινώντας από το σημείο A, τότε στο σημείο K θα έχει σχηματίσει ένα κυκλοειδές που περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση* $dy = dx\sqrt{\frac{x}{a-x}}$, *όπου AC βρίσκεται επί τον άξονα x και CM επί τον άξονα y.» (Goldstein, H. H., 1977)*

Ο Johann Bernoulli, αφού κατέληξε στην παραπάνω διαφορική εξίσωση, προσπαθεί να δείξει ότι αυτή ουσιαστικά οδηγεί στο κυκλοειδές. Έπειτα, προχωρά γράφοντας

$$dy = dx\sqrt{\frac{x}{a-x}} = \frac{xdx}{\sqrt{ax - x^2}} = \frac{1}{2}\frac{adx}{\sqrt{ax - x^2}} - \frac{1}{2}\frac{adx - 2dx}{\sqrt{ax - x^2}}$$

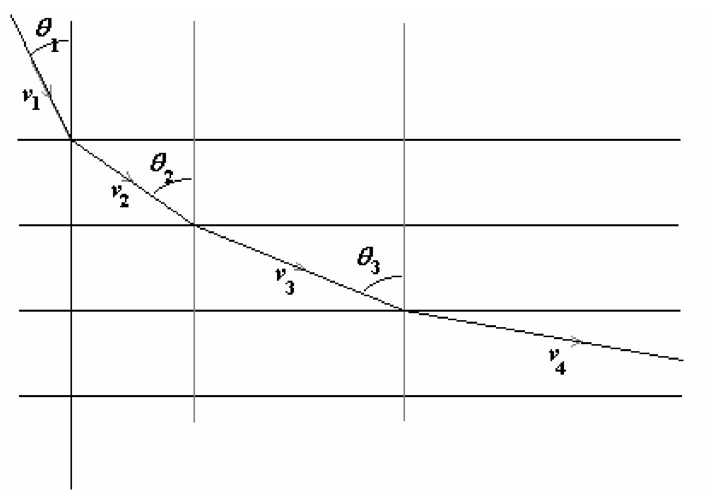
και βάση των παραπάνω συνεχίζει λέγοντας:

«Όμως $(adx - 2xdx) : 2(ax - x \cdot x)^{1/2}$ *είναι η διαφορική ποσότητα, το ολοκλήρωμα της οποίας είναι το* $(ax - x \cdot x)^{1/2}$ *ή αλλιώς το LO και* $adx : 2(ax - x \cdot x)^{1/2}$ *είναι το διαφορικό της καμπύλης GL. Ολοκληρώνοντας την εξίσωση* $dy = dx\sqrt{\dfrac{x}{a - x}}$ *προκύπτει* $y = CM = arcGL - LO$ *και επομένως* $MO = CO - arcGL + LO$. *Όμως επειδή* $CO - arcGL = arcLK$ *(γιατί το CO είναι το ημικύκλιο GLK), συνεπάγεται ότι* $MO = arcLK + LO$ *ή αλλιώς* $ML = arcLK$ *που συνεπάγεται ότι το KMA είναι ένα κυκλοειδές.» (Goldstein, H. H., 1977)*

Ένας απλούστερος τρόπος λύσης που βασίζεται σε αυτή του Bernoulli είναι ο εξής. Θεωρούμε μια ακτίνα φωτός που ταξιδεύει σε διαφανή μέσα, όπου το δεύτερο είναι πυκνότερο από το πρώτο. Αν Α το σημείο που ξεκινά το φως να διαδίδεται στο πρώτο μέσο, Β το σημείο που καταλήγει στο δεύτερο μέσο, θ_1 η γωνία πρόσπτωσης, θ_2 η γωνία ανάκλασης, v_1 η ταχύτητα διάδοσης στο πρώτο μέσο και v_2 στο δεύτερο, τότε βάσει της Αρχής Ελαχίστου Χρόνου ισχύει:

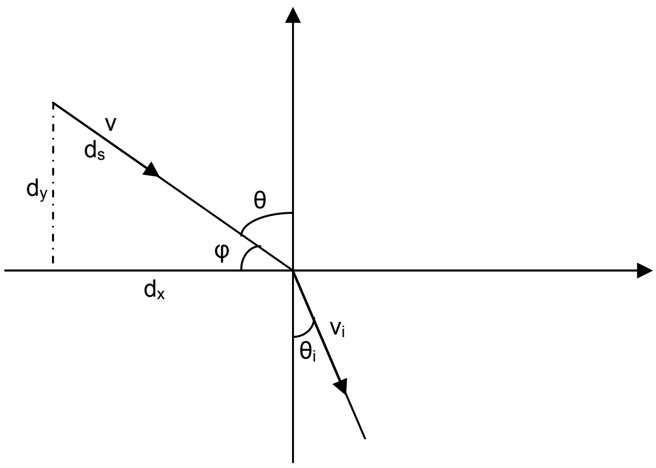
$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{v_1}{v_2} : \text{σταθερά.}$$

Με αυτό τον τρόπο, θεωρώντας την ακτίνα φωτός να διαδίδεται σε διαδοχικά μέσα όπου κάθε φορά το κατώτερο είναι πιο αραιό από το ανώτερο του, η ταχύτητα διάδοσης αυξάνεται διαγράφοντας την εξής πορεία:



Διάγραμμα 15. *Διάδοση ακτίνας φωτός σε διαδοχικά μέσα*

όπου κάθε φορά, $\dfrac{\sin\theta_1}{v_1} = \dfrac{\sin\theta_2}{v_2} = \dots$, σταθερά. Με άλλα λόγια, $\dfrac{\sin\theta}{v} = \dfrac{\sin\theta_i}{v_i}$: σταθερό σε κάθε μέσο διάδοσης. Όμως, $\sin\theta = \dfrac{dx}{ds}$, όπου $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$.



Διάγραμμα 16. *Διάθλαση ακτίνας φωτός*

Επίσης, από το παραπάνω διάγραμμα προκύπτει ότι:

$$\sin\theta = \cos\phi = \frac{1}{\sec\phi} = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\phi}}$$

Όμως, $\tan\phi = \dfrac{dy}{dx}$, άρα $\sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}}$.

Επομένως, από τα παραπάνω προκύπτει ότι $\dfrac{\sin\theta}{v} = \dfrac{1}{v\sqrt{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}}$: σταθερό.

Από την Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας ισχύει η σχέση $\frac{1}{2}mv^2 = mgy(x)$, όπου m η μάζα του σώματος, v η ταχύτητά του και g=9.81. Επομένως, $v = \sqrt{2gy}$. Αντικαθιστώντας το v, η παραπάνω σχέση γράφεται

$$\frac{1}{\sqrt{2gy}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = c \text{, όπου c: σταθερό } \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\sqrt{y}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = c\sqrt{2g} \Rightarrow$$

$$y\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] = \frac{1}{2c^2 g} \Rightarrow$$

$$y\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] = k \text{, όπου } k = \frac{1}{2c^2 g} \text{ σταθερό.}$$

Συμβολίζοντας $y' = \dfrac{dy}{dx}$ προκύπτει,

$$y\left[1+y'^2\right] = k \Rightarrow$$

$$y' = \sqrt{\frac{k-y}{y}}. \tag{3.1}$$

Καταλήγουμε στην παραπάνω διαφορική εξίσωση, όπως και ο Bernoulli. Στο σημείο αυτό, ο Bernoulli ισχυρίστηκε ότι η λύση της παριστάνει ένα κυκλοειδές με παραμετρικές εξισώσεις $x = \frac{r}{2}(\theta - \sin\theta) + c'$ και $y = \frac{r}{2}(1-\cos\theta)$, το οποίο αποτελεί τη λύση στο βραχυστόχρονο πρόβλημα. Προφανώς ήταν γνωστό την εποχή εκείνη ότι η λύση της διαφορικής εξίσωσης (3.1) παριστάνεται από τις παραπάνω παραμετρικές εξισώσεις, καθώς η φράση που χρησιμοποίησε καταλήγοντας σε αυτήν ήταν:

«…από την οποία συμπεραίνουμε ότι το βραχυστόχρονο πρόβλημα είναι το γνωστό κυκλοειδές» (Sussmann, H. J., Willems, J. C., 1997).

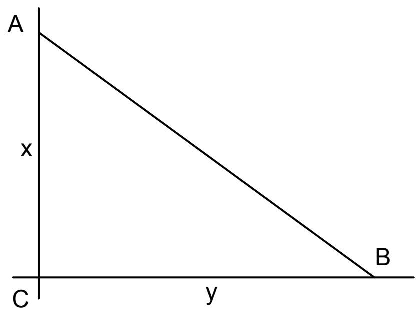
Το βραχυστόχρονο πρόβλημα ήταν πάρα πολύ σημαντικό για το λογισμό μεταβολών καθώς ο Johann Bernoulli μέσα από την πρόσκληση που απεύθυνε στους συναδέλφους του για την επίλυση του προβλήματος οδήγησε την τότε μαθηματική σκέψη στη δημιουργία ενός εντελώς νέου πεδίου. Έθεσε τις βάσεις για τη δημιουργία του λογισμού μεταβολών και μάλιστα η λύση που ο ίδιος πρότεινε, αργότερα αποτέλεσε αντικείμενο μελέτης πολλών μαθηματικών, όπως ο Κωνσταντίνος Καραθεοδωρή, που κατέληξε σε μια γενίκευση της το 1908.

3.3. Άλλες λύσεις

3.3.1 Η λύση του Leibniz

Ο Gottfried Wilhelm Leibniz ήταν ένας Γερμανός φιλόσοφος και μαθηματικός που γεννήθηκε στις 1 Ιουλίου του 1646 στη Λειψία της Γερμανίας. Ανακάλυψε τον απειροστικό λογισμό, ενώ τα σύμβολα που αυτός πρώτος εισήγαγε, χρησιμοποιούνται μέχρι και σήμερα στο λογισμό μεταβολών. Επίσης, ανακάλυψε το δυαδικό σύστημα που αποτέλεσε θεμέλιο λίθο της πληροφορικής. Στη φιλοσοφία ακολούθησε το ρεύμα του οπτιμισμού, καθώς υποστήριζε ότι το σύμπαν στο οποίο ζούμε είναι το καλύτερο δυνατό που ο Θεός θα μπορούσε να έχει δημιουργήσει. Μαζί με τους Descartes και Spinoza, θεωρείται από τους σημαντικότερους ορθολογιστές του 17 αιώνα, ενώ η φιλοσοφική του θεώρηση ανατρέχει στη σχολαστική παράδοση, όπου η λογική διαδραματίζει πολύ σημαντικό ρόλο. Συνέβαλε σημαντικά στη φυσική και τεχνολογία, ενώ ασχολήθηκε με έννοιες που αργότερα αναπτύχθηκαν στη βιολογία, την ιατρική, τη γεωλογία, τη θεωρία πιθανοτήτων, την ψυχολογία, τη γλωσσολογία και την πληροφορική. Επιπρόσθετα, έγραψε για την πολιτική και το δίκαιο, την ηθική, τη θεολογία, την ιστορία και τη φιλοσοφία. Η συνεισφορά του στα παραπάνω αντικείμενα διαπιστώθηκε μέσα από χιλιάδες επιστολές που βρέθηκαν, από αδημοσίευτα χειρόγραφα και από διάφορες δημοσιεύσεις σε περιοδικά της εποχής, με αποτέλεσμα να μην υπάρχει σήμερα ολοκληρωμένη έκδοση έργου του Leibniz.

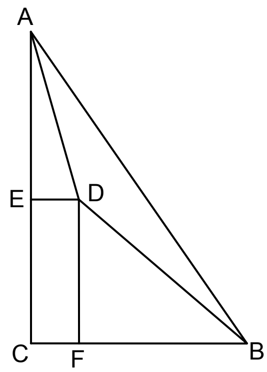
Όπως αναφέραμε, ο Leibniz απάντησε στην πρόσκληση του Johann Bernoulli έχοντας βρει τη λύση μια εβδομάδα αργότερα. Αρχικά θεώρησε τον κατακόρυφο άξονα ως τον x-άξονα και τον οριζόντιο ως τον y-άξονα.



Διάγραμμα 17. *Η αρχή των αξόνων που χρησιμοποίησε ο Leibniz*

Χωρίς να αποδείξει το πώς, διατύπωσε τη σχέση $ds = \frac{k}{\sqrt{x}} dy$. Επειδή, όμως $ds^2 = dy^2 + dx^2$,προκύπτει η διαφορική εξίσωση $\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{x}{2b - x}}$, με $2b = k^2$, η λύση της οποίας είναι το κυκλοειδές. Αξίζει όμως να σημειωθεί ότι πουθενά ο ίδιος δεν ανέφερε ότι αυτή η διαφορική εξίσωση παριστάνει ένα κυκλοειδές.

Ο Leibniz ξεκινά βρίσκοντας το χρόνο κύλισης στο τμήμα AB, βάση της ελεύθερης πτώσης του Galileo.



Διάγραμμα 18. *Ελαχιστοποίηση χρόνου κύλισης στο μονοπάτι AD και DB*

Είναι $AB = \frac{1}{2} g t_{AB}^2 \sin ABC = \frac{1}{2} g t_{AB}^2 \frac{AC}{AB}$ και $AC = \frac{1}{2} g t_{AC}^2$, όπου t_{AC} ο χρόνος κύλισης στον κατακόρυφο άξονα. Από τα παραπάνω, με αντικατάσταση προκύπτει

$$t_{AB} = \frac{AB}{AC} t_{AC} \qquad (3.2)$$

Έπειτα θεωρούμε τα σημεία E,D όπου το D δεν μεταβάλλεται έτσι ώστε η DE να είναι παράλληλη προς την BC και το μονοπάτι ADB να είναι ελαχίστου χρόνου. Επομένως,

$$m \equiv t_{\mathrm{AE}} = \sqrt{\frac{\mathrm{A}E}{\mathrm{A}C}} t_{AC} \text{ και } n \equiv t_{EC} = \left(1 - \sqrt{\frac{\mathrm{A}E}{\mathrm{A}C}}\right) t_{AC}$$

Από την (3.2) προκύπτει επίσης ότι

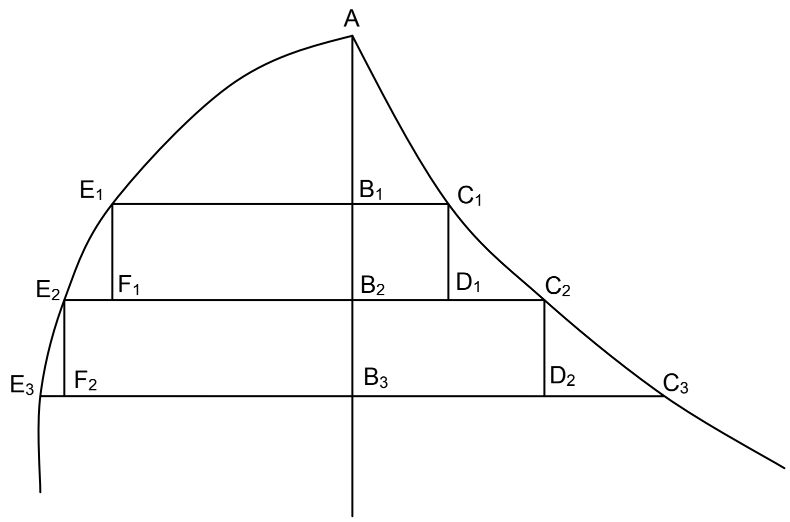
$$t_{AD} = \frac{AD}{AE} t_{AE} = \frac{AD}{AE} m \text{ και } t_{DB} = \frac{DB}{EC} t_{EC} = \frac{DB}{EC} n\,.$$

Με αυτό τον τρόπο μπορούμε να υπολογίσουμε το συνολικό χρόνο κύλισης $t_{ADB} = t_{AD} + t_{DB}$ και να τον ελαχιστοποιήσουμε υπό τους περιορισμούς AE: σταθερό και EC: σταθερό.

Ισχύει $AD^2 = AE^2 + ED^2$ και $DB^2 = EC^2 + ED^2 = EC^2 + \left(BC^2 - ED^2\right)$. Επομένως έχουμε,

$$m \cdot \frac{ED}{AD \cdot AE} = n \frac{FB}{DB \cdot EC}\,.$$

Ο Leibniz εφαρμόζοντας τη σχέση αυτή στο παρακάτω σχήμα κατέληξε στη σχέση $t_{C_1C_2} \cdot \frac{D_1C_2}{\left(C_1C_2\right)^2} = t_{C_2C_3} \cdot \frac{D_2C_3}{\left(C_2C_3\right)^2}$.



Διάγραμμα 19. *Η ταχυστόπτωτη καμπύλη του Leibniz*

Θεώρησε AC την καμπύλη του ταχυστόπτωτου, AE μια παραβολή με κορυφή στο A και AB κατακόρυφο άξονα όπου ένα σώμα πέφτει κάθετα από το A και φτάνει στο B_i σε χρόνο B_iE_i, με τα B_i να βρίσκονται πολύ κοντά μεταξύ τους και σε ίσες αποστάσεις.

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (3.2) κατέληξε στις σχέσεις

$$t_{C_1C_2} = \frac{C_1C_2}{C_1D_1} t_{C_1D_1} \text{ και } t_{C_2C_3} = \frac{C_2C_3}{C_2D_2} t_{C_2D_2}$$

από τις οποίες σε συνδυασμό με την ισότητα $C_1D_1 = C_2D_2$ προκύπτει ότι

$$t_{C_1C_2} \cdot \frac{D_1C_2}{(C_1C_2)^2} = t_{C_2C_3} \cdot \frac{D_2C_3}{(C_2C_3)^2} \Rightarrow$$

$$\frac{C_1C_2}{C_1D_1} t_{C_1D_1} \cdot \frac{D_1C_2}{(C_1C_2)^2} = \frac{C_2C_3}{C_2D_2} t_{C_2D_2} \cdot \frac{D_2C_3}{(C_2C_3)^2} \Rightarrow$$

$$t_{C_1D_1} \cdot \frac{D_1C_2}{C_1C_2} = t_{C_2D_2} \cdot \frac{D_2C_3}{C_2C_3}$$

Όμως επειδή ο συνολικός χρόνος που κάνει ένα σώμα για να κυλήσει από το B_1 στο B_2, δηλαδή από το C_1 στο D_1, είναι $B_2E_2 - B_1E_1 = B_2E_2 - B_2F_2 = F_1E_2$, άρα

$$F_1E_2 \cdot \frac{D_1C_2}{C_1C_2} = F_2E_3 \cdot \frac{D_2C_3}{C_2C_3} \tag{3.3}$$

Επειδή θεωρήσαμε τις αποστάσεις $B_1B_2, B_2B_3, \ldots$ πολύ μικρές και ίσες μεταξύ τους και καθώς $\frac{ds}{dt} = g \cdot t \Rightarrow ds = g \cdot tdt$, δηλαδή για παράδειγμα $B_1B_2 = gt_{AB_1}t_{B_1B_2}$, άρα

$$1 = \frac{B_1B_2}{B_2B_3} = \frac{B_1E_1}{B_2E_2} \cdot \frac{F_1E_2}{F_2E_3} = \frac{\sqrt{AB_1}}{\sqrt{AB_2}} \frac{F_1E_2}{F_2E_3}.$$

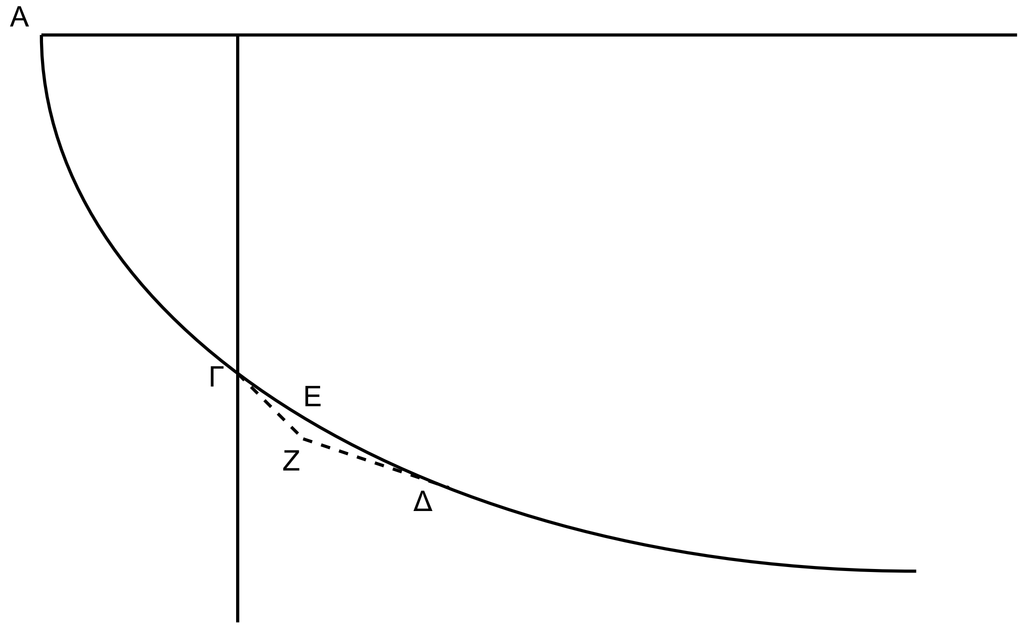
Από τη σχέση (3.3) και επειδή $F_1E_2 = t_{B_1B_2}$, $F_2E_3 = t_{B_2B_3}$ ο Leibniz κατέληξε στη σχέση $\frac{D_1C_2}{D_2C_3} = \frac{C_1C_2}{C_2C_3} \cdot \frac{\sqrt{AB_2}}{\sqrt{AB_1}}$ ή αλλιώς $dy = k \cdot \sqrt{x}dc$, όπου $ds^2 = dx^2 + dy^2$. Από την τελευταία συνεπάγεται η σχέση $ds = \frac{k}{\sqrt{x}}dy$ την οποία είχε αρχικά διατυπώσει.

3.3.2 Η λύση του Jacob Bernoulli

Ο Jacob Bernoulli γεννήθηκε στις 27 Δεκεμβρίου 1654 και υπήρξε από τους πιο υποσχόμενους μαθηματικούς της οικογένειας Bernoulli. Ακολουθώντας την επιθυμία του πατέρα του σπούδασε θεολογία, όμως ταυτόχρονα και ενάντια στις αντιδράσεις της οικογενείας του σπούδασε μαθηματικά και αστρονομία. Έπειτα από ταξίδια που έκανε στην Ευρώπη όπου και γνώρισε σημαντικούς μαθηματικούς, έγινε γνώστης των θεωριών που επικρατούσαν τότε γύρω από τα μαθηματικά. Μέσω της αλληλογραφίας που διατηρούσε με τον Leibniz ασχολήθηκε με το λογισμό μεταβολών, ενώ αργότερα συνεργάστηκε με τον αδερφό του Johann σε διάφορα πεδία των μαθηματικών και δημοσίευσαν πολλές εργασίες τους. Το 1682, αφού επέστρεψε στη Βασιλεία, ίδρυσε ένα σχολείο για τα μαθηματικά και τις επιστήμες, ενώ το 1687 ανέλαβε την έδρα του καθηγητή μαθηματικών στο τοπικό πανεπιστήμιο. Το έργο του, για το οποίο έγινε κυρίως γνωστός ήταν το Ars Conjectandi, το οποίο δημοσιεύτηκε οχτώ χρόνια μετά το θάνατό του και αποτελεί πολύ σπουδαίο έργο επάνω στη Θεωρία Πιθανοτήτων. Σε αυτό περιλαμβάνεται η εφαρμογή της Θεωρίας Πιθανοτήτων στα τυχερά παιχνίδια ενώ και η εισαγωγή του θεωρήματος που είναι γνωστό ως ο «Νομός των Μεγάλων Αριθμών». Ο

Bernoulli διατήρησε την έδρα του στο Πανεπιστήμιο της Βασιλείας μέχρι το θάνατό του, στις 15 Αυγούστου 1705, την οποία μετά ανέλαβε ο αδερφός του Johann.

Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, η λύση που έδωσε ο Johann Bernoulli επηρέασε πολλούς μαθηματικούς στη δημιουργία του λογισμού μεταβολών, αν και ο ίδιος δεν εφάρμοσε τέτοιες τεχνικές στη λύση του. Όμως, αυτό που έκανε, ήταν να καταλήξει μέσα από μια μέθοδο επίλυσης σε μια διαφορική εξίσωση της οποίας γνώριζε ότι οι παραμετρικές εξισώσεις είναι αυτές του κυκλοειδούς. Με αυτό τον τρόπο δήλωσε ότι κατάφερε να επιλύσει το βραχυστόχρονο πρόβλημα. Το ίδιο έκανε κι ο αδερφός του Jacob Bernoulli όταν παρουσίασε και αυτός τη λύση του.

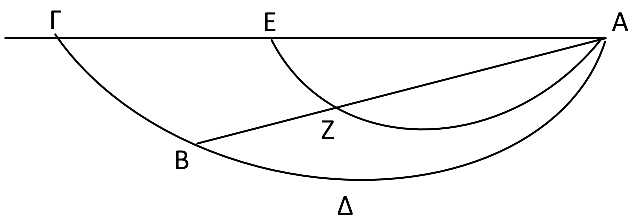


Διάγραμμα 20. *Η βραχυστόχρονη καμπύλη του Jacob Bernoulli*

Αρχικά, ο Jacob Bernoulli, θεώρησε τη ζητούμενη καμπύλη AB. Η συγκεκριμένη καμπύλη είναι αυτή που ενώνει τα σημεία A και B ελαχιστοποιώντας το χρόνο κύλισης. Όμοια ισχύει το ίδιο για κάθε υποκαμπύλη ΓΕΔ που ενώνει δυο τυχαία σημεία Γ και Δ, όπου Γ, Ε και Δ τρία διαδοχικά τυχαία σημεία σε πολύ κοντινή απόσταση μεταξύ τους. Ταυτόχρονα, θεώρησε και μια νέα υποκαμπύλη ΓΖΔ που ενώνει τα Γ και Δ. Αν η ΓΖΔ είναι η καμπύλη όπου η κύλιση από το Γ στο Δ γίνεται στο συντομότερο χρόνο, τότε ο χρόνος κύλισης στην καμπύλη ΑΓΖΔΒ είναι συντομότερος από ότι στην ΑΓΕΔΒ. Αυτό όμως, είναι κάτι που έρχεται σε αντίθεση με το γεγονός ότι εξαρχής θεώρησε την ΑΕΔΒ ως τη ζητούμενη καμπύλη ελαχίστου χρόνου. Επίσης, θεώρησε ότι $ds/dt = \sqrt{y}$, όπου $\sqrt{y}$ η στιγμιαία ταχύτητα που έχουν τα σώματα καθώς κινούνται οποιοδήποτε σημείο της καμπύλης. Βάση των παραπάνω κατέληξε και αυτός ότι η λύση στο βραχυστόχρονο πρόβλημα είναι το κυκλοειδές.

3.3.3 Η λύση του Newton

Ο Newton έστειλε τη λύση του στο βραχυστόχρονο πρόβλημα στις 30 Ιανουαρίου του 1697 στο φίλο του Sir Charles Montagu, γραμματέα της Royal Society. Ο Newton αναζήτησε την καμπύλη ΑΔΒ κατά μήκος της οποίας ένα σώμα θα κυλήσει υπό την επίδραση της βαρύτητάς του, από το σημείο Α στο Β στο συντομότερο δυνατό χρόνο.



Διάγραμμα 21. *Η βραχυστόχρονη καμπύλη του Newton*

Αυτό που έκανε ήταν να από ένα δοσμένο σημείο να σχηματίσει την οριζόντια γραμμή ΑΕΓ και ένα κυκλοειδές ΑΖΕ που να τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ στο σημείο Ζ. Επίσης, σχεδίασε ένα ακόμα κυκλοειδές ΑΒΓ του οποίου η βάση και ύψος ήταν αντίστοιχα, όπως το ΑΒ προς το ΑΖ. Αυτό το δεύτερο κυκλοειδές διέρχεται από το σημείο Β και, σύμφωνα με τον Newton, αποτελεί την καμπύλη στην οποία ένα σώμα που αφήνεται να κυλήσει ελεύθερο υπό την επίδραση της βαρύτητας του θα φτάσει στο τέλος της καμπύλης στο συντομότερο χρόνο.

Η παραπάνω καμπύλη είναι όντως η καμπύλη ελαχίστου χρόνου. Ωστόσο, δεν αναφέρεται πουθενά ο τρόπος με τον οποίο ο Newton οδηγήθηκε σε αυτή τη λύση.

3.4. Η συστηματοποίηση του προβλήματος από τους Euler και Lagrange

3.4.1 Euler

Ο Leonhard Euler γεννήθηκε στη Βασιλεία της Ελβετίας στις 15 Απριλίου του 1707. Στην ηλικία των δεκατριών ετών ξεκίνησε να φοιτά στο πανεπιστήμιο της Βασιλείας όπου και υπήρξε μαθητής του Johann Bernoulli. Μάλιστα παρακολουθούσε ιδιαίτερα μαθήματα μια φορά την εβδομάδα από τον ίδιο τον Bernoulli με αποτέλεσμα να επηρεαστεί πάρα πολύ από αυτόν άλλα και να εντρυφήσει σε βάθος στις τεχνικές και τα προβλήματα που μελετούσε τότε ο Bernoulli. Το 1732 και 1736 ασχολήθηκε εκτενώς με την επίλυση ισοπεριμετρικών προβλημάτων και το 1744 εξέδωσε το σπουδαίο έργο του «Methodus Inveniendi Lineas Curvas Maximi Minimive Proprietate Gaudentes sive Solutio Problematis Isoperimetrici Latissimo Sensu Accepti» όπου συστηματοποίησε τις ως τότε μεθόδους επίλυσης ισοπεριμετρικών προβλημάτων σε συγκεκριμένη μέθοδο.

Επιπλέον, αντικατέστησε τον πολύ δημοφιλή τότε όρο *τέχνη της ανακάλυψης* με το επιστημονικά ορθότερο, *μέθοδος της ανακάλυψης*. Εμπνευσμένος από την Αρχή Ελαχίστου Χρόνου του Fermat, ο Euler, διατύπωσε το Αξίωμα Ελαχίστης Δράσης, σύμφωνα με το οποίο, η φύση επιλέγει πάντα τον πιο αποδοτικό ενεργειακά τρόπο για την πραγματοποίηση μιας δραστηριότητας, παρ' όλο που η αρχή αυτή αποδίδεται συχνά στον Maupertuis.

3.4.2 Lagrange

Ο Joseph Louis Lagrange γεννήθηκε στις 25 Ιανουαρίου 1736 στο Τορίνο. Αν και Ιταλός έζησε κυρίως στην Πρωσία και μετέπειτα στη Γαλλία. Συνέβαλε καθοριστικά σε πολλούς τομείς των μαθηματικών με κυριότερους την ανάλυση και τη θεωρία αριθμών. Το 1766 ανέλαβε υπεύθυνος του τμήματος Μαθηματικών της Prussian Academy of Sciences του Βερολίνου έπειτα από συστάσεις των Euler και D' Alembert, όπου και παρέμεινε για πάνω από είκοσι χρόνια. Εκεί παρήγαγε πολύ σημαντικό έργο ενώ κέρδισε και σημαντικά βραβεία από τη Γαλλική Ακαδημία των Επιστημών. Ο Lagrange, αν και Ιταλός, είχε Γάλλους προγόνους και ανάλογα τον θεωρούν Γάλλο ή Ιταλό επιστήμονα. Κατάφερε να επιβιώσει της Γαλλικής Επανάστασης και διορίστηκε ως ο πρώτος καθηγητής ανάλυσης στην Πολυτεχνική Σχολή που λειτούργησε για πρώτη φορά το 1794. Μάλιστα, ο ίδιος ο Ναπολέων τον τίμησε ονομάζοντας τον Κόμη στη Λεγεώνα της Τιμής.

Στις 12 Αυγούστου 1755, ο δεκαεννιάχρονος τότε Lagrange, έστειλε μια επιστολή στον Euler, όπου μεταξύ άλλων περιείχε σε παράρτημα λεπτομέρειες σχετικά με μια πρωτοποριακή για την εποχή ιδέα του. Εισήγαγε μια μέθοδο με την οποία απέκλειε τη χρήση γεωμετρικών τεχνικών στις μεθόδους του Euler, ενώ η όλη διαδικασία πλέον περιοριζόταν στη χρήση μεθόδων ανάλυσης. Αυτή η ιδέα του Lagrange εισήγαγε μια νέα εποχή στο Λογισμό Μεταβολών σε τέτοιο βαθμό, ώστε όταν ο Euler ήρθε σε επαφή με το έργο του Lagrange απέρριψε όλες τις παλιές τεχνικές του υποστηρίζοντας και υιοθετώντας αυτές του Lagrange. Μάλιστα, ήταν τότε που προς τιμήν του Lagrange έδωσε στις μεθόδους του τη γενική ονομασία Λογισμός Μεταβολών, ενώ παραδέχτηκε σε φίλους και συναδέλφους ότι στο συμπέρασμα που ο ίδιος κατέληξε με τη βοήθεια της γεωμετρίας, ο Lagrange κατέφερε να καταλήξει πολύ πιο εύκολα και μεθοδικά με τη χρήση μόνο της ανάλυσης.

Από το 1755 ως το 1760, ο Lagrange εργάστηκε πάνω σε αυτές τις ιδέες του τις οποίες δημοσίευσε αργότερα στο «Miscellanea Taurimensia». Στην εργασία του «Essai d’ une nouvelle méthode pour determiner les maxima et les minima des formules intégrales indéfinies»(1760-1761), ανακάλυψε τη *μέθοδο των μεταβλητών* καθώς και το σύμβολο δ. Αργότερα όμως, αφού μελέτησε και εξέλιξε ακόμα περισσότερο τις μεθόδους του, εξέδωσε το 1788, το σημαντικότερό του έργο με τίτλο «Mechanique Analytique». Σε αυτό το έργο ασχολήθηκε με προβλήματα με μεταβλητά σημεία τερματισμού με εφαρμογή τόσο στο βραχυστόχρονο πρόβλημα, όσο και σε άλλα. Καθοριστικής σημασίας θεωρήθηκε στο σημείο αυτό ο Κανόνας των Πολλαπλασιαστών που πολύ αναλυτικά διατύπωσε. Αυτός ο κανόνας μετατράπηκε στο βασικό εργαλείο του στο Mechanique Analytique, όπου και περιεχόταν η θεωρία του για το λογισμό μεταβολών που προερχόταν από την Αρχή Ελαχίστης Δράσης των εξισώσεων κίνησης.

Καταλήγοντας, γίνεται αντιληπτό ότι αν και το ενδιαφέρον του Euler για το λογισμό μεταβολών επικεντρώθηκε σε εφαρμογές, ο Lagrange έδωσε ιδιαίτερη σημασία σε αλγοριθμικές πτυχές της ανάλυσης. Το σύνολο, μάλιστα, της δουλειάς του χαρακτηρίζεται από πλήθος πρωτοποριακών ανακαλύψεων καθώς και από τον ουσιαστικό και εντυπωσιακό τρόπο με τον οποίο αφομοίωσε το ως τότε υλικό.

3.4.3 Το πρόβλημα

Οι ανάγκες που οι οποίες κάθε φορά οδηγούσαν σε ισοπεριμετρικά προβλήματα ήταν διαφορετικές, όμως τα περισσότερα από αυτά κατέληγαν σε μια γενική κατηγορία προβλημάτων όπου αναζητούνται ακρότατα συναρτήσεων της μορφής:

$$J(y) = \int_{x_0}^{x_1} L(x, y, y')dx, \text{ όπου } y(x_0) = y_0 ,\ y(x_1) = y_1 ,\ x_0 < x_1$$

Την περίοδο εκείνη η ύπαρξη και μοναδικότητα των λύσεων τέτοιας μορφής προβλημάτων ήταν προφανής καθώς συνήθως μπορούσε να εξακριβωθεί εμπειρικά. Όμως, ο Euler κατέληξε στο συμπέρασμα ότι η απαραίτητη προϋπόθεση για την επίλυση του παραπάνω συναρτησιακού είναι να ικανοποιείται η διαφορική εξίσωση

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right) = 0 ,$$

η οποία, μετά τη συμβολή του Lagrange στις μεθόδους του Euler όπως αναφέρθηκε, είναι πλέον γνωστή ως *διαφορική εξίσωση του Euler-Lagrange*.

Οι Euler και Lagrange στηρίχθηκαν πάνω στις μεθόδους των Johann και James Bernoulli και τις εξέλιξαν με τέτοιο τρόπο δημιουργώντας ένα νέο τομέα στα μαθηματικά. Για το λόγο αυτό θα αποδώσουμε το βραχυστόχρονο πρόβλημα με σύγχρονη μαθηματική ορολογία, επιλύοντας το με τη βοήθεια της διαφορικής εξίσωσης Euler-Lagrange ώστε να γίνει αντιληπτή η διαφορά στις μεθόδους.

Ας είναι T ο συνολικός χρόνος που χρειάζεται ένα σώμα για να κυλήσει όταν αφήνεται ελεύθερο, υπό την επίδραση της βαρύτητας του, από ένα σημείο A σε ένα σημείο B. O χρόνος αυτός πρέπει να ελαχιστοποιηθεί.

Από την Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας, η ταχύτητα με την οποία ένα σώμα μάζας m κινείται κατά μήκος μιας καμπύλης y είναι $v = \sqrt{2gy}$. Επίσης, $v = \frac{ds}{dt}$ και $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$. Άρα,

$$\frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{dt}=\sqrt{2gy}\Rightarrow dt=\frac{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{\sqrt{2gy}}dx$$

Επομένως,

$$T=\int_0^T dt\Rightarrow$$

$$T=\int_0^T\frac{1}{\sqrt{2gy}}\sqrt{1+y'(x)^2}\,dx$$

με αποτέλεσμα ο χρόνος που πρέπει να ελαχιστοποιηθεί δίνεται από το συναρτησιακό:

$$T=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^T\frac{\sqrt{1+y'(x)^2}}{\sqrt{y(x)}}dx\,.$$

Συνεπώς, καταλήγουμε στην παρακάτω διατύπωση του βραχυστόχρονου προβλήματος.

Πρόβλημα 10. *Να βρεθεί η καμπύλη* $y(x)$ *που να ελαχιστοποιεί το συναρτησιακό*

$$T=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^T\frac{\sqrt{1+y'(x)^2}}{\sqrt{y(x)}}dx\,.$$

Απόδειξη

Για να ελαχιστοποιήσουμε το παραπάνω συναρτησιακό αρκεί να ελαχιστοποιήσουμε την συνάρτηση

$$f=\sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}$$

Τα ελάχιστα αυτά δίνονται από τη λύση της διαφορικής εξίσωσης Euler-Lagrange

$$\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)=0$$

Επειδή $\frac{\partial f}{\partial x}=0$, η παραπάνω διαφορική εξίσωση γίνεται

$$f - y'\frac{\partial f}{\partial y'} = c : \text{σταθερό.}$$

Αλλά, $\dfrac{\partial f}{\partial y'} = \dfrac{y'(x)}{\sqrt{2gy(x)}\sqrt{1+(y'(x))^2}}$. Άρα με αντικατάσταση προκύπτει:

$$\sqrt{\frac{1+y'(x)^2}{2gy(x)}} - y'(x)\frac{y'(x)}{\sqrt{2gy(x)}\sqrt{1+y'(x)^2}} = c \Rightarrow$$

$$\frac{1+y'(x)^2 - y'(x)^2}{\sqrt{2gy(x)}\sqrt{1+y'(x)^2}} = c \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\sqrt{2gy(x)}\sqrt{1+y'(x)^2}} = c \Rightarrow$$

$$y(x)\left(1+y'(x)^2\right) = \frac{1}{2gc^2} \Rightarrow$$

$$y\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right) = k$$

Η παραπάνω διαφορική εξίσωση είναι η ίδια στην οποία κατέληξε ο Bernoulli λύνοντας το βραχυστόχρονο πρόβλημα και η λύση της οποίας μας δίνει το κυκλοειδές. Από την επίλυση της, θα καταλήξουμε στις παραμετρικές εξισώσεις της καμπύλης για την οποία ελαχιστοποιείται ο χρόνος Τ.

$$y\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right) = k \Rightarrow$$

$$dx = \sqrt{\frac{y}{k-y}}dy \Rightarrow$$

$$x = \int \sqrt{\frac{y}{k-y}}dy$$

Θέτουμε $u^2 = \dfrac{y}{k-y}$, επομένως $dy = \dfrac{2ku}{\left(1+u^2\right)^2}du$ και άρα, $x = \int \dfrac{2ku^2}{\left(1+u^2\right)^2}du$. Στη συνέχεια αντικαθιστούμε όπου $u = \tan\phi$ και $du = \sec^2\phi$, επομένως προκύπτει

$$x=\int\frac{2ku^2}{\left(1+u^2\right)^2}du=2k\int\frac{\tan^2\phi\sec^2\phi}{\left(\sec^2\phi\right)^2}d\phi=2k\int\frac{\tan^2\phi}{\sec^2\phi}d\phi=2k\int\sin^2\phi d\phi=k\int\left(1-\cos 2\phi\right)d\phi\Rightarrow$$

$$x=\frac{k}{2}\left(2\phi-\sin 2\phi\right)+c_1 \tag{3.2}$$

Επειδή:

$$u^2=\frac{y}{k-y}\Rightarrow y=\frac{ku^2}{1+u^2}\Rightarrow$$

$$y=\frac{k\tan^2\phi}{1+\tan^2\phi}\Rightarrow$$

$$y=\frac{k\tan^2\phi}{\sec^2\phi}\Rightarrow$$

$$y=k\sin^2\phi\Rightarrow$$

$$y=\frac{k}{2}\left(1-\cos 2\phi\right) \tag{3.3}$$

Από τις σχέσεις (3.2), (3.3) που καταλήξαμε, αντικαθιστώντας όπου $\frac{k}{2}$=r και 2φ=θ προκύπτουν οι παραμετρικές εξισώσεις:

$$x=r\left(\theta-\sin\theta\right)+c_1$$

$$y=r\left(1-\cos\theta\right)$$

που αποτελούν τις παραμετρικές εξισώσεις του κυκλοειδούς.

▲

3.5. Συμπέρασμα

Εικόνα 8. *Το μνημείο Brachistochroon τιμής ένεκεν Bernoulli στο Groningen της Ολλανδίας*

Από τα παραπάνω γίνεται σαφές πόσο πολύ συνέβαλε η επίλυση του βραχυστόχρονου προβλήματος στη γέννηση του Λογισμού Μεταβολών. Οι λύσεις που παρουσιάστηκαν επηρέασαν σημαντικά τους μεταγενέστερους μαθηματικούς. Διαπιστώθηκε πόσο αναγκαία ήταν η εύρεση ενός τρόπου λύσης που θα συστηματοποιούσε τα παραπάνω προβλήματα ώστε να επιλύονται πιο μεθοδικά, καθώς μέχρι τότε οι αποδείξεις στηρίζονταν σε γεωμετρικές κυρίως μεθόδους. Συγκεκριμένα, οι Euler και Lagrange, αφού μελέτησαν το βραχυστόχρονο, όπως και άλλα ισοπεριμετρικά προβλήματα, εισήγαγαν μεθόδους ανάλυσης που αποτέλεσαν ορόσημο στη δημιουργία του λογισμού Μεταβολών.

4. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

4.1. Σύνοψη

Το βραχυστόχρονο πρόβλημα έχει τις ρίζες του στα αρχαία χρόνια με το πρόβλημα της Διδούς. Αλλά και τα μετέπειτα προβλήματα των Galileo Galilei, Fermat, και τα προβλήματα ελαχιστοποίησης αντίστασης του Newton συνεισέφεραν ιδιαίτερα, καθώς για την επίλυσή τους αναπτύχθηκαν τεχνικές που αφορούσαν ένα νέο έως τότε πεδίο και βοήθησαν αργότερα τον Johann Bernoulli να διατυπώσει αλλά και να επιλύσει το βραχυστόχρονο πρόβλημα.

Η επίλυση αυτή του βραχυστόχρονου προβλήματος έθεσε τα θεμέλια για το Λογισμό Μεταβολών και επηρέασε την πορεία της επιστήμης των Μαθηματικών, αφού οδήγησε σπουδαίους μαθηματικούς όπως τον Euler και Lagrange να συστηματοποιήσουν τη λύση παρόμοιων προβλημάτων. Αρχικά ο Euler εισήγαγε νέες μεθόδους που οδήγησαν στο λογισμό μεταβολών ενώ ο Lagrange τις εξέλιξε καταλήγοντας στον σύγχρονο απειροστικό λογισμό.

4.2. Περαιτέρω έρευνα

Συμπληρώνοντας τα παραπάνω, αξίζει να σημειωθεί ότι το βραχυστόχρονο πρόβλημα αποτελεί ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης, όμοιο με αυτά που μελετώνται σήμερα στη θεωρία βέλτιστου έλεγχου. Επειδή μεγάλο μέρος του λογισμού μεταβολών ασχολείται με την εύρεση απλούστερων και πιο γενικευμένων κανόνων απαραιτήτων στη βελτιστοποίηση και όπως αναφέραμε η γέννηση του λογισμού μεταβολών σηματοδοτήθηκε από τη διατύπωση του βραχυστόχρονου προβλήματος, άρα το πρόβλημα αυτό σηματοδοτεί τη γέννηση της θεωρίας βέλτιστου έλεγχου.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Babb, J., Currie, J. (2008) *The Brachistochrone Problem: Mathematics for a broad audience via a large context problem*, The Montana Mathematics Enthusiast, **Vol 5 (2 & 3)**, pp. 169-184

Bryson, A. (1996) *Optimal Control – 1950 to 1985*, IEEE Control Systems **Vol 16 (3)**, pp. 26-33

Giaquinda, M., Hildebrandt, S. (1996) *Calculus of Variations II: The Hamiltonian Formalism*, Springer Verlag, Berlin

Goldstine, H. H. (1977) A History of the Calculus of Variations from the 17th through the 19th Century. In: *Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences*, by Toomer, G. J. (ed), Springer Verlag, Berlin

Jurdjevic, V. (1997) *Geometric Control Theory*, Cambridge University Press, Cambridge

Kreyszig, E. (1994) *On the Calculus of Variations and Its Major Influences on the Mathematics of the First Half of Our Century*, The American Mathematical Monthly, **Vol 101 (7)**, pp. 674-678

Newton, I. (1687) *Principia – The Mathematical Principles of Natural Philosophy*, Daniel Adee New York

Tikhomirov, V. M. (1990) *Stories about Maxima and Minima*, American Mathematical Society

O’Connor, J. J, Robertson, E. F. (1996) *Pierre de Fermat*, University of St. Andrews School of Mathematics and Statistics web site, http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Fermat.html

O'Connor, J. J, Robertson, E. F. (1998) *Johann Bernoulli*, University of St. Andrews School of Mathematics and Statistics web site, http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Bernoulli_Johann.html

O'Connor, J. J, Robertson, E. F. (2000) *Sir Isaac Newton*, University of St. Andrews School of Mathematics and Statistics web site, http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Newton.html

Roscoe, D. (2006) *The Calculus of Variations*, Lecture Notes, University of Sheffield Department of Applied Mathematics.

Sussmann, H. J., Willems, J. C. (1997) *300 Years of Optimal Control: From the Brachystochrone to the Maximum Principle*, IEEE Control Systems **17 (3)**, pp. 32-44

Καραμπετάκης, Ν. (2009) *Βέλτιστος Έλεγχος Συστημάτων*, Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη